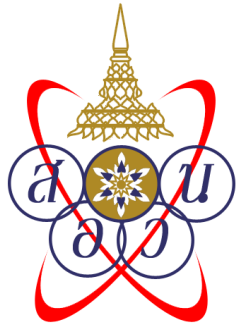


เอกสารประกอบการอบรม

Backtracking and Branch-and Bound

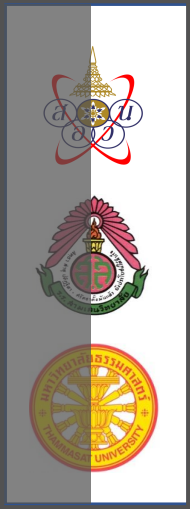
ค่ายคอมพิวเตอร์โอลิมปิก สอวน. ค่าย 2 2/2566
ศูนย์โรงเรียนสามเสนวิทยาลัย - มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ระหว่างวันที่ 18 มีนาคม – 3 เมษายน 2567

โดย
สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

27 มีนาคม 2567

อัลกอริทึม 3-2:

- Backtracking
- Branch-and-Bound



ผศ.ดร.ฐาปนา บุญชู

27 มีนาคม 2567

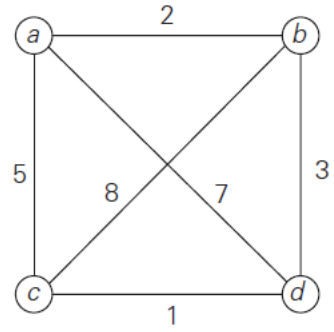
ทบทวนปัญหาที่สำคัญ
(Exhaustive Search)

Exhaustive Search

- ปัญหาสำคัญหลายปัญหาเป็นการค้นหาองค์ประกอบ (Element) ที่มีคุณลักษณะเฉพาะใน Space ที่เติบโต (Grow) อย่างรวดเร็วในระดับ Exponential หรือเร็วกว่านั้น ตาม Instance size
- โดยทั่วไปปัญหาเหล่านี้มักจะเกี่ยวข้องกับ Combinatorial objects
  - Permutations
  - Combinations
  - Subsets ของ Set ที่สนใจ
- หลาย ๆ ปัญหาเป็น Optimization problems ที่ค้นหาองค์ประกอบที่หาค่าสูงหรือต่ำสุดของคุณลักษณะบางอย่าง เช่น Path length หรือ Assignment cost

Traveling salesman problem (TSP):

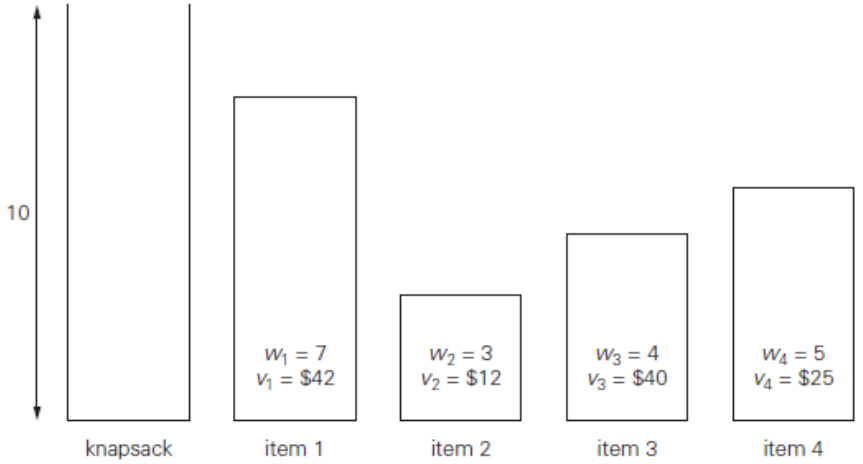
- **Traveling salesman problem (TSP):** ปัญหาคือการค้นหา Shortest tour จาก Set ของ n เมืองที่ Tour นี้จะเยี่ยมแต่ละเมืองเพียงครั้งเดียวเท่านั้นก่อนที่เดินทางกลับเมืองเริ่มต้น
  - โดยเราสามารถจำลองปัญหานี้มาเป็น Weighted graph ได้ (Vertices: เมือง, Edge weight: ระยะทางระหว่างเมือง)
  - เป็นปัญหาการหา **Shortest Hamiltonian circuit** ของกราฟ ที่ถูกนิยามโดย ลำดับ n + 1 adjacent vertices $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-1}}, v_{i_0}$ โดย $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-1}}$ จะไม่ซ้ำกัน
  - เราสามารถ Generate ทุก Tours ที่เป็นไปได้โดย Permutations ของ n-1 เมืองระหว่างกลาง หาเส้นทางของ Tour เลือกเส้นที่สั้นที่สุด
  - จำนวน Permutation ทั้งหมดคือ $\frac{1}{2}(n-1)!$



Tour	Length	
a —> b —> c —> d —> a	l = 2 + 8 + 1 + 7 = 18	
a —> b —> d —> c —> a	l = 2 + 3 + 1 + 5 = 11	optimal
a —> c —> b —> d —> a	l = 5 + 8 + 3 + 7 = 23	
a —> c —> d —> b —> a	l = 5 + 1 + 3 + 2 = 11	optimal
a —> d —> b —> c —> a	l = 7 + 3 + 8 + 5 = 23	
a —> d —> c —> b —> a	l = 7 + 1 + 8 + 2 = 18	

Knapsack Problem

- มีของจำนวน n ชิ้น โดยแต่ละชิ้นมีน้ำหนัก (Weight) คือ $w_1, \ldots, w_n$ และมูลค่า (Value) $v_1, \ldots, v_n$ และถุง (Knapsack) ที่มีความจุ W ให้หา Subset ของที่สามารถบรรจุลงในถุงได้โดยที่มูลค่ารวมใน Subset นั้นมีมูลค่ามากที่สุด
- **Exhaustive search** คือการ **Generate ทุก Subset ที่เป็นไปได้** แล้วหาผลรวมของ Weights และ Values ใน Subset เหล่านั้นที่เป็นไปตามข้อกำหนด
- เนื่องจากจำนวนของ Subset ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 2^n ทำให้ Exhaustive search ใช้เวลา $\Omega(2^n)$ => NP-hard problems (ไม่มีใครรู้จัก Polynomial-time algorithm ใดที่แก้ NP-hard Problem – ยังไม่มีการพิสูจน์แต่ Computer scientists เชื่อแบบนั้น)
  - Backtracking และ Branch and Bound สามารถแก้บาง Instances ของปัญหานี้ได้



(a)

Subset	Total weight	Total value
∅	0	$0
{1}	7	$42
{2}	3	$12
{3}	4	$40
{4}	5	$25
{1, 2}	10	$54
{1, 3}	11	not feasible
{1, 4}	12	not feasible
{2, 3}	7	$52
{2, 4}	8	$37
{3, 4}	**9**	**$65**
{1, 2, 3}	14	not feasible
{1, 2, 4}	15	not feasible
{1, 3, 4}	16	not feasible
{2, 3, 4}	12	not feasible
{1, 2, 3, 4}	19	not feasible

(b)

Assignment Problem

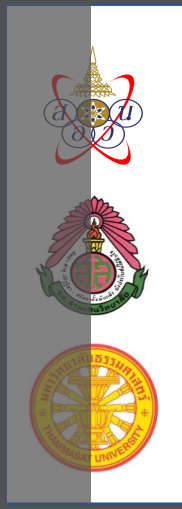
- มีจำนวน n คนเพื่อถูกมอบหมาย (Assign) ให้ทำงาน n งาน (1 คนต่อ 1 งาน)
- โดย C[i, j] คือราคา (Cost) ที่ต้องจ่ายเมื่อมอบหมายงานคนที่ i-th ไปยังงานที่ j-th
  - โดย i, j = 1, 2, …, n
- โจทย์คือต้องการหาการมอบหมาย (Assignment) ที่มีราคาน้อยมากที่สุด
- พิจารณา Cost matrix ด้านบน โจทย์คือ ในแต่ละแถวให้เลือกหนึ่งค่าโดยที่แต่ละแถวจะเลือกค่าในคอลัมน์ที่ซ้ำกันไม่ได้และผลรวมทั้งหมดทั้งต้องมีค่าน้อยมากที่สุด
- Exhaustive search คือการที่เราต้อง **Generate ทุก Permutation ของ 1, …, n** หา Cost รวมแล้วหาค่าที่น้อยที่สุด
- สามารถใช้ Hungarian method แก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้น

	Job 1	Job 2	Job 3	Job 4
Person 1	9	2	7	8
Person 2	6	4	3	7
Person 3	5	8	1	8
Person 4	7	6	9	4

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

<1, 2, 3, 4> cost = 9 + 4 + 1 + 4 = 18
<1, 2, 4, 3> cost = 9 + 4 + 8 + 9 = 30
<1, 3, 2, 4> cost = 9 + 3 + 8 + 4 = 24
<1, 3, 4, 2> cost = 9 + 3 + 8 + 6 = 26
<1, 4, 2, 3> cost = 9 + 7 + 8 + 9 = 33
<1, 4, 3, 2> cost = 9 + 7 + 1 + 6 = 23

Backtracking and Branch-and-Bound



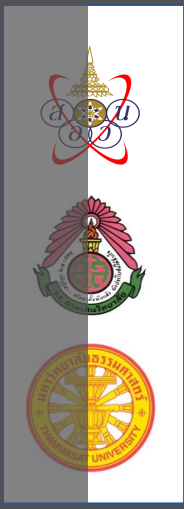
Backtracking and Branch-and-Bound

- Backtracking (BT) and Branch-and-Bound (BB) เป็นขั้นตอนวิธีที่ช่วยแก้ Combinatorial Problems ที่ยาก ที่มีขนาดใหญ่บางปัญหา (Some large instances of problems)
- ต่างจาก Exhaustive search โดยที่ BT และ BB สร้างค่อย ๆ สร้าง Candidate solution บางส่วน
  - ถ้า ค่าส่วนที่เหลือไม่มี Potential values ขององค์ประกอบส่วนอื่นที่เหลือ ก็ไม่จำเป็นต้อง Generate ต่อไป
- ทั้ง BT และ BB นั้นเกี่ยวข้องกับการสร้าง State-space tree โดยที่แต่ละ Node จะหมายถึงทางเลือกเฉพาะ (Specific choices) สำหรับองค์ประกอบของ Solutions
- ทั้งสองวิธีจะหยุดค้นหาในทางเลือกนั้นทันทีเมื่อรับประกันได้ว่าไม่เจอ Solution แล้วแน่นอน

Backtracking and Branch-and-Bound (ต่อ)

- BT และ BB นั้นต่างกันที่ธรรมชาติของปัญหาที่มันจะ
  - BB นั้นแก้ปัญหาได้เฉพาะ Optimization problems เนื่องจากมันคือการคำนวณค่า Bound บนค่าที่เป็นไปได้ของ Objective function ของปัญหา
  - BT นั้นมักจะแก้ปัญหาที่เป็น Non-optimization problems
- BT และ BB ยังต่างกันที่ลำดับการ Generate nodes ใน State-space tree อีกด้วย
  - BT มักใช้ DFS
  - BB มักใช้ Best-first Search

Backtracking



Backtracking

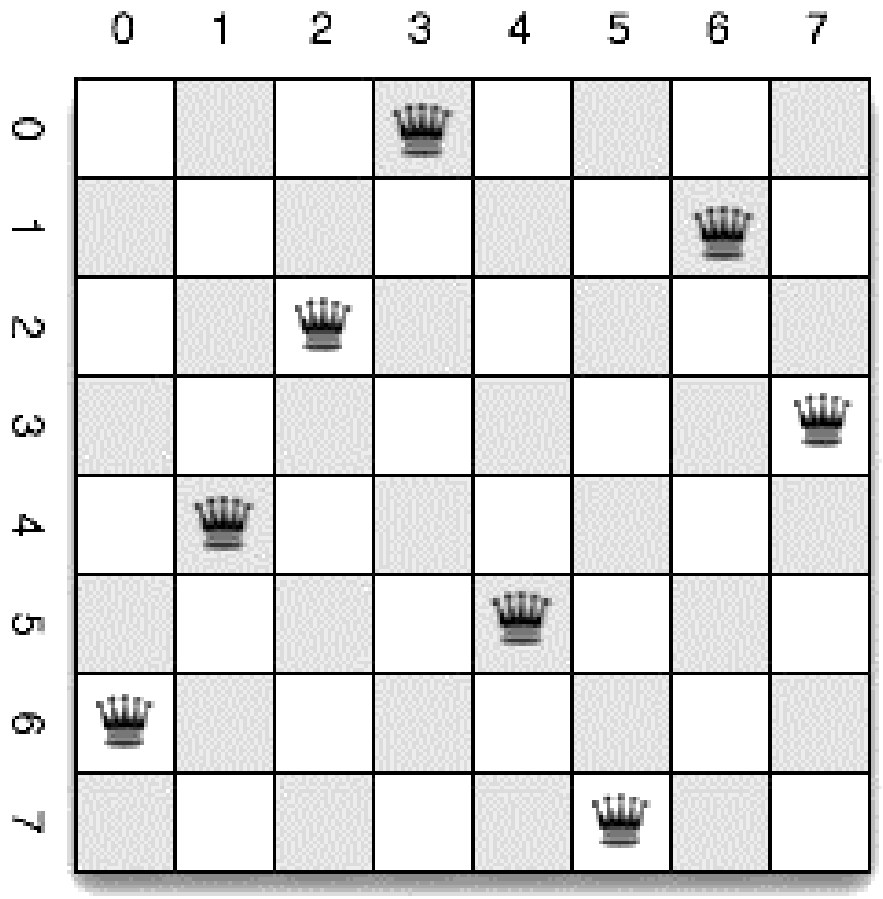
Exhaustive Search การค้นหาโดยการ Generate ทุก ๆ Candidate solutions และเลือกอันที่มีคุณสมบัติที่ต้องการ (มากสุด, น้อยสุด, …)

- Backtracking search มีความฉลาดเหนือกว่า Exhaustive search โดยมันจะพิจารณา Partially constructed solution ว่ามันสามารถพัฒนาต่อไปได้ไหมโดยไม่ละเมิดข้อจำกัด (Constraints)
  - ถ้าไม่ได้มันจะหยุดการค้นหาใน Branch นั้น ๆ และทำการ Backtrack กับขึ้นมาที่ก่อนหน้าที่มันจะไปเจอทางที่ละเมิดดังกล่าวและเลือกไปในทางอื่นแทน
- Root คือ Initial states ก่อน Search
  - Node แรก คือทางเลือกแรกของ Partially constructed solution
  - Node ต่อมา คือทางเลือกต่อ ๆ มา ของ Partially constructed solution
- โดยเราจะบอกว่า Node ใน State-space tree นั้น **Promising** ถ้ามันเป็นส่วนหนึ่งของ Partially constructed solution ถ้าไม่เช่นนั้นเราเรียกว่า **Nonpromising**

Backtracking

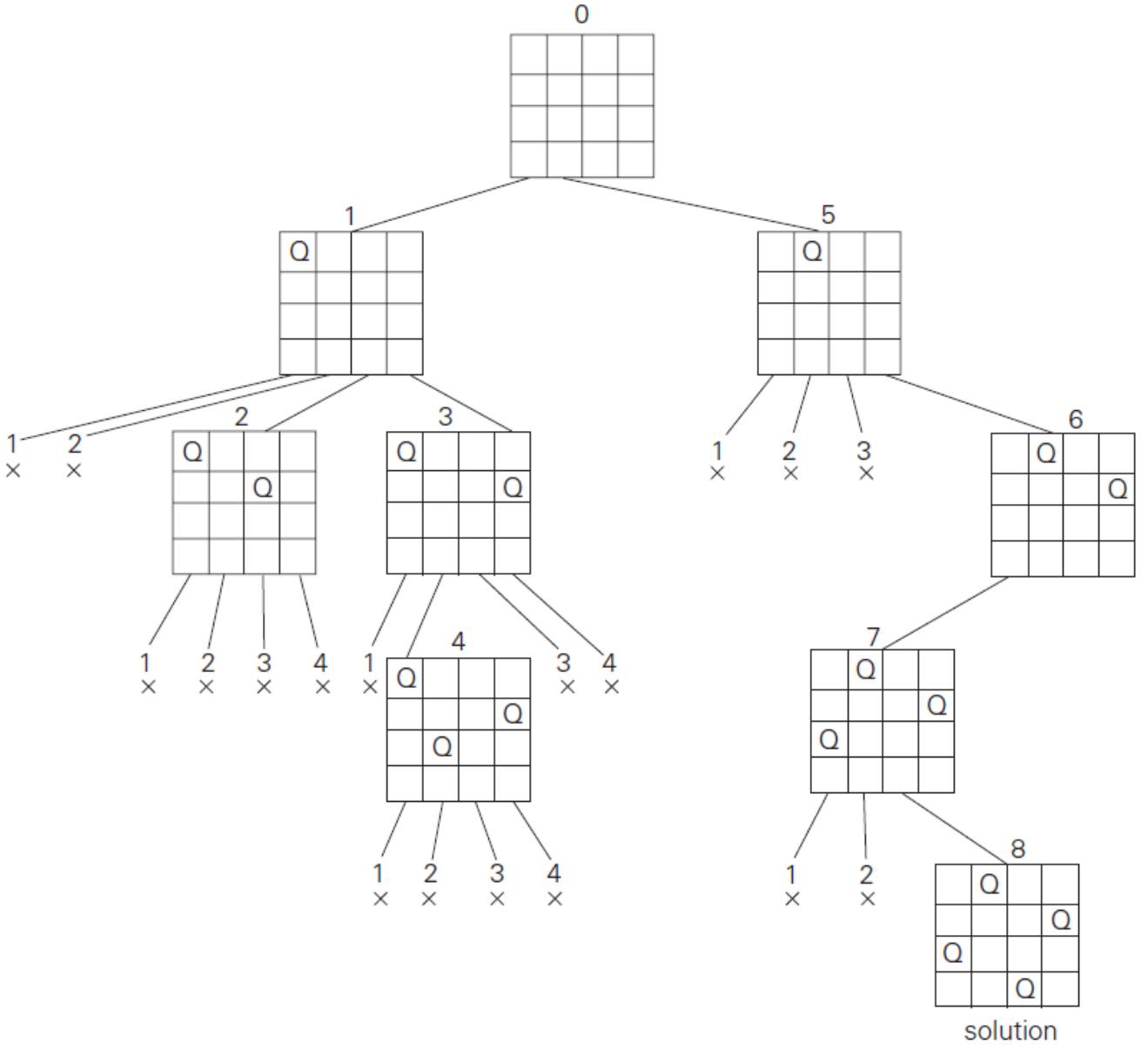
- โดย Leaves คือ Complete solution หรือ Nonpromising dead-end ที่พบ
- State-space tree นี้ส่วนใหญ่เราสร้างแบบ **Depth-first search**
  - ถ้า Node ปัจจุบันเป็น **Promising** แล้ว Node นี้จะถูกเพิ่มเป็นทางเลือกต่อไป และ Algorithm จะเคลื่อนลงไปที่ทางเลือกดังกล่าวนี้
  - ถ้า Node ปัจจุบันเป็น Nonpromising แล้ว Algorithm จะ Backtrack กลับไปที่ Parent และเลือกทางเลือกอื่น ถ้าไม่มีทางเลือกแล้วให้ ขึ้นไปอีกหนึ่งเลเวล
  - เมื่อ Algorithm พบ Complete solution มันจะหยุดหรือค้นหาต่อไปสำหรับ Solution อื่น ๆ

N-Queens Problem



N-Queens Problem

- ปัญหา N-Queens คือการวาง Queen ลงใน Chessboard N x N โดย **ห้าม**มี Queen โจมตีกันได้ (Queens จะโจมตีกันเมื่อมันอยู่ใน แถว คอมลัมน์ หรือ แนวทแยงเดียวกัน)



```
bool solveNQUtil(int board[N][N], int col)
{
    // base case: If all queens are placed
    // then return true
    if (col >= N)
        return true;

    // Consider this column and try placing
    // this queen in all rows one by one
    for (int i = 0; i < N; i++) {

        // Check if the queen can be placed on
        // board[i][col]
        if (isSafe(board, i, col)) {

            // Place this queen in board[i][col]
            board[i][col] = 1;

            // recur to place rest of the queens
            if (solveNQUtil(board, col + 1))
                return true;

            // If placing queen in board[i][col]
            // doesn't lead to a solution, then
            // remove queen from board[i][col]
            board[i][col] = 0; // BACKTRACK
        }
    }

    // If the queen cannot be placed in any row in
    // this column col  then return false
    return false;
}
```

```
bool isSafe(int board[N][N], int row, int col)
{
    int i, j;

    // Check this row on left side
    for (i = 0; i < col; i++)
        if (board[row][i])
            return false;

    // Check upper diagonal on left side
    for (i = row, j = col; i >= 0 && j >= 0; i--, j--)
        if (board[i][j])
            return false;

    // Check lower diagonal on left side
    for (i = row, j = col; j >= 0 && i < N; i++, j--)
        if (board[i][j])
            return false;

    return true;
}
```

https://www.geeksforgeeks.org/n-queen-problem-backtracking-3/

```
bool solveNQ()
{
    int board[N][N] = { { 0, 0, 0, 0 },
                        { 0, 0, 0, 0 },
                        { 0, 0, 0, 0 },
                        { 0, 0, 0, 0 } };

    if (solveNQUtil(board, 0) == false) {
        cout << "Solution does not exist";
        return false;
    }

    printSolution(board);
    return true;
}
```

```
int main()
{
    solveNQ();
    return 0;
}
```

```
#include <bits/stdc++.h>
#define N 4
using namespace std;
```

แบบฝึกหัด

- ให้เขียนโปรแกรมโดยใช้แนวคิด Backtracking เพื่อแก้ปัญหา
  - N-Queens (NQP-BT.cpp)
    - ทดลองกำหนดค่า N = 4, 8, 10, …
  - (ฝึกด้วยตนเอง)
    - Traveling salesman problem
    - 0/1 Knapsack problem
    - ตัวอย่าง Input จากในสไลด์

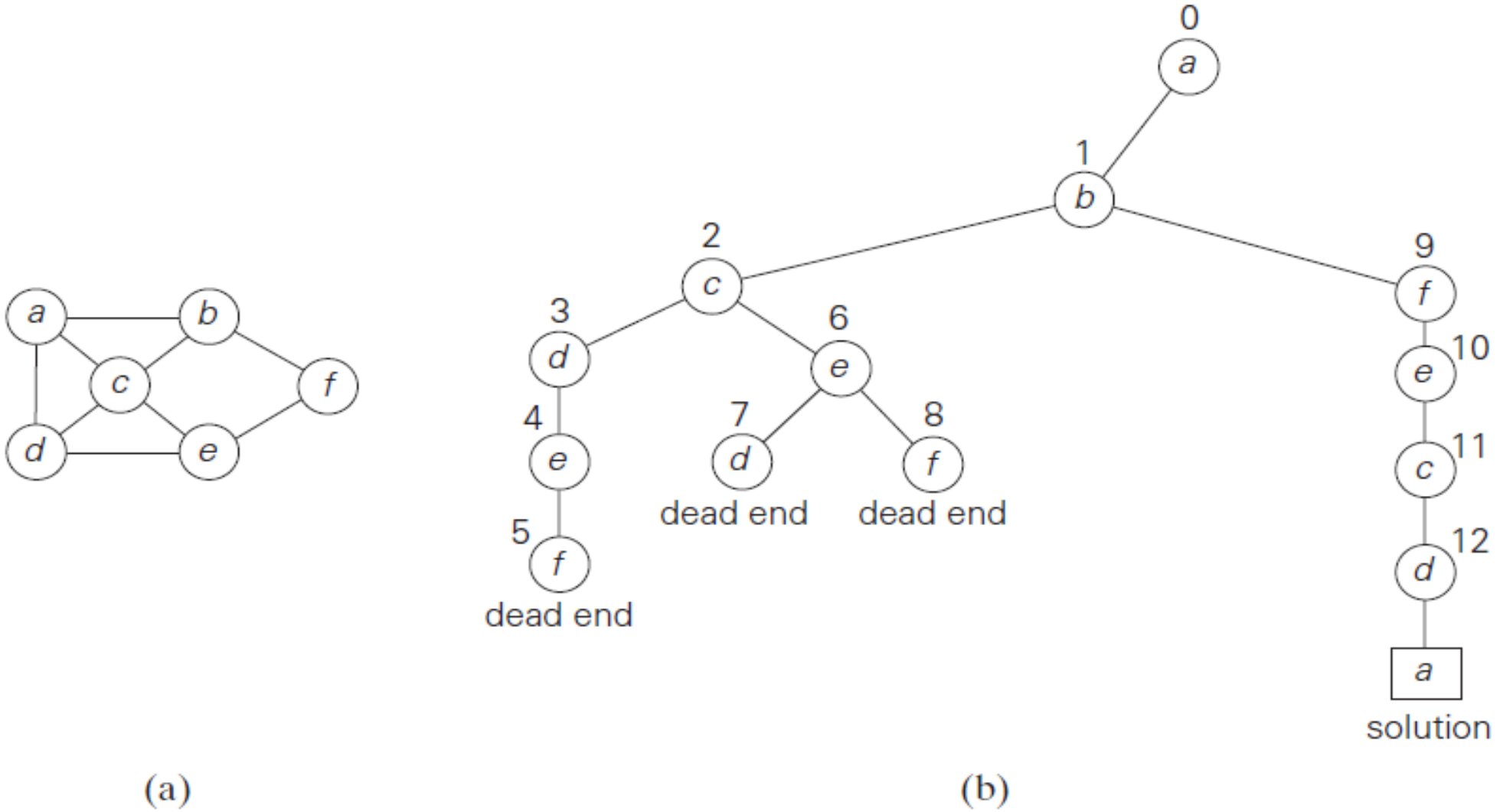
Hamiltonian Circuit Problem

Image source: https://www.dogonews.com/2012/9/30/scientists-learn-how-bumblebees-solve-complex-traveling-salesman-problem-so-effortlessly

Hamiltonian Circuit Problem

- Hamiltonian Cycle or Circuit in a graph G is a cycle that visits every vertex of G exactly once and returns to the starting vertex.

Hamiltonian Circuit Problem



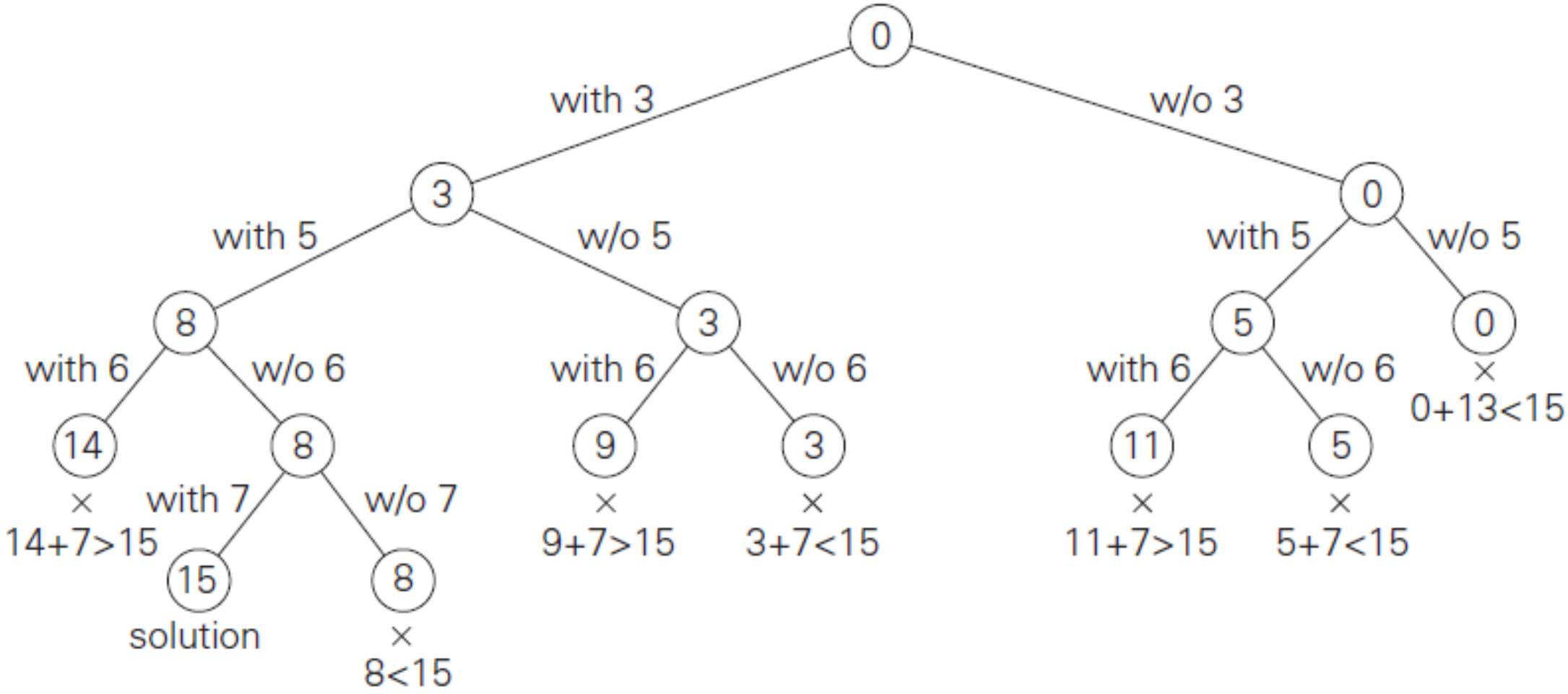
Subset-Sum Problem

Image source: https://www.dogonews.com/2012/9/30/scientists-learn-how-bumblebees-solve-complex-traveling-salesman-problem-so-effortlessly

Subset-Sum Problem

- กำหนดให้เซต $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ที่มีจำนวนสมาชิกทั้งหมด n ตัว ปัญหา Subset-sum คือการหา Subset ของเซต A สำหรับจำนวนเต็มบวก n จำนวน โดยผลรวมนั้นเท่ากับ d
- เช่น $A = \{1, 2,5,6,8\}$ และ $d = 9$ จะพบว่ามี 2 Solutions คือ {1,2,5,6,8} และ {1,8}
- บาง Instance ของปัญหานี้ไม่มีคำตอบ
- เพื่อแก้ปัญหานี้เราอาจจะเรียงลำดับจากน้อยไปมาก $a_1 < a_2 < \ \ldots < a_n$

Subset-Sum Problem



แบบฝึกหัด 3

- เขียนโปรแกรมโดยใช้แนวคิด **Backtracking** เพื่อแก้ปัญหา
  - Subset-sum (SSP-BT.cpp)
  - ให้ใช้ตัวอย่างในไสลด์เป็นข้อมูลนำเข้าและส่งออก



(General)

Backtracking Algorithms

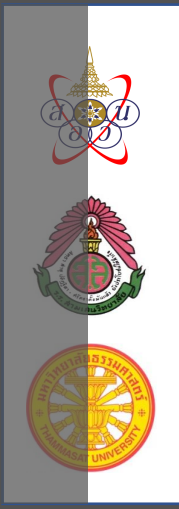


Image source: https://www.dogonews.com/2012/9/30/scientists-learn-how-bumblebees-solve-complex-traveling-salesman-problem-so-effortlessly

Backtracking Algorithms

- โดยทั่วไป Output ของ Backtracking algorithm มักจะอยู่ในรูปของ n-tuple $(x_1, \ldots, x_n)$ โดยที่แต่ละ Coordinate x_i คือองค์ประกอบของ Ordered set S_i
- ทุก Solution tuples จะมี Length ที่เท่ากัน (N-Queens, Hamiltonian circuit) หรือไม่เท่ากันก็ได้ (Subset-sum)
- BB จะสร้าง State-space tree ที่ Node จะหมายถึง Partially constructed tuples
- ถ้า $(x_1, \ldots, x_i)$ ยังไม่ใช่ Solution มันจะหาทางเลือกอื่น S_{i+1} ที่สอดคล้องกับ $(x_1, \ldots, x_i)$ และเพิ่มลงไปใน Tuple ในตำแหน่ง (i+1)st
  - ถ้าไม่มีทางเลือกใดที่เป็นไปได้ใน S_{i+1} มันจะ Backtrack กลับไปหาค่าต่อไปของ x_i

ALGORITHM *Backtrack*$(X[1..i])$

```
//Gives a template of a generic backtracking algorithm
//Input: X[1..i] specifies first i promising components of a solution
//Output: All the tuples representing the problem's solutions
if X[1..i] is a solution write X[1..i]
else      //see Problem 9 in this section's exercises
    for each element x ∈ S_{i+1} consistent with X[1..i] and the constraints do
        X[i + 1] ← x
        Backtrack(X[1..i + 1])
```

Backtracking Algorithms

- ใน Worst case นั้น BT นั้นก็อาจจะต้อง Generate ทุก Possible candidates ในเวลา Exponential หรือ มากกว่า
- สำหรับ BT Algorithm
  - มักจะถูกใช้กับ **Combinatorial problems** ที่ยากและไม่มี Efficient algorithms ในการหา **Exact solution**
  - BT นั้นอาจจะมีประสิทธิภาพดีกว่า (Prune State-space ได้บางส่วน) Exhaustive search และมักจะแก้ปัญหาได้ในเวลาที่รับได้ (Acceptable amount of time)
  - แม้ BT จะไม่สามารถ Prune อะไรได้เลย แต่ก็ยังถือเป็นวิธีการหนึ่งที่ช่วยเรา generate ทุก ๆ Possible candidates ได้

Branch-and-Bound

Branch-and-Bound

- แนวคิดของ BT คือการตัด (Prune) Branches ที่ไม่นำไปสู่ Solution
- BB นั้นเราจะต่อยอดแนวคิดของ BT เพื่อประยุกต์กับ Optimization problem
  - Optimization problem: ปัญหาที่หาค่าต่ำที่สุดหรือสูงที่สุดของ Objective function
  - Feasible solutions: เป็น Complete assignments ที่ไม่ขัดกับ Constraints ใด
  - Optimal solutions: เป็น Feasible solutions ที่ให้ค่าจาก Objective function ที่ดีที่สุด
- ถ้าเปรียบเทียบกับ BT แล้ว BB มีสิ่งต่อไปนี้
  - วิธีที่จะสามารถหาค่า Bound (Lower bound สำหรับ Minimization problem และ Upper bound สำหรับ Maximization problem) สำหรับ Best value ของ Objective function สำหรับทุก Solution ที่สามารถได้มาจากการเพิ่ม Component ไปยัง Partially constructed solution
  - ค่าที่ดีที่สุดของ Solution ที่ดีที่สุดที่เคยพบเจอมาทั้งหมด
- **ถ้าค่าของ Bound ไม่ดีกว่า Best value ที่เคยพบเจอมา กล่าวคือ ไม่น้อยกว่าสำหรับ Minimization algorithm และไม่มากกว่าสำหรับ Maximization algorithm แล้ว Node ดังกล่าวจะถือว่า Nonpromising และถูก Pruned ทิ้งไป**

Branch-and-Bound

- เราจะ Terminate ออกจาก Search path สำหรับ Branch ใน State-space tree ปัจจุบันเมื่อ
  - ค่า Bound ของ Node ไม่ดีกว่า Best solution แน่นอน
  - ละเมิด Problem constraints

Assignment Problem

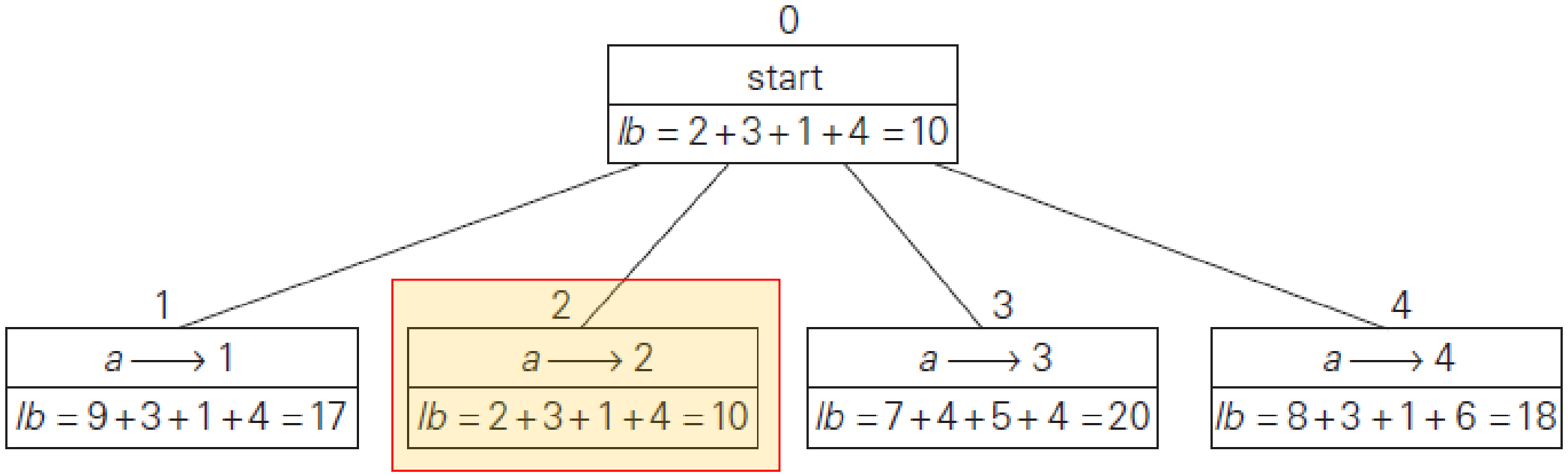
Assignment Problem

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{job 1} & \text{job 2} & \text{job 3} & \text{job 4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{person } a \\ \text{person } b \\ \text{person } c \\ \text{person } d \end{matrix}$$

- ในปัญหานี้: **Cost ของทุก Solutions ไม่มีทางน้อยไปกว่าผลรวมของค่าที่น้อยที่สุดของแต่ละแถวบวกกัน**
  - เช่น 2 + 3 + 1 + 4 = 10 (Lower bound)
    (Note: ค่านี้ไม่ใช่ Legitimate selection – ค่า 3 และ 1 มาจากColumn เดียวกัน)
  - เมื่อเราเลือก 9 จากแถวแรกเราจะพบว่า Lower bound จะขยับเป็น 9 + 3 + 1 + 4 = 17
- เรื่องที่สำคัญอีกเรื่องหนึ่งคือ “ลำดับการที่ Node ถูก Generated”
  - เราจะพยายาม Generate **MOST** promising nodes จาก Nonterminating leaves บนต้นไม้ปัจจุบัน
  - คำถามคือ => เราจะรู้ได้อย่างไรว่า Node ใดคือ **MOST** promising node ?
    - คำตอบ => ให้เราดูจาก Lower bound ของแต่ละ Node (ไม่การันตีว่าจะเป็นส่วนหนึ่งของ Optimal)
    - วิธีการแบบนี้เรียกว่า **Best-first branch-and-bound**

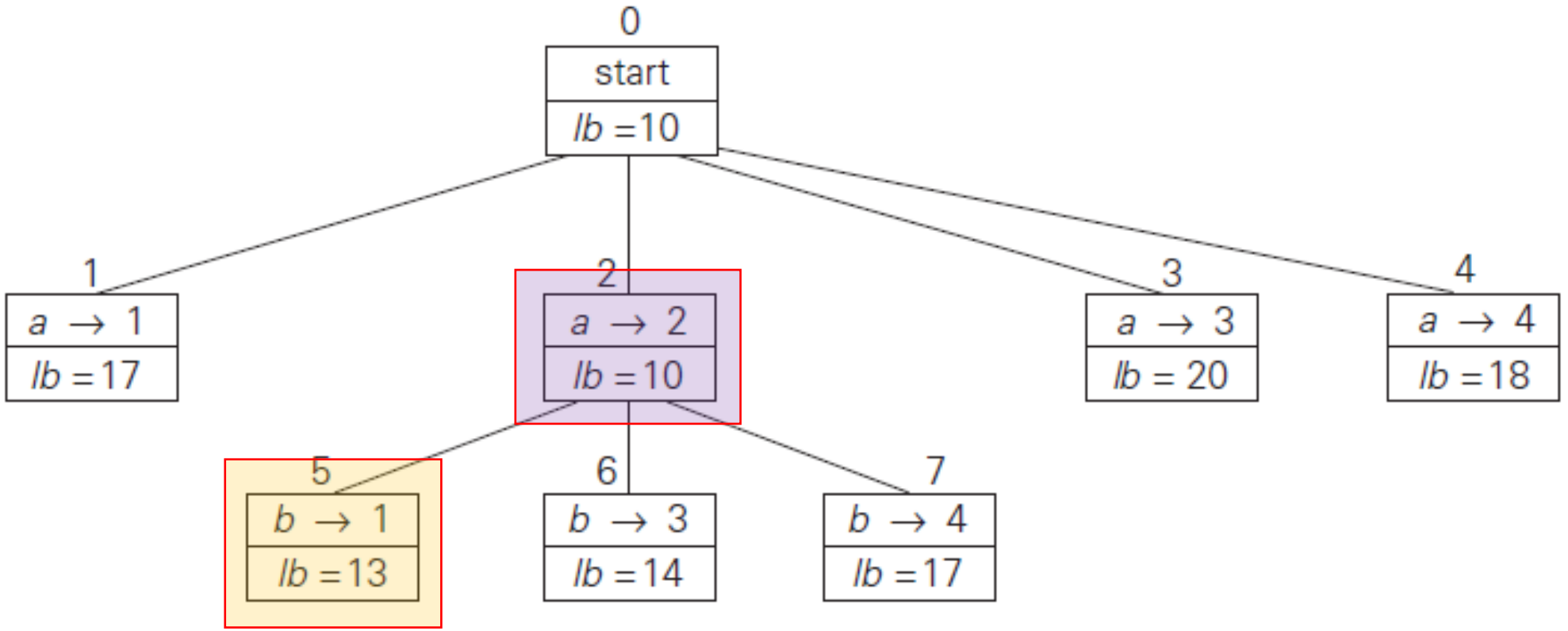
Assignment Problem

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{job 1} & \text{job 2} & \text{job 3} & \text{job 4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{person } a \\ \text{person } b \\ \text{person } c \\ \text{person } d \end{matrix}$$



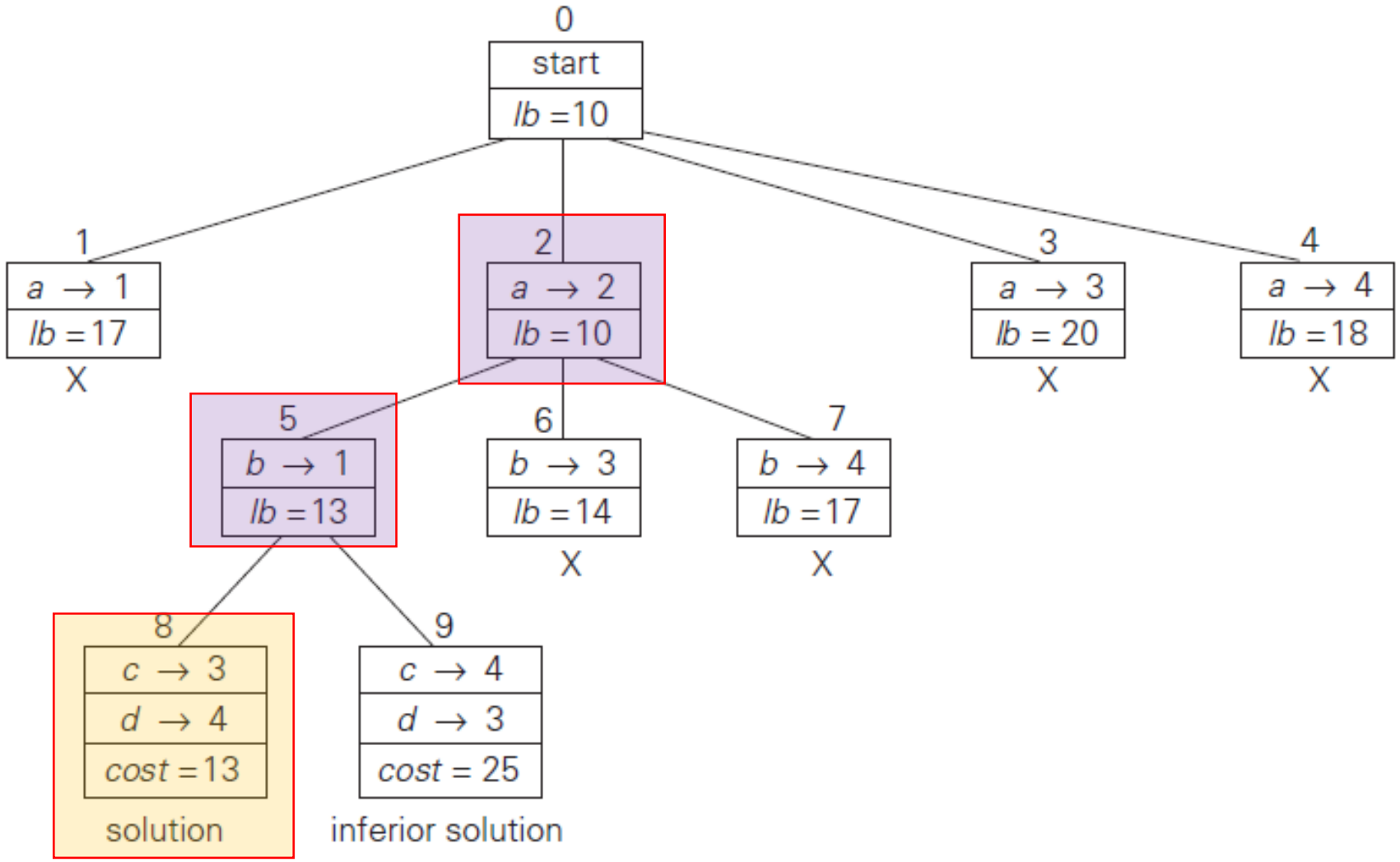
Assignment Problem

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{job 1} & \text{job 2} & \text{job 3} & \text{job 4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{person } a \\ \text{person } b \\ \text{person } c \\ \text{person } d \end{matrix}$$



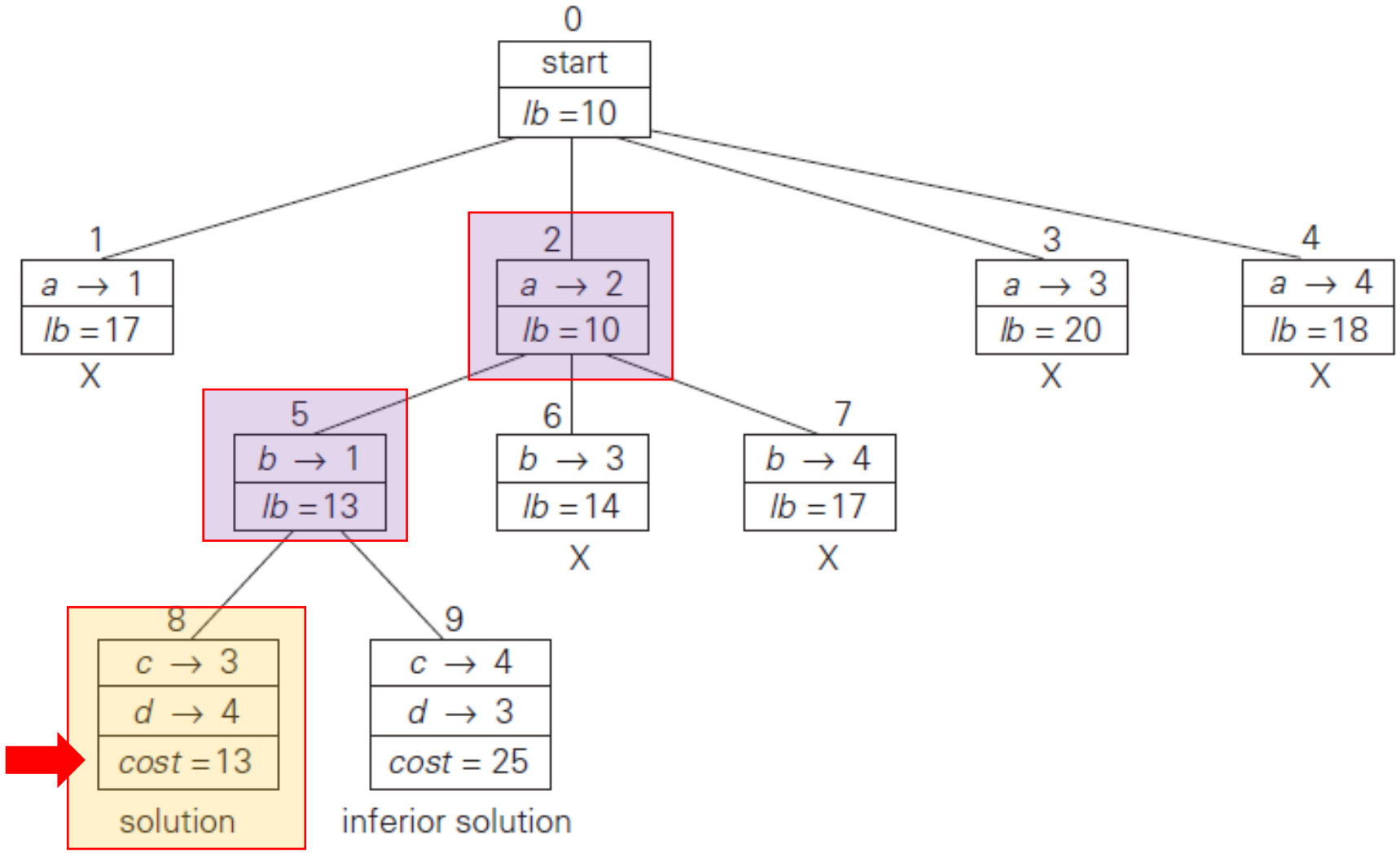
Assignment Problem

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{job 1} & \text{job 2} & \text{job 3} & \text{job 4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{person } a \\ \text{person } b \\ \text{person } c \\ \text{person } d \end{matrix}$$



Assignment Problem

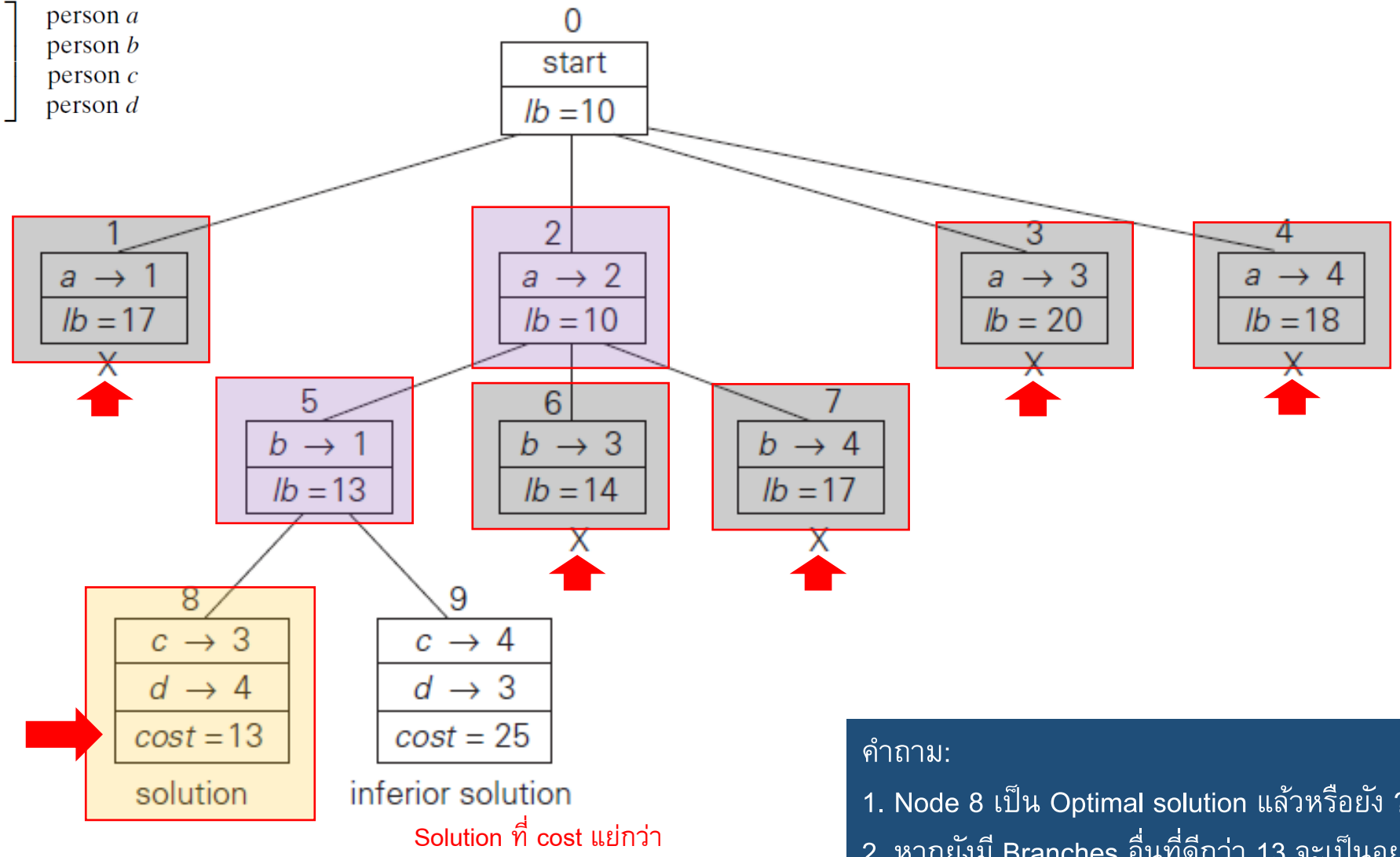
$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{job 1} & \text{job 2} & \text{job 3} & \text{job 4} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ \text{person } a \\ \text{person } b \\ \text{person } c \\ \text{person } d \end{matrix}$$



Assignment Problem

เนื่องจาก Branch อื่น ๆ ถูก Pruned ไปหมด เนื่องจากค่า Lower bound ของ Branches เหล่านั้นแย่กว่าของ Best solution (lb = 13) ที่เจอ

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{job 1} & \text{job 2} & \text{job 3} & \text{job 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{person } a \\ \text{person } b \\ \text{person } c \\ \text{person } d \end{array}$$



คำถาม:

1. Node 8 เป็น Optimal solution แล้วหรือยัง ? ทำไม ?
2. หากยังมี Branches อื่นที่ดีกว่า 13 จะเป็นอย่างไร ?

Hungarian Method

- https://byjus.com/maths/hungarian-method/

Knapsack Problem

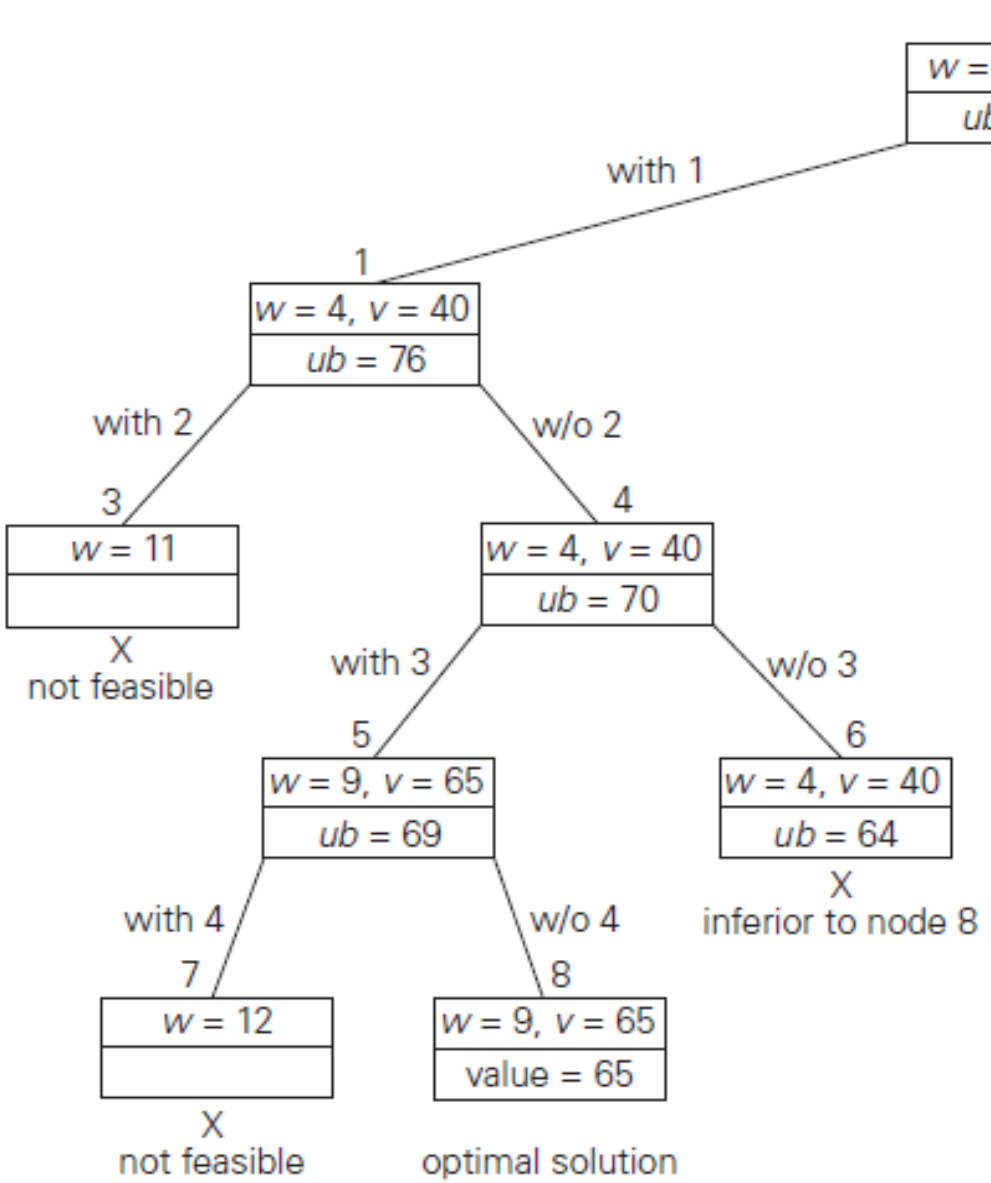
Knapsack Problem

- (ทบทวน) มีของจำนวน n ชิ้น โดยแต่ละชิ้นมีน้ำหนัก (Weight) คือ $w_1, \ldots, w_n$ และมูลค่า (Value) $v_1, \ldots, v_n$ และถุง (Knapsack) ที่มีความจุ W ให้หา Subset ของที่สามารถบรรจุลงในถุงได้โดยที่มูลค่ารวมใน Subset นั้นมีมูลค่ามากที่สุด
- สำหรับ BB
  - ให้เราเรียงลำดับตาม Value-to-weight ratios (มากไปหาน้อย) $\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{w_n}$
  - ในเลเวลที่ i-th ใน Search tree จะเป็นการแทนทุก Subsets ของ n items ที่รวม/ไม่รวม i items แรกที่เรียงลำดับ ($\frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{w_n}$)
  - ในแต่ละ Node จะบันทึก Total weight และ Total values รวมถึงค่า upper bound ของ Value
  - ค่า Upper bound (ub) = $v + (W - w)(v_{i+1}/w_{i+1})$

Knapsack Problem

item	weight	value	value / weight
1	4	$40	10
2	7	$42	6
3	5	$25	5
4	3	$12	4

The knapsack's capacity W is 10.



Upper bound ของ Root = 100

เนื่องจากยังไม่มีใครถูกเลือกดังนั้น w = 0, v = 0

ไอเท็มต่อไปคือ 40/4 = 10

ub = 0 + 10*10 = 100

Upper bound (ub) = $v + (W - w)(v_{i+1}/w_{i+1})$

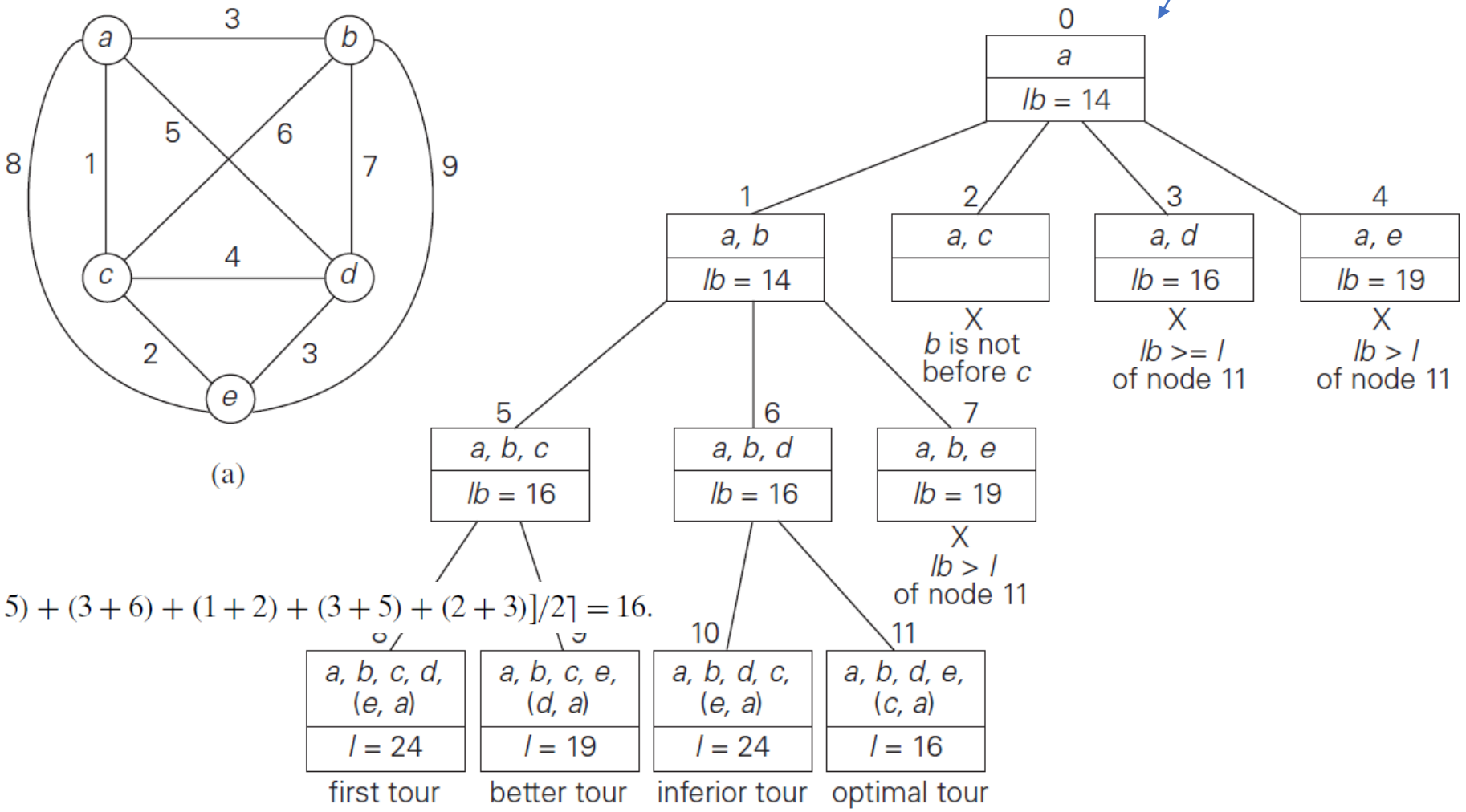
Traveling Salesman Problem

Traveling Salesman Problem

- **[1] Lower bound** คำนวณได้ Edge ที่มีค่าน้อยที่สุด (Element ที่น้อยที่สุดใน Intercity distance matrix) และคูณกับจำนวนเมืองทั้งหมด
- **[2] Lower bound** ก็สามารถคำนวณได้จาก สำหรับแต่ละเมือง $i, 1 \leq i \leq n$ หาผลรวม s_i ของ Distances จาก City i ไปยัง 2 เมืองที่ใกล้เมือง i ที่สุด คำนวณผลรวม s จาก n จำนวณนี้ $lb = \frac{\lceil s_1 + \cdots + s_n \rceil}{2} = \frac{\lceil s \rceil}{2}$

Traveling Salesman Problem

$$lb = \lceil [(1+3)+(3+6)+(1+2)+(3+4)+(2+3)]/2 \rceil = 14.$$



$$\lceil [(1+5)+(3+6)+(1+2)+(3+5)+(2+3)]/2 \rceil = 16.$$

Interesting Questions

- UVa 10285 - Longest Run on a Snowboard
  - https://onlinejudge.org/index.php?option=onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=1226
- UVa 10350 - Liftless EME
  - https://onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=1291

References

- Introduction to the Design and Analysis of Algorithms (3rd Edition)