Математическая статистика

Домашнее задание № 1.

Овчинникова А.П., ИУ7-65Б

Вариант 15.

## Задача № 1.

В Москве рождается в год около 122500 детей. Считая вероятность рождения мальчика равной 0,51, найти вероятность того, что число мальчиков, которые родятся в Москве в текущем году, превысит число родившихся девочек не менее, чем на 1500.

### Решение.

Проводится большое число ($122500 \gg 1$) испытаний по схеме Бернулли. Будем считать успехом рождение мальчика. В-то успеха $p = 0{,}51$. Неудача - рождение девочки. В-ть неудачи $q = 1 - p = 0{,}49$.

Воспользуемся интегральной теоремой Муавра - Лапласа. Определим, ~~что~~ в-ть того, что число успехов $K$ в этой серии испытаний превысит число неудач не менее, чем на 1500,

т.е.:

$$k-(122500-k)\geqslant 1500$$

$$k\geqslant 62000$$

$$P\{62000\leq k\leq 122500\}=\Phi_0\left(\frac{122500-122500\cdot 0{,}51}{\sqrt{122500\cdot 0{,}51\cdot 0{,}49}}\right)-$$

$$-\Phi_0\left(\frac{62000-122500\cdot 0{,}51}{\sqrt{122500\cdot 0{,}51\cdot 0{,}49}}\right)=\Phi_0\left(\frac{60025}{174{,}965}\right)-\Phi_0\left(-\frac{475}{174{,}965}\right)=$$

$$=\Phi_0\left(\frac{60025}{174{,}965}\right)+\Phi_0\left(\frac{475}{174{,}965}\right)=\Phi_0(343{,}069)+$$

$$+\Phi_0(2{,}715)=0{,}5+0{,}4965=0{,}9965.$$

Ответ: 0,9965

Задача №2.

С использованием метода моментов для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ из генеральной совокупности $X$ найти точечные оценки указанных параметров заданного з-на распределения.

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\theta/2}\,\Gamma(\theta/2)} x^{\frac{\theta}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0$$

Решение. Это гамма-распределение с параметрами $\lambda = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\theta}{2}$,

т.е. $X \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{\theta}{2}\right)$

З-н распределение $X$ зависит от одного неизвестного параметра, поэтому система метода моментов будет содержать одно уравнение, записанное относительно момента 1-го порядка.

Используя определение гамма-функции:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt,$$

а также рекуррентное соотношение $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, получим выражение для первого начального момента $m_1 = MX$:

$$m_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha \cdot x^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \left\{ \text{замена } t = \lambda x,\ dx = \frac{dt}{\lambda} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^\alpha \cdot dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda \Gamma(\alpha)} = \left\{ \begin{matrix}\text{св-ва гамма}\\ \text{распр-я}\end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{\lambda}$$

Пусть $\vec{x}_n$ - выборка объёма $n$ из генеральной совокупности $X$. Момент выборки $\hat{\mu}_1 = \bar{x}$. Приравниваем момент $m_1 = MX$ к соотв. моменту выборки:

$\frac{\alpha}{\lambda} = \bar{x}$, откуда находим зн-е оценки:

$$2\hat{\alpha} = \bar{x}$$

$$\cancel{\alpha = \frac{1}{2}\bar{x}} \quad \hat{\Theta} = \bar{x}.$$

Ответ: $\hat{\Theta} = \bar{x}$, $x > 0$.

Задача 3.

С использованием метода максимального правдоподобия для случайной выборки $\vec{X} = (X_1, .., X_n)$ из генеральной совокупности X найти точечные оценки параметров заданного з-на распределения. Вычислить выборочные зн-я найденных оценок для выборки $\vec{x_5} = (x_1, .., x_5)$.

$$f_X(x) = \frac{4\Theta^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\Theta^2 x^2}, \quad \vec{x_5} = (1, 4, 7, 2, 3)$$

Решение

Функция правдоподобия:

$$L(\vec{X_n}, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} \left( \frac{4\Theta^3}{\sqrt{\pi}} x_i^2 e^{-\Theta^2 X_i^2} \right) =$$

$$= \left( \frac{4\Theta^3}{\sqrt{\pi}} \right)^n \prod_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot e^{-\Theta^2 X_i^2}$$

$$\ln L(\vec{X_n}, \Theta) = n \cdot \ln \overset{①}{\left( \frac{4\Theta^3}{\sqrt{\pi}} \right)} + \overset{②}{\ln \left( \prod_{i=1}^{n} X_i^2 \cdot e^{-\Theta^2 X_i^2} \right)}$$

① $n \ln \left( \frac{4\Theta^3}{\sqrt{\pi}} \right) = n \cdot \ln 4\Theta^3 - n \cdot \ln \sqrt{\pi} = n \ln 4 + n \ln \Theta^3 -$
$- n \ln \sqrt{\pi} = n \ln 4 + 3n \ln \Theta - n \ln \sqrt{\pi}$

② $\ln \left( \prod_{i=1}^{n} X_i^2 e^{-\Theta^2 X_i^2} \right) = \ln \left( e^{-\Theta^2 \sum_{i=1}^{n} X_i^2} \prod_{i=1}^{n} X_i^2 \right) =$

$$\ominus \ln\left(e^{-\theta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2}\right) + \ln\prod_{i=1}^{n} X_i^2 = -\theta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \ln\prod_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\ln L(\vec{X_n}, \theta) = n\ln 4 + 3n\ln\theta - n\ln\sqrt{\pi} + -\theta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \ln\prod_{i=1}^{n} X_i^2$$

Ур-е правдоподобие принимает вид:

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X_n}, \theta)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X_n}, \theta)}{\partial\theta} = 3n\cdot\frac{1}{\theta} - 2\theta\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

$$3n - 2\theta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0 \qquad \theta \neq 0$$

$$2\theta^2\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 3n$$

$$\theta^2 = \frac{3n}{2}\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \qquad \frac{3n}{2}\,\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \geq 0$$

$$\hat{\theta} = \pm\sqrt{\frac{3n}{2}\,\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}}$$

Для $\vec{x_5} = (1, 4, 7, 2, 3)$:

$$\hat{\theta} = \pm\sqrt{\frac{3\cdot 5}{2}\cdot\frac{1}{1+4+7+2+3}} = \pm\sqrt{\frac{15}{2\cdot 17}} \approx \pm 0{,}663$$

**Ответ**: $\pm 0{,}663$

## Задача 4.

По результатам $n = 10$ измерений прибором, не имеющим систематической ошибки, получены следующие отклонения ёмкости конденсатора от номинального значения (пФ):

5,4 ; −13,9 ; −11,0 ; 7,2 ; −15,6 ; 29,2 ; 1,4 ; −0,3 ; 6,6 ; −9,9.

Найти 90%-ые доверит. интервалы для среднего значения отклонения ёмкости от номинального значения и её среднего квадратичного отклонения

## Решение

$\vec{x}_{10} = (5,4; -13,9; -11,0; 7,2; -15,6; 29,2; 1,4; -0,3; 6,6; -9,9.$

Пусть X – СВ, принимающая значения, равные отклонению ёмкости конденсатора от номинального зн-е $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{x} = \cancel{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = (5,4+(-13,9)-11,0+7,2-15,6+29,2+1,4-0,3+6,6-9,9)}\cdot\frac{1}{10} =$$

Предполагая, что контролируемый признак (СВ X) имеет нормальный з-н распределения, найдём выборочное среднее $\bar{x}$ и исправленную выборочную дисперсию:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{0,9}{10} = -0,09$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{9}\Big[5,49^2 + (-13,81)^2 + (-10,91)^2 +$$
$$+ 7,29^2 + (-15,51)^2 + 29,29^2 + 1,49^2 + (-0,21)^2 + 6,69^2 +$$
$$+ (-9,81)^2\Big] = \Big[30,1401 + 190,7161 + 119,0281 +$$
$$+ 53,1441 + 240,5601 + 857,9041 + 2,2201 + 0,0441 +$$
$$+ 44,7561 + 96,2361\Big]\frac{1}{9} = \frac{1634,749}{9} = 181,64$$

а) Чтобы построить дов. интервал для $\mu$ ($\mu$ неизв; $\sigma$ неизв.), воспользуемся статистикой:

$$\frac{\mu - \overline{x}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n} \sim St(n-1),$$

имеющей распр-е Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Тогда

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})\, t_{\alpha_1}}{\sqrt{n}}; \quad \overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})\, t_{1-\alpha_2}}{\sqrt{n}}$$

где $t$ с индексом — квантиль соответствующих уровней р-е Стьюдента с $n-1$ степенью свобод.

Возьмем $\alpha_1 = \alpha_2$. Тогда

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})\, t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}; \quad \overline{\mu}(\vec{X}) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X})\, t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

$t_{\frac{1-\gamma}{2}} = t_{\frac{1-0,9}{2}} = t_{0,05}$ $t_{0,05} = 2,2622$

(по таблице квантилей распределения Стьюдента)

$$\underline{\mu}(\vec{X}) = -0,09 - \frac{\sqrt{18,64} \cdot 2,2622}{\sqrt{10}} =$$

$$\approx -0,09 - \frac{1,504}{3,15} = -0,09 - 0,476 = -0,566$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}) = -0,09 + 0,476 = 0,386.$$

Доверительный интервал: $(-0,566; 0,386)$

б) Чтобы построить доверит. интервал для $\sigma$ ($\mu$ неизв., $\sigma$ неизв.), воспользуемся статистикой:

$$\frac{S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1),$$

имеющей распределение $\chi^2$ с $n-1$ степенью свободы. Тогда

$$\underline{\sigma}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{1-\alpha_2}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\alpha_1}}$$

Возьмём $\alpha_1 = \alpha_2$, тогда

$$\underline{\sigma}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{X}) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

а) $\frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0,9}{2} = 0,05$ ; $\frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0,9}{2} = 0,95$

б) В таблице квантилей распр-е $\chi^2$ с 9 степенями свободы находим:

$$h_{0,05} = 1,73$$

$$h_{0,95} = 16,92$$

в) $\underline{\sigma}^2(\vec{x}) = \frac{9 \cdot 181,64}{16,92} \approx 96,6170$

г) $\overline{\sigma}^2(\vec{x}) = \frac{9 \cdot 181,64}{1,73} \approx 944,95$

д) $\underline{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{96,6170} \approx 9,83$

$\overline{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{944,95} \approx 30,74$

Ответ: доверительные интервалы для уровня 0,9: $(-0,566; 0,386)$ — для среднего значения отклонение ёмкости от номинального зн-е; $(9,83; 30,74)$ — для её среднеквадратичного отклонения.