《美丽心灵》原型的诺奖之作：纳什均衡

1 纳什均衡简介 **1**

1.1 囚徒困境 2

1.2 “看不见的手”与货币战 2

2 纳什均衡点的数学推导 **2**

2.1 N 人博弈 3

2.2 混合策略 3

2.3 纳什均衡究竟是什么 3

2.4 N-simplex 4

2.5 Sperner's Lemma（斯波纳引理） 5

2.6 Brouwer's Fixed-Point Theorem（布劳威尔不动点定理） 6

2.7 纳什均衡点的必然存在 6

3 纳什均衡的社会意义 **6**

1 纳什均衡简介

电影《美丽心灵》想必很多读者都熟悉，患有精神分裂的天才科学家约翰纳什与妻子的爱情故事可歌可泣（右图为纳什夫妇本尊），在影片结尾，约翰纳什被授予了诺贝尔经济学奖，获奖理由便是那大名鼎鼎的纳什均衡理论，来自于约翰纳什在攻读博士学位期间（1951 年，约翰纳什当时 23 岁）完成的毕业论文，这份仅仅 27 页的博士论文奠定了现代主流博弈理论的基础，为经济、数学、营销、政治等领域均带来了不可磨灭的贡献。

1.1 囚徒困境

那么纳什均衡究竟是什么呢？我们先从几个经典的例子讲起，最著名的例子要数“囚徒困境”了。假设两个小偷被捕，警方对他们二人进行隔离审讯，并分别告知他们如下几种政策：

- 如果一个人认罪了，另一个人没认罪，那么认罪的人判刑 1 年，没认罪的判刑 10 年。
- 如果两个人都认罪了，那么两人都判 6 年。
- 如果两个人都没认罪，那么两人都判 2 年。

显然，对他们而言，最好的策略是两人都拒绝认罪，这种情况下，两人都只判刑 2 年，但现实情况是，他们每个人都担心另一个人认罪，从而导致没有认罪的自己反被判刑 10 年，因此为了保险起见，两人均选择了认罪，这样做的话，如果对方认罪了，那么自己会被判刑 6 年（好于 10 年），如果对方没有认罪，那么自己只会判刑 1 年，这是最“利己”的做法，这也导致两人都被判刑 6 年。两人都不认罪的最佳策略也被称为这场囚徒博弈的“纳什均衡点”。

1.2 “看不见的手”与货币战

纳什均衡对当时主流的亚当斯密“看不见的手”原理发出了挑战，按照亚当斯密的说法，在市场经济中，如果每个人都从“利己”的角度出发，那么最终全社会都会达到“利他”的效果。然而纳什均衡理论证明，这种“利己”做法并不能给整个群体带来“利他”效果；任何一个合理的博弈场景，都存在至少一个纳什均衡点，这些均衡点所对应的策略是这个博弈群体的最佳策略，在该策略组合里，任何一个参与者因为“利己”而单独改变策略的做法，都会使整个群体陷入困境。

这种原理也可体现在价格战，在同等条件下，两家不同的公司拥有相同质量货品，根据纳什均衡原理，两家公司的货品定价应当保持一致，如果一方打破这种默契，期望通过降低价格来从对方那里赢取销量，那么双方就会陷入无止境的降价拉锯战之中，互相压价（因为价更高的一方会逐步失去市场，直至销量归零），最终当双方的价格都低至成本价之后，便会产生两败俱伤的后果。国内两家著名的 O2O 企业就是为了避免出现此类后果，因而达成了合并协议，终止了烧钱补贴模式。类似的例子还有很多，例如“打猎博弈”、“货币政策”、“赤壁之战”等等，感兴趣的读者可以上网查阅。

2 纳什均衡点的数学推导

接下来我们从数学的角度来解读纳什均衡以及博弈论。纳什在他的博士论文里主要给出了一种证明在有限博弈场景中存在纳什均衡点的方法，主要借助了 Brouwer's

Fixed-Point Theorem（布劳威尔不动点定理，关于此定理有一个梗：当纳什将自己的博弈论成果展示给另一位天才科学家冯诺伊曼时，被冯诺伊曼诟病，并称之“这只不过是不动点定理的变种”，不予重视）。我们先从基本的 N 人博弈讲起。

2.1 N 人博弈

标准的 N 人博弈一般由数组 (N, A, u) 来定义，N 代表该博弈场景的参与者的数量，在囚徒困境场景里，N=2；A 是集合 $(A_1, A_2, \ldots A_n)$，其中，A_i 代表参与者 i 可选的操作集合，囚徒困境场景的每一位参与者的 A_i 均相同：$A_1 = A_2 =$（认罪、不认罪）；u 代表收益函数（payoff function），它的输入是策略组合（每个参与者分别执行了什么操作），它的输出是一个用来判断优劣的数值（收益），例如 $u_i(s)$ 就代表着当各个参与者的策略组合为 s 的时候，参与者 i 会得到多少“收益”。

2.2 混合策略

上面我们提到了策略组合，也可以称为混合策略（Mixed Strategy），大致就是描述一个参与者的所有可能执行的操作及其概率分布，参与者可以随机选择接下来要执行的操作。一个混合策略可以用 s_i 来表示，那么在基于策略 s_i 的条件下，参与者执行操作 a_j 的概率便由 $s_i(a_j)$ 来表达。给定一种策略 s_x ，如果只存在一个操作 a_y 使得 $s_x(a_y) > 0$，那么我们就可以称这个策略 s_x 为纯策略（pure strategy），上述囚徒困境例子里的策略便为纯策略。一般来说，一个博弈场景会有两种纳什均衡点，一种是纯策略纳什均衡，意味着博弈者在当前情况下只能选择一种特定的操作来执行；另一种是混合策略纳什均衡，意味着博弈者在当前情况下有多个操作可选择，但这些操作的选择要依据特定的概率分布。

2.3 纳什均衡究竟是什么

熟悉了上面的术语，我们可以得到纳什均衡的专业描述，实质上，纳什均衡是指，对于一个博弈场景，如果存在一个策略组合，在这个组合中，对于每一位博弈者（参与者）而言，只要其他几位博弈者不改变自己的策略，那么这位博弈者此时的策略（要执行的操作）始终是对于自己来说最优的操作。之所以称之为“均衡”是因为这种策略组合能够恰好保证每位博弈者的效益，而不会产生较大的收益差异，即某几个幸运的博弈者得到巨额收益，而另外几个倒霉的博弈者损失惨重。为方便书写，我们定义

$$S_{-i} = (S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, S_{i+2}, \ldots S_n)$$

代表不包含博弈者的策略的策略组合，接下来我们定义博弈者针对策略组合的最优对策为 s_i^*，则不论 s_i 是什么，均满足如下条件

$$u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}\right)$$

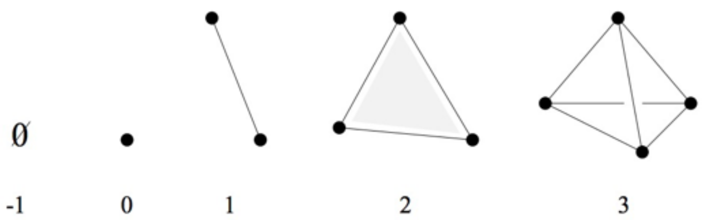
于是我们可以定义纳什均衡，如果一个策略组合 $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ 是纳什均衡，那么对于每一位博弈者，均有

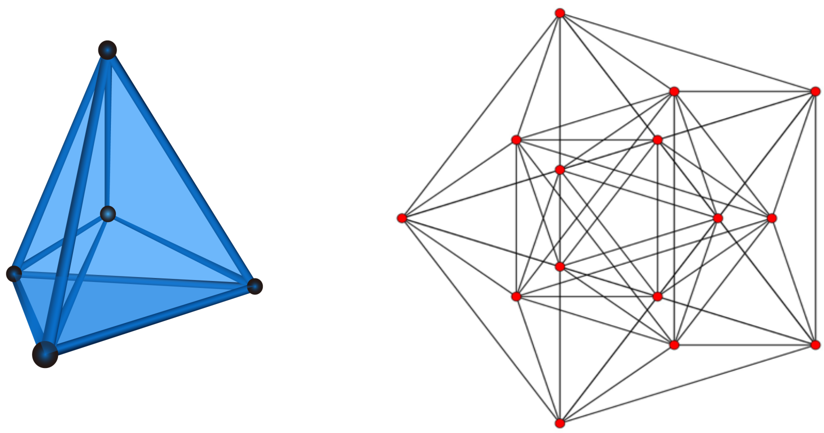
$$s_i = s_i^*$$

由此可见，纳什均衡实质上是一种稳定的状态，意味着共赢，如果执行了纳什均衡所对应的策略组合，那么即使每位博弈者都清楚其他博弈者下一步的操作，这位博弈者都不会选择去更换自己的策略，因为他清楚，一旦自己出于“利己”目的而更换了策略，便会破坏此时的均衡，从而对整个博弈者群体带来显著的利益损害。

2.4 N-simplex

证明任意合理的博弈场景均存在纳什均衡点的过程很繁琐，我们首先要熟悉一些拓扑学概念。N 维纯形旨在用三角形来构造 N 维空间，0-simplex 代表一个点，1-simplex 代表一个线段，构成了一维空间；2-simplex 代表一个三角形，构成了二维空间；3-simplex 代表一个四面体，构成了三维空间；4-simplex 代表一种将四面体的每一个面都嵌入一个四面体的四维几何体，它构成了四维空间；以此类推。

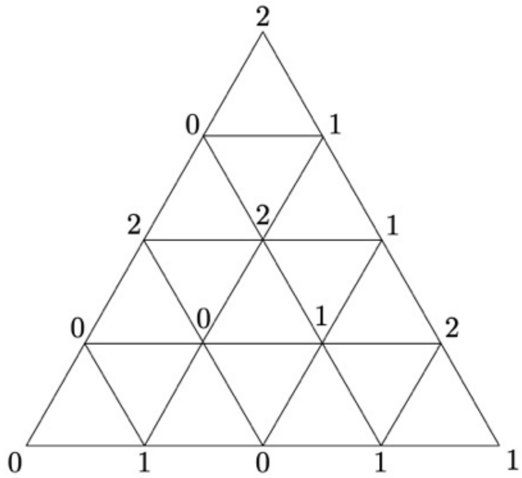




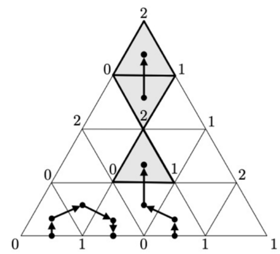
如上图，左边代表 4-simplex，右边代表 5-simplex。借助 N-simplex 的概念我们能够描述更复杂的关系图，为针对博弈场景的数学建模做铺垫。

2.5 Sperner's Lemma（斯波纳引理）

给定任意 N-simplex，我们都可以对其进行无止境的细分（Simplicial subdivision）与标注（Proper Labelling），通俗来讲，标注要求 N-simplex 里面每个点的标签都取自它所在的“线段”们上面的点，我们拿 2-simplex（三角形）来举例。首先我们需要对这个三角形的三个点（顶点）赋予不同的标签：0、1、2，接下来我们再在这个三角形各个“线段”上面描绘新的细分点，这些细分点的标签必须取自它所在的“线段”们上面的其它点，此处涉及到两个重要数学概念：Convexity 和 Affine Independence，具体内容读者们可以自行查阅，这里不细讲了。完成细分之后的 N-simplex 及其标注如下图



最初始的 2-simplex 的标注就是上图三角形最外侧的三个顶点（左下为 0，右下为 1，中上为 2），经过合理标注的 N-simplex 的每个点都要符合要求（必须取自这个点所在线段的其它点的标签），例如上图三角形里面从下往上数第三层中间点的标签（数值为 2）便取自它的左侧一格处的点，从下往上数第二层最右侧的点的标签（数值为 2）便取自它斜上方顶部的点（即三角形的顶点）的标签。如果一个小三角形（subsimplex）每个点的标注都不一样，那么可以称这个 subsimplex 为完全标注（complete labelling）。斯波纳引理的内容便是：任何一个被细分的 N-simplex，它里面被完全标注的 subsimplex 的数量一定是奇数（如上图有三个被标暗的小三角形）。这个引理的证明需要用到归纳法，较为繁琐，感兴趣的读者可以自行查阅。一个标准的 N-simplex（可以理解为经过归一化处理后的）可用 Δ_N 来表示。



2.6 Brouwer's Fixed-Point Theorem（布劳威尔不动点定理）

不动点定理最开始是受搅拌的咖啡启发的，不论采用什么样的稳定的搅拌方式，咖啡液体里总会存在一个不动点。用数学语言来表达，对于一个拓扑空间里满足一定条件的连续函数 f ，总会存在一个不动点 x_0，使得

$$f\left(x_0\right)=x_0$$

接下来我们用拓扑语言来描述这个定理。设定一个连续函数 f ,它从一个标准 N-simplex 映射到另一个标准 N-simplex，即 $f:\Delta_N\rightarrow\Delta_N$ ，那么 f 肯定拥有一个不动点，也就是说，存在 $z\in\Delta_N$ ，使得 $f(z)=z$ 。关于此定理的证明分为两步：首先我们要构造一个能够进行合理标注的 Δ_N，接下来我们再证明，当这个 Δ_N 被无止境的细分之后，总会有一系列的 subsimplex 越来越逼近（收敛于）某个不动点。具体的证明比较繁琐，期间涉及到了斯波纳引理：一定存在奇数个被完全标注的 subsimplex，这说明至少存在一个被完全标注的 subsimplex 使得它比其它的 subsimplex 更接近不动点。经过一系列的推衍以及反证法，最终可以证明此定理。

2.7 纳什均衡点的必然存在

借助不动点定理，我们只需证明所关心的博弈场景符合该定理所阐述的 Δ_N 的基本构成条件。首先我们要找到 Δ_N 之间相互映射的连续函数 f。给定一个策略组合 s ，对于任意的博弈者 i 以及待执行的操作 a_i ，我们定义一个函数来描述博弈者 i 如果执行操作 a_i 会对他带来怎样的收益提升

$$Gain_{i,a_i}=\max\left\{0,u_i\left(a_i,s_{-i}\right)-u_i\left(s_i\right)\right\}$$

该函数就是对前文提到的最佳对策 s_i^* 的一种建模，接下来我们可以定义我们想要的连续函数 f ，它在策略空间 S 之间相互映射，即 $f:S\rightarrow S$

$$f(s)=s'$$

这里相当于把一个旧的策略组合 s 转换为一个新的策略组合 s' ，新旧组合之间具体的关系为：

$$s_i'\left(a_i\right)=\frac{s_i\left(a_i\right)+Gain_{i,a_i}(s)}{\sum_{b_i\in A_i}\left(s_i\left(b_i\right)+Gain_{i,b_i}(s)\right)}$$

根据适当的推导，我们可知这样的映射关系满足不动点定理的基本条件，因此根据布劳威尔不动点定理，必然存在一个不动点，也就是均衡点，在此均衡状态下，每名博弈者的最佳对策均是保持不动，这便是大名鼎鼎的纳什均衡。

3 纳什均衡的社会意义

比起其它理想化的经济学模型，纳什均衡背后的模式更符合现实，不论是什么样的博弈场景，每名博弈者或多或少都会存在一己私欲，因此一个合格的博弈体系必须要将

此考虑进去，可以说，纳什均衡重塑了整个现代经济学，也极大的拓展了经济学与社会学、自然科学之间的联系，将不定因素、个体因素、经验因素完美地结合在一起。任意一个博弈场景，都存在一个共赢的策略，该策略会以一种均衡的形式永续，这种均衡思想启发了诸多重要理论的提出。