

1.3 Introducción a la combinatoria

Aprenderemos en esta sección técnicas básicas para contar, aplicadas a diferentes aspectos:

- Contar los elementos de un conjunto, como por ejemplo los elementos de $A \cap B$ o los de $A \times B$, con los principios de la adición, de inclusión-exclusión y de la multiplicación.
- Contar las maneras de seleccionar k objetos de n , con o sin repetición, y considerando el orden o no considerándolo. Es la combinatoria clásica: permutaciones, combinaciones y variaciones.
- Contar las formas en que se pueden repartir objetos en cajas, para lo que emplearemos la combinatoria clásica y también los llamados números de Stirling de segunda especie y los números multinomiales.

Llamamos *cardinal* de un conjunto A al número de elementos que tiene. Lo denotamos por $|A|$.

Trataremos con conjuntos finitos. Formalmente, decimos que un conjunto A tiene n elementos si se puede establecer una biyección entre $\{1, 2, \dots, n\}$ y A .

Principio de la adición

- En términos de conjuntos, el *principio de la adición* dice que si dos conjuntos son disjuntos, es decir, entonces el cardinal de la unión es la suma de los cardinales:

$$|A \cup B| = |A| + |B|, \text{ si } A \cap B = \emptyset.$$

Generalizando: $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n|$ si los conjuntos A_1, \dots, A_n son disjuntos dos a dos.

- Con un enunciado más general: "Si tenemos n cajas y en la caja i hay r_i objetos, en total hay $r_1 + \dots + r_n$ objetos".

Ejemplo 1. Hay tres grupos de alumnos matriculados en una asignatura; uno de 56, otro de 51 y el tercero de 36. Entonces el total de matriculados en la asignatura es $56 + 51 + 36 = 143$.

Ejemplo 2. Hay tres profesores de informática. Uno de ellos tiene cinco libros de programación, otro cuatro y el tercero ocho. Si llamamos n al número de libros de programación diferentes que tienen entre los tres, se cumple que $\max\{5, 4, 8\} \leq n \leq 5 + 4 + 8$, es decir, $8 \leq n \leq 17$.

Principio de las cajas

El principio de la adición nos permite afirmar, en particular, que si tenemos n cajas y en cada caja, como mucho, hay un objeto, en total habrá m objetos, con $m \leq n$. Dando la vuelta al argumento tenemos el *principio de las cajas*: "Si tenemos m objetos repartidos en n cajas y $m > n$, entonces habrá al menos una caja que tenga más de un objeto".

Ejemplo 3. *En un grupo de 13 o más personas seguro que hay, al menos, dos que cumplen años en el mismo mes, según el principio de las cajas: los objetos son las personas y las cajas son los meses.*

El principio de las cajas generalizado dice lo siguiente: "Si tenemos m objetos repartidos en n cajas y $m > r \cdot n$, entonces habrá alguna caja que tenga más de r objetos".

Ejemplo 4. *Este principio nos permite asegurar que en un grupo de más de 60 personas hay al menos seis que cumplen años en el mismo mes.*

Los objetos son las personas, $m > 60$ y las cajas son los meses, $n = 12$. Como $m > 12 \cdot 5$, podemos decir que hay alguna caja con más de cinco objetos, es decir, que hay al menos seis personas que cumplen años en el mismo mes.

Principio de inclusión-exclusión

Este principio cuenta los elementos de una unión de conjuntos, no necesariamente disjuntos. Si hallamos el cardinal de la unión como la suma de los cardinales, los elementos que están en las intersecciones están contados más de una vez.

- Si tenemos dos conjuntos, el cardinal de su unión es:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Es decir, tenemos que restar a la suma de los cardinales el cardinal de la intersección, porque los elementos que están en ella están contados dos veces.

- Con tres conjuntos, la fórmula es esta:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Ahora hemos restado los cardinales de todas las intersecciones de dos de los conjuntos, pero hemos tenido que sumar el cardinal de la intersección de los tres conjuntos, porque los elementos que están en ella estaban contados tres veces pero estaban restados otras tres.

- La fórmula del principio de inclusión-exclusión, para un número cualquiera n de conjuntos, es la siguiente:

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \dots + (-1)^{(n-1)} \alpha_n,$$

donde α_i , $i = 1, \dots, n$ es la suma de los cardinales de todas las intersecciones de i conjuntos de los n .

Ejemplo 5. *En un examen que constaba de dos pruebas, 54 personas aprobaron la primera, 19 la segunda y 12 aprobaron las dos. Para hallar el número de personas que se presentaron, lo hacemos así:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 54 + 19 - 12 = 61.$$

(hemos llamado A y B a los conjuntos de personas que aprobaron la primera y la segunda pruebas, respectivamente)

Ejemplo 6. Vamos a calcular el número de enteros entre 1 y 1000 que son divisibles por 2, por 3 o por 5.

Tenemos que hallar $|A_2 \cup A_3 \cup A_5|$, donde A_2 es el conjunto de los múltiplos de 2 comprendidos entre 1 y 1000, A_3 el de múltiplos de 3 y A_5 el de múltiplos de 5.

Los cardinales son estos (representamos por $[n]$ la parte entera de n):

$|A_2| = \frac{1000}{2} = 500$, $|A_3| = [\frac{1000}{3}] = 333$ y $|A_5| = \frac{1000}{5} = 200$, con lo que $\alpha_1 = 500 + 333 + 200 = 1033$.

$|A_2 \cap A_3| = [\frac{1000}{6}] = 166$ (estos son los múltiplos de 6 que hay entre 1 y 1000); $|A_2 \cap A_5| = \frac{1000}{10} = 100$ (múltiplos de 10) y $|A_3 \cap A_5| = [\frac{1000}{15}] = 66$ (múltiplos de 15). Por tanto, $\alpha_2 = 166 + 100 + 66 = 332$.

Finalmente, $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = [\frac{1000}{30}] = 33 = \alpha_3$.

Entonces $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 1033 - 332 + 33 = 734$. Hay 734 números enteros entre 1 y 1000 que son divisibles por 2, 3 o 5.

Principio de la multiplicación

- En términos de conjuntos, el *principio de la multiplicación* dice que el cardinal de un producto cartesiano de un número finito de conjuntos finitos es el producto de los cardinales de los conjuntos.

Con dos conjuntos: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Generalizando, para n conjuntos: $|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_n|$.

- Podemos enunciar este principio así: "Si una tarea consta de n trabajos, y cada trabajo i se puede realizar de r_i formas diferentes, el trabajo se puede hacer de $r_1 \cdot \dots \cdot r_n$ formas diferentes".

Ejemplo 7. Hay tres grupos de alumnos matriculados en una asignatura; uno de 56, otro de 51 y el tercero de 36. Se elige un alumno de cada grupo, para formar una terna de representantes. El número de ternas diferentes que se pueden hacer viene dado por el principio de la multiplicación: $56 \cdot 51 \cdot 36 = 102\,816$.

Ejemplo 8. Si un restaurante da en su menú cinco primeros platos, tres segundos y seis postres, en total hay $5 \cdot 3 \cdot 6 = 90$ formas diferentes de comer.

Permutaciones ordinarias o sin repetición

Una permutación ordinaria, o sin repetición, de n objetos diferentes es cualquier ordenación que se pueda hacer, de forma que estén todos ellos, y ninguno se repita. Por ejemplo, $cabd$, $dcba$ o $abdc$ son algunas de las permutaciones que se pueden hacer con los elementos a , b , c y d .

El número de estas permutaciones con n objetos viene dado por la fórmula $P_n = n!$. ($n!$ es el *factorial* de n , el producto de los n primeros enteros positivos: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$)

Ejemplo 9. Hay $P_3 = 3! = 6$ permutaciones de tres elementos a , b y c , que son:

$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$.

Ejemplo 10. El número de formas en que se pueden colocar cinco personas en fila de a uno es $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Permutaciones con repetición

Dados n objetos de r tipos diferentes, n_i del tipo i , $i = 1, \dots, r$, llamamos *permutación con repetición* de estos n objetos a cualquier reordenación en la que aparezcan todos ellos.

Su número es $P_n^{n_1, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!}$.

Ejemplo 11. El número de palabras que se pueden formar con las letras de *RECORRER* (tengan o no sentido) es $P_8^{4,2,1,1} = \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 840$. Remarquemos que estamos contando las palabras de ocho letras que tienen cuatro erres, dos es, una o y una ce.

Combinaciones ordinarias o sin repetición; números binomiales

Llamamos combinaciones ordinarias de n elementos (distintos) tomados de k en k a las muestras no ordenadas de k elementos diferentes tomados de los n elementos. Así, dos de estas muestras serán diferentes si alguno de los elementos de una no está el la otra.

Su número viene dado por la fórmula $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Ejemplo 12. Hay $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ combinaciones sin repetición de tamaño dos, con elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$, que son estas:

$ab \quad ac \quad ad \quad bc \quad bd \quad cd$

Ejemplo 13. ¿De cuántas formas se pueden escoger tres personas de un grupo de diez?

No importa el orden en que las escojamos, y no se pueden repetir, con lo que serían combinaciones sin repetición: $C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$.

Los números de la forma $\binom{n}{k}$ se calculan, como hemos visto antes, con el cociente de factoriales $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Tienen sentido cuando n y k son enteros y $0 \leq k \leq n$, teniendo en cuenta que $0! = 1$.

Se leen n sobre k y n es el *índice superior* y k , el *índice inferior*; se llaman *números binomiales* porque aparecen en el desarrollo de la *fórmula del binomio*:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}a^{n-i}b^i,$$

y se pueden ordenar formando lo que se denomina el *triángulo de Pascal*:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ & \dots & & \end{array}$$

y haciendo los cálculos:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ & \dots & & \end{array}$$

Entre las propiedades que tienen los números binomiales, destacaremos estas tres:

- Verifican esta fórmula de recurrencia, válida si $1 \leq r \leq n-1$:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}.$$

En el triángulo, esta fórmula indica que cada número binomial es igual a la suma de los dos que tiene encima.

- La suma de los números binomiales que tienen índice superior n es 2^n :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Es decir, los números de cada fila del triángulo de Pascal suman 2^n :

$$1 = 2^0, \quad 1 + 1 = 2^1, \quad 1 + 2 + 1 = 2^2, \quad 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \quad \dots$$

- Finalmente, señalaremos que la simetría que tienen los números binomiales respecto del eje vertical del triángulo de Pascal se debe a esta identidad:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Combinaciones con repetición

Las combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k son las muestras no ordenadas de k elementos, entre los cuales puede haber repeticiones, elegidos entre los n elementos.

Su número es $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Ejemplo 14. Hay $CR_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$ combinaciones con repetición de dos elementos tomados del conjunto $\{a, b, c, d\}$, que son estas:

$$aa \quad ab \quad ac \quad ad \quad bb \quad bc \quad bd \quad cc \quad cd \quad dd$$

Ejemplo 15. *¿De cuántas maneras se pueden asignar tres tareas a diez personas de forma que cada tarea la realice una persona y que una persona pueda realizar varias tareas?*

En este caso tenemos que escoger tres personas de las diez, sin que el orden sea relevante, porque consideramos las tareas indistinguibles, y pudiendo haber repeticiones. Por tanto, hay $CR_{10,3} = \binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = 220$ maneras de hacer esta asignación.

Este ejemplo lo podemos ver como un problema de contar las formas de repartir n objetos indistinguibles (las tres tareas) en k cajas diferentes (las diez personas). El número de estos repartos viene dado, entonces, por $CR_{n,k}$.

Variaciones ordinarias o sin repetición

Llamamos variaciones sin repetición de n objetos (diferentes) tomados de k en k a las muestras ordenadas de k objetos diferentes escogidos de entre los n .

Dos de estas variaciones serían diferentes si tienen algún elemento diferente o, si tienen los mismos elementos pero en orden diferente.

El número de variaciones ordinarias o sin repetición es $V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$, o, también, $V_{n,k} = \frac{n!}{k!}$.

Ejemplo 16. *Las variaciones sin repetición de dos elementos tomados del conjunto $\{a, b, c, d\}$ son estas:*

$ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bc \quad bd \quad ca \quad cb \quad cd \quad da \quad db \quad dc$

En este caso, $n = 4$, $k = 2$ y $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$. Aparecen, por ejemplo, ab y ba porque, como variaciones, son diferentes; en cambio, en el ejemplo 12 solo aparece ab porque, como combinaciones, ab y ba son la misma.

Ejemplo 17. *¿De cuántas maneras se puede escoger un presidente, un secretario y un vocal entre los diez miembros de una asociación?*

Tenemos que escoger tres personas de diez, teniendo en cuenta que el orden es relevante, y que no puede haber repeticiones.

Por tanto, son variaciones sin repetición: $V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Variaciones con repetición

Llamamos variaciones con repetición de n elementos (distintos) tomados de k en k a las muestras ordenadas de k elementos, entre los que puede haber repeticiones, tomados de los n elementos.

Su número es $VR_{n,k} = n^k$.

Ejemplo 18. *¿Cuántas palabras de seis letras se pueden hacer con el alfabeto $\{a, b, c, d\}$? Tenemos que hacer muestras ordenadas, con repeticiones en este caso, de tamaño seis. Por ejemplo, estas:*

$babcbd \quad dddddd \quad cbdcba \quad aaaddd \quad dddaaa \quad \dots$

En total habría $VR_{4,6} = 4^6 = 4\,096$.

Números de Stirling (de segunda especie); números multinomiales

En esta sección veremos algunos resultados referidos al número de formas de repartir objetos diferentes en cajas, iguales o diferentes.

El número de Stirling (de segunda especie), que se denota por $S(n, k)$, es el número de formas de repartir n objetos diferentes en k cajas iguales, de forma que cada caja tenga algún elemento. Observemos que tiene que ser $1 \leq k \leq n$.

Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos, $S(n, k)$ es el número de particiones de un conjunto de n elementos en k partes.

Es fácil ver que $S(n, 1) = 1$ y $S(n, n) = 1$, para cualquier n . Pero no hay una fórmula explícita para $S(n, k)$. En cambio, tenemos esta fórmula de recurrencia, que permite calcular los números de Stirling para n conociendo los de $n - 1$:

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k),$$

y esta otra fórmula, en forma de sumatorio:

$$S(n, k) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Los números de Stirling se pueden ordenar, de forma similar a los números binomiales, en el *triángulo de Stirling*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & S(1, 1) & & \\ & & & & & & \\ & & S(2, 1) & & S(2, 2) & & \\ & S(3, 1) & & S(3, 2) & & S(3, 3) & \\ & & S(4, 1) & & S(4, 2) & & S(4, 3) & & S(4, 4) \\ & S(5, 1) & & S(5, 2) & & S(5, 3) & & S(5, 4) & & S(5, 5) \end{array}$$

...

y haciendo los cálculos, tenemos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 7 & & 6 & & 1 \\ & & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 \end{array}$$

...

Observemos que, según la fórmula de recurrencia, cada elemento es la suma de los dos que tiene encima, pero el de la derecha multiplicado por k .

Ejemplo 19. ¿De cuántas maneras se pueden repartir cuatro personas en dos grupos?

Si los grupos son indistinguibles y no puede quedar ninguno vacío, tenemos que el reparto se puede hacer de $S(4, 2) = 7$ maneras. Son las siguientes (llamamos A , B , C y D a las personas):

$$A|BCD \quad B|ACD \quad C|ABD \quad D|ABC \quad AB|CD \quad AC|BD \quad AD|BC$$

Seguimos con el problema de contar los repartos de n objetos diferentes en k cajas no vacías. Si ahora las cajas son también diferentes, debemos multiplicar el número de Stirling $S(n, k)$ por $k!$, que son las formas de asignar las k partes a las k cajas.

Ejemplo 20. En el ejemplo anterior, si los grupos fueran diferentes, las maneras de hacer el reparto serían $S(4, 2) \cdot 2! = 7 \cdot 2 = 14$. Observemos que ahora hay dos casos por cada uno de los del ejemplo anterior: por ejemplo, hay que contar como diferentes los casos $A|BCD$ y $BCD|A$.

Por último, consideramos el problema de contar los repartos de n objetos en k cajas $1, 2, \dots, k$, de forma que a cada caja vaya un número de objetos determinado: n_1 objetos a la caja 1, n_2 a la caja 2, ... y n_k a la caja k . Estos números tienen que sumar n y pueden ser cero, es decir, puede haber en este caso cajas vacías.

El número de estos repartos es $\binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Ejemplo 21. En un restaurante hay cinco mesas diferentes. ¿De cuántas formas se pueden colocar diez personas, si en la mesa 1 tiene que haber cuatro personas, en la 2 tres, en la 3 otras tres, y tienen que quedar vacías las mesas 4 y 5?

La respuesta es $\binom{10}{4 \ 3 \ 3 \ 0 \ 0} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 0! \cdot 0!} = 4 \ 200$.

Los números $\binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k}$ son una generalización de los números binomiales; de hecho, si $k = 2$ coinciden: $\binom{n}{n_1 \ n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$. Se llaman *números multinomiales*, porque aparecen en el desarrollo de $(a_1 + \dots + a_k)^n$:

$$(a_1 + \dots + a_k)^n = \sum_{(n_1, \dots, n_k) | n_1 + \dots + n_k = n, \ n_i \geq 0} \binom{n}{n_1 \ \dots \ n_k} a_1^{n_1} \cdot \dots \cdot a_k^{n_k}.$$

Hay tantos sumandos como formas de expresar el número n como suma de k enteros no negativos.

Ejemplo 22. En el desarrollo de $(a+b+c)^2$ aparecen seis sumandos, que son los correspondientes a las ternas $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$:

$$(a+b+c)^2 = \binom{2}{2 \ 0 \ 0} a^2 + \binom{2}{0 \ 2 \ 0} b^2 + \binom{2}{0 \ 0 \ 2} c^2 + \binom{2}{1 \ 1 \ 0} ab + \binom{2}{1 \ 0 \ 1} ac + \binom{2}{0 \ 1 \ 1} bc.$$

Haciendo las operaciones, resulta $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.