1 Préparation

1.1 Calcul du gradient $\nabla f(x, y)$

La fonction de Rosenbrock considérée est

$$f(x,y) \;=\; (1-x)^2 \;+\; a^2\,(x-y^2)^2.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\,(1-x) \;+\; 2\,a^2\,(x-y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4\,a^2\,y\,(x-y^2).$$

Le gradient est donc

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\,(1-x) + 2\,a^2\,(x-y^2) \\ -4\,a^2\,y\,(x-y^2) \end{pmatrix}.$$

1.2 Points critiques : résolution de $\nabla f(x, y) = 0$

Le système $\nabla f(x, y) = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} -2\,(1-x) + 2\,a^2\,(x-y^2) = 0, \\ -4\,a^2\,y\,(x-y^2) = 0. \end{cases}$$

- **Cas 1 : $y = 0$.** De la première équation, on obtient :

  $$-2\,(1-x) + 2\,a^2\,x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x\,(1+a^2) = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{1}{1+a^2}.$$

  D'où le point critique $a_1 = \left(\frac{1}{1+a^2},\, 0\right)$.

- **Cas 2 : $x - y^2 = 0$.** Ici, $x = y^2$. On remplace dans la première équation :

  $$-2\,(1-y^2) + 2\,a^2\,(y^2-y^2) = -2\,(1-y^2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad y^2 = 1.$$

  Donc $y = \pm 1$ et $x = 1$. On obtient deux autres points critiques : $a_2 = (1,\,1), \quad a_3 = (1,\,-1)$.

1.3 Matrice Hessienne $\mathrm{Hess}_f(x, y)$

En dérivant une seconde fois :

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2\,(1-x) + 2\,a^2\,(x-y^2) \\ -4\,a^2\,y\,(x-y^2) \end{pmatrix}.$$

on trouve :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,(1+a^2), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4\,a^2\,y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4\,a^2\,x + 12\,a^2\,y^2.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Hess}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,(1+a^2) & -4\,a^2\,y \\ -4\,a^2\,y & -4\,a^2\,x + 12\,a^2\,y^2 \end{pmatrix}.$$

1.4 Nature des points critiques (a_1, a_2, a_3)

Pour chaque point, on évalue Hess_f :

- $a_1 = \left(\frac{1}{1+a^2}, 0\right)$. La hessienne devient alors diagonale avec $2\,(1+a^2)$ et $-4\,a^2\left(\frac{1}{1+a^2}\right)$ sur la diagonale, donc l'une est positive et l'autre négative. $\mathrm{Hess}_f(a_1)$ est par conséquent indéfinie : a_1 est un **point selle**.
- $a_2 = (1,\, 1)$. Dans ce cas,
$$\mathrm{Hess}_f(a_2) = \begin{pmatrix} 2\,(1+a^2) & -4\,a^2 \\ -4\,a^2 & 8\,a^2 \end{pmatrix}.$$
Le déterminant est strictement positif et la trace est positive ; les valeurs propres sont toutes positives : a_2 est donc un **minimum local**.
- $a_3 = (1,\, -1)$. On obtient de même
$$\mathrm{Hess}_f(a_3) = \begin{pmatrix} 2\,(1+a^2) & 4\,a^2 \\ 4\,a^2 & 8\,a^2 \end{pmatrix},$$
dont le déterminant et la trace sont aussi positifs : on a deux valeurs propres positives ; a_3 est un **minimum local**.

Par ailleurs, on vérifie que $f(a_2) = f(a_3) = 0$, correspondant à la valeur minimale (globale) de la fonction.

Conclusion

On a donc identifié trois points critiques :

$$a_1 = \left(\frac{1}{1+a^2}, 0\right) \quad \text{(point selle)}, \quad a_2 = (1,1), \quad a_3 = (1,-1) \quad \text{(minima)}.$$