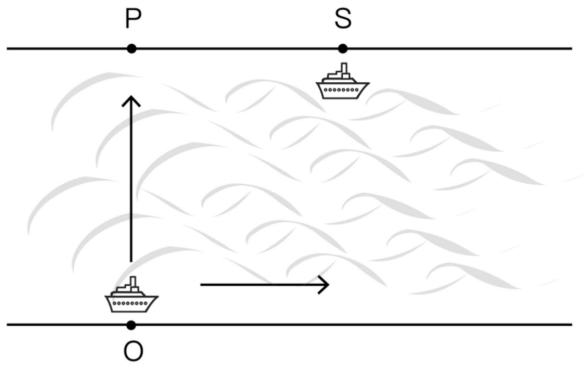
Vectors: Dot Products, Cross Products, 3D Kinematics

1　标量与矢量

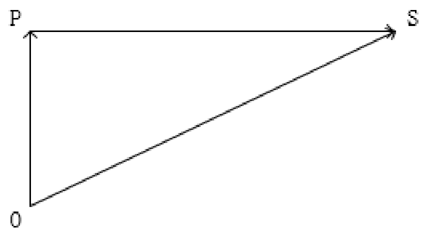
物理学中有很多的变量，有些变量在确定其测量单位以后，仅需用数字就可以表示其大小，这种变量叫做标量，如长度、质量、温度；还有些变量在确定其测量单位以后，需要用数字和方向共同表示其大小，这种变量叫做矢量，如力、位移、速度等。接下来，我们就来学习矢量。

2　向量的加减法

举个例子：一条小船以垂直河岸的方向从 O 点出发，想要去正对岸的 P 点，水流平行河岸沿着 $\boldsymbol{PS}$ 方向流动。由于河水也在流动，当小船到达河对岸时，实际到达的是 S 点，并非 P 点，在河对岸看来，小船的实际运动轨迹为 $\boldsymbol{OS}$。



可以看出，小船在垂直河岸方向上的位移为 $\boldsymbol{OP}$，在平行河岸方向上的位移为 $\boldsymbol{PS}$，而小船实际的位移为 $\boldsymbol{OS}$。即小船的实际位移量等于小船在垂直于河岸方向上的位移量加上小船在平行于河岸方向上的位移量。



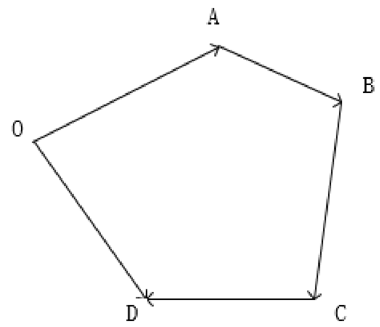
用向量表达式可以表示为：

$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OS}$$

2.1 向量的加法

2.1.1 三角形定则

三角形定则解决向量加法的方法：将各个向量依次首尾顺次相接，结果为第一个向量的起点指向最后一个向量的终点。如图：

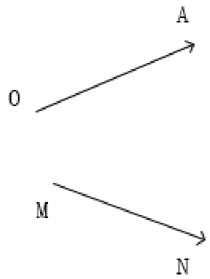


$\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BC}$、$\boldsymbol{CD}$ 收尾相连，他们的和等于第一个向量的起点指向最后一个向量的终点，即 $\boldsymbol{OD}$。用向量表达式可以表示为：

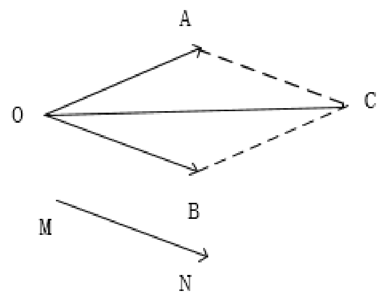
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$$

2.1.2 平行四边形定则

平行四边形定则解决向量加法的方法：将两个向量平移至公共起点，以向量的两条边作平行四边形，结果为公共起点的对角线。如图，$\boldsymbol{OA}$ 和 $\boldsymbol{MN}$ 并非首尾相连，求两向量之和。



运用平行四边形法则，将 $\boldsymbol{OA}$ 与 $\boldsymbol{MN}$ 平移至公共起点 O, 然后以向量的两条边作平行四边形，结果为公共起点的对角线。

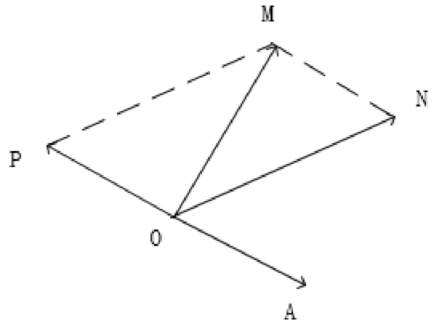


用向量表达式表示为：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OC}$$

2.2 向量的减法

有一种向量叫做负向量。例如 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，其中，负向量可以表示为 $-\boldsymbol{A}$，即，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$，很显然，$-\boldsymbol{A}$ 向量与 $\boldsymbol{A}$ 等长，但是方向相反。向量之间的减法运算就可以理解成向量与负向量之间的加法运算，此时，三角形定则和平行四边形定则都适用。

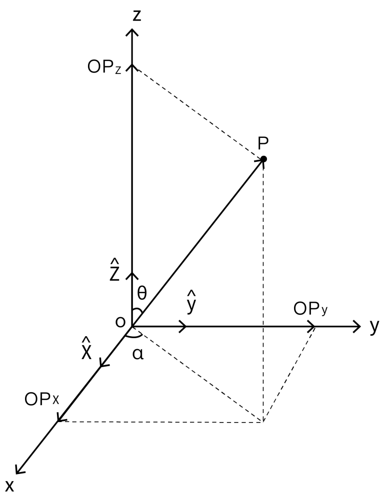


例如，求上图中 $\boldsymbol{ON}$ - $\boldsymbol{OA}$：

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{ON}+(\overrightarrow{-OA}) \\
&= \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP} \\
&= \overrightarrow{OM}
\end{aligned}
$$

3 向量分解、单位向量以及向量模长

3.1 向量分解



如上图，$\boldsymbol{OP}$ 为三维空间中的一个向量，将它分别沿着 x、y、z 轴进行分解，得到三个向量 $\boldsymbol{OP_x}$、$\boldsymbol{OP_y}$、$\boldsymbol{OP_z}$，且：

$$
\overrightarrow{OP_x}+\overrightarrow{OP_y}+\overrightarrow{OP_z}=\overrightarrow{OP}
$$

3.2 单位向量

单位向量是指长度等于 1 的向量。由于是非零向量，单位向量具有确定的方向。单位向量有无数个。如上图中，$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$、$\boldsymbol{z}$ 分别为 x、y、z 轴方向上的单位向量。

3.3 向量模长

向量 $\boldsymbol{A}$（x, y, z）的大小，也就是向量 $\boldsymbol{A}$ 的长度（或模长），记作 $|\boldsymbol{A}|$。向量 $\boldsymbol{A}$ 的模长计算公式可以表示为：

$$|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

如上图，假设 $\boldsymbol{OP}$ 的三维坐标为（$3, , 5, 6$），则 $\boldsymbol{OP}$ 的模长为：

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{70} \end{aligned}$$

4 向量乘法

向量之间的乘法有两种形式，一种是点乘，表示为 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$，另一种是叉乘，表示为 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$。

4.1 向量的点乘

求解向量的点乘有两种方法，代数方法和几何方法。

4.1.1 代数方法

设二维空间有两个向量，$\boldsymbol{A}$（x_1, y_1）和 $\boldsymbol{B}$（x_2, y_2），他们之间的点积可以表示为：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

推广到更为一般的情况，n 维向量的点积为：

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \end{aligned}$$

举个例子，设 $\boldsymbol{A}$（$3, 0, 1$），$\boldsymbol{B}$（$0, 5, -3$），则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之间的点积为：

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= 3 \times 0 + 0 \times 5 + 1 \times (-3) \\ &= -3 \end{aligned}$$

4.1.2 几何方法

设二维空间内有两个向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，它们的夹角为 θ（$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$）。则它们的点积可以表示为：

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

该定义只对二维和三维空间有效。由以上定义可知，最后得出的结果必然是一个标量，该标量可以大于 0，可以小于 0，也可以等于 0，且取值的正负性只与两向量之间的夹角 θ 有关。举个例子，假设在二维空间中，$\boldsymbol{A}$ 的模长为 4，$\boldsymbol{B}$ 对的模长为 3，它们之间的夹角为 60°，求两向量之间的点积：

$$\begin{aligned}
\vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \\
&= 3 \times 2 \times \cos 60^\circ \\
&= 3
\end{aligned}$$

4.2 向量的叉乘

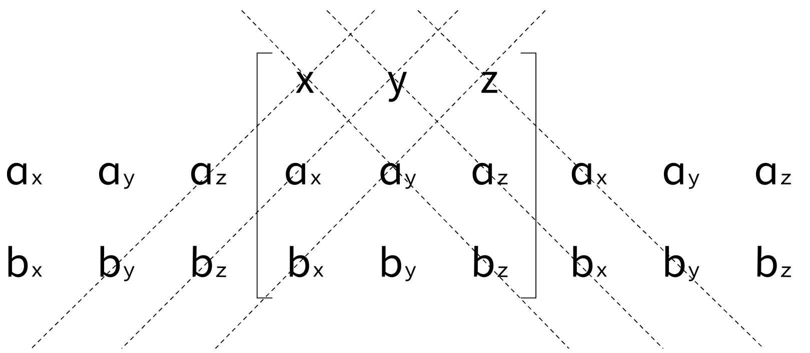
与点积不同，它的运算结果是一个向量而不是一个标量。并且两个向量的叉积与这两个向量和垂直。求解向量的叉乘也有两种方法，代数方法和几何方法。

4.2.1 代数方法

设三维空间内有两个向量 $\boldsymbol{A}$（a_x, a_y, a_z），$\boldsymbol{B}$（b_x, b_y, b_z），求 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉乘。

$$\begin{array}{ccc} & & \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{array}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}
\begin{array}{ccc} & & \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{array}$$

首先，我们写出如上的矩阵表达式，其中 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 分别表示 x，y，z 方向上的单位向量。分别以 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ 为起点，连接平行于矩阵主对角线和副对角线上的各个元素，如下图：



可以看到，有三条平行于主对角线的连线和三条平行于副对角线的连线，每条连线上有

三个元素。每条平行于主对角线连线上的各个元素相乘，每条平行于副对角线连线上的各个元素相乘之后取负值，最后对这六个值进行求和就得出来 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 叉乘的结果，即：

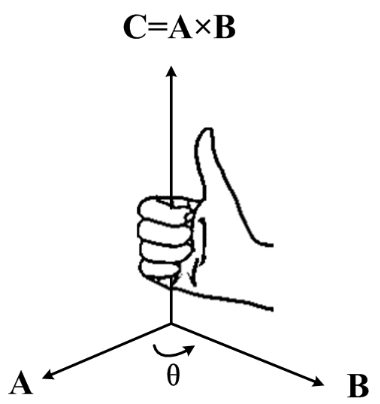
$$\vec{A} \times \vec{B} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{x} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{y} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{z}$$

4.2.2 几何方法

设二维空间内有两个向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，它们的夹角为 θ（$0° \leq \theta \leq 180°$）。则它们之间叉积的模长可以表示为：

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta$$

$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{B}$ 之间叉积的方向遵循向量积右手定则。右手除姆指外的四指合并，姆指与其他四指垂直，四指由 A 向量的方向握向 B 向量的方向，这时姆指的指向就是 A，B 向量向量积的方向。就是说，AB 向量积的方向垂直于 AB 向量确定的平面。如下图：



举个例子，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为 x，y 轴方向的单位向量，则：

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$$

$\boldsymbol{z}$ 为 z 轴方向上的单位向量。

5 三维空间中物体的运动

我们知道，物体在三维空间中的运动情况非常复杂，比如一个粒子在大气中做无规律运动。但是，大多数三维空间物体在某段时间内的运动都可以被简化为在二维平面上的运动，比如，抛出一个篮球，到篮球落地，篮球在空中这段时间的运动（只考虑重力对篮球的作用），可以简化为在二维平面上所做的运动。接下来，我们就以这个篮球为例，分析它在二维平面上的运动情况。如下图：
篮球被抛出时的初速度为 v_0，与 x 轴的夹角为 θ。把篮球的运动分解为水平方向和竖直方向上的情况来单独分析：篮球的初速度在水平方向上的分量 $v_x = v_0 \cos\theta$，在竖直

方向上的分量 $v_y = v_0 \sin\theta$。篮球在运动过程中，只受到重力的作用，所以，篮球在水平方向上没有加速度，在竖直方向上的加速度为 $-g$。由此可知，篮球在水平方向上做初速度为 $v_0 \cos\theta$ 的匀速运动；在竖直方向上，篮球上升阶段做初速度为 $v_0 \sin\theta$，加速度为 $-g$ 的匀加速运动，下降阶段做自由落体运动。而篮球的实际运动情况就是在水平方向和竖直方向上运动情况共同作用的结果。