

# 宇宙究竟有几维

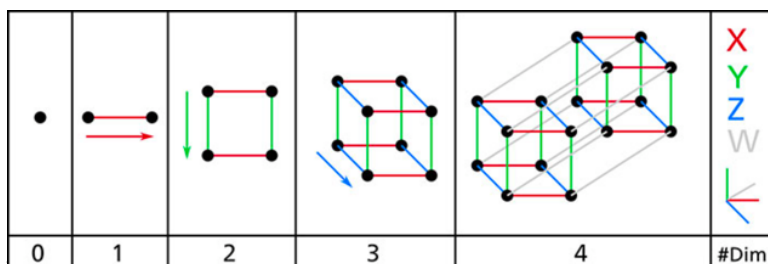
<b>1 维度究竟是什么</b>	<b>1</b>
1.1 维度的数学意义 . . . . .	1
<b>2 从弦理论到宇宙维度</b>	<b>2</b>
2.1 弦理论、超弦理论、M 理论 . . . . .	3
2.2 如何由弦论推导出宇宙的维度 . . . . .	4
2.3 小结 . . . . .	5
<b>3 “宇宙是 11 维的” 简易推导 (选读)</b>	<b>5</b>
3.1 “拉马努金和” 与欧拉公式 . . . . .	5
3.1.1 欧拉公式 . . . . .	5
3.1.2 “拉马努金和” . . . . .	6
3.2 从弦理论到 M 理论：从 26 维宇宙到 11 维宇宙 . . . . .	7

## 1 维度究竟是什么

维度这个概念可以说是理论物理界最被人们误解的概念之一，或许是受近期层出不穷的科幻作品的影响，人们总是自觉地将“维度”赋予科幻意义，幻想出一大批针对高维度空间的想象，而很少有人去深究这些概念的真正涵义。自从基于弦理论衍生出来的 M 理论推导出“宇宙是 11 维的”这一结论，民间便诞生了大量试图阐述 4 维、5 维、6 维乃至 11 维空间里面的世界究竟是什么样的“科普读物”，殊不知这些内容导致民众认知与宇宙维度的真正涵义渐行渐远。这里我们会用比较浅显的言语把民众认知稍微带回正轨，虽然对于物理专业人士来说，这些讲解是存在纰漏的，但在有限的篇幅下，专业性与可读性二者总要有所取舍，因此还望专业读者们不要见怪。

### 1.1 维度的数学意义

在切入正题之前，我们首先要先对维度的概念有所了解。我们当今所熟悉的周围世界是三维的，这意味着，对于在这个世界里的任意物体，我们只需要三个数值就能定位这个物体：横向位置、纵向位置、高度。



狭义相对论将我们的三维世界附加了一维：时间，于是便形成了四维空间，也就是说，如果想定位一个物体（或事物），我们必须要知道它的空间位置（对应三个数值）和它的时间维度（对应一个数值）。后面我们会发现，时间是一个特殊的维度，不管你的空间维度是 3 维还是 30 维，你总能给它附加一个时间维。在弦理论诞生之前，物理界的理论是不受维度限制的，因为维度实质上就是一种数学游戏，例如在三维空间，一个物体的位置可以由三个变量  $e_1, e_2, e_3$  来描述，这三个变量分别代表：横向位置（长）、纵向位置（宽）、高度（高），它们实质上是三个彼此相互垂直的向量；这三个变量被赋予的数值分别为  $x_1, x_2, x_3$ ，于是我们可以把该物体在三维空间的位置表述为

$$p = e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2 + e_3 \cdot x_3$$

因此从数学意义上讲，我们可以定义任意维度的空间，所需要做的无非就是增加单位向量（长度恰好为 1 的向量）的数量，例如一个 100 维空间的物体位置可以表述为

$$p = e_1 \cdot x_1 + e_2 \cdot x_2 + e_3 \cdot x_3 + \cdots + e_{100} \cdot x_{100}$$

只要我们保证这 100 个维度单位向量  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{100}$  彼此之间相互垂直就可以。熟悉线性代数的读者们应该知道，在  $n$  维空间，我们最多只能找到  $n$  个这样彼此相互垂直的单位向量。例如，在三维空间里面，我们最多只能找到 3 个彼此相互垂直的单位向量。

现在我们回到物理界，在弦理论诞生之前，当时的所有伟大的物理理论（相对论、量子力学、牛顿力学、麦克斯韦方程组、等等）里面所阐述的定律都是不受维度限制的，也就是说，不管是在几维空间，这些理论都是成立的，因为维度的增加或减少只不过是数学层面的公式变换。这点在当时是毋庸置疑的，至少在数学意义上，人们看不出 20 维空间的物理定律与 21 维或 19 维空间的物理定律有什么本质的区别。直到弦理论的诞生，人们发现这些物理定律并不能适用所有维度的空间。

## 2 从弦理论到宇宙维度

谈起弦理论，我们要先了解当时物理学的发展情况。近千年来的物理进程可以用两个字来概括：统一。所谓“统一”，就是寻找到二者之间本质上的一致，例如，妇孺皆知的牛顿第一运动定律，即惯性定律，由伽利略提出，由牛顿升华，阐述的便是“动”与

“静”的统一：“处于静止或匀速运动的物体，在不受外力的情况下，将保持其静止或匀速运动的状态”。由这个定理可知，物体并不存在真正的运动与静止，不同于古人总是将运动与静止之间塞入一条鲜明的界限，物理学意义的动与静之间并无鲜明界限的存在，地球上的静止咖啡杯对于太阳系里的静止空间站来说是相对运动的，而该空间站对于银河系里的某恒星又是运动的，永远不会存在绝对的“静止”与“运动”的概念。人类当前的物理学发展主要是沿着对统一的认知的不断深入而前进，运动与静止的统一就是人类在这个前进历程上第一次完美的胜利，接下来的完美统一便是地球的引力与星球之间的作用力的统一，由此产生了万有引力定律，再接下来便是由麦克斯韦等人主导推进的电与磁的统一，从此人们开始熟悉如何掌控电力，进入二十世纪就开始了时间与空间的统一（广义相对论），质量与能量的统一（核能）等等。

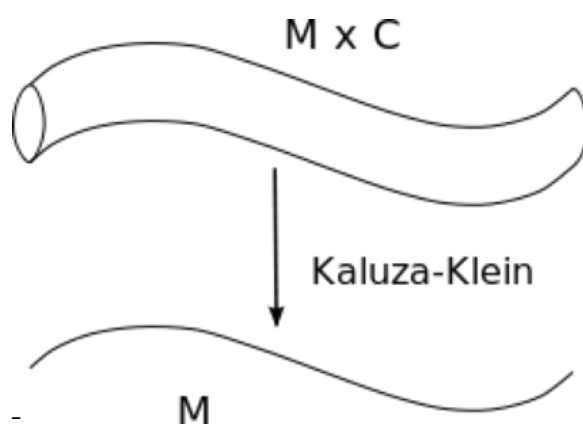
## 2.1 弦理论、超弦理论、M 理论



直到 20 世纪中期，人们发现，无法找到一种完美的理论将四种最基本的力统一起来，这四种基本力分别为：引力、电磁力、强力、弱力，自然界所有已知的物理现象都是由这四种基本力构成的，量子力学能够有效地将电磁力、强力、弱力这三种力统一起来，

但没法把广义相对论所描述的引力也统一进去。弦理论的诞生使人类朝着大统一理论更近了一步。严格来说，我们所说的弦理论是专门描述玻色子的理论，粒子主要有两大类：费米子（自旋量子数为半奇数的粒子）和玻色子（自旋量子数为整数的粒子），通俗来讲，构成我们宇宙基本结构的粒子一般都是费米子，而各个物体之间的相互作用则是由玻色子来传递。弦理论的核心思想就是宇宙的基本构成单位不是像粒子这样的“点状”物质，而是一小段具有能量的“弦”（如左上图），一根弦的不同震动模式对应着自然界不同的基本粒子。基于这种设定，人们发现这四种基本力是可以完美统一的。然而人们接下来发现，玻色弦理论仅能对玻色子进行描述预测，而无法准确预测宇宙物质最基本构成元素的费米子，这种单一的弦模式也会导致快子凝聚过程非常不稳定，除此之外，玻色弦理论也无法将量子场论的规范对称性给容纳进去。何谓规范对称性，读者们可以把它理解成一种补平操作，当你把某个东西（例如时空）的某个部位给拉高，那么这个东西的另一个部位就会自动降低，从而保证某种特性始终不变。电荷守恒定律就跟规范对称性有关。不管怎样，弦理论是存在瑕疵的，为了清除这个瑕疵，科学家们提出了超弦理论。

简单来说，超弦理论就是在弦理论的基础上，把超对称性也加了进去，我们日常说的弦理论其实指的就是“超弦理论”，而早期的弦理论往往用“波色弦理论”来称呼。在弦理论里，弦的尺寸普遍非常细微，但也存在其它尺寸的弦，也存在许多不同于弦的存在形式，例如：薄膜状、点状物体。超弦理论也揭示了一些有趣的原理，比如紧化现象 (compactification)，大致意思就是物体的高



维度特征可能会被卷缩到低维度特征里面，从而导致无法察觉，例如一根电线，从远处看它只是一维的物体（只存在一个方向的位移），但如果靠近看，就会发现这根电线是有粗细的，因此它变成了二维物体（增加了用来描述粗细的维度），如果再近一些就会发现，电线内部的横截面还包含着更多空间，于是就变成了三位物体。原本三维的电线经过紧化，变成了二维，又变成了一维。弦理论便是用这种方式来解释为什么我们只能观察到三维空间，却看不到更高维度的空间，因为更高维度的空间被压缩进低维度空间里面了。

超弦理论建立之后，科学家们发现其实存在五种形式不同的超弦理论，这五种版本的弦理论各有千秋，一时间难以分出高下，物理学界苦苦思索，希望能找到一种方法能从这五种理论里面辨出真伪，直到 1995 年，Edward Witten 提出了一种全新的构想：或许这五种理论都是正确的，它们五个实际上是另一种更大的理论的五种化身，这个理论也被称为 M 理论。在 M 理论的框架里，五个不同版本的超弦理论得到了统一，基本思路有了，接下来便是执行了，如今科学家们仍在努力完善 M 理论细节的过程中。

## 2.2 如何由弦论推导出宇宙的维度

我们知道，自然界存在一些铁打不动的真理，例如，一个事件发生的概率只能是从 0 到 1 之间的一个数，不可能小于 0 或大于 1；再比如，光子的能量不可能小于零；再比如，物质经过充分的旋转之后总能回归原样。基于这些“真理”，我们能够对现有的物理理论进行检验与修正，关于宇宙维度的推导便是基于此。在研究玻色弦理论时，科学家们发现，如果把弦理论所描述的宇宙的维度设为的话，那么下列等式必须满足：

$$(D - 2) = -\frac{2}{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + \infty}$$

否则就会出现违背“真理”的情况，例如事件发生的概率小于 0 或大于 1；或者，你原地转一圈之后就变成了另一个人（假设其它条件都可完全忽视）；总之，会发生诸多诡异的现象。根据欧拉、拉马努金等人的发现，如果结合虚数领域，则会有如下结论

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

该结论也被成为“拉马努金和”，看似不可思议，但却是被充分检验过的数学理论（毕竟无穷并非定量的数值，而是一种用于表达趋势的变量，因此不能用常规思维来思考囊括了无穷概念的公式），该理论的具体情况下文会讲述。借助这个定理，我们轻易能够将关于宇宙的维度的限制方程解答出来：如果能让弦理论描述的宇宙正常运作，则，即，维度必须等于 26，这就是我们常说的“弦理论声称宇宙是 26 维”这个说法的由来。

在超弦理论的宇宙里，我们只需要对上述公式进行简单的调整，因为在传统的玻色弦理论里面，一根弦只存在一种震动方向，而在超弦理论里，一根弦是存在三种震动方向的，也就是说，超弦理论的弦能量是玻色弦理论的三倍，于是上述等式就变成了：

$$3(D - 2) = -\frac{2}{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \infty}$$

解方程可以得到  $D = 10$ ，即，超弦理论的宇宙是 10 维的。而 M 理论声称，五种不同版本的超弦理论均是正确的，它们在一个更高维度的空间里得到了完美的统一，因此，M 理论的宇宙维度是  $10+1 = 11$  维。这便是“宇宙是 11 维”这一说法的由来。

## 2.3 小结

宇宙的真实维度并非多数科普文章所讲的“空间 + 时间 + 平行宇宙 + …”那样充满着超现实主义的浪漫，它实际上是对一种用来描述宇宙运转规律的方程的限制条件，宇宙的维度只有恰好为某个数值的时候，这些方程才不会出现悖谬之处，它是一种由数学推导而来的推论，至于这些维度分别代表着哪些实际的物理意义，现在无从得知，也无需得知，留给专业的科学家们就好，把专业的事交给专业的人去做，如今的自然科学与 500 年前不同，凡是能够用初等数学描述的结论都已被挖掘殆尽，毕竟地球的人口基数是天文数字，近千年的思想堆砌，初等数学早已挖掘干净，导致任何新的自然科学成果只能从高等数学领域里寻觅。任何在没有对前人工作的基础成果充分掌握或理解的情况下就提出来的幻想是没有任何参考价值的，人类史上无一例外。

## 3 “宇宙是 11 维的”简易推导（选读）

### 3.1 “拉马努金和”与欧拉公式

首先我们给出两组极其重要的数学定理，分别为

#### 3.1.1 欧拉公式

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

$$(e^{\pi i})^2 = 1 = e^{2\pi i}$$

### 3.1.2 “拉马努金和”

$$L = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$$

这里我们只对“拉马努金和”的求解过程进行解读，关于欧拉公式的解读可参考其他文章，我们首先给出格兰迪级数如下：

$$G = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$$

关于上述等式，有一种“错误”的非正规证明方法，供大家参考：

$$1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$$

实际上，该证法是错误的，因为如果你想改变一个数列的求和次序，必须要先保证这个数列是绝对收敛的，比如数列： $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{\infty}\}$  就是收敛的，而格兰迪级数对应的数列  $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$  并非收敛的数列。在此给出这种证法仅供大家参考，拓宽思路。那么格兰迪级数的正确证法是怎样的呢？正确的证明需要用到切塞罗法进行求和，使用该方法的基本条件是，我们不需要保证一个数列的数值本身是收敛的，我们只需要保证这个数列前  $n$  项和的平均值能够收敛。因此对于原始的数列  $A_n$ ，我们可以定义一个新的数列  $C_n$ ，用来描述原始数列前  $n$  项和的平均值

$$C_n = \frac{\sum_{i=1}^n A_i}{n+1}$$

如果我们发现  $C_n$  能够收敛于某个数  $C$ ，则我们可以说原始数列  $A_n$  的和收敛于  $C$ ，基于此，我们对格兰迪级数进行计算，设格兰迪数列为  $\{G_0, G_1, G_2, \dots\} = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$ ，即

$$G_i = (-1)^i$$

接下来我们求出各项对应的切塞罗数列项

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{G_0}{1} = 1 \\ C_1 &= \frac{G_0 + G_1}{2} = \frac{1}{2} \\ C_2 &= \frac{G_0 + G_1 + G_2}{3} = \frac{2}{3} \\ &\dots \\ C_n &= \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{4(n+1)} \end{aligned}$$

当  $n$  趋近于无穷的时候,  $\frac{1+(-1)^n}{4(n+1)}$  趋近于 0, 于是  $C_n$  便趋近于  $\frac{1}{2}$ , 格兰迪级数得证。有了格兰迪级数, 我们可以轻松得到 “拉马努金和”, 首先我们将格兰迪级数每一项乘  $(n+1)$ , 得到

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$$

因此

$$2S = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \dots = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = G$$

于是

$$s = \frac{1}{4}$$

接下来我们用期望得到的 “拉马努金和”  $L$  与  $S$  相减, 得到

$$L - S = 1 + 2 + 3 + \dots - (1 - 2 + 3 - 4) = 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots$$

观察可得, 右项恰好为  $L$  的四倍, 即

$$L - S = 4L$$

换算可得

$$L = -\frac{1}{3} \times S = -\frac{1}{12} = 1 + 2 + 3 + \dots$$

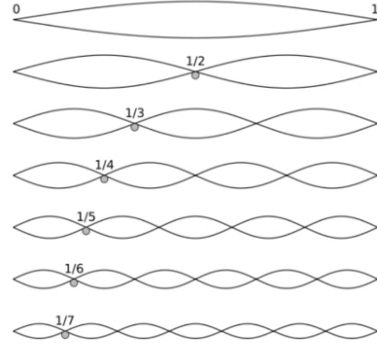
## 3.2 从弦理论到 M 理论：从 26 维宇宙到 11 维宇宙

掌握了上述数学定理, 我们开始推导弦理论宇宙的维度 (物理专业的读者请见谅, 为保证推导过程的简洁与流畅度, 在这里省略并 “扭曲” 了多处步骤)。首先我们给出弦理论里面用来计算能量的公式, 也被称为 Partition Function。弦理论里面的基本 “粒子” 的能量是由它对应的 “弦” 的 “振幅” 来表达, 具体公式如下

$$z = \sum_k e^{iE_k \cdot t}$$

其中,  $i$  代表虚数单位,  $E_k$  代表这根弦在第  $k$  层的能量,  $t$  代表时间 (也可理解为弦理论宇宙中的基本度量变量)。根据弦理论, 一根弦的基本维度为两维, 分别代表时间和空间, 这两个维度是每根弦的默认维度, 所以后续我们的探讨都用  $D - 2$  来代替维度。上述公式的能量  $E_k$  与量子力学的能量异曲同工, 均是分层存在的, 以弦的震动频率  $\omega$  相关

$$\begin{aligned}
E_0 &= \frac{1}{2}\omega \\
E_1 &= \left(\frac{1}{2} + 1\right)\omega \\
E_2 &= \left(\frac{1}{2} + 2\right)\omega \\
&\dots \\
E_n &= \left(\frac{1}{2} + n\right)\omega
\end{aligned}$$



而单个量子震荡子（即 Quantum Harmonic Oscillator，简称 QHO，是弦理论的基本元素）是由多根不同震动频率的弦叠加组成，它的总震动幅度（即能量）为

$$z_{QHO} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{iE_n \cdot t} = \frac{e^{-\frac{i}{2}\omega t}}{1 - e^{-i\omega t}}$$

于是我们得到了单个震荡子在不同震动模式下的叠加状态，用上述公式来表达，接下来我们要来描述一组震荡子（弦）的整体能量，此能量的因变量是  $t$ ，它是由若干具有不同的震动频率上限的单个震荡子的能量进行连续相乘得到，该过程的具体原理我们在此不讲述，用公式表达如下

$$Z(t) = Z_{QHO}^{(\omega=1)} \cdot Z_{QHO}^{(\omega=2)} \cdot Z_{QHO}^{(\omega=3)} \dots Z_{QHO}^{(\omega=\infty)}$$

也就是说

$$Z(t) = \prod_{\omega=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{i}{2}\omega t}}{1 - e^{-i\omega t}} = e^{-\frac{i}{2}(1+2+3+\dots)t} \prod_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-i\omega t}}$$

我们用  $L$  代表“拉马努金和”，则

$$Z(t) = e^{-\frac{i}{2}Lt} \prod_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-i\omega t}}$$

为简化过程，我们可把最右项用一常量代替，因为它的无穷性质导致它不会随  $t$  发生实质变化，于是我们得到

$$Z(t) = e^{-\frac{i}{2}Lt} A$$

根据基本公理，这组弦“原地旋转”之后应该保持不变，也就是说，

$$Z(t + 2\pi) = Z(t)$$

然而我们发现，上述公式并不成立，因为

$$Z(t + 2\pi) = e^{-\frac{i}{2}Lt} \cdot e^{-iL\pi} A = e^{-iL\pi} \cdot Z(t) \neq Z(t)$$



为了满足上述“原地旋转”的真理，我们必须对弦系统的整体能量  $Z(t)$  进行“升级”，实质上，结合维度的数学定义，在弦理论的世界里， $n$  维空间的弦系统的整体能量恰好为  $Z(t)$  的  $n$  次方，也就是说，

$$Z(t + 2\pi)^{(D-2)} = Z(t)^{(D-2)}$$

代入之前求得的  $Z(t + 2\pi)$  表达式，可得

$$e^{-iL\pi \cdot (D-2)} \cdot Z(t)^{(D-2)} = Z(t)^{(D-2)}$$

根据欧拉公式我们知道

$$e^{2\pi i} = 1$$

因此

$$-iL\pi \cdot (D-2) = 2\pi i$$

于是可得

$$L \cdot (D-2) = -2$$

代入  $L = -\frac{1}{12}$ ，可得

$$D = 26$$

这意味着，在玻色弦理论中，宇宙的维度（最多）为 26 的时候才能保证“公理”不会被违背。如果基于超弦理论的框架，我们只需将以下等式

$$Z(t) = e^{-\frac{i}{2}Lt} \prod_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-i\omega t}}$$

改为

$$Z(t) = e^{-\frac{3i}{2}Lt} \prod_{\omega=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-i\omega t}}$$

因为超弦理论里面，弦的震动方向是有三个方向的，因此能量也要随之乘三。接下来的推导过程照搬，可得

$$3L \cdot (D-2) = -2$$

即，

$$D = 10$$

因此超弦理论的宇宙维度为 10 维。但因为存在 5 种不同的超弦理论，因此需要 M 理论凭借额外的一个维度将这 5 个版本的超弦理论统一起来，于是最终的基于 M 理论的宇宙维度为

$$D_M = D + 1 = 11$$

这就是我们常听说的“宇宙是 11 维的”这就话的由来（简易版）。