

1. Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям. Примеры из конкретных предметных областей.

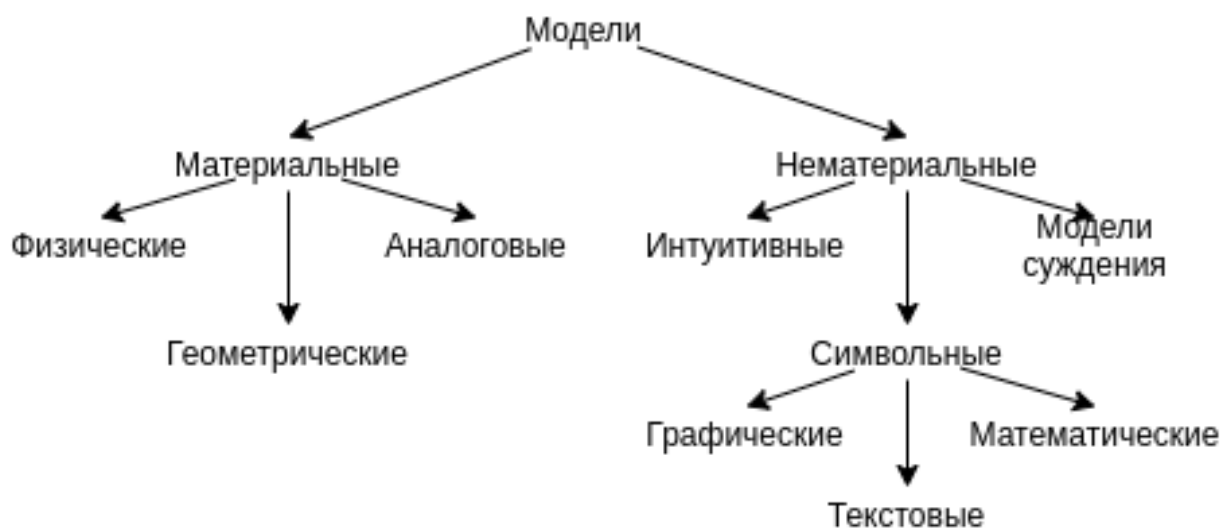
Моделирование – это методология разработки и изучения объекта, основанная на замене этого объекта моделью и работе в дальнейшем с этой моделью.

Объект – система, процесс, явление, материальная или нематериальная сущность.

Модель – представление объекта в виде, отличном от облика или формы его реального существования или функционирования. Модель в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Классификация моделей:

- натурные (материальные) – физические, геометрические, аналоговые;
- абстрактные (нематериальные) – символные (графические, текстовые, математические), интуитивные, модели суждения;



Геометрические модели – макеты.

Физические модели – воспроизводят реальные условия функционирования объектов (например, модель самолета в аэротрубе).

Аналоговые модели – один процесс заменяется другим (например, существует процесс передачи тепла. Диффузия заменяется протеканием

электрического тока. Строится электрическая цепь и определяются потоки тепла).

Модели суждения – мировоззрение.

Интуитивные модели – например, в мозге протекают процессы, прогнозирующие исход дорожной ситуации, когда хотим перейти дорогу.

Графические модели – рисунки, диаграммы, чертежи.

Текстовые модели – программы.

Математическая модель – представление объекта в виде уравнений, логических соотношений, формул.

Математическое моделирование – методология, основанная на замене объекта математической моделью и исследовании этой модели.

Требования к модели:

- адекватность – соответствие объекту и предъявленным требованиям;
- универсальность;
- точность – удовлетворение требований к погрешности результата;
- экономичность – соответствие цена - качество.

Предметные области, в которых применяется математическое моделирование:

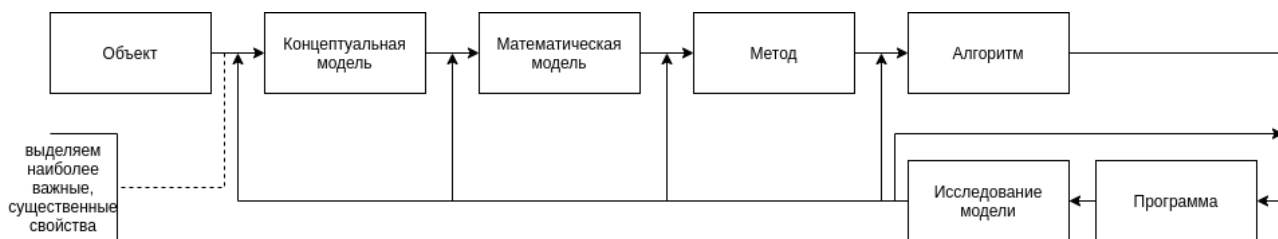
- прогнозирование событий;
- исследование объектов, которые при каждом своем применении уничтожаются;
- дорогостоящие объекты с длительным сроком разработки;
- отсутствие объекта-оригинала;
- исследование длительного по времени эволюции процесса.

2. Схема вычислительного эксперимента.

Концептуальная модель = содержательная модель = расчетная схема.

Исследование модели – тестирование программы. В зависимости от найденных проблем можно вернуться к одному из предыдущих этапов.

Проще:



- модель;
- алгоритм;
- программа.

3. Понятие математической модели. Функции моделей. Источники погрешностей при построении модели, алгоритмизации и программировании.

Математическая модель – представление объекта в виде уравнений, логических соотношений, формул.

Классификация математических моделей:

- имитационные (массового обслуживания);
- функциональные (регулярные);
- модели идентификации.

Имитационное моделирование применяется в тех случаях, когда необходимо учесть возможно большее разнообразие исходных данных, изучить протекание процессов в различных условиях.

Функции моделей (математических).

- Описательная функция.

Математическое моделирование объекта помогает понять, как устроен объект, его структуру, свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром.

- Управленческая функция. Показывает, что заключенные в математических моделях закономерности могут помочь принять научно обоснованные решения по его совершенствованию.

- Выступают в роли предмета или средства исследования.
- Интерпретационная функция.

Математическая модель может не только объяснить, но и позволяет описать множество частных случаев, которые могут быть выведены из нее логически и не требуют специального описания.

- Прогностическая функция.

Функции моделей.

- Познание.

Прежде чем разрабатывать модель, нужно получить информационное оснащение (материальные коэффициенты) расчетами или из экспериментов. Чем более детально описывается процесс, тем больше требуется информации.

- Прогнозирование (предсказание).

Прогнозирование используется для оптимизации.

- Передача информации.

При образовании систем – передача информации между подсистемами.

- Применение в тренажерах.

Источники погрешностей при вычислениях:

- погрешность модели – несоответствие математического описания задачи реальной действительности;
- погрешность исходных данных (неустраняемая);
- погрешность метода.

Связана со способом решения поставленной математической задачи.

- погрешность округления.

Погрешность округления обусловлена необходимостью выполнения арифметических операций над числами, усеченными до количества разрядов, зависящего от применяемой вычислительной техники.

Существует взаимная компенсация погрешностей.

4. Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.

Задача называется **корректно поставленной**, если ее решение существует, единственно и устойчиво по входным данным.

$$y = A(x)$$

$$A(x + \delta) = y + \delta y$$

Если при $\delta x \rightarrow 0$ $\delta y \rightarrow 0$, то задача устойчива.

Устойчивость по входным данным означает, что малые изменения входных данных должны приводить к малым изменениям результата.

Если δy большое, то это некорректно поставленная задача.

Часто задача формально считается корректно поставленной и устойчивой:

$$\delta y = c \delta x, c = \text{const.}$$

Если константа c большая, то малые изменения входных данных все равно приведут к сильному изменению результата – это слабоустойчивая задача. Такая задача мало отличается от неустойчивой.

Если $\delta x \rightarrow 0$, а δy большое, то это некорректно поставленная задача.

Помимо неустойчивости формулировки самой задачи, алгоритм ее решение (алгоритм) может быть также неустойчивым.

Пример неустойчивой задачи

$$y = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t)$$

$$y = \delta y = (f(t) + \delta f)' = f'(t) + (\delta f)'$$

$$\delta y = (\delta f)'$$

$$\delta f = \frac{1}{n} \sin n^2 t \rightarrow \sin^2(t + T) = \sin n^2 2\pi (n^2 T = 2\pi, T = \frac{2\pi}{n^2})$$

$$(\delta f)' = n \cos^2 t$$

$$\text{При } n \rightarrow \infty, \delta f \rightarrow 0$$

$$\delta y \rightarrow \infty$$

Можно получить даже отрицательную производную, хотя на самом деле она положительна.

Пример

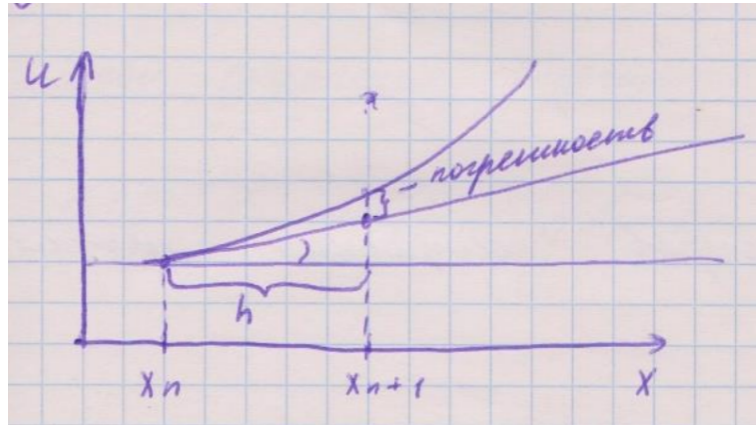
$$u'(x) = -\alpha u, \alpha > 0$$

$$u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$$



$$u(x) \rightarrow y, u(x_i) \rightarrow y_i$$

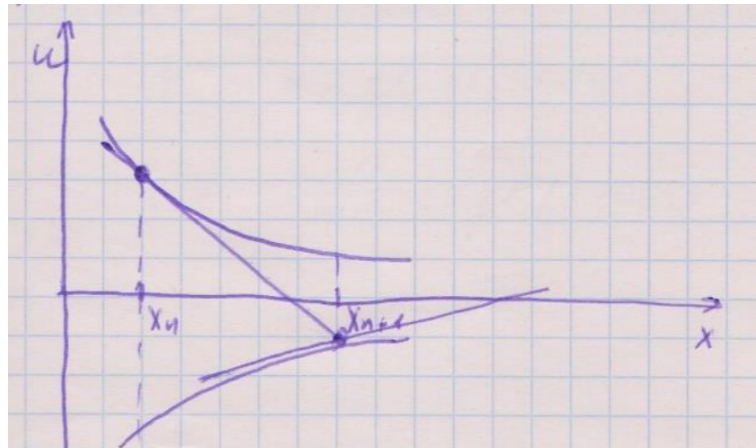
$$y_{n+1} = y_n + hu'_n = y_n + h(-\alpha y_n) = y_n(1 - h\alpha)$$



Если $(1 - \alpha) < 0$, возникают "пилообразные решения". Чтобы этого избежать, необходимо ограничение на h .

$$1 - h\alpha > 0 \Leftrightarrow h < \frac{1}{\alpha}.$$

Получим относительно устойчивое решение.



$$y_{n+1} = y_n + hu'_{n+1} = y_n + h(-\alpha y_{n+1})$$

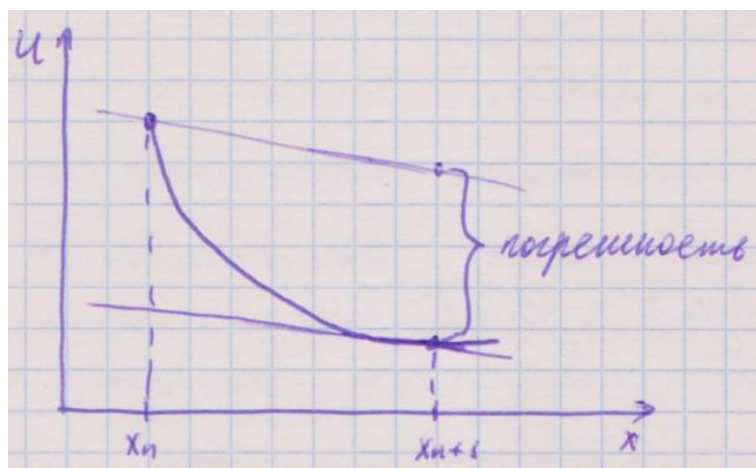
$$y_{n+1}(1 - \alpha h) = y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \alpha h} - \text{грубое решение, но пилообразные решения не образуются.}$$

Схема абсолютно устойчива.

Пример

В качестве примера плохой обусловленности рассмотрим задачу



$$u'(x) = u - x, 0 \leq x \leq 100, \quad (1)$$

$$u(0) = 1. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (1) содержит одну произвольную постоянную $u(x, c) = 1 + x + ce^x$.

При начальном условии (2) она равна $c = 0$, так что $u(100) = 101$. Однако небольшое изменение начального условия $\bar{u}(0) = 1.000001$ меняет постоянную $c = 10^{-6}$; тогда $\bar{u}(100) \approx 2.7 \cdot 10^{37}$, т. е. решение изменилось очень сильно.

5. Общая классификация методов построения математических моделей.

Методы получения моделей:

- на основе фундаментальных законов природы;
- вариационные принципы (принцип Гамильтона, принцип Ферма) – система переходит из одного состояния в другое так, что некоторая связанная с ней величина становится экстремальной;
- построение иерархии моделей (снизу вверх и сверху вниз);
- метод аналогий.

Наиболее распространенный метод построения моделей. Состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. Примеры таких законов: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, закон сохранения массы.

Пример: пуля врезается в брусок.

Из закона сохранения импульса получается простейшая математическая модель движения ракеты (в пренебрежении сопротивлением воздуха, гравитацией).

Вариационный принцип гласит, что из всех возможных движений изучаемого объекта в действительности реализуется только то, на котором некоторая связанная с объектом величина достигает своего экстремального значения.

При использовании вариационного принципа движение описывается при помощи так называемого конфигурационного пространства, построенного из обобщенных координат q , обобщенных скоростей \dot{q} и времени t . Основными понятиями этой теории, в которой движение во все моменты времени полностью определяется набором величин $q(t)$ и $\dot{q}(t)$, являются понятия функции Лагранжа L и действия по Гамильтону S .

Оптимально выбираемый уровень моделирования существенно зависит от его целей: не обязательно использовать модель высокого уровня, суще-

ственно более затратную по компьютерным ресурсам, если в этом нет практической необходимости. Но и в противном случае построение математических моделей сразу во «всей полноте», с учетом всех факторов, существенных для его поведения, не бывает оправданным.

Более результативным оказывается подход, реализующий принцип «от простого к сложному», когда после достаточно подробного изучения не очень сложной модели делается следующий шаг – отказ от одного или нескольких упрощающих предположений, идеализирующих изучаемый объект. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая. Путь «от простого к сложному» дает возможность поэтапно изучать все более реалистичные модели и сравнивать их свойства.

Иерархия математических моделей часто строится и по противоположному принципу «от сложного к простому», «от общего к частному». В этом случае реализуется путь «сверху вниз» – из достаточно общей и сложной модели при соответствующих упрощающих предположениях и конкретизациях рассматриваемого объекта, определяемых протекающими в нем процессами, его геометрией и т. д., получается последовательность все более простых (но имеющих уменьшающуюся область применимости) моделей. Такой подход позволяет сразу установить некоторые общие свойства объекта, конкретизируя и дополняя их в частных ситуациях. Длина образующейся при этом цепочки может быть весьма значительной.

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать законы сохранения или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку. К таким объектам относятся, например, системы с заметным вмешательством людей, в частности экономические системы.

Одним из плодотворных подходов к построению моделей такого рода объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями: методы и результаты, разработанные и накопленные при математическом моделировании одних явлений, переносятся «по аналогии» на широкие классы совсем других процессов. Например, известны механико-

экономические аналогии (использование идеи «насыщения»: скорость роста со временем какой-либо величины пропорциональна произведению текущего значения этой величины на разность между ее предельным и текущим значениями, использование законов сохранения, переходов с микро- на макроуровень), термодинамико-экономические аналогии (представления о стационарных процессах, равновесных состояниях, переход от дискретной к непрерывной модели) и др. Применение подобных аналогий позволяет глубже понять принципиальные свойства трудноформализуемых объектов.

6. Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, в которое входят производные (производная) функции, которую надо найти. В ДУ могут входить сама функция, независимые переменные и параметры.

$$u'(x) = x^2 + u^2$$

Порядок ДУ определяется наивысшим порядком производной, входящей в него.

Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен). Производные, функции, независимые переменные и параметры могут входить в уравнение в различных комбинациях или могут отсутствовать вовсе, кроме хотя бы одной производной.

ДУ называется **обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)**, если функция зависит только от одной переменной.

$$F(n^{(n)}, u^{(n-1)}, \dots, u, x) = 0$$

Обыкновенным дифференциальным уравнением можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

ОДУ n -го порядка при помощи замены $u^{(k)}(x) \equiv u_k(x)$ можно свести к эквивалентной системе n уравнений первого порядка.

Сведение ОДУ n -го порядка к системе ОДУ первого порядка

$$u^{(n)} = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

Вводятся новые переменные:

$$u' = u_1$$

$$u'' = u_2$$

$$u^{(k)} = u_k$$

Очевидно, что $u'_k = (u^{(k)})' = u^{(k+1)} = u_{k+1}$

Таким образом, получим

$$\begin{cases} u' = u_1 \\ u'_1 = u_2 \\ \dots \\ u'_{n-1} = f(x, u, u_1, \dots, u_{n-1}) \end{cases}$$

– система зацепляющихся уравнений.

Аналогично, произвольную систему ДУ любого порядка можно заменить некоторой эквивалентной системой уравнений первого порядка.

Пример

$$a(x)u''' + b(x)u'' + c(x)u' + d(x)u = f(x)$$

Получим:

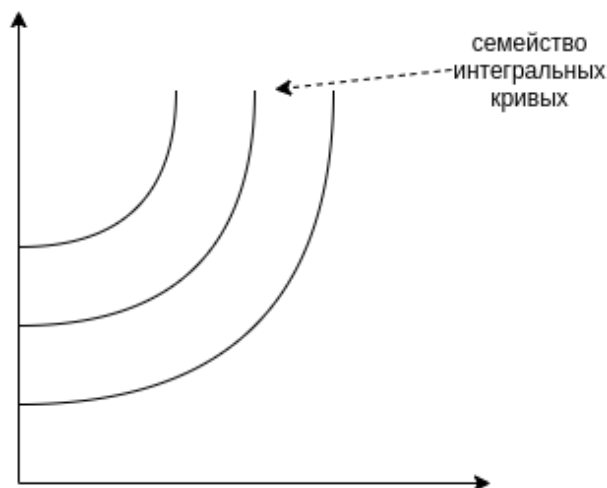
$$\begin{cases} u(x) = u_1 \\ u'(x) = u_2 \\ a(x)u'_2 + b(x)u_2 + c(x)u_1 + d(x)u = f(x) \end{cases}$$

В общем виде система уравнений первого порядка выгрядит так:

$$u'_k(x) = f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n), k = 1..n$$

7. Постановки задачи Коши и краевой задачи для ОДУ.

$$u'(x) = f(x, u)$$



Для того чтобы выбрать одну кривую, необходимо начальное условие.

Если ДУ n -го порядка, нужно n НУ.

Уравнение n -го порядка содержит n произвольных констант. Решение с этими константами определяет общее решение ДУ. Для выделения частного решения константы должны быть определены. Для этого задаются дополнительные условия.

Различают три основных типа задач для ОДУ: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения.

Если все условия ставятся в одной точке, то это задача Коши.

$$\begin{cases} u'_k(x) = f_k(x, u, u_1, u_2, \dots, u_n), k = 1..n \\ u_k(\xi) = \eta_k, k = 1..n \end{cases}$$

Условия $u_k(\xi) = \eta_k, k = 1..n$ можно рассматривать как задание координат начальной точки $(\xi, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ интегральной кривой в $(n+1)$ -мерном пространстве $(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Если условия ставятся в разных точках, то это краевая задача. В уравнении первого порядка не может быть краевой задачи.

Краевая задача – задача о нахождении решения ОДУ, удовлетворяющего краевым условиям в конце интервала или на границе области.

Например, требуется найти решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x)$$

на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющего на концах отрезка условиям:

$$u(a) = A; \quad u(b) = B.$$

Здесь A, B – постоянные. Граничные условия могут быть заданы и в более общем виде:

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = A;$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = B.$$

Методы решения краевых задач подразделяются на точные аналитические, приближённые и численные.

Аналитические методы применимы лишь для решения узкого класса уравнений. К приближенным методам решения краевых задач относятся разложение в ряды Фурье, методы Рунге и Галеркина. Для численного решения краевых задач применяют метод стрельбы и разностный метод.

8. Метод Пикара в задаче Коши для ОДУ. Привести пример.

Методы решения задачи Коши для ОДУ:

- точный метод;
- приближенный аналитический метод;
- численный метод.

К **точным** относятся методы, позволяющие выразить решение ДУ через элементарные функции, либо представить его при помощи квадратур от элементарных функций.

Классы уравнений, для которых разработаны методы получения точных решений, сравнительно узки и охватывают только малую часть возникающих на практике задач.

В ряде случаев точное решение ДУ представляет из себя неявную функцию. Тогда для получения зависимости u от x необходимо применять численные методы (метод Ньютона, половинное деление).

Например, доказано, что решение уравнения $u'(x) = x^2 + u^2$ не выражается через элементарные функции.

В приближенных методах решение получается как предел $u(x)$ некоторой последовательности $y_n(x)$, причем $y_n(x)$ выражаются через элементарные функции или при помощи квадратур. Ограничиваясь конечным числом n , получаем приближенное выражение для $u(x)$.

Численные методы – это алгоритмы вычисления приближенных значений искомого решения $u(x)$ на некоторой выбранной сетке значений аргумента x_n . Численные методы могут дать только частное решение. Зато эти методы универсальные (применимы для уравнений, которые имеют или не имеют аналитического решения).

Приближенный аналитический метод: метод Пикара.

Метод Пикара является обобщением метода последовательных приближений.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(\xi) = \eta. \end{cases} \quad (3)$$

Интегрируя ДУ, заменим эту задачу эквивалентным ей интегральным уравнением типа Вольтерра

$$u(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, u(t)) dt. \quad (4)$$

Решая это интегральное уравнение методом последовательных приближений, получим итерационный процесс Пикара

$$y_s(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y_{s-1}(t)) dt; \quad y_0(x) = \eta \quad (5)$$

(приближенное решение обозначается через y). На каждой итерации этого процесса интегрирование выполняется либо точно, либо численными методами.

Метод сходится, если функция ограничена по своим параметрам и удовлетворяет условию Липшица:

для любых двух точек (x_1, u_1) и (x_2, u_2) : $|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| \leq L(|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|)$, где L – константа Липшица.

Пример

Применим метод Пикара к задаче Коши для уравнения

$$\begin{cases} u'(x) = x^2 + u^2, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

решение которого не выражается через элементарные функции.

Получим

$$y_0(x) = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{3}x^3$$

$$y_2 = \frac{1}{3}x^3 \left(1 + \frac{1}{21}x^4\right)$$

$$y_3 = \frac{1}{3}x^3 \left(1 + \frac{1}{21}x^4 + \frac{2}{693}x^8 + \frac{1}{19845}x^{12}\right),$$

и т.д. Видно, что при $x \leq 1$ эти приближения быстро сходятся и позволяют вычислить решение с высокой точностью.

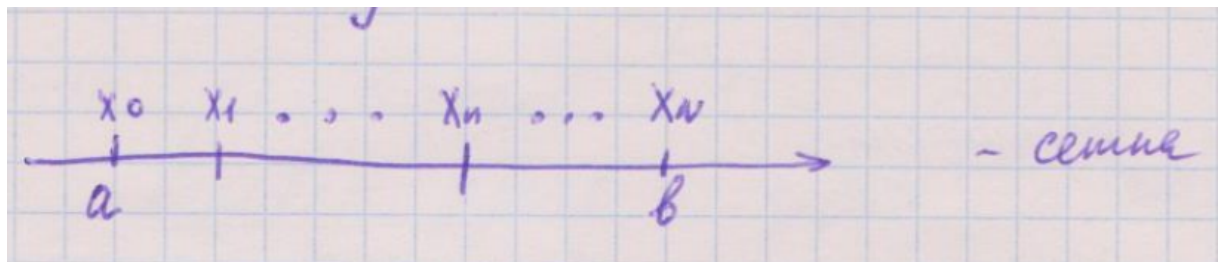
Метод Пикара выгодно применять, если интегралы (5) удастся вычислить через элементарные функции. Если же правая часть уравнения (3) более сложна, так что эти интегралы приходится находить численными методами, то метод Пикара становится не слишком удобным.

Метод Пикара легко обобщается на системы уравнений. Однако на практике чем выше порядок системы, тем реже удастся точно вычислять интегралы (5), что ограничивает применение метода в этом случае.

Метод Рунге - Кутта 2-го порядка точности в задаче Коши для ОДУ. Оценка точности.

Имеем:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(\xi) = \eta \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad (7)$$



В области интегрирования $[a, b]$ вводится сетка. Сетка – множество точек на отрезке $[a, b]$ таких, что

$$W = \{x : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+2} < \dots < x_N\}$$

Расстояние между узлами – шаг:

$$h_n = x_n - x_{n-1}.$$

Шаг может быть переменным или постоянным.

$$h_n = \text{const}$$

$$W_n = \{x_i : x_i = a + ih; i = 1..N\}$$

Функция, полученная в результате применения численного метода на выбранной сетке называется сеточной.

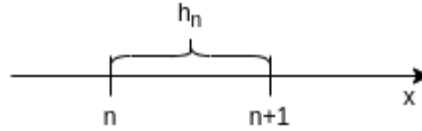
$$y_i \rightarrow u(x_i) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Сеточная функция сходится в точному в точке X , если $|y_i - u(x_i)| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Сеточное решение сходится к точному на отрезке $[a, b]$, если оно сходится в каждой точке этого отрезка.

Решение имеет p -й порядок точности, если $|y_i - u(x_i)| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$. Если шаг неравномерный, то $|y_i - u(x_i)| = O(h_{max})$ при $h \rightarrow 0$.

Имеем:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \quad (8)$$



Разложения в ряд Тейлора:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h_n}{1!}u'_n + \frac{h_n^2}{2!}u''_n + \frac{h_n^3}{3!}u'''_n + \dots \quad (9)$$

$$u_n = u(x_n)$$

$$u'_n = u'(x_n)$$

Получим формулы второго порядка точности метода Рунге-Кутты.

Приближенное решение обозначим через y .

$$u'_n = f(x, u_n), \quad u_n = u(x_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, u_n) + \frac{h_n^2}{2!}u''_n \quad (10)$$

$$u''_n = (u_n)' = \left. \frac{df(x, u)}{dx} \right|_{x_n} = f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n) \quad (11)$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2} [f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n) \cdot f(x_n, y_n)] \quad (12)$$

$$u'_n = \frac{df}{dx} = \frac{f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - f(x_n, y_n)}{\Delta x} \quad (13)$$

Подставим (13) в (10):

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n) + \frac{h_n^2}{2!} \left[\frac{f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n) - f(x_n, y_n)}{\Delta x} \right] =$$

$$= y_n + h_n [\beta f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)] \quad (14)$$

β подлежит определению. Разложим $f(x_n + \gamma h_n, y_n + \delta h_n)$ в ряд Тейлора.

$$y_{n+1} = y_n + h_n \{ \beta f(x_n, y_n) + \alpha [f(x_n, y_n) + f'_x \gamma h_n + f'_y \delta h_n] \} =$$

$$= y_n + h_n (\alpha + \beta) f(x_n, y_n) + \alpha \gamma h_n^2 f'_x + \alpha \delta h_n^2 f'_y \quad (15)$$

Сравнивая (15) и (12) видим:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_n, y_n) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \beta = 1 - \alpha \\ \gamma = \frac{1}{2\alpha} \\ \delta = \frac{1}{2\alpha} f(x_n, y_n) \end{cases} \quad (17)$$

Подставим β, γ, δ в (14), получим:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left[(1 - \alpha) f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h_n}{1\alpha}, y_n + \frac{h_n}{2\alpha} f(x_n, y_n)\right) \right] \quad (18)$$

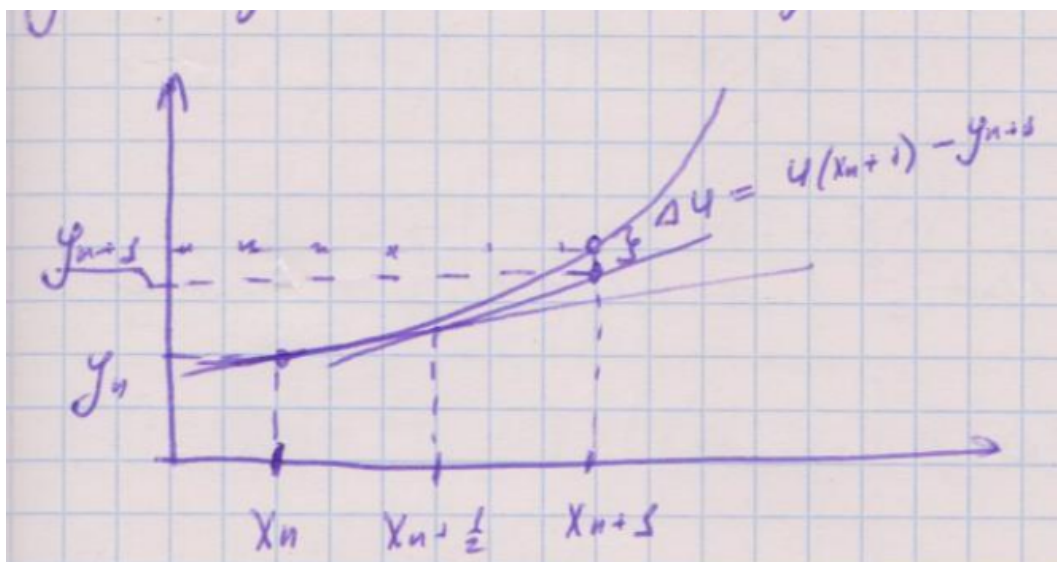
(18) – семейство однопараметрических формул Рунге-Кутты 2-го порядка точности.

Обычно $\alpha = 1$ или $\alpha = \frac{1}{2}$.

Порядок точности: $O(\max h^2)$. При уменьшении шага в два раза, точность увеличивается в 4 раза.

При $\alpha = 1$:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f\left(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)\right)$$



$$1. y_{n+1/2} = y_n + \frac{h_n}{2} f(x_n, y_n)$$

$$2. y'_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$$

$$3. y_{n+1} = y_n + h_n \cdot y'_{n+1/2}$$

Оценим погрешность метода.

$$y_{n+1} = y_n + h \left[(1 - \alpha) f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha} f(x_n, y_n)\right) \right]$$

$$u'(x) = f(x)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

При $\alpha = 1$:

$$y_{n+1} = y_n + h f\left(x_n + \frac{h}{2}\right)$$

$$R = \frac{x_N - x_0}{24} h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_N} |f''(x)|$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n) + f(x_n + h)] - \text{метод трапеций}$$

$$R = \frac{x_N - x_0}{12} h^2 \max_{x_0 \leq x \leq x_N} |f''(x)| - \text{мажорантная оценка}$$

Численные коэффициенты в остаточных членах формулы малы; это является одной из причин хорошей точности схем Рунге-Кутты.

Мажорантная оценка сильно завышена, больше нее погрешности не будет.

10. Метод Рунге - Кутта 4-го порядка точности в задаче Коши для ОДУ. Оценка точности.

Преимущества схем Рунге-Кутты:

- явные – для перехода из n в $(n+1)$ -й узел требуется строго определенное фиксированное количество операций;
- формулы достаточно точные;
- формулы позволяют вести расчеты с разным (переменным) шагом.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка точности

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{h_n}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h_n, y_n + h_n k_3)$$

Рассмотрим обобщение формулы на случай двух переменных. Пусть дана система

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u, v) \rightarrow y \\ v'(x) = \varphi(x, u, v) \rightarrow z \\ v(\xi) = v_0 \\ u(\xi) = u_0 \end{cases}$$

Тогда

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4}{6}$$

$$k_1 = h_n f(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2})$$

$$k_3 = h_n f(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2})$$

$$k_4 = h_n f(x_n + h_n, y_n + k_3, z_n + q_3)$$

$$q_1 = h_n \varphi(x_n, y_n, z_n)$$

$$q_2 = h_n \varphi(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{q_1}{2})$$

$$q_3 = h_n \varphi(x_n + \frac{h_n}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{q_2}{2})$$

$$q_4 = h_n \varphi(x_n + h_n, y_n + k_3, z_n + q_3)$$

Оценим погрешность метода.

$$u'(x) = f(x)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}) + f(x_n + h))$$

$$R = \frac{x_N - x_0}{2880} h^4 \max_{x_0 \leq x \leq x_N} |f^{iv}(x)|$$

11. Метод Адамса в задаче Коши для ОДУ.

Будем рассматривать правую часть уравнения $f(x, u)$ не на всей плоскости ее аргументов x, u , а только на определенной интегральной кривой $u(x)$, соответствующей искомому решению. Тогда она будет функцией только одного аргумента x ; обозначим ее через $F(x) = f(x, u(x))$.

Пусть нам уже известно приближенное решение в нескольких точках сетки $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m}$. Тогда в этих точках известны также $F(x_k) = f(x_k, y_k)$. В окрестности этих узлов можно приближено заменить $F(x)$ интерполяционным многочленом; запишем его для неравномерной сетки в форме Ньютона:

$$\begin{aligned} F(x) = & F(x_n) + (x - x_n)F(x_n, x_{n-1}) + \\ & + (x - x_n)(x - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ & + (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Ограничимся только написанными членами, так как уже они обеспечивают четвертый порядок точности. Для вычисления решения в следующей точке запишем ДУ в интегральной форме

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x))dx = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x)dx \quad (20)$$

и подставим в него интерполяционный многочлен (19). Получим формулу Адамса для переменного шага

$$\begin{aligned} y_{n+1} = & y_n + h_n F(x_n) + \frac{1}{2}h_n^2 F(x_n, x_{n-1}) + \\ & + \frac{1}{6}h_n^2(2h_n + 3h_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ & + \frac{1}{12}h_n^2(3h_n^2 h_{n-1} + 4h_n h_{n-2} + 6h_{n-1}^2 + 6h_{n-1} h_{n-2}) \cdot \\ & \cdot F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}), \end{aligned} \quad (21)$$

где $h_n = x_{n+1} - x_n$.

Эта формула имеет четвертый порядок точности. Если отбросить последнее слагаемое, получим формулу третьего порядка точности. Аналогично получают формулы низших порядков.

Чаще используется менее громоздкий вариант формулы (21), рассчитанный на постоянный шаг интегрирования. Вместо разделенных разностей воспроизводят конечные разности $\Delta^p F_n = p! F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-p})$, приблизительно равные p -й производной в точке $\frac{(x_n + x_{n-p})}{2}$, и получают

$$y_{n+1} = y_n + F_n + \frac{1}{2}h^2\Delta^1 F_n + \frac{5}{12}h^3\Delta^2 F_n + \frac{3}{8}h^4\Delta^3 F_n. \quad (22)$$

Остаточный член этой формулы равен $\frac{251}{750}h^5 F^{iv}(x)$

Чтобы начать расчет методом Адамса, недостаточно знать $y(x_0)$. Для начала расчета по формуле (21) надо знать величину решения в четырех точках x_0, x_1, x_2, x_3 (а при формуле p -го порядка точности – в p точках). Поэтому надо вычислить недостающие значения y_n каким-либо другим методом – методом Рунге-Кутты, или разложением по формуле Тейлора с достаточно большим числом членов. При работе на ЭВМ это увеличивает объем программы. Кроме того, формулы (21) громоздки, а несложные формулы (22) рассчитаны только на постоянный шаг и требуют нестандартных действий при смене шага: надо перейти к формулам (21), сделать по ним четыре шага и снова вернуться к формулам (22). Все это делает метод Адамса неудобным для расчетов на ЭВМ.

Метод Адамса привлекателен тем, что за один шаг приходится только один раз высчитывать $f(x, u)$, которая может быть очень сложной. А в четырехчленной схеме Рунге-Кутты того же порядка точности $f(x, u)$ высчитывается за шаг четыре раза. Однако коэффициент в остаточном члене схемы Рунге-Кутты меньше в 960 раз, чем в (22). Значит при одинаковой точности схема Рунге-Кутты позволяет брать шаг в 5.7 раз крупнее, то есть фактически высчитывать $f(x, u)$ даже меньшее число раз, чем в методе Адамса.

Поэтому сейчас метод Адамса используется реже метода Рунге-Кутты.

12. Неявные численные методы (Эйлера, трапеций, Гира) в задаче Коши для ОДУ.

Метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

Геометрическая интерпретация одного шага метода заключается в том, что решение на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ аппроксимируется касательной $y = y_{n+1} + y'(x_{n+1})(x - x_{n+1})$, проведенной в точке $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Метод трапеций

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, u(x)) dx \quad (23)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] + O(h^2) \quad (24)$$

Эта схема имеет второй порядок точности, допускает счет с неравномерным шагом, не требует специальных приемов для начала счета.

Но у этой схемы есть серьезные недостатки. Во-первых, неизвестно, имеет ли уравнение (24) вещественный корень, то есть разрешима ли задача. Можно привести пример, когда при большом шаге корня нет. Пусть $f(x, u) = u^2$ и $u(0) = 1$; тогда на первом шаге $y_1 = 1 + \frac{1}{2}h(1 + y_1^2)$ и при $h > (1 + \sqrt{2})^{-1}$ вещественного корня нет.

Во-вторых, даже если корень есть, то как его найти? Метод Ньютона применять нежелательно, так как для этого надо дифференцировать $f(u, x)$. Метод деления пополам не обобщается на системы уравнений. Остается метод последовательных приближений

$$y_{n+1}^{(s)} = y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(s-1)})] \quad (25)$$

Однако он сходится к корню, только если $h|f_u| < 2$, то есть при достаточно малом шаге. Если в ходе расчета f_u возрастает, то итерации (25) могут перестать сходиться.

От последней трудности можно избавиться, заодно уменьшив объем вычислений. Для этого заранее ограничивается число итераций и (25) рассматривается как самостоятельная явная схема.

Методы Гира

Методом Гира называют один из множества методов решения жестких задач Коши, основанных на такназываемых формулах дифференцирования назад.

Метод Гира относится к неявным многошаговым разностным методам.

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(x_{n+1}, y_{n+1}) + O(h^2)$$

$$\frac{11}{6}y_{n+1} - 3y_n + \frac{3}{2}y_{n-1} - \frac{1}{3}y_{n-2} = hf(x_{n+1}, y_{n+1}) + O(h^3)$$

Неявные методы Гира обладают хорошими свойствами устойчивости, что позволяет использовать их для решения жестких систем уравнений.

Для решения неявных уравнений метода Гира обычно используется какой-либо итерационный метод, например, метод простой итерации. В качестве начального приближения $y^{(0)}$ можно взять решение, полученное с помощью явного метода Адамса, например, третьего порядка точности.

Благодаря относительной простоте и высокой устойчивости алгоритм приобрел большую популярность и считается «промышленным стандартом» для решения систем большой жесткости.

13. Метод коллокаций в краевой задаче для ОДУ. Привести пример.

Этот метод позволяет найти приближённое решение краевой задачи в виде аналитического выражения. Пусть требуется найти решение линейного дифференциального уравнения

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) \quad (26)$$

на отрезке $x \in [a, b]$ при краевых условиях общего вида:

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) &= A; \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) &= B. \end{aligned} \quad (27)$$

Выберем некоторую совокупность линейно независимых базисных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, из которых $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям (27), а остальные функции $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют однородным краевым условиям.

Приближённое решение краевой задачи (26), (27) ищем в виде линейной комбинации базисных функций

$$y = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x).$$

Такая функция y удовлетворяет краевым условиям при любых a_i . Подставляя функцию $y = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x)$ в уравнение (26), получим некоторый остаточный член $\psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n)$, не равный нулю, поскольку функция y не является точным решением уравнения (26). Однако так подобрать коэффициенты a_i практически невозможно. Поэтому ограничиваются требованием равенства нулю невязки в заданном множестве точек x_1, x_2, \dots, x_n на отрезке $[a, b]$ – точки коллокаций. В этих точках дифференциальное уравнение (26) будет удовлетворяться точно. Таким образом, получается система алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \psi(x_1, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0; \\ \psi(x_2, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0; \\ \dots \\ \psi(x_n, a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

относительно неизвестных $a_i, i = 1, 2, \dots, n$. Число точек коллокаций должно согласовываться с количеством базисных функций. Чем больше используется базисных функций и, соответственно, точек коллокаций, тем точнее получается приближённое решение.

Пример

Пример. Методом коллокаций решить краевую задачу

$$u'' - 2xu + 2u = x^2 \text{ на отрезке } [0, 1] \text{ при } u(0) = 1; \quad u(1) = 0.$$

Решение. В качестве базисных функций выбираем полиномы $\varphi_n(x) = x^n(1-x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям $\varphi_0(0) = 1$, а функции $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, — однородным краевым условиям $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$. Точками коллокаций примем точки $x_1 = 1/3$; $x_2 = 2/3$. Ограничимся тремя базисными функциями и положим приближенное решение уравнения равным

$$y = (1-x) + a_1(x-x^2) + a_2(x^2-x^3).$$

В результате невязка $\psi(x, a_1, a_2)$ будет равна

$$\psi(x, a_1, a_2) = 2 - x^2 + 2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3).$$

Подставляя координаты точек коллокаций $x_1 = 1/3$; $x_2 = 2/3$ в выражение невязки, получим систему уравнений для определения коэффициентов a_1, a_2 :

$$\begin{cases} 48a_1 + 2a_2 = 51; \\ 18a_1 - 46a_2 = -42. \end{cases}$$

Отсюда находим $a_1 = 1,008$, $a_2 = 1,307$ и приближённое решение будет иметь вид

$$y \approx 1 + 0,3x^2 + 1,3x^3.$$

14. Метод Галеркина в краевой задаче для ОДУ. Привести пример.

Рассмотрим метод Бубнова–Галеркина [36] решения линейных дифференциальных уравнений. Этот метод основывается на теореме общих рядов Фурье. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная система ортогональных функций с ненулевой нормой на отрезке $[a, b]$. Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна на $[a, b]$ ко всем функциям $\varphi_n(x)$, то есть

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = 0, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.8)$$

то $f(x) \equiv 0$ при $x \in [a, b]$.

Если непрерывная функция $f(x)$ ортогональна лишь к конечной системе функций $\varphi_i(x)$, то есть $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_N = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 c_n^2 < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — малая величина при достаточно большом N . В этом случае $f(x)$ в среднем на отрезке $[a, b]$ будет сколь угодно мала.

Алгоритм метода Бубнова–Галёркина также основан на выборе базисной системы линейно независимых функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, из которых $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям, а остальные функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют однородным краевым условиям.

На основе этой базисной системы строится приближённое решение задачи в виде их линейной комбинации

$$y = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Подставляя эту функцию в дифференциальное уравнение, получаем невязку

$$\psi(x, a_i) = L[\varphi_0] + \sum_{i=1}^n a_i L[\varphi_i] - f(x)$$

Здесь $L[\varphi_0]$ — дифференциальный оператор; $f(x)$ — правая часть уравнения; $L(u) = f(x)$ — дифференциальное уравнение. Например,

$$L(u) = u'' + p(x)u' + q(x)u.$$

Согласно методу Бубнова–Галёркина требуем, чтобы невязка была ортогональна к базисным функциям $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, что при достаточно большом их числе обеспечивает малость невязки в среднем. В результате получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов a_i , $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\int_a^b \varphi_1(x) \psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0;$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) \psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0;$$

.....

$$\int_a^b \varphi_n(x) \psi(x, a_1, a_2, \dots, a_n) dx = 0.$$

Разрешая эту систему, находим коэффициенты a_i и приближенное решение задачи y .

Пример

Метод Галеркина для нелинейных задач используют лишь для находж-

Пример. Найти методом Бубнова–Галёркина приближённое решение краевой задачи

$u'' - 2xu + 2u = x^2$ на отрезке $[0, 1]$ при условиях $u(0) = 1$; $u(1) = 0$.

Решение. Ради простоты будем рассматривать три базисные функции $\varphi_i(x)$:

$$\varphi_0(x) = 1 - x; \quad \varphi_1(x) = x(1 - x); \quad \varphi_2(x) = x^2(1 - x).$$

Приближённое решение ищем в виде

$$y = (1 - x) + a_1(x - x^2) + a_2(x^2 - x^3).$$

Подставляя $y(x)$ в дифференциальное уравнение, получаем невязку $\psi(x)$:

$$\psi(x, a_1, a_2) = 2 - x^2 + 2a_1(x^2 - 1) + 2a_2(1 - 3x - x^2 + 2x^3).$$

Из условия ортогональности невязки к базисным функциям получаем систему двух линейных уравнений для коэффициентов a_i , $i = 1, 2$:

$$\int_0^1 (x - x^2) \psi(x, a_1, a_2) dx = 0;$$

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) \psi(x, a_1, a_2) dx = 0. \quad (7.9)$$

Подставляя в уравнение (7.9) значения $\psi(x, a_i)$, после интегрирования получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$14a_1 + 8a_2 = 17;$$

$$21a_1 + 22a_2 = 28.$$

Отсюда находим коэффициенты $a_1 = 1,07143$, $a_2 = 0,25$ и приближенное решение задачи $y(x)$:

$$y = 1 + 0,07143x - 0,757143x^2 - 0,25x^3.$$

Для получения более точного решения необходимо использовать большее количество базисных функций.

дения грубого приближения; для линейных задач им можно найти решение с хорошей точностью. Результат очень чувствителен к тому, насколько удачно выбрана система функций $\varphi_k(x)$ для данной задачи.

Метод Галеркина применим только к задачам с линейным (относительно $u(x)$ и ее производных) краевым условиям.

15. Сходимость разностного решения к точному на примере линейного уравнения 2-го порядка в краевой задаче для ОДУ.

В качестве примера рассмотрим

$$\begin{cases} u''(x) - p(x)u(x) = f(x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \\ a \leq x \leq b \end{cases} \quad (29)$$

$p(x), f(x)$ – заданные функции.

Сводить к системе первого порядка не будем.

Вводим сетку:

$$W_n = \{x_n : x_n = a + nh, n = 0..N\}$$

Получим простейшую разностную схему методом разностной аппроксимации.

$$u''_n = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 u^{iv}(\xi), \quad x_{n-1} < \xi < x_{n+1} \quad (30)$$

$$\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - p_n y_n = f_n, \quad p_n = p(x_n), f_n = f(x_n) \quad (31)$$

$$y_{n-1} - (2 + h^2 p_n) y_n + y_{n+1} = h^2 f_n \quad (32)$$

Получаем систему из $N + 1$ уравнений:

$$\begin{cases} y_{n-1} - (2 + h^2 p_n) y_n + y_{n+1} = h^2 f_n \\ y_0 = \alpha \\ y_N = \beta. \end{cases} \quad (33)$$

Система решается методом прогонки.

$z_n = y_n - u_n$ – погрешность. Покажем, что $|z_n| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Подставим в исходное уравнение уравнение второй производной:

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 u^{iv}(\xi) - p_n u_n = f_n \quad (34)$$

$$u_{n-1} - (2 + h^2 p_n)u_n + u_{n+1} = \frac{1}{12}h^4 u^{iv}(\xi) + f_n h^2 \quad (35)$$

Из (35) вычтем (32):

$$\begin{aligned} z_{n-1} - (2 + h^2 p_n)z_n + z_{n+1} &= -\frac{1}{12}h^4 u^{iv}(\xi) \\ (2 + h^2 p_n)z_n &= z_{n-1} + z_{n+1} + \frac{1}{12}h^4 u^{iv}(\xi) \\ |(2 + h^2 p_n)z_n| &\leq |z_{n-1}| + |z_{n+1}| + \frac{1}{12}h^4 |u^{iv}(\xi)| \end{aligned} \quad (36)$$

Возьмем m – номер узла, где $|z_n| \rightarrow \max$:

$$\begin{aligned} |(2 + h^2 p_n)z_m| &\leq 2|z_m| + \frac{h^4}{12}|u^{iv}(\xi)| \\ |z_m| &\leq \frac{h^2}{12p_n}|u^{iv}(\xi)| = O(h^2) \end{aligned} \quad (37)$$

$|z_m| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Таким образом, разностное решение при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению. Разностная схема имеет 2-й порядок точности, то есть погрешность сеточной функции стремится к 0 как $O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$. Конструктивный способ получения решения – метод прогонки.

16. Получение интегро - интерполяционным методом разностной схемы для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в краевой задаче для ОДУ.

В случае квазилинейных уравнений или в задачах с разрывными коэффициентами метод разностной аппроксимации приводит к нарушению законов сохранения на сетке и появлению фиктивных источников слагаемых в разностном уравнении. Указанные эффекты устраняются, если применить так называемый интегро-интерполяционный метод получения разностной схемы.

Суть метода рассмотрим на примере решения квазилинейного уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - p(x)u + f(x) = 0 \quad (7.8)$$

с краевыми условиями достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$x = 0, \quad -k(0) \frac{du}{dx} = F_0,$$

$$x = l, \quad -k(l) \frac{du}{dx} = \alpha(u(l) - \beta),$$

где α, β - известные числа.

Для построения разностной схемы выберем на сетке шаблон $\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$ и ячейку $\{x_{n-1/2}, x_{n+1/2}\}$ (рис.1).

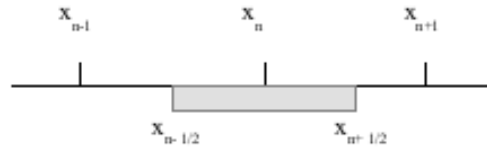


Рис. 1. Шаблон и ячейка (затенена) на сетке

Обозначим

$$F = -k(x) \frac{du}{dx} \quad (7.9)$$

По смыслу (7.9) это поток.

Интегрируем уравнение (7.8) с учетом (7.9) на ячейке

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p(x)u dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) dx = 0.$$

Выполняя интегрирование в первом слагаемом и применяя метод средних для численного вычисления остальных интегралов, получим

$$-(F_{n+1/2} - F_{n-1/2}) - p_n y_n h + f_n h = 0, \quad (7.10)$$

где $p_n = p(x_n)$, $f_n = f(x_n)$

Проинтегрируем (7.9) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{k(x)} dx,$$

$$y_{n+1} - y_n = - F_{n+1/2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)},$$

или

$$F_{n+1/2} = \chi_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}, \quad \chi_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}. \quad (7.11)$$

Аналогично

$$F_{n-1/2} = \chi_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h}, \quad \chi_{n-1/2} = \frac{h}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}} \quad (7.12)$$

Для величин $\chi_{n \pm 1/2}$ можно получить различные приближенные выражения, численно вычисляя интеграл методом трапеций или методом средних. Имеем, соответственно, две формулы, дающие близкие результаты

$$\chi_{n+1/2} = \frac{2k_n k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}, \quad \chi_{n+1/2} = k_{n+1/2} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2}. \quad (7.13)$$

Аналогично

$$\chi_{n-1/2} = \frac{2k_n k_{n-1}}{k_n + k_{n-1}}, \quad \chi_{n-1/2} = k_{n-1/2} = \frac{k_n + k_{n-1}}{2}.$$

Теперь, подставляя в (7.10) выражения для потоков (7.11), (7.12) и приводя подобные члены, получим окончательно систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = D_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (7.14)$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h.$$

Система (7.14) совместно с краевыми условиями решается методом прогонки.

Покажем далее, как получают **разностные аналоги краевых условий** на примере краевого условия при $x=0$.

Проинтегрируем уравнение (7.8) с учетом (7.9) на отрезке $[0, x_{1/2}]$

$$- \int_0^{x_{1/2}} \frac{dF}{dx} dx - \int_0^{x_{1/2}} p(x) u dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x) dx = 0.$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$- (F_{1/2} - F_0) - \frac{h}{4}(p_{1/2} y_{1/2} + p_0 y_0) + \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) = 0.$$

Подставляя выражение для $F_{1/2}$ согласно (7.11) при $n=0$, придем к формуле

$$y_0 = \frac{\chi_{1/2} - \frac{h^2}{8} p_{1/2}}{\chi_{1/2} + \frac{h^2}{8} p_{1/2} + \frac{h^2}{4} p_0} y_1 + \frac{hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{1/2} + f_0)}{\chi_{1/2} + \frac{h^2}{8} p_{1/2} + \frac{h^2}{4} p_0}. \quad (7.15)$$

Можно принять простую аппроксимацию

$$p_{1/2} = \frac{p_0 + p_1}{2}, \quad f_{1/2} = \frac{f_0 + f_1}{2}.$$

Разностный аналог краевого условия получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (7.8) с учетом (7.9) на отрезке $[x_{N-1/2}, x_N]$ и учесть, что поток

$$F_N = \alpha(y_N - \beta), \text{ а } F_{N-1/2} = \chi_{N-1/2} \frac{y_{N-1} - y_N}{h}.$$

При уменьшении шага (в пределе при $h \rightarrow 0$), в (7.15) членами, содержащими h^2 можно пренебречь, тогда (7.15) преобразуется к виду

$$y_0 = y_1 + \frac{hF_0}{\chi_{1/2}},$$

т.е. $-\chi_{1/2} \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0$, что близко к выражению, которое можно получить,

выполняя простейшую аппроксимацию производной односторонней разностью. В этом

случае аппроксимация дает точность порядка $O(h)$, тогда как (7.15) имеет точность $O(h^2)$, совпадающую с порядком точности системы (7.14).

17. Разностная схема для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в цилиндрических координатах в краевой задаче для ОДУ.

см. лекция 14 с.6 или [github](#)

18. Метод прогонки для реализации разностных схем с краевыми условиями 3-го рода.

19. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка в краевой задаче для ОДУ (простые итерации и линеаризация по Ньютону).

8.1. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка

Квазилинейные разностные схемы появляются при разностной аппроксимации квазилинейных уравнений. Квазилинейный вариант уравнения (7.8) из лекции №7 выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dx} \left(k(x, u) \frac{du}{dx} \right) - p(x, u)u + f(x, u) = 0, \quad (8.1)$$

т.е. появляется зависимость функций $k(x, u)$, $p(x, u)$, $f(x, u)$ от искомой функции $u(x)$. Эта зависимость в таких уравнениях может быть и только от $u(x)$, может быть для всех функций или только для отдельных из них.

Разностный аналог уравнения (8.1) строится интегро-интерполяционным методом, в полном соответствии с процедурой, описанной в лекции №7. В результате получается система уравнений, аналогичная (7.14)

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = D_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (8.2)$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h.$$

Однако теперь коэффициенты уравнений зависят от неизвестной функции, и (8.2) теперь оказывается системой нелинейных уравнений. Для ее решения можно предложить два метода.

1. Метод простых итераций

Обозначим текущую итерацию S , а предыдущую $(s-1)$, тогда итерационный процесс организуется по схеме

$$A_n^{s-1} y_{n+1}^s - B_n^{s-1} y_n^s + C_n^{s-1} y_{n-1}^s = D_n^{s-1}, \quad (8.3)$$

Все коэффициенты берутся на $(s - 1)$ -ой итерации, т.е. они известны. Получили обычную линейную схему, решение которой осуществляется методом прогонки. Начальное распределение y_n^0 задается произвольно. Разумеется лучше это делать соотносясь с характером ожидаемого решения. Итерации прекращаются при условии

$$\max \left| \frac{y_n^s - y_n^{s-1}}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon, \text{ для всех } n = 0, 1, \dots, N.$$

Если краевые условия нелинейные, то они естественным образом включаются в общую итерационную процедуру.

2. Линеаризация по Ньютону

Выполняется обычным образом в соответствии с методом Ньютона. При этом надо знать от каких значений искомой сеточной функции (в каких узлах) зависят коэффициенты разностной схемы. В нашем случае

$$A_n = A_n(y_n, y_{n+1}), B_n = B_n(y_{n-1}, y_n, y_{n+1}), C_n = C_n(y_{n-1}, y_n), D_n = D_n(y_n).$$

Выполняя линеаризацию по Ньютону последовательно по неизвестным y_{n-1}, y_n, y_{n+1} , получим

$$\begin{aligned} & (A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} + D_n) \Big|_{s-1} + \left(\frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}} y_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_{n-1}} y_{n-1} + C_n \right) \Big|_{s-1} \Delta y_{n-1}^s + \\ & \left(\frac{\partial A_n}{\partial y_n} y_{n+1} - \frac{\partial B_n}{\partial y_n} y_n - B_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_n} y_{n-1} + \frac{\partial D_n}{\partial y_n} \right) \Big|_{s-1} \Delta y_n^s + \\ & \left(\frac{\partial A_n}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} + A_n - \frac{\partial B_n}{\partial y_{n+1}} y_n \right) \Big|_{s-1} \Delta y_{n+1}^s = 0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

Уравнение (8.4) решается методом прогонки, в результате находятся все Δy_n^s , после чего определяются значения искомой функции в узлах на S - итерации $y_n^s = y_n^{s-1} + \Delta y_n^s$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия

$$\max \left| \frac{\Delta y_n^s}{y_n^s} \right| \leq \varepsilon, \text{ для всех } n = 0, 1, \dots, N$$

20. Методы повышения порядка точности разностной аппроксимации краевых условий 2-го и 3-его рода в краевой задаче для ОДУ (разложение в ряды Тейлора и интегро-интерполяционный метод).

На предыдущей лекции рассматривалось уравнение 2-го порядка

$$v''(x) - g(x)v(x) = f(x), \quad (7.)$$

$$a \leq x \leq b,$$

с краевыми условиями первого рода

$$v(a) = c, \quad v(b) = d,$$

где c и d - заданные числа.

Для получения разностного решения на отрезке $[a, b]$ строится сетку $\{x_i = x_0 + ih\}, i = 0, \dots, N$, где h - шаг сетки.

Существуют другие более сложные краевые условия, например, краевые условия III рода

$$\lambda v'(a) + \alpha v(a) = \beta, \text{ где } \lambda, \alpha, \beta - \text{известные числа.} \quad (7.2)$$

При разностной аппроксимации данных краевых условий необходимо заменить производную ее разностным аналогом. Самое простое решение - это применить одностороннюю разностную формулу. Однако она имеет только первый порядок точности, что огрубляет всю разностную схему задачи до такого же порядка точности. Можно применить следующий прием повышения порядка разностной аппроксимации краевого условия.

В узле x_0 выполняем разложение функции v в ряд Тейлора

$$v_1 = v_0 + h v'(a) + \frac{h^2}{2} v''(a) + \dots \quad (7.3)$$

Выражая в (7.3) первую производную $v'(a)$ из (7.2), а вторую производную из (7.1), получим, заменив как обычно переменную v на y

$$y_1 = y_0 + h \frac{\beta - \alpha y_0}{\lambda} + \frac{h^2}{2} (f(a) - g(a) y_0).$$

Или

$$\lambda \frac{y_1 - y_0}{h} + \alpha y_0 = \beta + \frac{h}{2} \lambda (f(a) - g(a) y_0)$$

Получение разностной схемы для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода интегро - интерполяционным методом

Выше при построении разностной схемы нами применялся простой метод **разностной аппроксимации**, когда производные в уравнении и краевых условиях напрямую заменялись их разностными аналогами. В случае квазилинейных уравнений или в задачах с разрывными коэффициентами данный метод приводит к нарушению законов сохранения на сетке и появлению фиктивных источниковых слагаемых в разностном уравнении. Указанные эффекты устраняются, если применить так называемый интегро - интерполяционный метод получения разностной схемы.

Суть метода рассмотрим на примере решения квазилинейного уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - p(x)u + f(x) = 0 \quad (7.8)$$

с краевыми условиями достаточно общего вида : слева - II рода, справа - III рода

$$\begin{aligned} x=0, \quad & -k(0) \frac{du}{dx} = F_0, \\ x=l, \quad & -k(l) \frac{du}{dx} = \alpha (u(l) - \beta) \end{aligned},$$

где α, β - известные числа.

Для построения разностной схемы выберем на сетке шаблон $\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}\}$ и ячейку $\{x_{n-1/2}, x_{n+1/2}\}$ (рис.1).

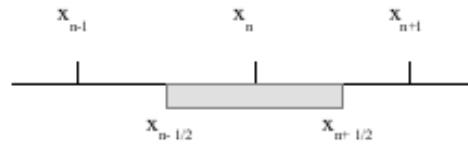


Рис. 1. Шаблон и ячейка (затенена) на сетке

Обозначим

$$F = -k(x) \frac{du}{dx} \quad (7.9)$$

По смыслу (7.9) это поток.

Интегрируем уравнение (7.8) с учетом (7.9) на ячейке

$$-\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} p(x) u dx + \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x) dx = 0.$$

Выполняя интегрирование в первом слагаемом и применяя метод средних для численного вычисления остальных интегралов, получим

$$-(F_{n+1/2} - F_{n-1/2}) - p_n y_n h + f_n h = 0, \quad (7.10)$$

где $p_n = p(x_n)$, $f_n = f(x_n)$

Проинтегрируем (7.9) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{k(x)} dx,$$

$$y_{n+1} - y_n = -F_{n+1/2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)},$$

или

$$F_{n+1/2} = \chi_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}, \quad \chi_{n+1/2} = \frac{h}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}}. \quad (7.11)$$

Аналогично

$$F_{n-1/2} = \chi_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h}, \quad \chi_{n-1/2} = \frac{h}{\int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)}} \quad (7.12)$$

Для величин $\chi_{n \pm 1/2}$ можно получить различные приближенные выражения, численно вычисляя интеграл методом трапеций или методом средних. Имеем, соответственно, две формулы, дающие близкие результаты

$$\chi_{n+1/2} = \frac{2k_n k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}}, \quad \chi_{n+1/2} = k_{n+1/2} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2}. \quad (7.13)$$

Аналогично

$$\chi_{n-1/2} = \frac{2k_n k_{n-1}}{k_n + k_{n-1}}, \quad \chi_{n-1/2} = k_{n-1/2} = \frac{k_n + k_{n-1}}{2}.$$

Теперь, подставляя в (7.10) выражения для потоков (7.11), (7.12) и приводя подобные члены, получим окончательно систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$A_n y_{n+1} - B_n y_n + C_n y_{n-1} = D_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (7.14)$$

где

$$A_n = \frac{\chi_{n+1/2}}{h},$$

$$C_n = \frac{\chi_{n-1/2}}{h},$$

$$B_n = A_n + C_n + p_n h,$$

$$D_n = f_n h.$$

Система (7.14) совместно с краевыми условиями решается методом прогонки.

Покажем далее, как получают **разностные аналоги краевых условий** на примере краевого условия при $x=0$.

Проинтегрируем уравнение (7.8) с учетом (7.9) на отрезке $[0, x_{1/2}]$

$$-\int_0^{x_{1/2}} \frac{dF}{dx} dx - \int_0^{x_{1/2}} p(x) u dx + \int_0^{x_{1/2}} f(x) dx = 0.$$

Второй и третий интегралы вычислим методом трапеций

$$-(F_{1/2} - F_0) - \frac{h}{4}(p_{1/2} y_{1/2} + p_0 y_0) + \frac{h}{4}(f_{1/2} + f_0) = 0.$$

Подставляя выражение для $F_{1/2}$ согласно (7.11) при $n=0$, придем к формуле

$$y_0 = \frac{\chi_{1/2} - \frac{h^2}{8} p_{1/2}}{\chi_{1/2} + \frac{h^2}{8} p_{1/2} + \frac{h^2}{4} p_0} y_1 + \frac{hF_0 + \frac{h^2}{4}(f_{1/2} + f_0)}{\chi_{1/2} + \frac{h^2}{8} p_{1/2} + \frac{h^2}{4} p_0}. \quad (7.15)$$

Можно принять простую аппроксимацию

$$p_{1/2} = \frac{p_0 + p_1}{2}, \quad f_{1/2} = \frac{f_0 + f_1}{2}.$$

Разностный аналог краевого условия получается аналогичным образом, если проинтегрировать уравнение (7.8) с учетом (7.9) на отрезке $[x_{N-1/2}, x_N]$ и учесть, что поток

$$F_N = \alpha(y_N - \beta), \text{ а } F_{N-1/2} = \chi_{N-1/2} \frac{y_{N-1} - y_N}{h}.$$

При уменьшении шага (в пределе при $h \rightarrow 0$), в (7.15) членами, содержащими h^2 можно пренебречь, тогда (7.15) преобразуется к виду

$$y_0 = y_1 + \frac{hF_0}{\chi_{1/2}},$$

$$\text{т.е. } -\chi_{1/2} \frac{y_1 - y_0}{h} = F_0, \text{ что близко к выражению, которое можно получить,}$$

выполняя простейшую аппроксимацию производной односторонней разностью. В этом

случае аппроксимация дает точность порядка $O(h)$, тогда как (7.15) имеет точность $O(h^2)$, совпадающую с порядком точности системы (7.14).

21. Уравнения в частных производных. Области применения. Классификация уравнений второго порядка. Общие понятия о методах решения.

Математические модели, построенные на основе уравнений в частных производных, позволяют описывать поля разнообразной физической природы. Это могут быть поля температур, плотностей, скоростей и концентраций частиц, гравитационные, электромагнитные, радиационные поля и др. С уравнениями в частных производных приходится иметь дело в различных областях науки и техники при формировании моделей гидро- и газодинамики, переноса излучения, квантовой механики, теплопередачи, физики плазмы и т. д. В указанных уравнениях в качестве независимых переменных обычно выступают время и пространственные координаты, но могут использоваться и такие переменные, как проекции скоростей частиц на координатные оси, что может увеличить размерность уравнений до семи.

9.1. Классификация уравнений в частных производных

В лекции рассматриваются методы решения уравнений второго порядка, линейных относительно старших производных. Общий вид таких уравнений в случае двух переменных может быть представлен следующим образом

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

где коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} в общем случае являются функциями x, y, u, u_x, u_y . В этом случае уравнение называется *квазILINEЙНЫМ*. Если данные коэффициенты зависят только от x, y , то уравнение рассматривается как *линейное относительно старших производных*. Наконец, уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции и ее первых производных, т. е. уравнение может быть записано в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0,$$

где все коэффициенты являются функциями только x, y . Если все коэффициенты не зависят от x, y , то уравнение будет *линейным с постоянными коэффициентами*.

В случае, если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} равны нулю, а $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$, то уравнение имеет первый порядок и называется *уравнением переноса*.

В зависимости от знака дискриминанта $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ уравнения делятся на *гиперболические* ($d > 0$), *параболические* ($d = 0$) и *эллиптические* ($d < 0$).

Общая классификация методов решения уравнений всех типов аналогична рассмотренной ранее для обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно: существуют *точные, аналитические приближенные* и *численные* методы. Точные решения уравнений в частных производных удастся получить лишь в ограниченном ряде случаев, поэтому при реализации вычислительных моделей, построенных на таких уравнениях, особенно велика роль численных методов.

К точным методам решения относятся метод разделения переменных, метод функций источника, метод распространяющихся волн и др. Среди аналитических

приближенных методов можно отметить метод малого параметра и метод Бубнова-Галеркина. К численным методам относятся метод конечных разностей (сеточный) и метод конечных элементов (проеекционно-сеточный). В настоящем пособии внимание сосредоточено на методе конечных разностей.

22. Постановка задач Коши, краевых и смешанных краевых задач для уравнений в частных производных. Привести примеры с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го родов.

9.2. Постановки задач для уравнений в частных производных

Рассмотрим уравнения математической физики, в которых независимыми переменными являются время t и пространственные координаты $\vec{r}(x, y, z)$.

Для выделения единственного решения уравнения должны быть сформулированы дополнительные условия, которые записываются на границе области изменения независимых переменных $\Omega(r, t)$. При этом различают задачу Коши (заданы только начальные условия, т.е. условия при $t = t_0$, например, задача для бесконечного пространства), краевые задачи (заданы условия на границе пространственной области) и смешанные краевые, или нестационарные краевые, задачи (заданы и начальные, и краевые условия).

В качестве примера обсудим постановку задачи для уравнения параболического типа в одномерной по пространству и двумерной постановках. В одномерном варианте имеем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < T_0.$$

Начальное условие формулируется в виде

$$u(x, 0) = \mu(x). \quad (2)$$

Граничные условия могут быть нескольких типов в зависимости от того задаются ли на границах функция, или ее производная, или соотношение между функцией и ее производной. Могут быть также заданы соотношения на контактной границе и, кроме того, поставлены нелинейные граничные условия.

Простейшие граничные условия первого рода формируются путем задания функции

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Граничные условия второго рода содержат производную от искомой функции. Например, при $x=0$ можно написать соотношение

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t).$$

Граничные условия третьего рода

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = \phi(t).$$

В двумерной постановке задача формулируется следующим образом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, z, t), \quad (4)$$

$$(x, z) \in \Omega, \quad 0 < t < T_0$$

Начальное условие:

$$u(x, z, 0) = \mu(x, z) \quad (5)$$

Краевые условия первого рода на границе Γ :

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(x, z, t)$$

или более подробно для прямоугольной пространственной области $0 < x < l, 0 < z < s$

$$\begin{aligned} u(0, z, t) &= \mu_1(z, t), \quad u(l, z, t) = \mu_2(z, t), \\ u(x, 0, t) &= \mu_3(x, t), \quad u(x, s, t) = \mu_4(x, t) \end{aligned} \quad (6)$$

Краевые условия второго рода ставятся следующим образом

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \varphi(x, y, t),$$

где n - внешняя нормаль к границе области.

23. Основные понятия метода конечных разностей на примере уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Понятие о явных и неявных схемах.

Применение разностного метода начинают с построения в области изменения аргументов $\Omega(\bar{r}, t)$ разностной сетки, представляющей собой множество точек (узлов), образованных пересечением систем линий. На этой сетке производные, входящие в уравнение, аппроксимируют разностными аналогами, в которые входят значения функции в узлах сетки. Начальные и граничные условия также заменяют разностными соотношениями. Построенная таким образом система алгебраических уравнений называется *разностной схемой*, решение которой дает приближенные значения искомой функции в узлах. Получающаяся функция дискретного аргумента, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

Рассмотрим построение сетки на примере разностной аппроксимации уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < T_0.$$

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = \mu(x). \quad (2)$$

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Построим в области интегрирования уравнения прямоугольную сетку. Последняя образуется пересечением линий $\{x_n = nh, 0 \leq n \leq N, t_m = m\tau, 0 \leq m \leq M\}$, где h, τ шаги сетки по переменным x и t . Значения функции в узлах сетки обозначают как $u_n^m = u(x_n, t_m)$ - (рис.1.1), и, соответственно $u_n^{m+1} = u(x_n, t_{m+1})$. Значения сеточной функции в узлах, являющейся результатом решения разностных уравнений, обозначим y_n^m и y_n^{m+1} , причем для удобства записи формул освободим верхний индекс, приняв $y_n = y_n^m$ и $\hat{y}_n = y_n^{m+1}$.

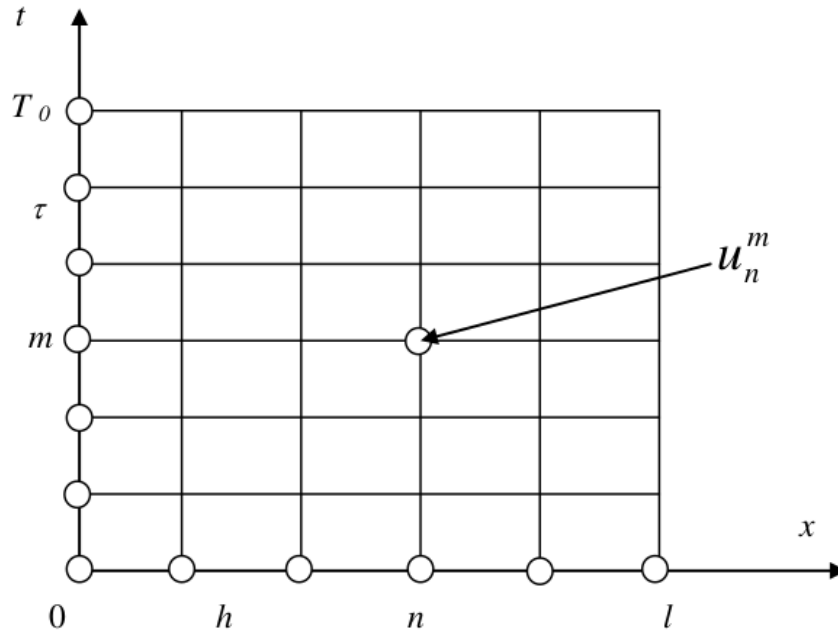


Рис. 1.1. Разностная сетка для уравнения (1.1)

Для уравнения (1.1) совокупность узлов, лежащих на линии $t = t_m$ (или на плоскости, если решается двумерная по пространству задача, или же на гиперплоскости в случае многомерной постановки), называется слоем. Линии на слое, вдоль которых меняется только одна пространственная переменная, называются направлением. Выберем конфигурацию узлов, на которой будем проводить аппроксимацию дифференциального уравнения. Эта конфигурация узлов называется шаблоном. Для одной и той же задачи можно выбрать много разных шаблонов. На рис.1.2 показаны три шаблона.

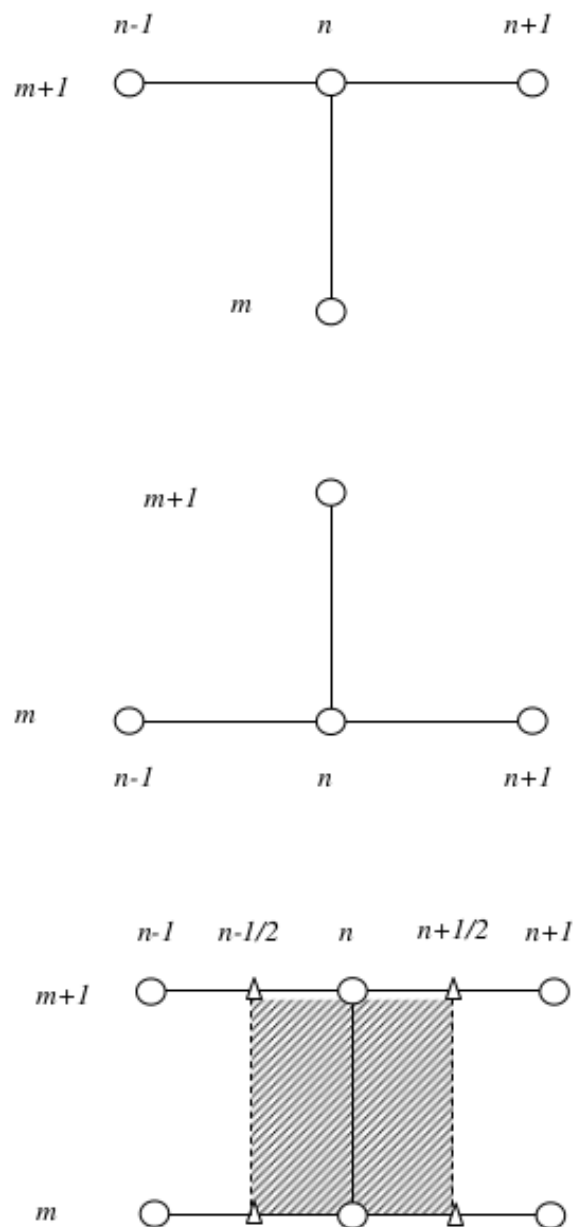


Рис. 1.2. Шаблоны (I - III) разностных схем (на схеме III заштрихована ячейка)

Заменяя в уравнении (1) производные разностными аналогами, получаем на выбранных шаблонах соответствующие разностные схемы:

на шаблоне I

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \varphi_n, \quad (7)$$

на шаблоне II

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n, \quad (8)$$

на шаблоне III

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\sigma \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + a(1-\sigma) \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n. \quad (9)$$

В формулах (7)-(9) $1 \leq n \leq N-1$, σ - параметр со значениями в пределах $0 \dots 1$, a - коэффициент уравнения. Схемы дополняются уравнениями, аппроксимирующими граничные условия:

для шаблонов I и III

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}); \quad (10)$$

для шаблона II

$$y_0 = \mu_1(t_m), y_N = \mu_2(t_m). \quad (11)$$

Начальное условие имеет вид

$$y_n^0 = \mu(x_n). \quad (12)$$

Остановимся на вопросе существования решения.

Схема (8) представляет собой формулу для вычисления единственного неизвестного \hat{y}_n , которое легко выразить через значения сеточной функции на предыдущем слое

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{\tau a}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau \varphi_n, \quad (13)$$

где $\varphi_n = f(x_n, t_m)$, $1 < n < N-1$.

При этом значения y_0 и y_N находят из краевых условий (11), а при расчете \hat{y}_n^1 используют начальное условие (12). Схемы типа (8) называются *явными*.

Схемы (7) и (9) относятся к типу *неявных*. Для получения решения на данном слое здесь приходится решать систему уравнений, в которой каждое уравнение, кроме первого и последнего, содержит три неизвестных: $\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}$. Системы (7), (9) могут быть приведены к виду

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -F_n, \quad 1 < n < N-1, \quad (14)$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}), \quad n=0 \text{ и } n=N.$$

Коэффициенты разностной схемы (1.7):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \tau \varphi_n + y_n \end{aligned} \quad (15)$$

Для схемы (9) коэффициенты следующие

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\tau a \sigma}{h^2}, \\ C_n &= A_n, \\ B_n &= A_n + C_n + 1, \\ F_n &= \left(1 - \frac{2\tau a(1-\sigma)}{h^2}\right) y_n + \frac{\tau a(1-\sigma)}{h^2} (y_{n-1} + y_{n+1}) + \tau \varphi_n. \end{aligned} \quad (16).$$

Матрица линейной системы (14) с коэффициентами (15), (16) - трехдиагональная, решение системы может быть найдено методом прогонки. При $\sigma > 0$ решение существует, единственно, и прогонка устойчива в силу преобладания диагонального элемента матрицы системы: из (15), (16) ясно, что модуль этого элемента больше суммы модулей недиагональных членов.

Видно, что при $\sigma=0$ схема (9) переходит в явную схему (8), а при $\sigma=1$ - в чисто неявную (7). При $\sigma = \frac{1}{2}$ схема (9) называется *симметричной (по времени)*.

24. Получение разностной схемы для одномерного квазилинейного параболического уравнения с краевыми условиями 3-го рода интегро-интерполяционным методом.

см. лекцию 14 (начало)

25. Решение разностных схем для квазилинейных уравнений в частных производных- методом простых итераций и методом Ньютона.

см. лекцию 8 (начало)

26. Методы повышения порядка разностной аппроксимации краевых условий 2-го и 3-го родов (интегро- интерполяционная процедура, разложение в ряд Тейлора) для уравнений в частных производных.

27. Понятие невязки для разностных схем. Привести пример вычисления невязки для неявной схемы. Свойство аппроксимации разностных схем для уравнений в частных производных.

Введем понятие невязки разностной схемы, построенной для дифференциального уравнения, записанного в общем операторном виде

$$Au(x) = f \quad (38)$$

с дополнительными условиями

$$Bu(x) = \mu(x) \quad (39)$$

Разностная схема для задачи (38), (39):

$$A_h u = \varphi_h \quad (40)$$

$$B_h u = \beta_h \quad (41)$$

Если подставить в соотношения (40) точное решение, то данное равенство будет нарушено, так как приближенное решение u не совпадает с точным решением u .

Невязкой называется величина

$$\psi = \varphi_h - A_h u = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) \quad (42)$$

Для граничных условий получаем невязку в виде

$$\rho = \beta_h - B_h u = (Bu - \mu) - (B_h u - \beta_h) \quad (43)$$

Дадим определение аппроксимации. Разностная схема (40), (41) аппроксимирует задачу (38), (39), если в некоторой норме $\|\psi\| \rightarrow 0$, $\|\rho\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и аппроксимация имеет p -ый порядок, если $\|\psi\| = O(h^p)$, $\|\rho\| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Фигурирующие в приведенных соотношениях нормы могут быть определены как сеточные аналоги различных норм: чебышевской $\|u(x)\|_C$, гильбертовой $\|u(x)\|_{L_2}$, энергетической $\|u(x)\|_E$:

$$\|u(x)\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|,$$

$$\|u(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) u^2(x) dx}, \quad \rho(x) > 0,$$

$$\|u(x)\|_E = \sqrt{\int_a^b [\rho_1(x) u_x^2(x) + \rho_0(x) u^2(x)] dx}, \quad \rho_1(x) > 0, \rho_0(x) > 0.$$

Указанные сеточные аналоги выписанных норм представляют в таком виде, чтобы при $h \rightarrow 0$ они переходили в эти нормы:

$$\|y\|_C = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|,$$

$$\|y\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \rho_n y_n^2 h_n}.$$

Невязку оценивают, проводя разложение точного решения в ряд Тейлора. Найдем невязку разностной схемы (9) для уравнения (1).

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1)$$

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a\sigma \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + a(1 - \sigma) \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n. \quad (9)$$

Выполним разложение решения на сетке, принимая за центр разложения точку

$(x_n, t_n + \frac{\tau}{2})$. Получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n\pm 1} = \bar{u} + \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} \pm hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} \pm \\ \pm \frac{\tau h}{2} u_{tx} \pm \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 hu_{tx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^2 u_{txx} \pm \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 hu_{txx} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} \pm \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^3 u_{txxx} + \dots \end{aligned}$$

$$\bar{u}_n = \bar{u} + \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + \dots,$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \bar{u} - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} - \\ - \frac{\tau h}{2} u_{tx} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 hu_{tx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^2 u_{txx} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 hu_{txx} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^3 u_{txxx} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{n-1} = \bar{u} - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} - hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} + \\ + \frac{\tau h}{2} u_{tx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 hu_{tx} - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^2 u_{txx} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 hu_{txx} + \frac{1}{4} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txx} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right) h^3 u_{txxx} + \dots \end{aligned}$$

$$u_n = \bar{u} - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + \dots$$

В этих формулах введены обозначения:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т.д.}$$

Подставив эти разложения в формулу для невязки, придем к соотношению

$$\begin{aligned}\psi &= \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - f(x, t) \right)_{x=x_n}^{t=t_n + \frac{\tau}{2}} - \frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + a\sigma \frac{\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}}{h^2} + \\ &+ a(1-\sigma) \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + \varphi_n = \\ &= a\tau(\sigma - \frac{1}{2})u_{txx} + \frac{\tau^2}{8}(au_{nxx} - \frac{1}{3}u_{tn}) + \frac{ah^2}{12}u_{xxx} + \varphi_n - f(x_n, t_n + \frac{\tau}{2}) + O(\tau^2 + h^2).\end{aligned}$$

Можно заметить, что если взять $\varphi_n = f(x_n, t_n + \frac{\tau}{2})$, то при $\sigma = \frac{1}{2}$ рассматриваемая разностная схема имеет аппроксимацию $O(\tau^2 + h^2)$, а при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ - $O(\tau + h^2)$.

Аналогично проверяется аппроксимация начальных и граничных условий, если они содержат производные от функции, например, граничных условий второго или третьего рода.

28. Понятие устойчивости разностных схем по начальным данным и правой части. На основе принципа максимума исследовать устойчивость явной и неявной схем для уравнения параболического типа.

Введем понятие невязки разностной схемы, построенной для дифференциального уравнения, записанного в общем операторном виде

$$Au(x) = f, \quad (17)$$

с дополнительными условиями

$$Bu(x) = \mu(x), \quad (18)$$

Разностная схема для задачи (17), (18):

$$A_h y = \varphi_h, \quad (19)$$

$$B_h y = \beta_h \quad (20)$$

Дадим определение устойчивости.

Разностная схема $A_h y = \varphi_h$, $B_h y = \beta_h$ устойчива, если ее решение непрерывно зависит от входных данных φ_h и β_h , и эта зависимость равномерна относительно шага сетки, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, не зависящее от шага h (по крайней мере, для достаточно малых h), что $\|y^{(1)} - y^{(2)}\| \leq \varepsilon$, если $\|\varphi_h^{(1)} - \varphi_h^{(2)}\| \leq \delta$, $\|\beta_h^{(1)} - \beta_h^{(2)}\| \leq \delta$.

В случае нескольких независимых переменных рассматривают условную и безусловную устойчивость. Если сформулированные выше условия выполняются при определенном соотношении шагов по различным переменным, то устойчивость называется *условной*, в противном случае, когда соотношение между шагами может быть произвольным, устойчивость называется *безусловной*. При этом непрерывную зависимость решения от φ_h называют *устойчивостью по правой части*, а непрерывную зависимость от β_h - *устойчивостью по дополнительным условиям* (начальным и граничным).

см. лекция 12.

29. На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечной явной разностной схемы для уравнения параболического типа.

30. На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечной неявной разностной схемы для уравнения параболического типа.

калиткин 368

31. На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость шеститочечной разностной схемы для уравнения параболического типа.

калиткин 370

32. Сходимость разностных схем для уравнений в частных

производных. Теорема о сходимости разностного решения к точному.

см. лекция 12 с 22

33. Продольно-поперечная схема для решения многомерных уравнений в частных производных.

калиткин с. 391

34. Локально-одномерный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.

калиткин с. 394

Билет 16

1. Опишите свойство аппроксимации разностных схем для уравнений в частных производных. Что определяет аппроксимация, и как она соотносится со сходимостью разностного решения к точному.

2. Опишите алгоритм численного решения задачи Коши для ОДУ неявным методом трапеций на сетке $W_n = \{x_n : x_n = nh, n = 0..N\}$

$$u^{iv} = f(x, u, u')$$

$$u(0) = \alpha$$

$$u'(0) = \beta$$

$$u''(0) = \gamma$$

$$u'''(0) = \chi$$

Введем понятие невязки разностной схемы, построенной для дифференциального уравнения, записанного в общем операторном виде

$$Au(x) = f \tag{44}$$

с дополнительными условиями

$$Bu(x) = \mu(x) \tag{45}$$

Разностная схема для задачи (44), (45):

$$A_h y = \varphi_h \tag{46}$$

$$B_h y = \beta_h \tag{47}$$

Невязкой называется величина

$$\psi = \varphi_h - A_h u = (Au - f) - (A_h u - \varphi_h) \quad (48)$$

Для граничных условий получаем невязку в виде

$$\rho = \beta_h - B_h u = (Bu - \mu) - (B_h u - \beta_h) \quad (49)$$

Разностная схема (46), (47) аппроксимирует задачу (38), (39), если в некоторой норме $\|\psi\| \rightarrow 0, \|\rho\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, и аппроксимация имеет p -ый порядок, если $\|\psi\| = O(h^p), \|\rho\| = O(h^p)$ при $h \rightarrow 0$.

Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.

Порядок точности разностного метода совпадает с порядком его аппроксимации.