1 Préparation

1.1 Calcul du gradient $\nabla f(x,y)$

La fonction de Rosenbrock considérée est

$$f(x,y) \;=\; (1-x)^2 \;+\; a^2\,(x-y^2)^2.$$

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\,(1-x) \;+\; 2\,a^2\,(x-y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4\,a^2\,y\,(x-y^2).$$

Le gradient est donc

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\,(1-x) + 2\,a^2\,(x-y^2) \\ -4\,a^2\,y\,(x-y^2) \end{pmatrix}.$$

1.2 Points critiques : résolution de $\nabla f(x,y)=0$

Le système $\nabla f(x,y)=0$ s'écrit :

$$\begin{cases} -2\,(1-x) + 2\,a^2\,(x-y^2) = 0, \\ -4\,a^2\,y\,(x-y^2) = 0. \end{cases}$$

- **Cas 1 : $y=0$.** De la première équation, on obtient :

  $$-2\,(1-x) + 2\,a^2\,x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x\,(1+a^2) = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1}{1+a^2}.$$

  D'où le point critique $a_1 = \left(\frac{1}{1+a^2},\,0\right)$.

- **Cas 2 : $x-y^2=0$.** Ici, $x=y^2$. On remplace dans la première équation :

  $$-2\,(1-y^2) + 2\,a^2\,(y^2-y^2) = -2\,(1-y^2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad y^2 = 1.$$

  Donc $y=\pm1$ et $x=1$. On obtient deux autres points critiques : $a_2=(1,\,1)$, $\quad a_3=(1,\,-1)$.

1.3 Matrice Hessienne $\mathrm{Hess}_f(x,y)$

En dérivant une seconde fois :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\,(1-x) + 2\,a^2\,(x-y^2) \\ -4\,a^2\,y\,(x-y^2) \end{pmatrix}.$$

on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,(1+a^2), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -4\,a^2\,y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\,a^2\,x + 12\,a^2\,y^2.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,(1+a^2) & -4\,a^2\,y \\ -4\,a^2\,y & -4\,a^2\,x + 12\,a^2\,y^2 \end{pmatrix}.$$

1.4 Nature des points critiques (a_1, a_2, a_3)

Pour chaque point, on évalue Hess_f :

- $a_1 = \left(\frac{1}{1+a^2}, 0\right)$. La hessienne devient alors diagonale avec $2\,(1+a^2)$ et $-4\,a^2\left(\frac{1}{1+a^2}\right)$ sur la diagonale, donc l'une est positive et l'autre négative. $\mathrm{Hess}_f(a_1)$ est par conséquent indéfinie : a_1 est un **point selle**.
- $a_2 = (1,\, 1)$. Dans ce cas,

  $$\mathrm{Hess}_f(a_2) = \begin{pmatrix} 2\,(1+a^2) & -4\,a^2 \\ -4\,a^2 & 8\,a^2 \end{pmatrix}.$$

  Le déterminant est strictement positif et la trace est positive ; les valeurs propres sont toutes positives : a_2 est donc un **minimum local**.
- $a_3 = (1,\, -1)$. On obtient de même

  $$\mathrm{Hess}_f(a_3) = \begin{pmatrix} 2\,(1+a^2) & 4\,a^2 \\ 4\,a^2 & 8\,a^2 \end{pmatrix},$$

  dont le déterminant et la trace sont aussi positifs : on a deux valeurs propres positives ; a_3 est un **minimum local**.

Par ailleurs, on vérifie que $f(a_2) = f(a_3) = 0$, correspondant à la valeur minimale (globale) de la fonction.

Conclusion

On a donc identifié trois points critiques :

$$a_1 = \left(\tfrac{1}{1+a^2}, 0\right) \quad \text{(point selle)}, \quad a_2 = (1, 1), \quad a_3 = (1, -1) \quad \text{(minima)}.$$

Calcul des valeurs propres de la Hessienne $\mathrm{Hess}_f(a_2)$

Soit la matrice Hessienne :

$$\mathrm{Hess}_f(a_2) \;=\; \begin{pmatrix} 2\bigl(1+a^2\bigr) & -4a^2 \\ -4a^2 & 8a^2 \end{pmatrix}.$$

1. Expression de la matrice

$H = \begin{pmatrix} 2(1+a^2) & -4a^2 \\ -4a^2 & 8a^2 \end{pmatrix}.$

2. Trace et déterminant

Trace. La trace de H, notée $\mathrm{tr}(H)$, est la somme des léments diagonaux :

$$\mathrm{tr}(H) \;=\; 2(1+a^2)+8a^2 \;=\; 2+2a^2+8a^2 \;=\; 2+10\,a^2.$$

Déterminant. Le déterminant de H est :

$$\det(H) = \bigl[2(1+a^2)\bigr]\cdot(8a^2) \;-\; (-4a^2)(-4a^2).$$

$$= 16a^2(1+a^2) \;-\; 16a^4 = 16a^2(1+a^2-a^2) = 16a^2.$$

3. Polynôme caractéristique

Les valeurs propres λ sont solutions de $\det(H-\lambda I)=0$. Pour une matrice 2×2, le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^2 - \bigl[\mathrm{tr}(H)\bigr]\,\lambda + \det(H) = 0.$$

Dans notre cas, $\mathrm{tr}(H) = 2+10a^2$ et $\det(H) = 16a^2$. Le polynôme sécrit donc :

$$\lambda^2 - (2+10a^2)\,\lambda + 16a^2 = 0.$$

4. Résolution et forme des valeurs propres

On applique la formule du second degré :

$$\lambda_\pm = \frac{(2+10a^2) \pm \sqrt{(2+10a^2)^2 - 4\,\cdot\,16a^2}}{2}.$$