

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Институт Прикладной Математики и Механики

Кафедра «Гидроаэродинамики, горения и теплообмена»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1

Дисциплина: «Введение в вычислительную гидрогазодинамику»

Тема: «Расчет течения на начальном участке плоского канала»

Студент гр. 3331501/60601

Преподаватель

Коновалов А. Ю.

Засимова М. А.

«__» _____ 2019

Санкт-Петербург

2019

Препроцессорная постановка

Задание: Выполнить расчет стационарного ламинарного течения несжимаемой жидкости на начальном участке плоского канала для разных значений числа Рейнольдса;

Сопоставить расчетные длина начального участка и коэффициент сопротивления развитого течения с результатами аналитического решения.

Исходные данные: Высота канала H , расход Q , свойства жидкости, число Рейнольдса (150, 250, 450).

Математическая модель: Стационарное ламинарное течение несжимаемой жидкости .

Граничное условие на входе: Однородный профиль скорости V .

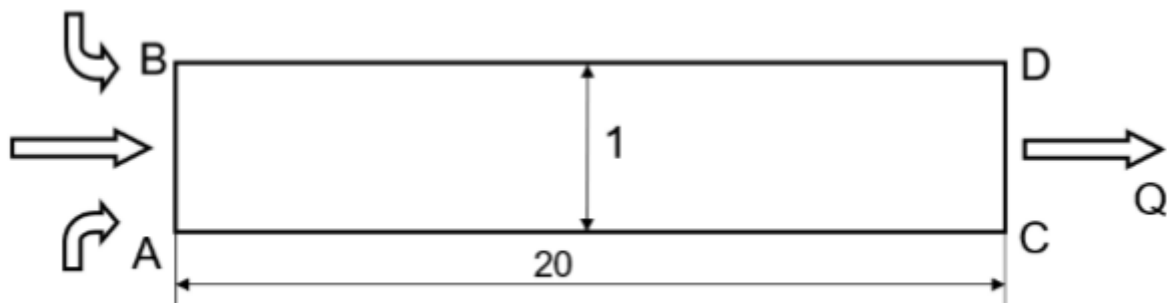


Рисунок 1 – Расчетная область для исследования начального участка плоского канала

На рисунке 1 представлена расчетная область - плоский канал ABCD высотой H и длиной L с числом калибров $L/H = 20$. Границами расчетной области служат ребро AB - вход в канал, ребра AC и BD - стенки канала, ребро CD - выход из канала. Через границу AB подается однородный поток со скоростью V . Задача решается в безразмерной постановке.

Течение определяется одним безразмерным режимным параметром – числом Рейнольдса $Re = V_{\text{вх}} \times H / \nu$, здесь ν – кинематический коэффициент вязкости. $V_{\text{вх}}$ – масштаб скорости, H – линейный масштаб. Поскольку величина H выбрана в качестве масштаба, геометрические размеры расчетной области $AB = H = 1$, $AC = L = 20$.

Для решения поставленной задачи следует установить некоторые параметры:

- геометрические размеры расчетной области (описание к рисунку 1);
- физические: стационарное ламинарное течение несжимаемой жидкости;
- режимные: $Re=150$, $Re=250$, $Re=450$;
- граничные условия: $V_x = V_{\text{вх}} = 1$; $V_y=0$; давление на выходной границе $P=0$, на стенках канала $V_x = V_y = 0$.

2.1 Аналитическое решение

Уравнения баланса:

Уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} OX: \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \\ OY: \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \end{aligned}$$

2.2 Численное решение

Для получения точных результатов горизонтальные сегменты были разбиты на 61 узел, вертикальные на 21 узел со сгущением в начале канала, так как теоретически, профиль скорости, вдали от начального участка, становится постоянным. При решении задачи был использован FVM – метод объемов

Согласно FVM пространственная дискретизация задачи осуществляется путем разбиения расчетной области на небольшие соприкасающиеся объемы, для каждого из которых записывается балансовое соотношение (1).

$$\int_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \oint_S (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS + \int_V Q dV \quad (1)$$

Внутри каждого контрольного объема находится одна (и только одна) точка «привязки» искомого сеточного решения. В большинстве разработок, ориентированных на решение трехмерных задач для областей сложной геометрии, в качестве контрольного объема используются ячейки расчетной сетки: узлы сетки располагаются в вершинах многогранника, сеточные линии идут вдоль его ребер, а значения искомых величин приписываются геометрическому центру ячейки.

На рисунке 2 представлен общий вид сетки для модели.

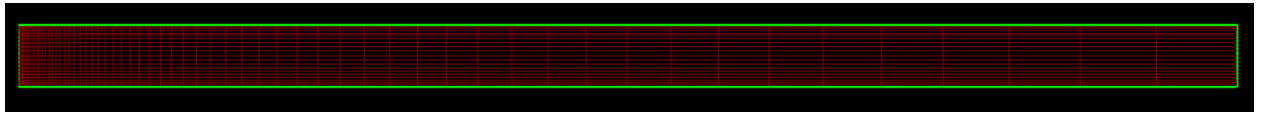


Рисунок 2 – Полученная сетка

2.3 Постановка задачи

Задача – стационарная, модель жидкости – несжимаемая.

Граничными условиями являются:

1. Скорость на входе (граница АВ) $U = 1$;
2. Давление на выходе (граница CD) $P = 0$;
3. Условие прилипания на горизонтальных стенках канала (границы AC и BD) $U = 0, V = 0$;

В рассматриваемой задаче течение определяется лишь одним параметром – числом Рейнольдса (которое появляется при обезразмеривании уравнения движения).

Число Рейнольдса:

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

где U – характерная скорость, м/с; L – гидравлический диаметр, м; ν – кинематическая вязкость среды, м²/с.

Задача решается для трех режимов течения с числами Рейнольдса $Re = 150, 250, 450$.

2.4 Работа с решателем

Задаётся второй порядок точности аппроксимации конвективных членов в уравнении баланса количества движения. Число итераций – 1000.

На рисунке 3 представлен график сходимости решения для числа Рейнольдса $Re = 150$.

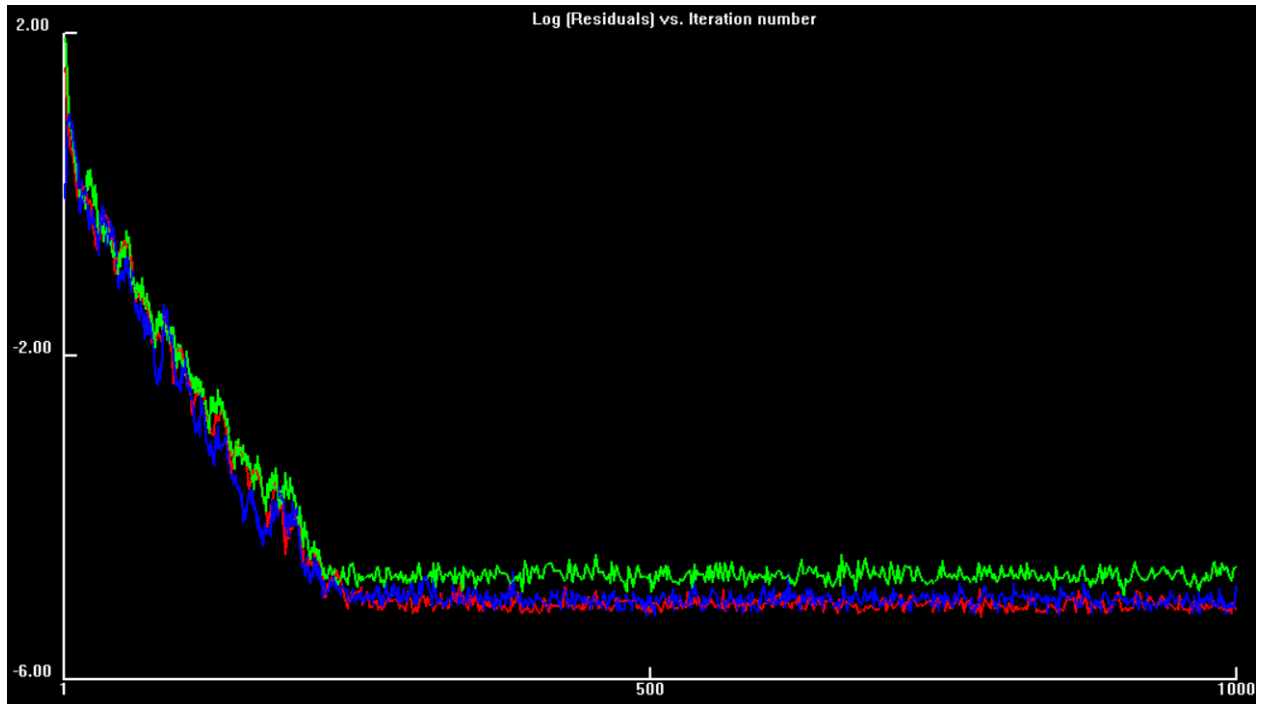


Рисунок 3 – График сходимости решения для числа Рейнольдса $Re = 150$

На данном графике мы можем видеть значение невязки на каждой из 1000 итераций. Невязка – разность между значением функции, вычисленным по результатам измерений, и истинным ее значением.

В случае течений несжимаемой жидкости или низкоскоростных потоков газа возникает известная проблема: поле давления должно быть таким, чтобы удовлетворялось уравнение неразрывности, в котором, однако, давление отсутствует. Основным подходом к решению этой проблемы является использование метода искусственной сжимаемости, т.е. введение в уравнение неразрывности фиктивной производной от давления. В процессе установления ненулевая невязка уравнения неразрывности (т.е. несоблюдение баланса массы) приводит к возмущению поля давления, которое в свою очередь, через уравнения движения, воздействует на поле скорости. При установившемся решении вклад искусственно введенной поправки исчезает и выполняется

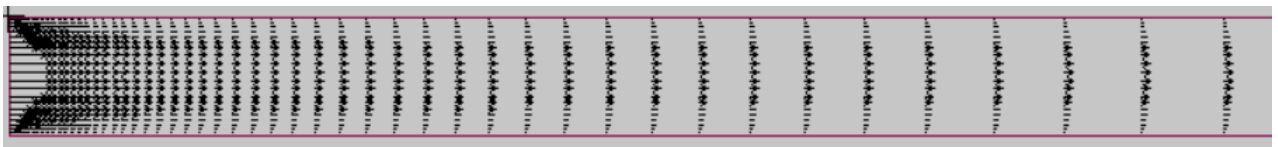
исходное уравнение неразрывности. Такой подход позволяет в рамках единого алгоритма рассматривать течения как сжимаемой, так и несжимаемой жидкости. В данном пакете реализован SIMPLEC алгоритм коррекции давления на основании решения вспомогательного уравнения Пуассона, точнее, его вариант, предполагающий решение уравнений для приращений искомых переменных.

Как видно из рисунка 3, при переходе от предыдущей итерации к последующей невязка перестает меняться – сходимость решения обеспечена.

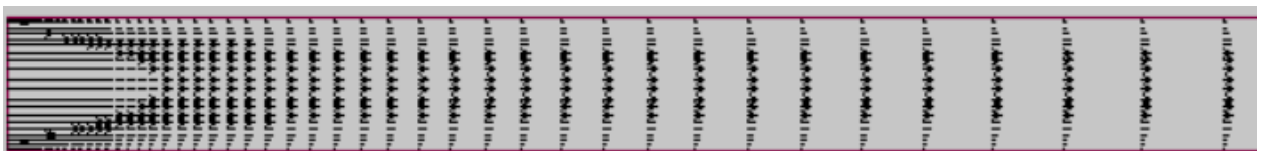
3.1 Анализ векторных полей скоростей и скалярных распределений компонент скорости и давления

По результатам расчета можно заметить, как векторное поле скоростей изменяется от однородного профиля в начале к параболе, причем у течения с меньшим числом Рейнольдса этот процесс происходит быстрее чем у течения с большим.

Re = 150



Re = 250



Re = 450

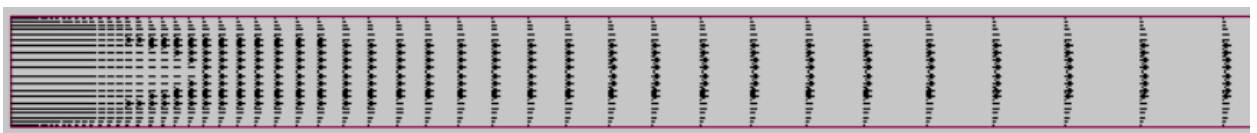
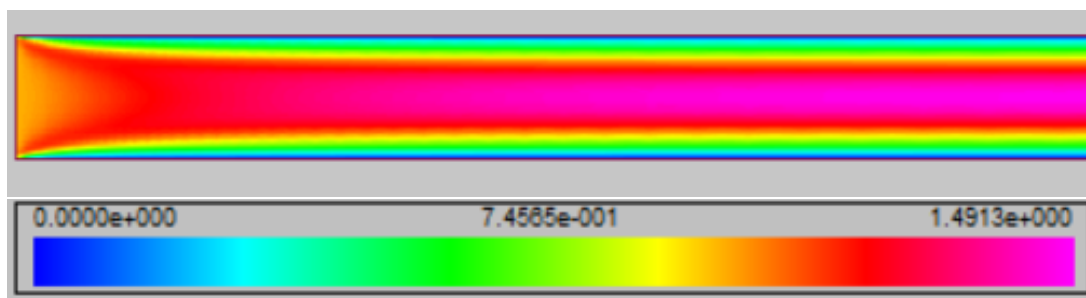


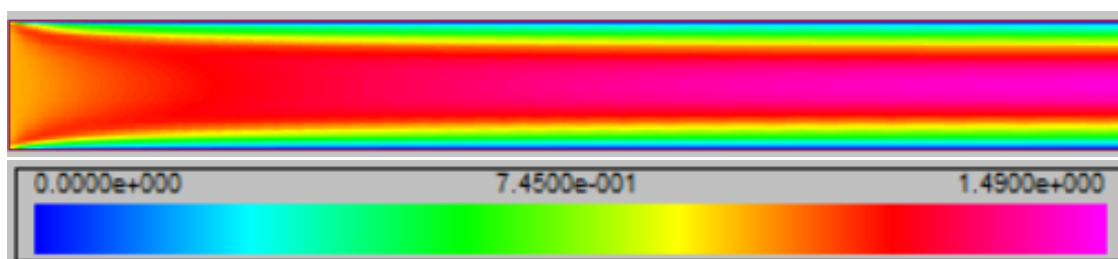
Рисунок 4 – Сравнение векторных полей скоростей

На скалярном распределении компонент скорости холодные цвета соответствуют малым скоростям течения, а теплые большим скоростям. Течение с меньшим числом Рейнольдса быстрее достигает скоростей, близких к максимальным. Синяя область на краях трубы связана с начальным условием прилипания, которые заданы в препроцессорной постановке.

Re = 150



Re = 250



Re = 450

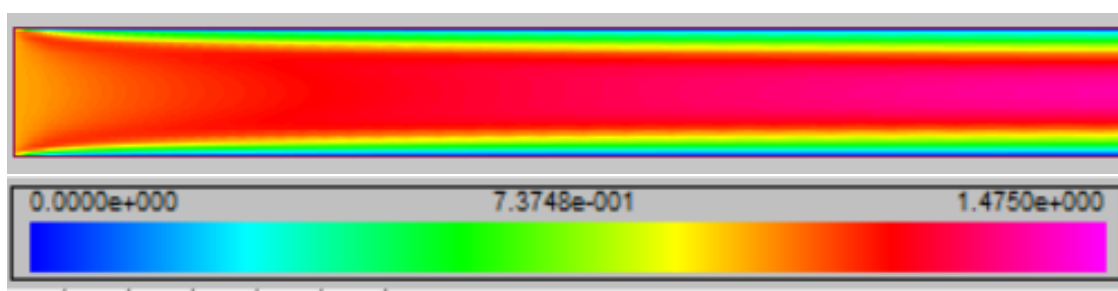
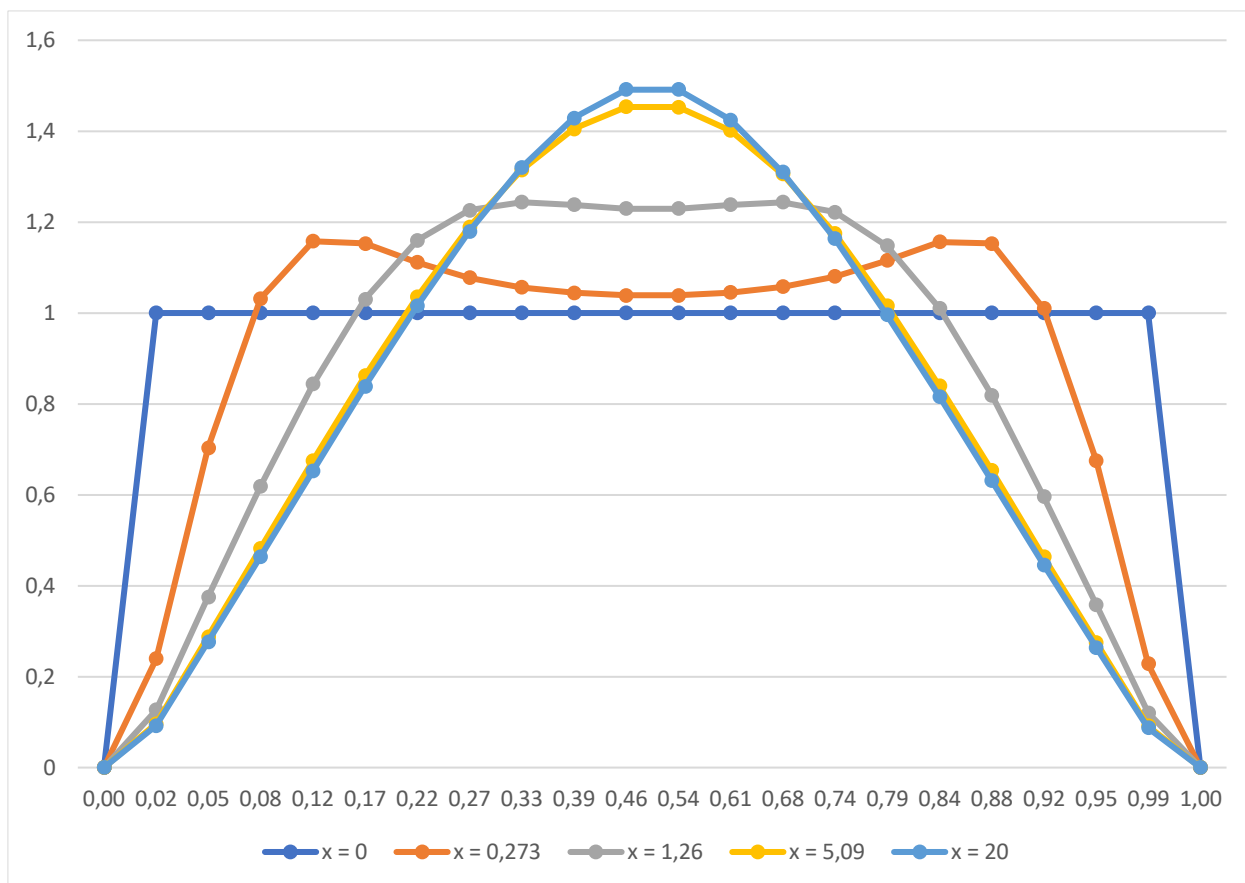
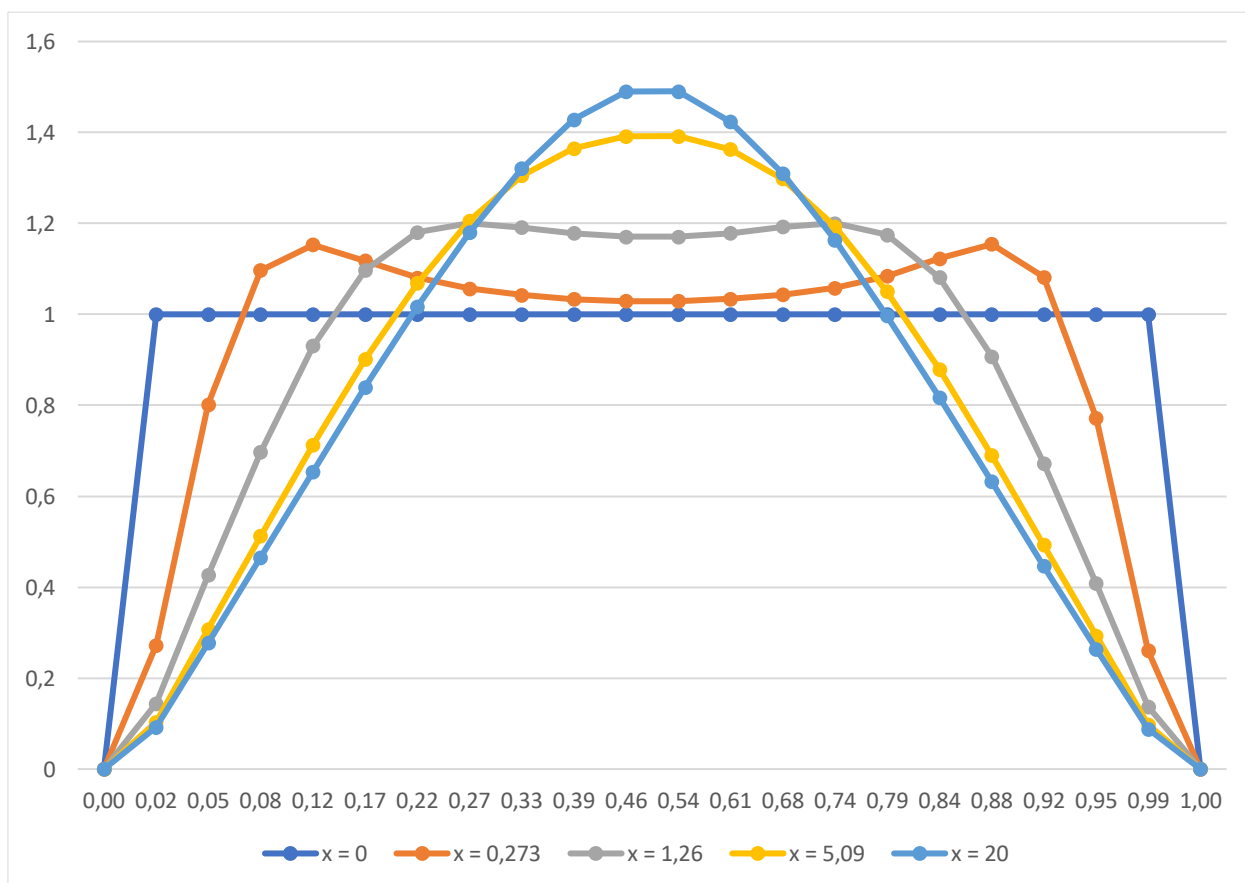


Рисунок 5 – Сравнение векторных полей скоростей при числах Рейнольдса

Re = 150



Re = 250



Re =450

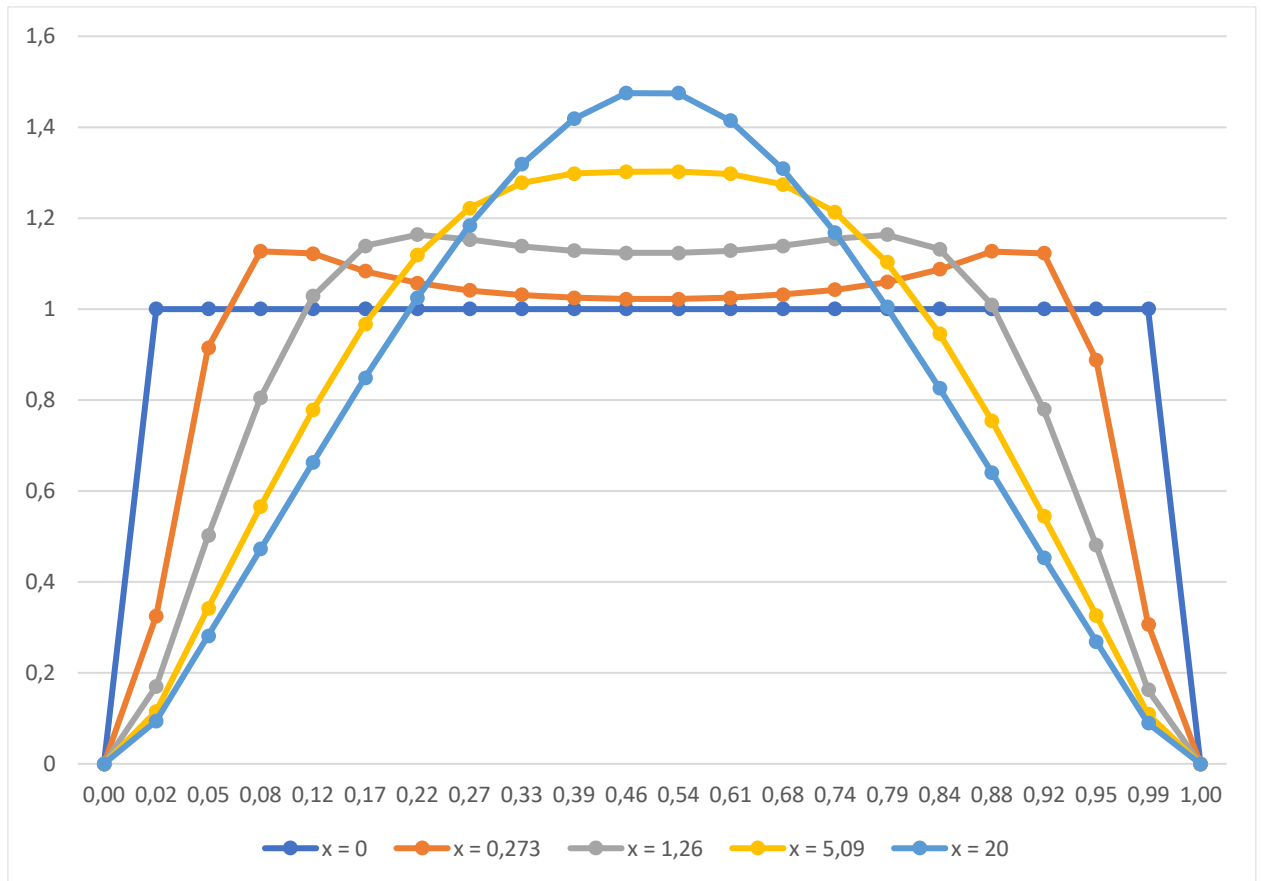


Рисунок 6 – Изменение профиля скоростей

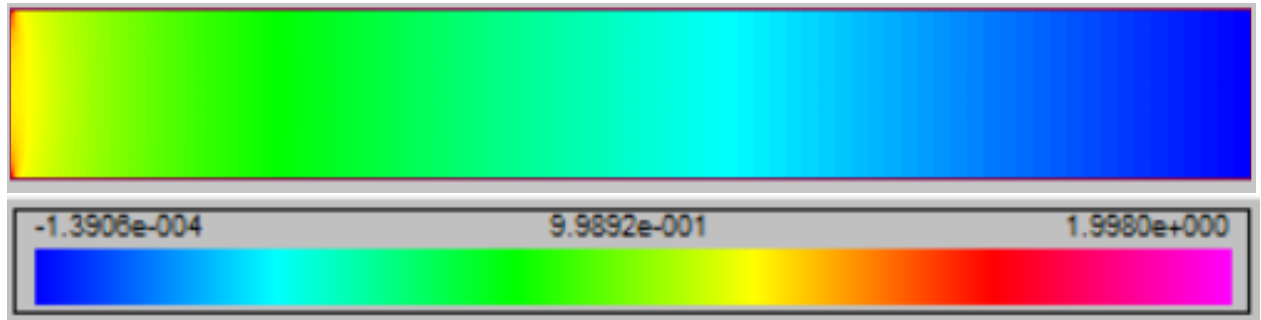
На рисунке 6 представлены профили скорости в различных сечениях в области начального участка ($x=0$, $x=0.525$, $x=1.06$, $x=2.07$, $x=10.4$, $y=20$). Видно, что на начальном участке канала образуется μ -образный профиль ($V2, V3$, которые соответствуют $x=0.525$, $x=1.06$), появление которого связано со стремлением жидкости сохранить объемный расход, а далее вдоль оси канала профиль скорости стремится к параболе Пуазейля.

На рисунке 4 представлено сравнение скалярного распределения компонент давления, которое зависит от того, насколько быстро течение разовьет максимальную скорость. Течения с большими значениями числа Рейнольдса создают меньшее давление

Re = 150



Re = 250



Re = 450

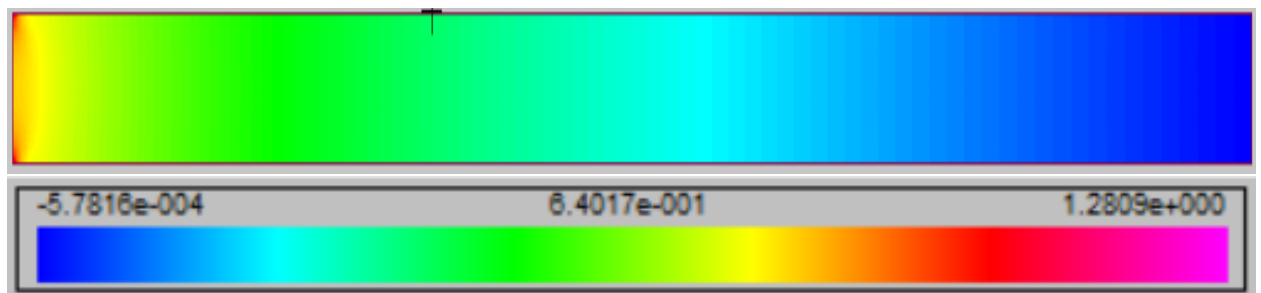


Рисунок 7 – Сравнение скалярных полей давлений при числах Рейнольдса

Выводы по 1 части: Векторные поля скорости и скалярные распределения скоростей и давлений соответствуют ожидаемым: в начале канала имеется начальный участок, а затем течение устанавливается, причем длина начального участка растет с увеличением числа Рейнольдса. Теоретического значения в $1.5V_{\text{вх}}$ достигнуто только для $Re=150$ и $Re=250$. Для $Re=450$ длина канала недостаточна для достижения данного значения.

3.2 Оценка длины начального участка канала

Исследование зависимости скорости потока показало, что при различных числах Рейнольдса результаты оказываются заниженными по сравнению с теоретическим значением $V_{\text{max}} = 1,5$, как уже было упомянуто выше это связано с тем, что трубы коротки в данной постановке задачи для данных чисел Рейнольдса.

Сравнение длины начального участка (98% от максимальной скорости развитого течения $V_{\text{max}} = 1,5$) с теоретическим значением $L_{\text{нач}} = 0,04 \cdot Re$ показало, что для $Re=450$ эта длина существенно занижена, в то время как для $Re=150$ наблюдается хорошее соответствие (таблица 1).

Таблица 1.

Оценка точности длины начального участка

Re	$L_{\text{нач}}$	$L_{\text{теор}}$	$\varepsilon, \%$
150	5,47	6	8,83
250	9	10	10
450	13,7	18	23,8

Пример вычисления погрешности для Re=450

$$L_{\text{теор}} = 0,04 \cdot 450 = 18$$

$$L_{\text{нач.числ.}} = 13,7$$

$$\varepsilon = \frac{L_{\text{теор}} - L_{\text{нач.числ.}}}{L_{\text{теор}}} \cdot 100\% = 23,8\%$$

Выводы по 2 части: Из полученных результатов можно наблюдать рост начального участка с увеличением Re. Погрешность расчетных значений имеет прямо пропорциональную зависимость от числа Рейнольдса. Точность расчетных значений, зависит от расчетной сетки. Увеличение Re, приводит к удлинению начального участка, это приводит к тому, что часть участка находится вне сгущения, уменьшение сетки позволит увеличить точность.

3.3 Анализ поля нормированного давления

$$\Delta p = \lambda \frac{\Delta L}{H} \frac{\rho \cdot V_{\text{ср}}^2}{2}$$

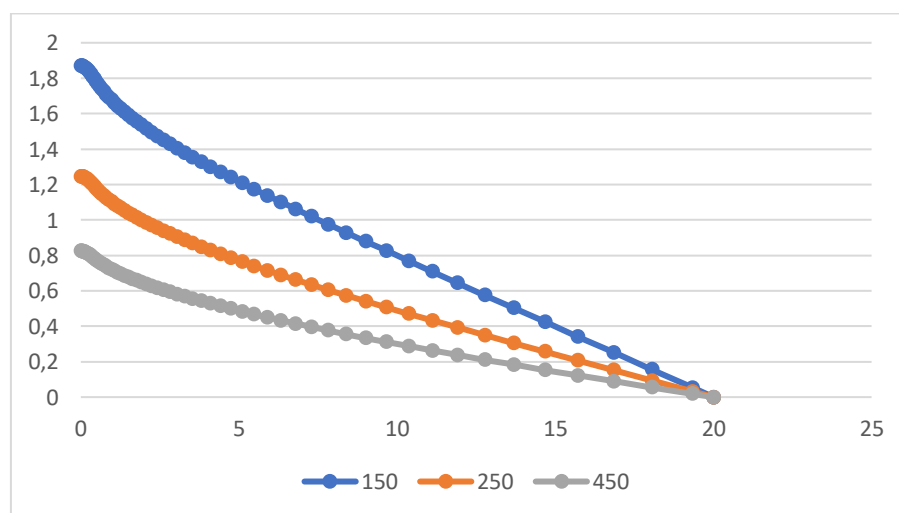


Рисунок 10 – График зависимости величины нормального давления от расстояния в центральном сечении

Для определения коэффициента сопротивления λ необходимо найти тангенс угла наклона перепада давления Δp к участку длиной ΔL , на участке с установившемся параболическим профилем скорости. Аналитически коэффициент сопротивления определяется как $\lambda = 24/Re$.

Для определения участка с установившемся параболическим профилем скорости воспользуемся данными из таблицы 1.

Пример расчета для $Re = 150$:

$$\lambda_{\text{теор}} = \frac{24}{150} = 0,16$$

$$\lambda = \frac{\Delta p}{\Delta L} \cdot 2 = \frac{|P(L_{\text{нач}}) - P(L_{\text{кон}})|}{|L_{\text{нач}} - L_{\text{кон}}|} \cdot 2 = \frac{|1,17 - 0|}{|5,47 - 20|} \cdot 2 = 0,161$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{\text{теор}} - \lambda_{\text{расч}}}{\lambda_{\text{теор}}} \cdot 100\% = 3,3\%$$

Результаты расчетов коэффициента сопротивления представлены в таблице 2.

Таблица 2.

Результаты расчетов коэффициента сопротивления.

Re	λ теор.	λ	Погрешность
150	0,16	0,161	0,63
250	0,096	0,098	2,08
450	0,053	0,058	9,4

Выводы по 3 части: Из полученных значений мы можем видеть рост погрешности, вероятно растущий в связи с неточностью аппроксимации решения к концу канала, в котором конечные объемы были достаточно большими, что и повлияло на длину начального участка и трубы в целом, которая явным образом входит в расчетную формулу

3.4 Анализ распределения коэффициента трения

График зависимости величины напряжения трения на верхней стенке канала τ от расстояния при числе Рейнольдса представлен на рисунке 11.

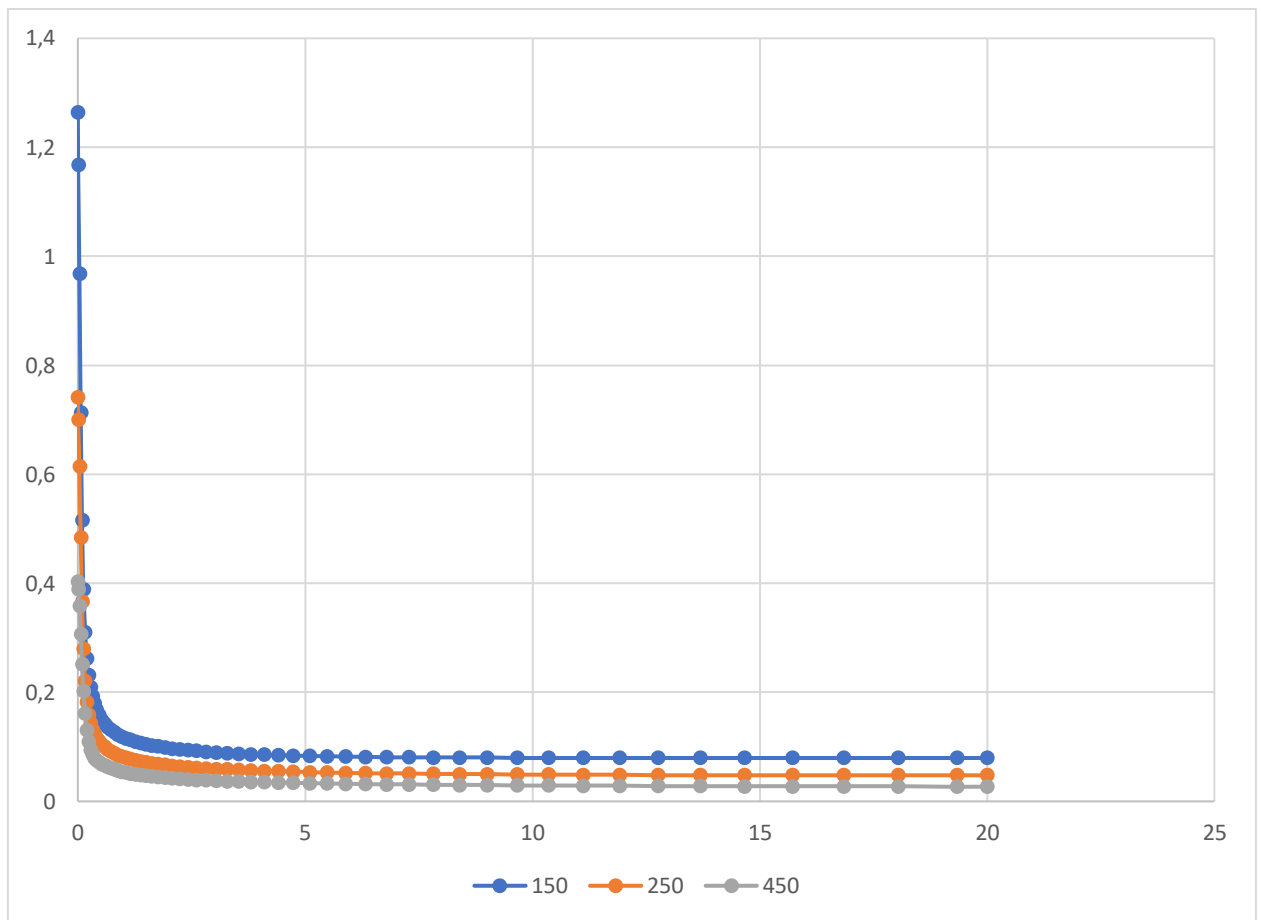


Рисунок 11 – График зависимости коэффициента трения на стенке от координаты x

При постановке задачи распределение напряжения трения на нижней стенке будет соответствовать напряжению на верхней стенке.

Для определения коэффициента трения Cf воспользуемся формулой:

$$Cf = \frac{\tau}{\rho V^2 / 2};$$

Пример расчета для $Re = 150$:

$$Cf_{\text{теор}} = \frac{\lambda}{2} = \frac{0,16}{2} = 0,08$$
$$\varepsilon = \frac{Cf_{\text{теор}} - Cf}{Cf_{\text{теор}}} \cdot 100\% = 1\%$$

Результаты расчетов коэффициента трения на стенке канала представлены в таблице 3.

Таблица 3

Коэффициент трения

Re	$Cf_{\text{теор}}$	Cf	Погрешность, %
150	0,08	0,0796	0,5
250	0,048	0,0478	0,41
450	0,0265	0,027	1,89

Выводы по 4 части: Все полученные результаты для коэффициента трения не отличаются от теоретических более чем на 5%. Изменение коэффициента трения на стенке, соответствует теоретическим данным. Уменьшение коэффициента связано с изменением скорости потока и уменьшением давления на стенки.