欧拉公式：最完美的公式

1 欧拉公式简介

著名诺贝尔奖得主理查德费曼将欧拉恒等式誉为“人类最卓越的公式”，因为它将数学界五个最基本的概念（自然常数 e、圆周率 π、虚数基本单位 i 、自然数基本单位 1 、实数的起始点 0）用一个简洁至极的公式，给完美的统一起来：

$$e^{\pi i}+1=0$$

欧拉恒等式由人类史上数学造诣最深的数学家之一莱昂哈德-欧拉于 1748 年首次提出，它最初的表达式与如今常见的有些不同，欧拉对常数的虚数次幂进行解析，借助三角函数的泰勒展开得到：

$$e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$$

这便是欧拉恒等式当初被欧拉提出时的形式，将 $x=\pi$ 代入就可得到大家所熟悉的形式。

2 欧拉其人

如果将数学发展的提升幅度作为衡量标准的话，欧拉绝对可以称为古今第一人，他 13 岁步入大学校园，师从著名数学家约翰伯努利，在接下来六十余年学术生涯里，欧拉凭借自己无穷无尽的智慧与精力，留下了浩如烟海的著作，按照 A4 纸的尺寸，仅仅遗存的作品就有十余万页，相当于欧拉从 18 岁开始每天要写 6 页，而且每页均是超一流水准的学术佳作。在 18 世纪，几乎所有的数学领域都有留下欧拉的名字，数论、代数、无穷级数、函数、微积分、微分方程、几何学、力学，各类欧拉公式数不胜数。

3 自然常数 e 与“利滚利”的渊源

自然常数 e 也被称为“欧拉常数”,它是一个无限不循环的超越数,约等于 2.718281828。假设一个理财产品的年化收益是 100%，年初存进 1 万元，年底就能拿回 2 万元，期间允许在任意时刻取出或买入。如果一个人希望收益最大化，那么他就可以采用“利滚利”的方式，比如，把一年分成 12 份，每个月的月初将全部资金买入，月底再将本金和收益全部取出之后再次买入，周而复始，那么他的收益如下：

	月初买入金额	阶段收益率	月底卖出金额
一月	10000	100%/12 = 8.33%	10833.33
二月	10833.33	100%/12 = 8.33%	11736.11
...	...	...	...
十一月	22264.91	100%/12 = 8.33%	24120.32
十二月	24120.32	100%/12 = 8.33%	26130.344

年度收益率为：

$$(1+\frac{100\%}{12})^{12} = 261.303...\% = 2.61303...$$

如果这个人不满足，希望把一年分为 365 份（每天都买入再卖出），这样利滚利周期就会更短更频繁，那么他的年度收益为：

$$(1+\frac{100\%}{365})^{365} = 271.457...\% = 2.71457...$$

但这个人还是不满足，他把利滚利周期变得越来越短，可是他发现，虽然这样做会使他的年度收益率越来越高，但其增幅却越来越慢，不管把一年分成多少份，收益率怎么也

无法超过 2.71829，这个极限值就是我们的自然常数，它的数学标准表达式为：

$$e = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cong 2.71828...$$

4 无穷级数与泰勒公式

借助泰勒公式，我们发现自然常数 e 其实还有另一种更直观的表达方式：

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{1\times 2\times 3\times 4} + ...$$

上面这种表达方式也被称为“无穷级数”，泰勒公式是一种能够将所有“合理”的函数 $f(x)$ 都表达为无穷级数的方法（我们用阶乘 3! 来表达 $1\times 2\times 3$）：

$$f(x) = C_0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + ...$$

这里面 $f^{n)}$ 代表对函数 $f(x)$ 求第 n 阶导数。利用这种表达方式我们可以得到 e 的 x 次幂的展开表达式：

$$e = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$

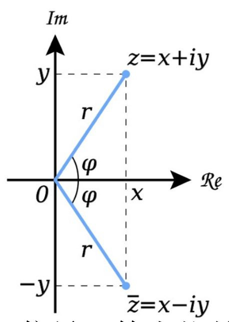
三角函数也可以用类似的形式来表达：

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$
$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

5 欧拉公式的推导

欧拉发现，e^{ix} 的无穷级数展开式恰好可以表达为 $\cos(x)$ 与 $\sin(x)$ 的展开式的组合，这主要得益于虚数基本单位 i 的特殊性质：

$$i^2 = -1$$



其实如果把我们所熟知的实数比作横轴（实数轴 ），那么虚数就相当于纵轴（虚数轴 ），横轴最基本的单位是自然数 1 ，而纵轴最基本的单位就是 i ，也就是 $\sqrt{-1}$。物理意义来讲，虚数相当于被“旋转”过的实数，借助虚数概念，科学家们能够准确地描述诸如“波”、“信号”等事物的复杂运动行为。根据上面得到的关于 e^x 的展开式，我们可以得到：

$$e^{ix} = 1 + +ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - ...$$

它恰好等于 $\cos(x)$ 的展开式加上 i 与 $\sin(x)$ 的展开式的乘积：

$$1+ix-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5-...$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...\right)+i\cdot z\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...\right)$$

于是我们便得到了欧拉恒等式的原始表达式：

$$e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$$

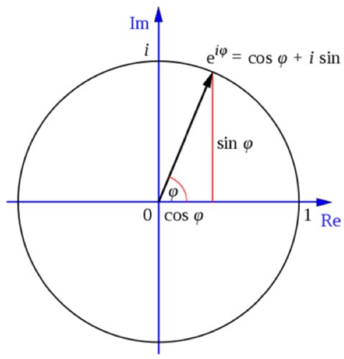
6 欧拉公式的意义

6.1 欧拉公式的几何意义

欧拉公式建立了实数与虚数之间的桥梁，在一个以实数轴作为横轴，虚数轴作为纵轴的空间里，e^{ix} 就相当于是一个向量（如下图所示），这个向量是通过将实数 1 所代表的向量沿逆时针方向旋转 x 得到的。此向量映射在横轴的数值是 $\cos(x)$，映射在纵轴的数值是 $\sin(x)$ ，严格来说，上述的欧拉公式应表达为：

$$e^{ix}=1\cdot\cos x+i\cdot\sin x$$

里的 1 和 i 恰好分别是实数和虚数的基本单位。根据欧拉公式的几何意义，我们发现 $e^{i\pi}$ 代表着将实数 1 逆时针旋转了 π（即 180 度），得到的新的向量恰好平卧在实数轴上，且与实数 1 的向量方向相反，这便是 -1，于是就可以得到我们常见的欧拉恒等式：

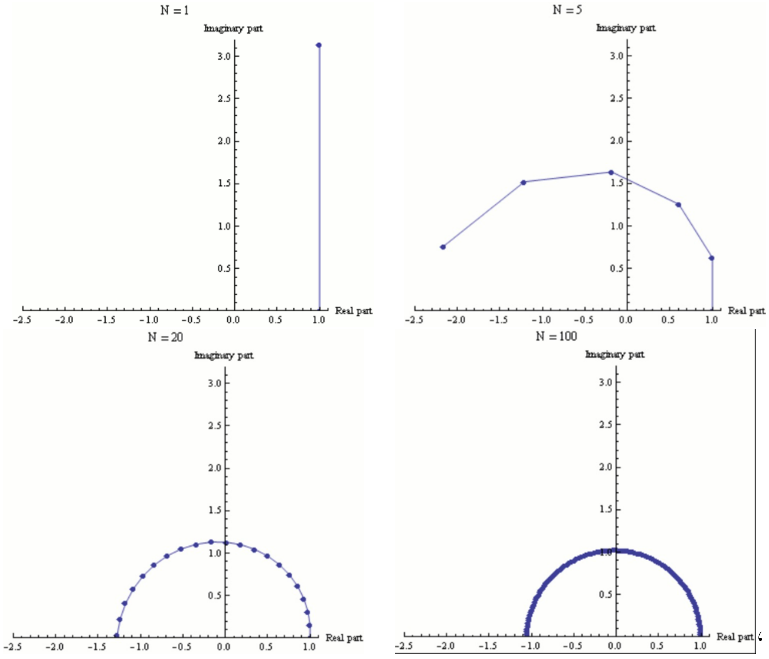


$$e^{ix}+1=0$$

值得注意的是，$e^{\pi i}=-1$ 并不意味着 πi 个 e 相乘恰好就等于 -1 ，因为这种对常数的 n 次幂的描述仅限于实属领域，若涉及到虚数则需要用更广义的数学模式来解读。类似前文讲述的利滚利场景，欧拉公式的 $e^{\pi i}$ 表达的也是一种无限逼近于某一极限值的过程：

$$e^{\pi i}\cong(1+\frac{i\pi}{N})^N$$

对于不同的 N 值，$e^{\pi i}$ 代表的向量也不同，随着 N 值逐渐增大，$e^{\pi i}$ 所代表的向量描过的痕迹也越来越逼近于圆弧，这个向量的终点也越来越接近 -1 。(如下图)

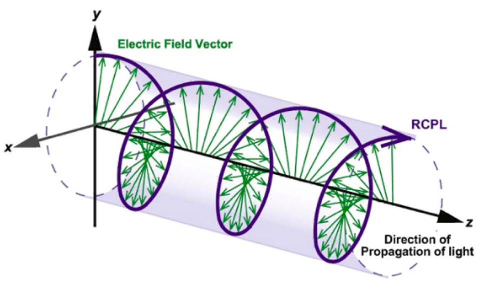


6.2 欧拉公式的现实意义

欧拉公式完美地将 e、π、i、1、0 这五个最基本的数学概念结合在一起，将人类的数字疆域成功扩大到了全新的世界，如今大多数工程建设均需要这种与虚数相关的概念，比如震荡力的表达式：

$$F = F_0 \cdot e^i$$

其中 ω 代表这个物件旋转的速度，很多涉及到复杂运动的力学模型都是基于此衍生出来的。



在引入虚数概念之前，人们对于旋转的处理十分吃力，例如机器手臂关节的旋转与移动涉及到的计算量十分惊人，但借助虚数概念与欧拉公式，凡是关于旋转的计算都容易了许多。除此以外，这种复变函数直接构建了现代信号学的科学基础，仅通过一维的实数体系，人们是无法描述类似信号波这样的既有横方向的运动，又有纵方向的波幅的物理实体，而借助欧拉公式我们便可对这种兼具连续与旋转的事物进行精准的描述（左图为电场波的物理形式与其对应的数学形式，可以看到，它主要由两种变量来表达：z 轴的横向移动、x-y 轴所在平面的旋转）。信号学的突破也间接构建了电器时代的科学基础，这对手机电脑等电子设备的发展不可或缺。不仅如此，欧拉公式也应用在了将广义相对论与量子力学进行融合的 M 理论，也是量子纠缠效应的核心表达之一。