Основы математического анализа

1. Понятие функции действительной переменной

Говорят, что на некотором множестве D имеется функция f со значениями из множества E, если для каждого элемента x из D по правилу f поставлен в соответствие некоторый элемент y из множества E. Другими словами, функция f отображает множество D в множество E.

При этом множество D называется областью определения, а множество E — областью значений данной функции f. В свою очередь, множество значений Y функции — это множество таких $y \in E$, что существует $x \in D$ такой, что $f(x) = y$. Множество значений Y функции, вообще говоря, может быть подмножеством области значений E.

В рамках данного курса вопросы об определении множества вещественных (действительных) чисел R рассматриваться не будут. Основное внимание же будет уделено функциям действительного переменного и их свойствам, так как они наиболее часто встречаются в практических приложениях.

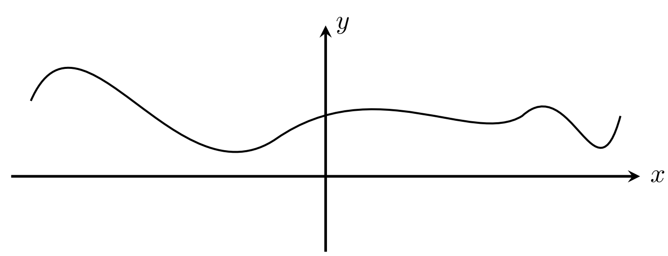

Рис. 1: График некоторой функции

Представление о функции, её свойствах и поведении можно получить, построив ее график. Графиком называется геометрическое место точек (x, y) плоскости таких, что $y = f(x)$. Функцию называют непрерывной, если, говоря нестрого, малые изменения её аргумента приводят к малым изменениям её значения. Если это условие нарушается, функция терпит разрыв.

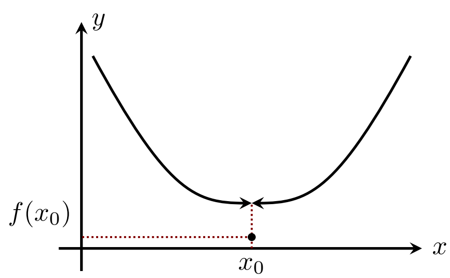

Рис. 2: Функция с устранимым разрывом

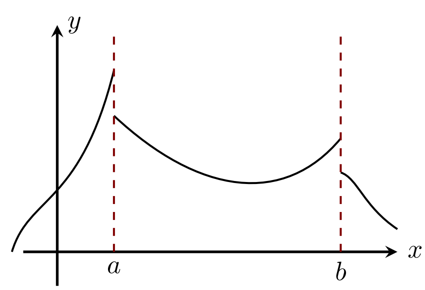

Рис. 3: Функция с разрывами в точках a и b.

Особо стоит выделить так называемые функции с устранимым разрывом в некоторой точке. В таком случае переопределение значения функции в этой точке приводит к тому, что функция становится непрерывной.

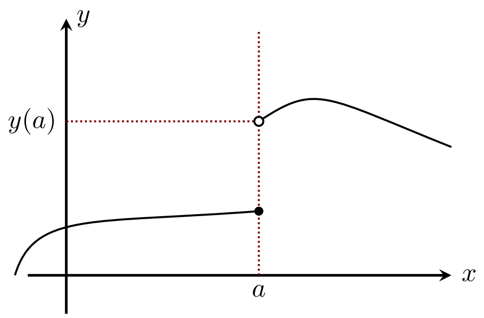

Рис. 4: Функция с разрывом типа «скачок».

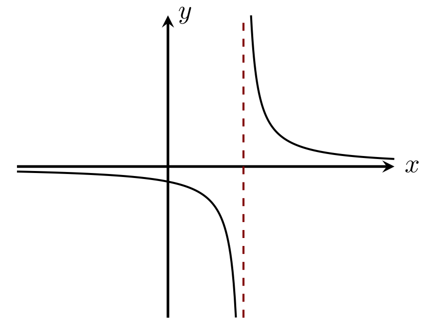

Рис. 5: Функция с бесконечным разрывом.

Другим важным случаем является разрыв типа «скачок». Также встречаются случаи, когда «функция уходит в бесконечность» в точке разрыва. На самом деле существуют еще более интересные случаи разрывов, которые выходят далеко за рамки этого курса.

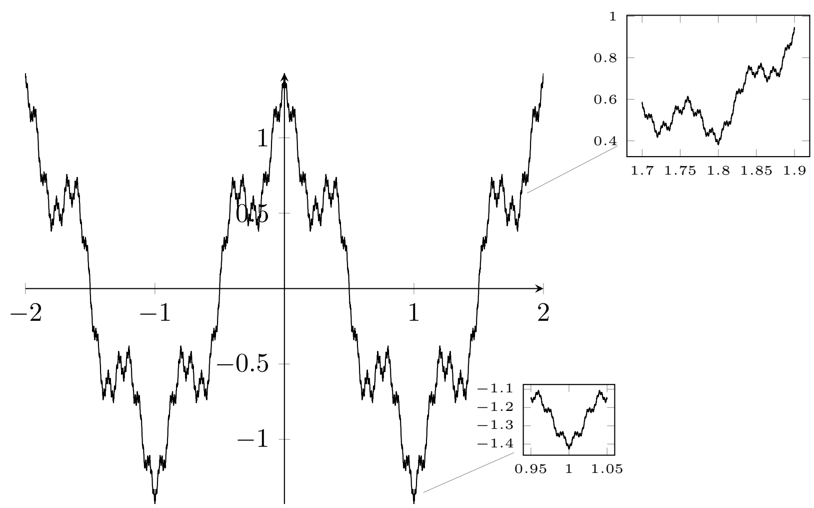

Рис. 6: Функция Вейерштрасса является непрерывной, но не имеет производной ни в одной точке.

Свойство непрерывности не является показателем того, что функция является «хорошей» в каком бы то ни было смысле. Например, функция Вейерштрасса является всюду непрерывной функцией. Но она не обладает ни в какой точке так называемым свойством гладкости, которое будет определено чуть-чуть позже.

2. Представление о пределе функции

Пусть дана функция:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Эта функция не определена в точке $x = 0$, но ее значение может быть вычислено в точках, сколь угодно близких к точке 0. Другими словами, будет изучаться ее поведение при $x \to 0$. Например, можно получить следующую таблицу значений для представленной функции:

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$f(x)$	2.593..	2.704..	2.716..	2.718..	...

Уже только по этим значениям можно заметить, что значение функции тем ближе к некоторой величине, чем меньше значение x. В таком случае используется обозначение:

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Однако не все функции имеют конечный предел. Например, для функции $g(x) = \frac{1}{x}$ таблица значений будет выглядеть так:

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
$1/x$	10	100	1000	10000	...

Функция просто неограниченно растет при приближении x к точке 0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Понятие предела оказывается неразрывно связанным с понятием непрерывности.

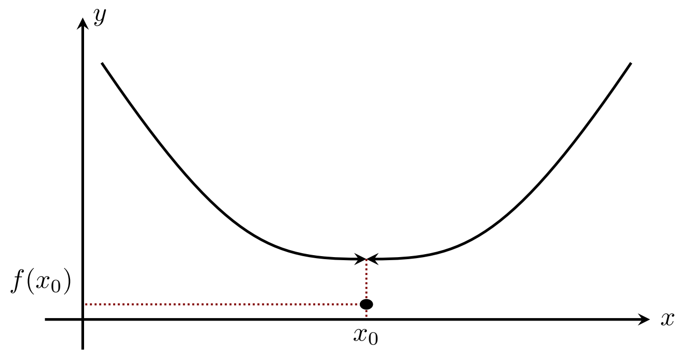

Рис. 7: Предел функции в точке устранимого разрыва не равен ее значению в этой точке.

А именно, функция $f(x)$ является непрерывной в точке $x = a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a).$$

С помощью понятия предела определяется другое полезное понятие — понятие производной. Но прежде всего следует рассмотреть линейную функцию. Для нее легко можно получить связь коэффициента наклона и скорости роста функции:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = k.$$

По аналогии можно ввести похожую характеристику для произвольной функции:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Предельный переход позволяет обобщить понятие скорости роста на случай произвольных функций. Эта величина и называется производной функции. Теперь можно сформулировать определение гладкой функции. Гладкой называется такая функция, производная которой существует и непрерывна.

3. Геометрический смысл производной

Уравнение произвольной прямой может быть представлено в виде:

$$y = kx + b,$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$ — коэффициент наклона прямой, а α — угол наклона прямой (определяется как угол между прямой и осью Ox).

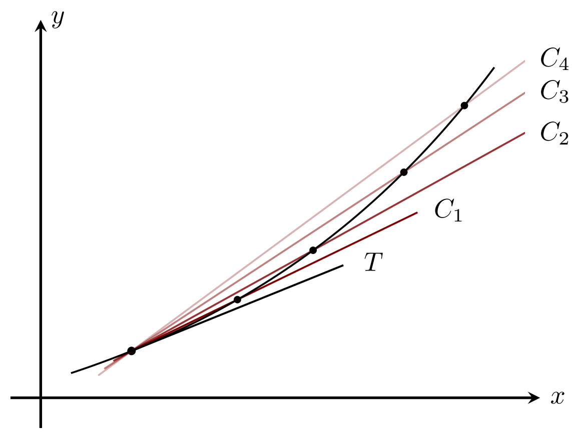

Рис. 8: Касательная как предельное положение секущей.

Секущей графика называется прямая, проходящая через две точки графика. Пусть $f(x)$ — некоторая функция. Секущая, которая будет пересекать график в точках, соответствующих значениям аргумента x_0 и $x_0 + \Delta x$, является единственной и имеет уравнение:

$$y = f(x_0) + \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0),$$

где $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

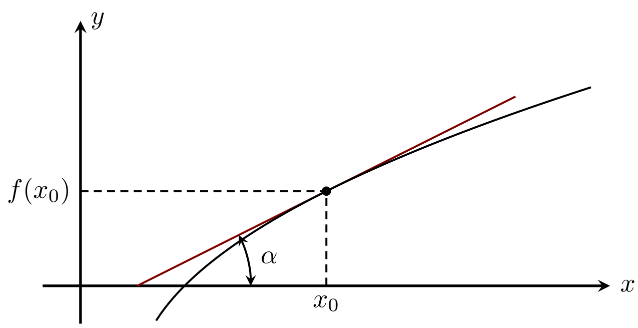

Рис. 9: Геометрический смысл производной

Если теперь при зафиксированном x_0 перейти к пределу $\Delta x \to 0$, уравнение секущей перейдет в уравнение касательной. Действительно, уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0).$$

В качестве наглядного примера можно рассмотреть кусочно-гладкую непрерывную функцию. Пусть, например, в точке $x = 0$ производная испытывает разрыв. Это соответствует тому, что угол наклона касательной тоже испытывает скачок при переходе через эту точку. Появляется «излом». Другими словами, гладкие функции не могут иметь изломов, поскольку производная непрерывна. Это очень хорошо соответствует интуитивным представлениям о гладких функциях.

4. Производная сложной функции

Пусть имеются две функции $f(x)$ и $h(x)$, причем область значений f принадлежит области определения функции h. Тогда функция $h(f(x))$ является применением одной функции к результату другой и называется сложной функцией.

Например, $f(x) = 1 + x$, а $h(x) = \ln(x)$, тогда сложной функцией будет $g(x) = h(f(x)) = \ln(1 + x)$.

Дифференциалом df функции $f(x)$ в точке x_0 называется линейная часть её приращения. Существует связь между дифференциалом функции и её производной:

$$df = f'(x_0)dx, \qquad dx = \Delta x.$$

Именно это выражение послужило основанием для использования знака дифференциала в обозначении Лейбница для производной:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Следует особо отметить, что выражение $\frac{df}{dx}$ следует трактовать как единый символ, а не частное двух величин.

Теперь можно сделать набросок доказательства так называемого Chain Rule, известного для русскоязычной аудитории как правило для вычисления производной сложной функции. Пусть $z = g(y)$, $y = h(x)$, тогда:

$$\frac{dz}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right) = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta z}{\delta y} \frac{\delta y}{\delta x} \right)$$

Строго говоря, приращение δy может равняться нулю даже, если $\delta x \neq 0$. Полное доказательство должно включать в себя громоздкое обсуждение этого момента. Поэтому было решено произвести только набросок доказательства.

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta z}{\delta y} \right) \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right) =$$

Поскольку функция $y = h(x)$ является непрерывной, при $\delta x \to 0$ также выполняется $\delta y \to 0$.

$$= \lim_{\delta y \to 0} \left(\frac{\delta z}{\delta y} \right) \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right) = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом получается требуемое выражение для производной сложной функции:

$$\frac{dg(h(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \frac{dh(x)}{dx}.$$

5. Экстремум

Точка x_0 называется локальным минимумом функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки U_{x_0}, что для всех точек $x \in U_{x_0}$ выполняется $f(x) \geq f(x_0)$. Аналогично вводится понятие максимума функции $f(x)$. Точка локального минимума или локального максимума называется точкой локального экстремума функции $f(x)$.

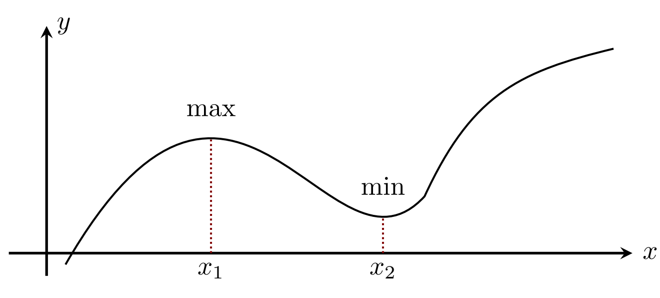

Рис. 10: Функция имеет локальный минимум и локальный максимум

Точка x_0 называется глобальным минимумом функции $f(x)$, если для всех точек $x \in D$ выполняется $f(x) \geq f(x_0)$. Аналогично вводится понятие глобального максимума функции.

Пусть некоторая функция дифференцируема в точке x_0 и известно, что ее производная в этой точке отлична от нуля. В таком случае в достаточно малой окрестности функция будет вести себя линейно с ненулевым коэффициентом наклона, то есть в этой окрестности не может быть никакого экстремума. Другими словами, если функция дифференцируема в точке x_0, то необходимым условием экстремума является $f'(x_0) = 0$.

При этом данное условие, очевидно не является достаточным. В качестве примера можно рассмотреть функцию $y = x^3$. Также, если производная не существует в точке x_0, там все равно может оказаться экстремум функции. В качестве примера можно рассмотреть $y = |x|$.

6. Выпуклость функции

Монотонность функции и выпуклость функции По знаку первой производной гладкой функции на каком-нибудь интервале можно сделать вывод относительно того, возрастает или убывает функция:

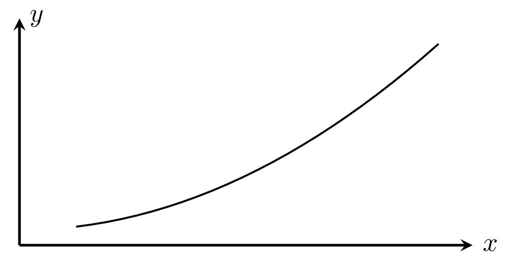

Рис. 11: Выпуклая функция

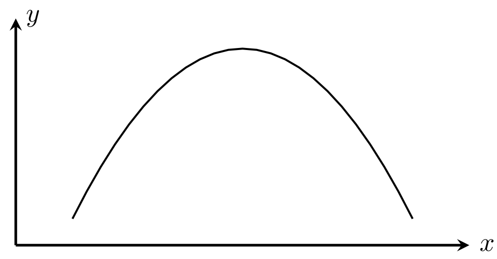

Рис. 12: Вогнутая функция

1. $f'(x) \geq 0$ — функция возрастает,
2. $f'(x) > 0$ — функция строго возрастает,
3. $f'(x) \leq 0$ — функция убывает,
4. $f'(x) < 0$ — функция строго убывает.

Функции, первая производная которых $f'(x)$ ведет себя монотонно, обладают свойством выпуклости ($f'(x)$ монотонно растет, касательная увеличивает свой коэффициент с ростом x) или вогнутости ($f'(x)$ монотонно убывает, касательная уменьшает свой коэффициент).

Учитывая все вышесказанное, если у функции существует вторая производная:

1. $f''(x) \geq 0$ — функция $f(x)$ выпукла,
2. $f''(x) > 0$ — функция $f(x)$ строго выпукла,
3. $f''(x) \leq 0$ — функция $f(x)$ вогнута,
4. $f''(x) < 0$ — функция $f(x)$ строго вогнута.

Достаточное условие экстремума Пусть выполнено необходимое условие экстремума, то есть в некоторой точке x_0 значение $f'(x_0) = 0$. Если в таком случае

1. $f''(x) > 0$ — функция будет строго выпукла и реализуется строгий минимум.
2. $f''(x) < 0$ — функция будет строго вогнута и реализуется строгий максимум.

Таким образом, если функция является строго выпуклой или строго вогнутой, необходимое условие экстремума будет для нее также и достаточным.

Более общее определение выпуклости Вещественнозначная функция, определённая на некотором интервале, выпукла, если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа $t \in [0, 1]$ выполняется

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

То есть, если соединить две точки на графике отрезком, он окажется выше графика функции $f(x)$.

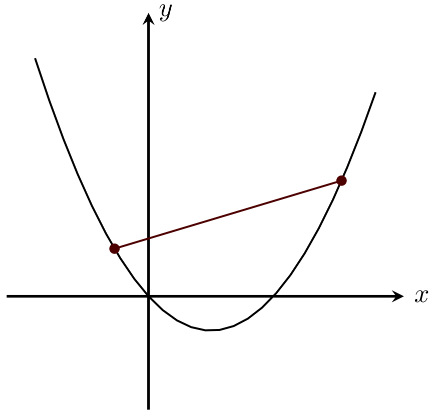

Рис. 13: К определению выпуклости

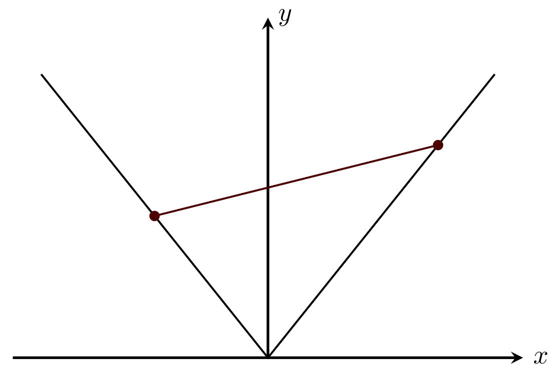

Рис. 14: Функция $|x|$ выпукла

Такое определение подходит и для функций, производная которых не определена в некоторых точках. Например, используя это определение, достаточно просто показать, что $|x|$ — выпуклая функция.

Если функция на каком-либо интервале вогнутая или выпуклая, то на этом интервале не может быть более одного минимума, как не может быть более одного максимума.