Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»

КАФЕДРА «ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭВМ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

Лабораторная работа № 2
по дисциплине «Моделирование»

Студент Бугаков И. С.

Группа ИУ7-74Б

Преподаватель Рудаков И. В.

Москва, 2025

1 Задание

Разработать программное обеспечение, предоставляющее возможность вычислить предельные вероятности состояний и среднее время нахождения в каждом состоянии для сложной системы в установившемся режиме работы с числом состояний ≤ 10.

Интерфейс должен позволять указать число состояний и ввести матрицу интенсивностей потоков переходов состояний. В результате работы алгоритма должны быть отображены предельные вероятности и среднее время нахождения системы в каждом из состояний.

2 Теоретическая часть

2.1 Марковский процесс

Случайный процесс, протекающей в некоторой сложной системе, называется марковским, если для каждого момента времени t вероятность любго состояни системы в будущем зависит только от состояния в настоящем и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние.

Процесс, протекающий в системе, которая может находиться в одном из n состояний, задается матрицей интенсивностей потоков переходов, которая имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,j} & \dots & \lambda_{1,n} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \dots & \lambda_{2,j} & \dots & \lambda_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{i,1} & \lambda_{i,2} & \dots & \lambda_{i,j} & \dots & \lambda_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n,1} & \lambda_{n,2} & \dots & \lambda_{n,j} & \dots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $\lambda_{i,j}$ — интенсивность потока перехода из состояния i в состояние j.

Для определения вероятности нахождения системы в некотором состоянии в момент времени t составляют уравнения Колмогорова. Для сосостояния i уравнение имеет вид:

$$p_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,i} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}, \tag{2.2}$$

где $p_i(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии i в момент времени t.

2.2 Вычисление предельных вероятностей нахождения в отдельно взятом состоянии

При стационарном (установившемся) режиме работы ($t \to \infty$) системы, производные вероятностей состояний в 2.2 полагаются равными нулю. В этом случае, уравнения Колмогорова образуют систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,1} p_j - p_1 \sum_{j=1}^{n} \lambda_{1,j} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,2} p_j - p_2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_{2,j} = 0 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} p_j - p_n \sum_{j=1}^{n} \lambda_{n,j} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

где p_i — предельная вероятность нахождения системы в состоянии i при $t \to \infty$.

Полученная СЛАУ является однородной и в общем случае может не иметь нетривиального решения. Дополнительно вводится условие нормировки вида:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \tag{2.4}$$

Для решения СЛАУ в программной реализации используется сингулярное разложение из математического пакета Eigen, которое позволяет найти правый сингулярный вектор, который представляет ненормированные корни однородной СЛАУ.

2.3 Вычисление среднего времени нахождения в отдельно взятом состоянии

Для вычисления среднего времени нахождения системы в состоянии i используется выражение:

$$t_i = \frac{p_i}{\sum_{j=1, j\neq i}^{n}(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i}) + \lambda_{i,i}} \tag{2.5}$$

3 Практическая часть

3.1 Результаты работы программы

Результаты работы программы представлены на рисунках 3.1 3.2.

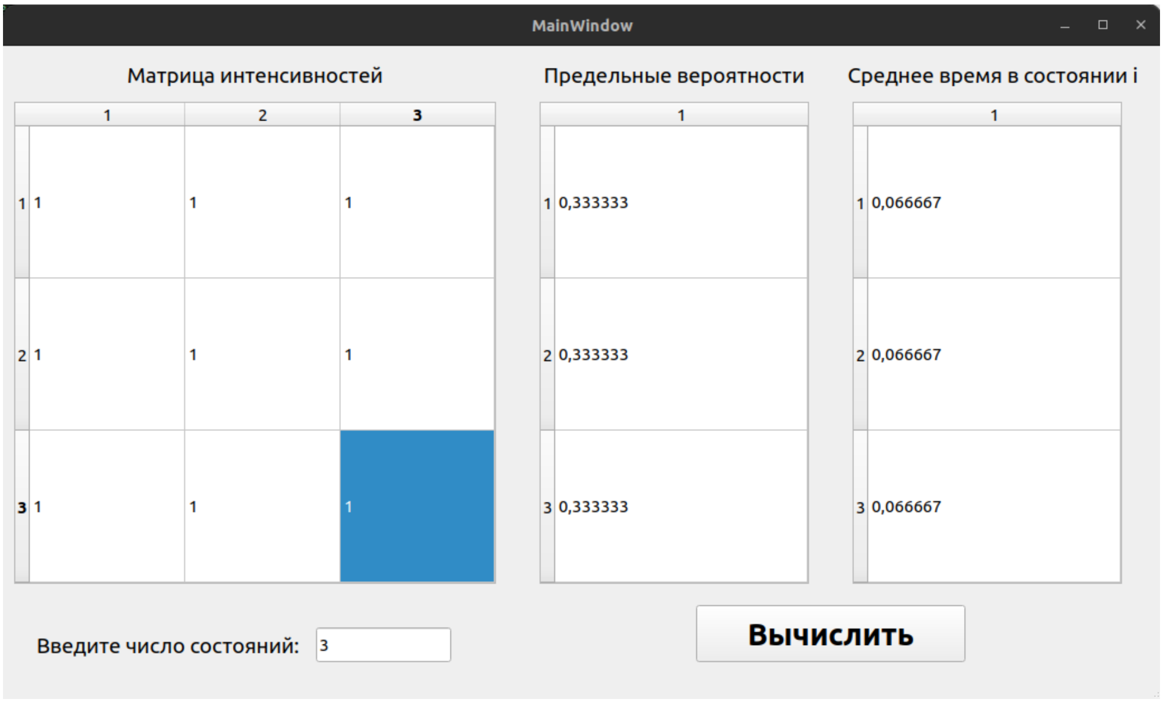

Рисунок 3.1 — Результат работы программы

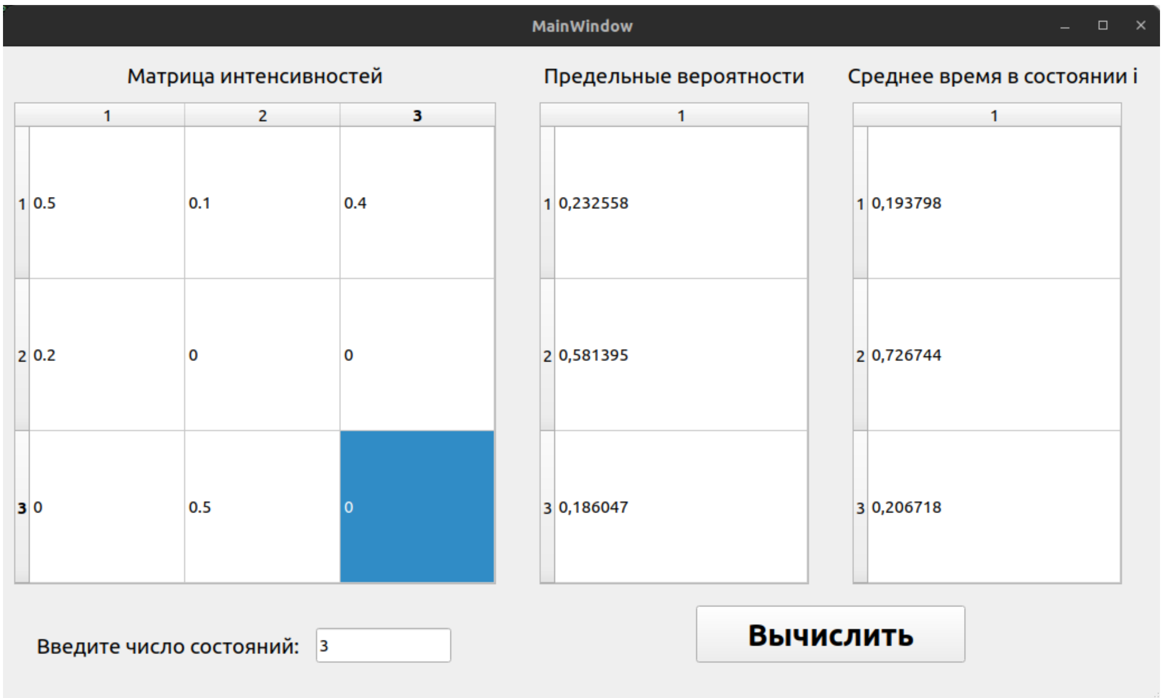

Рисунок 3.2 — Результат работы программы