МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра «Системный анализ и управление»

Математическая модель

Выполнил:
студент гр. м6о-407б-19
Егоров Артём Дмитриевич

Москва 2023

Содержание

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Здесь представлена справочная информация по предметной области, а так же концепции и зависимости, используемые для вычисления элементов эллиптической орбиты, и различные математические модели.

1.1. Расчет компонент вектора состояния.

Вектор состояния центра масс — это совокупность параметров, которые полностью определяют положение центра масс КА в пространстве, а так же орбитальную скорость (величину и направление) в заданный момент времени. Принятая СК определяет состав и смысл его компонент.

На практике чаще всего используются

- абсолютная геоцентрическая экваториальная система координат;
- географическая (подвижная) экваториальная система координат;
- классические элементы орбиты.

Географическая и абсолютная СК — начинаются в центре масс Земли, прямоугольные.
Оси: OZ → направлена на Северный полюс, OX абсолютной системы → в точку весеннего равноденствия;
OX гео. системы проходит через основной меридиан в плоскости экватора. OY дополняет систему до правой тройки.
Основной меридиан Земли — Гринвичский, поэтому применительно к Земле гео. система координат — Гринвичская.

Классические элементы орбиты — параметры, которые помогают определить её форму и положение в пространстве.

- Фокальный параметр
- Эксцентриситет
- Истинная аномалия
- и.т.д.

Вектор состояние или элементы орбиты можно определить только тогда, когда известна планета вокруг которой происходит движение. Вектор состояние изначально связан с планетой (имеющей главный меридиан и гравитационную постоянную).

Расчет компонент вектора состояния в абсолютной планетоцентрической системе координат по классическим элементам орбиты.

Выберем *базовый набор* из шести элементов орбиты:

R_p – расстояние от начала координат до перицентра орбиты;

e – эксцентриситет;

u – аргумент широты;

ω – аргумент перицентра;

i – наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора;

Ω – долгота восходящего узла орбиты.

Компоненты вектора состояния X, Y, Z, V_x, V_y, V_z в абсолютной планетоцентрической системе координат вычисляются с помощью следующих соотношений:

$$X = r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos i),$$
$$Y = r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos i),$$
$$Z = r \sin u \sin i,$$

$$V_x = \dot{r}\frac{X}{r} - r(\sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega \cos i)\vartheta,$$
$$V_y = \dot{r}\frac{Y}{r} - r(\sin u \sin\Omega - \cos u \cos\Omega \cos i)\vartheta,$$
$$V_z = \dot{r}\frac{Z}{r} + r\vartheta \cos u \sin i,$$

где $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\vartheta}$ – расстояние от начала координат до КА,

$\vartheta = u - \omega$ – истинная аномалия,

$p = R_p(1 + e)$ – фокальный параметр,

$\dot{r} = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}} e \sin\vartheta$ – радиальная скорость,

$\vartheta = \dfrac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$ – угловая скорость радиус-вектора КА.

По значениям базовых элементов можно вычислить сопутствующие параметры невозмущенного эллиптического движения:

$a = \dfrac{p}{1 - e^2}$ – большая полуось;

$b = a\sqrt{1 - e^2}$ – малая полуось;

$R_a = \dfrac{p}{1 - e}$ – расстояние в апоцентре;

$V = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e\cos\vartheta)}$ – орбитальная скорость;

$V_a = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}(1 - e)$ – скорость в апоцентре;

$V_p = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}(1 + e)$ – скорость в перицентре;

$V_t = \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}(1 + e\cos\vartheta)$ – трансверсальная составляющая скорости;

$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e\, \boldsymbol{sin}\, \vartheta$ – радиальная составляющая скорости;

$T = 2\pi a \sqrt{\frac{a}{\mu}}$ – период обращения;

$n = \frac{2\pi}{T}$ – среднее движение;

$E = 2\, \boldsymbol{arctan}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\, \boldsymbol{tan}\, \frac{\vartheta}{2}\right)$ – эксцентрическая аномалия;

$M = E - e\, \boldsymbol{sin}\, E$ – средняя аномалия;

$\tau_p = -\frac{M}{n}$ – момент прохождения перицентра;

$\delta = \boldsymbol{arccos}\, \frac{e\, \boldsymbol{sin}\, \vartheta}{\sqrt{1+e^2+2e\, \boldsymbol{cos}\, \vartheta}}$ – угол между радиус-вектором и вектором орбитальной скорости.

Следующие три параметра учитывают эффект второй зональной гармоники J_2 :

- драконический период обращения
- аномалистический период обращения
- среднее возмущенное движение

Драконический период обращения - это время движения ИСЗ на интервале аргумента широты [0 ; 2π] (от одного восходящего узла к другому) по незамкнутой возмущенной орбите.

Он вычисляется по формуле:

$$T_\Omega = T_{оск}\left\{1+\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_e}{p}\right)^2\left[\left(2-\frac{5}{2}\boldsymbol{sin}^2\, i\right)\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{\left(1+e\, \boldsymbol{cos}\, \upsilon_0\right)^2}+\frac{\left(1+e\, \boldsymbol{cos}\, \upsilon_0\right)^3}{1-e^2}\left(1-3\, \boldsymbol{sin}^2\, i\, \boldsymbol{sin}^2\, u_0\right)\right]\right\}, \quad (1)$$

где $T_{оск}$ – оскулирующий период обращения, R_e – экваториальный радиус земли.

Аномалистический период обращения - это время движения на интервале [0 ; 2π] аргумента υ

Он вычисляется по формуле:

$$T_\omega = T_{оск}\left[1+\frac{3}{2}J_2\left(\frac{R_e}{a}\right)^2\left(\frac{1+e\, \boldsymbol{cos}\, \vartheta}{1-e^2}\right)^3\right].$$

Среднее возмущенное движение — это средняя угловая скорость радиус-вектора космического аппарата. Оно вычисляется по формуле:

$$\bar{n} = n\left[1 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_e}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^3\right].$$

Расчет элементов орбиты по компонентам вектора состояния в абсолютной системе координат.

Сначала вычисляют компоненты векторов площадей *C* и Лапласа *F:*

$$C_1 = yV_z - zV_y; \qquad C_2 = zV_x - xV_z; \qquad C_3 = xV_y - yV_x;$$

$$F_1 = C_3V_y - C_2V_z - \mu\frac{X}{r}; \qquad F_2 = C_1V_z - C_3V_x - \mu\frac{Y}{r}; \qquad F_3 = C_2V_x - C_1V_y - \mu\frac{Z}{r}.$$

Затем находят фокальный параметр р, эксцентриситет орбиты е, расстояние в перицентре Rp и наклонение i:

$$p = \frac{\|C\|^2}{\mu}; \qquad e = \frac{\|F\|}{\mu}; \qquad R_p = \frac{p}{1+e}; \qquad i = \arccos\frac{C_2}{\|C\|}$$

Расчет аргумента широты, долготы восходящего узла и аргумента перицентра осуществляется в зависимости от результатов, полученных с помощью связей углов Эйлера Ω, ω и i с первыми интегралами невозмущенного движения - **векторным интегралом площадей и вектором Лапласа:**

$$\bar{C}_1 = \sin i \sin\Omega,$$

$$\bar{C}_2 = -\sin i \cos\Omega,$$

$$\bar{C}_3 = \cos i,$$

где $\bar{C}_j = \dfrac{C_j}{\|C\|}, \quad j = 1,2,3;$

$$\bar{F}_1 = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,$$

$$\bar{F}_2 = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i,$$

$$\bar{F}_3 = \sin\omega\sin i,$$

где $\bar{F}_j = \dfrac{F_j}{\|F\|}, \; j = 1,2,3.$

На круговой орбите аргумент перицентра не определен, так как $\|F\| = 0$. В этом случае, аргумент перицентра можно принять равным аргументу широты. В свою очередь, аргумент широты – угловая величина, отсчитываемая от восходящего узла, теряет смысл при нулевом наклонении орбиты. Если это так, вместо аргумента широты можно рассматривать угол между главной осью абсолютной экваториальной системы координат и радиусом–вектором КА – абсолютную геоцентрическую долготу. В этом случае и долготу восходящего узла можно принять равной этому же углу. Таким образом, в особых случаях используется следующая логика. Сначала анализируем значение наклонения. Так, если $i \neq 0$, то находим долготу восходящего узла

На круговой орбите аргумент перицентра не определен, так как $\|F\| = 0$. В этом случае аргумент перицентра можно принять таким же, как аргумент широты. В свою очередь аргумент широты - угловая величина, отсчитываемая от восходящего узла, теряет смысл при нулевом наклонении орбиты. В этом случае вместо аргумента широты можно рассматривать угол между главной осью абсолютной экваториальной системы координат и радиус-вектором космического аппарата: абсолютной геоцентрической долготой. В этом случае долготу восходящего узла можно принять равной этому же углу.
Поэтому в особых случаях используется следующая логика. Сначала - проанализируем значение наклонения. **Таким образом, если *i≠0*, то следует найти долготу восходящего узла:**

$$\Omega = \begin{cases} \tilde{\Omega}, & \dfrac{C_1 \sin i}{\|C\|} \geq 0 \\ 2\pi - \tilde{\Omega}, & \dfrac{C_1 \sin i}{\|C\|} < 0 \end{cases},$$

где $$\tilde{\Omega} = \arccos \frac{-C_2}{\|C\| \sin i}.$$

Аргумент широты представляет собой угол между радиус-вектором космического аппарата и единичным вектором направления на восходящий узел орбиты:

$$u = \begin{cases} \tilde{u}, & Z \geq 0 \\ 2\pi - \tilde{u}, & Z < 0 \end{cases},$$

где $$\tilde{u} = \arccos \frac{X \cos\Omega + Y \sin\Omega}{r}.$$

Если наклонение равно нулю, аргумент широты определяется как угол между ортом оси OX абсолютной системы координат и радиус-вектором космического аппарата:

$$u = \begin{cases} \tilde{u}, & Y \geq 0 \\ 2\pi - \tilde{u}, & Y < 0 \end{cases},$$ где $$\tilde{u} = \arccos \frac{X}{r}.$$

и формально принимаем $\Omega = u$.

Для того, чтобы вычислить аргумент перицентра эллиптической орбиты (при 0<e<1) мы используем соотношение между углами Эйлера и первыми интегралами невозмущенного движения, из которых получаем синус и косинус аргумента перицентра:

1. Если орбита - полярная ($\cos i=0$) имеем

$$S\omega = \bar{F}_3, \qquad C\omega = \frac{\bar{F}_2}{\sin\Omega}$$

Если $\cos i \neq 0$

$$S\omega = \frac{-\bar{F}_1 \sin\Omega + \bar{F}_2 \cos\Omega}{\cos i}, \qquad C\omega = \bar{F}_1 \cos\Omega + \bar{F}_2 \sin\Omega .$$

Зная синус и косинус аргумента перицентра, мы можем найти результат на интервале [0, 2π]:

$$\omega = \begin{cases} \arccos(C\omega), & S\omega \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(C\omega), & S\omega < 0 \end{cases}.$$

Если эксцентриситет орбиты равен нулю, то принимаем аргумент перицентра равным аргументу широты.

Вышеуказанные соотношения и логика обработки особой ситуации обеспечивают эффективность алгоритма расчета элементов орбиты космического аппарата по декартовым координатах в абсолютной планетоцентрической системе координат.

Расчет координат КА в географической системе.

Вектор состояния космического аппарата в географической системе координат определим с компонентами $\{X_g, Y_g, Z_g, R, \lambda, \varphi\}$
где X_g, Y_g, Z_g – декартовы координаты, R, λ, φ – сферические.

Для вычисления декартовых координат используем преобразование:

$$\begin{pmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

где S – звездное время, т.е. угол, характеризующий положение географической системы координат относительно планетоцентрической экваториальной системы координат в заданный момент времени.

Сферические координаты вычисляются по формулам

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\varphi = \boldsymbol{arcsin}\, \frac{Z_g}{R},$$

$$S_\lambda = \frac{Y_g}{\sqrt{X_g^2 + Y_g^2}}, \quad C_\lambda = \frac{X_g}{\sqrt{X_g^2 + Y_g^2}}, \quad \lambda = \boldsymbol{arccos}\, C_\lambda .$$

Если орбита - полярная ($\sqrt{X_g^2 + Y_g^2} = 0$) долгота принимается равной звездному времени S.

В рассматриваемом подмножестве реализована только одна планета солнечной системы – Земля. для которой истинное звездное время в момент M всемирного времени вычисляется без учета полной нутации в прямом восхождении (т.н. квазиистинное звездное время S в момент M всемирного времени) по формуле:

$$S = S_m^0 + M(1+\nu),$$

где S_m^0 – среднее звездное время на ноль часов даты, которое вычисляется по формуле Ньюкома; $\nu=0.0027379093$– коэффициент редукции звездного времени к солнечному. Для эпохи 1900 г. 0 января, 12 час. формула Ньюкома имеет вид:

$$S_m^0 = 0.276919398 + 100.0021359028\boldsymbol{T} + 0.1075231 \cdot 10^{-5} \boldsymbol{T}^2$$

где

$T = d/36525$ – время от эпохи в юлианских столетиях;

$d=JD(t_0) - 2415020.0$ – число дней, прошедших от эпохи до даты, на которую рассчитывается звездное время;

$JD(x)$ – функция вычисления юлианской даты;

t_0 – всемирное время на 0^h UT.

Для эпохи 12ч. всемирного времени 1 января 2000г. формула Ньюкома имеет следующий вид:

$$S_m^0 = 101.25228375^0 + 36000.77005361^0 \boldsymbol{T} + \left(3.87933333333 \cdot 10^{-4}\right)^0 \boldsymbol{T}^2 .$$

Система счёта суток без деления на годы и месяцы, предложенная Скалигером в 16 веке и названная им юлианской, широко используется в астрономии. Юлианский период охватывает 7980 лет и начинается в полдень по Гринвичу 1 января 4713 года до нашей эры. С помощью юлианского периода легко решается проблема количества суток, прошедших между двумя заданными датами. В работе Смитсоновской астрофизической обсерватории был введен модифицированный юлианский период — система счёта суток, для начала которой была выбрана дата 1858 г., ноябрь, 17.0 UT = JD 2400000,5. Модифицированная юлианская дата MJD связана с юлианской JD как MJD = JD - 2400000,5. Для расчета модифицированной юлианской даты (для дат после введения григорианского календаря 4 января 1582 г.) используется следующий алгоритм:

$$MJD = A + B + [30.6001(M+1)] + D + \frac{H}{24},$$

где $A = 365Y - 679004.0$;

$B = \left[\frac{Y}{400}\right] + \left[\frac{Y}{100}\right] + \left[\frac{Y}{4}\right]$;

[.] – целая часть числа;

тройка $\{Y,M,D\}$ задает календарную дату – год, месяц, день;

H – время суток в десятичном представлении.

Приведенные соотношения справедливы до 2000 г, который является отсроченным високосом. Для 2000 г. необходима корректировка

$MJD = MJD - B_1 + 4$ если $A_1 \neq 0$ или $M>2$,

$MJD = MJD - B_1 - 5$ в противном случае,

где $B_1=[Y/400]$, A_1 – дробная часть $Y/400$.

Расчет параметров синхронной орбиты.

КА ДЗЗ обычно запускаются на геосинхронные или геосолнечно-синхронные орбиты. Параметры таких орбит выбираются таким образом, чтобы через определенное количество суток (витков) траектория космического аппарата повторялась. При выборе периода обращения синхронной орбиты необходимо учитывать возмущения, вызванные нецентральностью гравитационного поля Земли. Обычно при расчете параметров синхронных орбит ограничиваются рассмотрением возмущения от второй зональной гармоники в разложении геопотенциала по сферическим функциям (см. раздел 1.3).

Период обращения по геосинхронной орбите.

Если не учитывать прецессию восходящего узла орбиты, трасса КА будет повторяется каждые n витков если драконический период обращения спутника T_Ω кратен периоду суточного вращения Земли T_E:

$$mT_E = nT_\Omega,$$

где m – целое число суток.

Допустим что долгота восходящего узла под воздействием второй зональной гармоники изменяется со скоростью прецессии $\dot{\Omega}$. Тогда трасса повторится при условии:

$$\frac{\omega}{\omega_E + \dot{\Omega}} = \frac{n}{m} \qquad (2)$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T_\Omega}$, $\omega_E = \dfrac{2\pi}{T_E}$

Скорость прецессии линии узлов находим так: приращение долготы восходящего узла за один виток разделим на значение драконического периода (1):

$$\dot{\Omega} = \frac{\Delta\Omega}{T_\Omega}$$

Изменение долготы восходящего узла, которое можем получить путем интегрирования по аргументу широты на интервале [0, 2π] (т.е. на драконическом периоде), равно:

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi\frac{3}{2}J_2R_E^2\,\boldsymbol{\cos} i}{p^2} = \frac{2\pi\varepsilon\,\boldsymbol{\cos} i}{p^2}, \qquad \varepsilon = \frac{3}{2}J_2R_E^2, \qquad (3)$$

Здесь:
p – фокальный параметр орбиты;
R_E – экваториальный радиус Земли;
i – наклонение плоскости орбиты к экватору;
J_2 – коэффициент второй зональной гармоники разложения геопотенциала (14)

Угловая скорость ω в (2) определяет драконический период обращения – время движения на интервале аргумента широты [0, 2π].

Из (2) с учетом (3) находим:

$$T_\Omega(m,n) = T_з\left(\frac{m}{n} - \frac{\varepsilon\,\boldsymbol{\cos} i}{p^2}\right) \qquad (4)$$

В правой части этого выражения присутствует фокальный параметр, зная его и эксцентриситет можно вычислить большую полуось, а затем – среднее движение и оскулирующий период обращения. Поэтому, по формуле (4) мы можем найти оскулирующий периода или большую полуось при заданном эксцентриситете.

Учитывая связь драконического периода обращения и оскулирующего периода обращения (1), получаем уравнение:

$$T_\Omega(m,n) = T_\Omega(a) \tag{5}$$

Задача сведена к определению большой полуоси орбиты при фиксированных эксцентриситете и наклонении как корня уравнения (5). Это уравнение может быть решено только численно. Большую полуось, соответствующую оскулирующему периоду обращения удобно принять за начальное приближение:

$$T^0_{jcr} = T_P \frac{m}{n} \tag{6}$$

Наклонение солнечно-синхронной орбиты может быть получено из условия равенства скорости прецессии плоскости орбиты угловой скорости движения Земли вокруг Солнца:

$$\Omega + \omega_s = 0 \tag{7}$$

где $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$, T_S – продолжительность тропического года, выраженная в сутках. (Угловая скорость движения Земли вокруг Солнца при T_S*=365.2422* суток равна *0.9856473320991* град/сутки).

Из (7) с учетом (3) находим

$$\cos i = -\frac{p^2 T_\Omega \omega_S}{2\pi\varepsilon} \tag{8}$$

Критическое наклонение вычисляется из условия равенства нулю прецессии линии апсид за виток:

$$\Delta\omega = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_E}{p}\right)^2 (5\cos i - 1) = 0 \tag{9}$$

Решением этого уравнения является наклонение *i=63.43494882292*

1.2. Невозмущенное движение

Для определения зависящих от времени параметров невозмущенного эллиптического движения используется **уравнение Кеплера**, связывающее эксцентрическую аномалию E со временем:

$$E - e\,\boldsymbol{sin}\,E = n\left(t - \tau_p\right), \qquad (10)$$

(здесь время прохождения перицентра τ_p вычисляется по начальным условиям)

Уравнение Кеплера можно решить с помощью метода последовательных приближений (1 действительное решение):

$$E_{k+1} = n\left(t - \tau_p\right) + e\,\boldsymbol{sin}\,E_k, \; k=0,1,2,\ldots$$

В нулевом приближении полагаем $E_0 = n\left(t - \tau_p\right)$. Процесс абсолютно сходится при всех значениях $e<1$.

Затем нужно найти **истинную аномалию**:

$$\vartheta = 2\,\boldsymbol{arctan}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\right)\boldsymbol{tan}\frac{E}{2} \qquad (11)$$

а так же все связанные параметры невозмущенного движения (сопутствующие)

Модель невозмущенного движения реализована как класс–наследник `TDynamicSystem`, который имеет ссылку на планету, в поле которой движется КА и вектор начальных элементов орбиты. Изменяя системное время объекта этого класса, можно получать значения соответствующих параметров – функций времени.

Модель невозмущенного движения (как часть модели сложной системы) можно использовать, например, для получения отклонений параметров возмущенного движения от параметров невозмущенного. Необходимость в этом возникает при управлении движением с помощью линеаризации уравнений возмущенного движения.

1.3. Уравнения возмущенного движения

Для описания возмущенного движения могут быть использованы различные системы элементов - декартовы координаты, оскулирующие элементы орбиты, невырожденные элементы и др. Имеются дифференциальные уравнения возмущенного движения и приближенные аналитические решения. Дифференциальные уравнения должны быть интегрированы численно.

Приближенные решения позволяют моделировать возмущенное движение, не прибегая к численному интегрированию.

Система дифференциальных уравнений возмущенного движения в абсолютно геоцентрической экваториальной декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
\ddot{X} &= -\frac{\mu X}{R^3} + \sum_{j=0}^{k} \Delta g_{j,x}, \\
\ddot{Y} &= -\frac{\mu Y}{R^3} + \sum_{j=0}^{k} \Delta g_{j,y}, \\
\ddot{Z} &= -\frac{\mu Z}{R^3} + \sum_{j=0}^{k} \Delta g_{j,z}, \\
R &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},
\end{aligned} \tag{12}$$

где $\sum_{j=0}^{k} \Delta g_{j,x}, \sum_{j=0}^{k} \Delta g_{j,y}, \sum_{j=0}^{k} \Delta g_{j,z}$ – суммы проекций возмущающих и управляющих ускорений на соответствующие оси системы координат.

Вычисление возмущений от несферичности Земли (j=0).

Возмущающая функция гравитационного потенциала определяется как разность между принятой моделью гравитационного потенциала U и идеального, соответствующей притяжению шарообразной земли со сферическим распределением плотности:

$$\Delta U = U - \frac{\mu}{r}$$

Наиболее удобно представить потенциал притяжения Земли в виде разложения по сферическим функциям. Международный астрономический союз рекомендует следующую форму записи гравитационного потенциала U во внешней точке с географическими координатами r, λ, φ:

$$U = \frac{\mu}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} C_{n,0}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin\varphi)\left(C_{n,m}\cos m\lambda + D_{n,m}\sin m\lambda\right)\right] \tag{13}$$

где R_E – средний экваториальный радиус Земли; $P_n(\sin\varphi)$ – полиномы Лежандра порядка n; $P_{n,m}(\sin\varphi)$ – присоединенные функции Лежандра порядка n и индекса m; $C_{n,m}$ и $D_{n,m}$ – безразмерные коэффициенты.

Наряду с вышеизложенным способом, широко распространена и иная форма записи:

$$U=\frac{\mu}{r}\left[1+\sum_{n=2}^{\infty}J_n\left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\boldsymbol{sin}\varphi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_E}{r}\right)^n J_{n,m}P_{n,m}(\boldsymbol{sin}\varphi)\boldsymbol{cos}\,m(\lambda-\lambda_{n,m})\right] \qquad (14)$$

где

$$J_n=-C_{n,0}; \quad J_{n,m}=\sqrt{C_{n,m}^2+D_{n,m}^2}; \quad \lambda_{n,m}=\boldsymbol{arctan}\frac{D_{n,m}}{C_{n,m}}.$$

С другой стороны

$$C_{n,m}=J_{n,m}\boldsymbol{cos}\,m\lambda_{n,m};\ D_{n,m}=J_{n,m}\boldsymbol{sin}\,m\lambda_{n,m}.$$

Слагаемые в (13) или (14) обычно называют гармониками. Первое (гармоника порядка n=0) представляет собой гравитационный потенциал шарообразной Земли со сферическим распределением плотности. Гармоника первого порядка ($n=1,\ m=1$) обращена в 0 выбором начала координат в центре масс (центре инерции) Земли, т.е. $C_{1,0}=C_{1,1}=D_{1,1}=0$.

Сферические функции, входящие в разложения, в зависимости от соотношения величин n и m:

- зональные при $m=0$
- секториальные при $n=m$
- тессеральные при $0<n<m$

Из приведенных разложений находим проекции возмущающего ускорения на оси прямоугольной системы как частные производные U по OX, OY, OZ:

$$\Delta g_{o,q}=\frac{\partial\Delta U}{\partial q}=\sum_{n=2}^{\infty}C_{n,0}\frac{\mu R_E^2}{r^{n+1}}\left[\frac{n+1}{r}P_n(\boldsymbol{sin}\varphi)\times\frac{\partial r}{\partial q}-\frac{\partial P_n(\boldsymbol{sin}\varphi)}{\partial(\boldsymbol{sin}\varphi)}\frac{\partial(\boldsymbol{sin}\varphi)}{dq}\right]+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\mu R_E^2}{r^{n+1}}\left[-\frac{n+1}{r}P_{n,m}(\boldsymbol{sin}\varphi)(C_{n,m}\boldsymbol{cos}\,m\lambda+D_{n,m}\boldsymbol{sin}\,m\lambda)\frac{\partial r}{\partial q}+\right.$$

$$+(C_{n,m}\boldsymbol{cos}\,m\lambda+D_{n,m}\boldsymbol{sin}\,m\lambda)\frac{\partial P_{n,m}(\boldsymbol{sin}\varphi)}{d(\boldsymbol{sin}\varphi)}\frac{\partial(\boldsymbol{sin}\varphi)}{dq}+$$

$$\left.+P_{n,m}(\boldsymbol{sin}\varphi)(-C_{n,m}\boldsymbol{sin}\,m\lambda+D_{n,m}\boldsymbol{cos}\,m\lambda)m\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right], \qquad (15)$$

Здесь $q=\{x,y,z\}$ – координаты спутника в ГЭСК,

$$\boldsymbol{sin}\varphi=\frac{z}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial q}=\frac{q}{r}; \quad \frac{\partial(\boldsymbol{sin}\varphi)}{\partial x}=-\frac{xz}{r^3}; \quad \frac{\partial(\boldsymbol{sin}\varphi)}{\partial y}=-\frac{yz}{r^3};$$

$$\frac{\partial(\sin\varphi)}{\partial z} = \frac{x^2+y^2}{r^3}; \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}; \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0.$$

Угол λ определяется из соотношений

$$\sin\lambda = \frac{-x\sin S + y\cos S}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \cos\lambda = \frac{x\cos S + y\sin S}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

где S – гринвичское звездное время, т.е. угол между направлениями из центра Земли на точку весеннего равноденствия и на гринвичский меридиан.

Приведем соотношения для принципиальных составляющих зональных возмущений с индексами 20,30,40, секториального возмущения с индексом 22, а также общее выражение для секториальных и тессеральных возмущений.

<u>От зональной гармоники</u> *C_{20}:*

$$\ddot{X}_{2g} = A_2\frac{X}{R^5}\left(1-5a^2\right),$$
$$\ddot{Y}_{2g} = A_2\frac{Y}{R^5}\left(1-5a^2\right),$$
$$\ddot{Z}_{2g} = A_2\frac{Z}{R^5}\left(3-5a^2\right),$$

где

$A_2 = -\dfrac{3}{2}C_{20}\mu R_e^2, \qquad a = \dfrac{Z}{R} = \sin\varphi,$ R_e – экваториальный радиус Земли.

<u>От зональной гармоники</u> C_{30}:

$$\ddot{X}_{3g} = A_3\frac{ZX}{R^7}\left(3-7a^2\right),$$
$$\ddot{Y}_{3g} = A_3\frac{ZY}{R^7}\left(3-7a^2\right),$$
$$\ddot{Z}_{3g} = -A_3\frac{3}{5R^5}\left(35a^4-10a^2+1\right), \qquad A_3 = -\frac{5}{2}C_{30}\mu R_e^3.$$

<u>От зональной гармоники</u> C_{40}:

$$\ddot{X}_{4g} = -A_4\frac{X}{R^7}\left(9a^4-6a^2+\frac{3}{7}\right),$$
$$\ddot{Y}_{4g} = -A_4\frac{Y}{R^7}\left(9a^4-6a^2+\frac{3}{7}\right),$$
$$\ddot{Z}_{4g} = -A_4\frac{Z}{R^7}\left(9a^4-10a^2+\frac{15}{7}\right), \qquad A_4 = -\frac{35}{8}C_{40}\mu R_e^4.$$

От секториальной гармоники с индексом 2,2:

$$\ddot{X}_{22g} = A_{22}\left[X\left(5\frac{Z^2}{R^2} - 3\right)\boldsymbol{cos}\,2(\lambda - \lambda_{22}) + 2Y\,\boldsymbol{sin}\,2(\lambda - \lambda_{22})\right],$$

$$\ddot{Y}_{22g} = A_{22}\left[Y\left(5\frac{Z^2}{R^2} - 3\right)\boldsymbol{cos}\,2(\lambda - \lambda_{22}) + 2X\,\boldsymbol{sin}\,2(\lambda - \lambda_{22})\right],$$

$$\ddot{Z}_{22g} = -5A_{22}Z\left(\frac{Z^2}{R^2} - 1\right)\boldsymbol{cos}\,2(\lambda - \lambda_{22}),$$

где

$$A_{22} = \frac{3J_{22}\mu R_e^2}{R^5}, \qquad J_{22} = \sqrt{C_{22}^2 + D_{22}^2}, \qquad \lambda_{22} = \boldsymbol{arctan}\frac{D_{22}}{C_{22}}.$$

Для расчета проекций возмущающего ускорения от секториальной и тессеральной гармоник геопотенциала необходимо вычислить следующие частные производные:

$$\frac{\partial \Delta U'}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\mu R_e^n}{r^{n+1}} J_{nm}P_{nm}(\boldsymbol{sin}\,\varphi)\boldsymbol{cos}\,m(\lambda - \lambda_{nm})\right].$$

Общее выражение для этих производных можно представить так:

$$\frac{\partial \Delta U'}{\partial q} = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{\mu R_e^n}{r^{n+1}} J_{nm}\left\{A_{(q)nm}\,\boldsymbol{cos}[m(\lambda - \lambda_{nm})] - B_{(q)nm}\,\boldsymbol{sin}[m(\lambda - \lambda_{nm})]\right\},$$

где

$$A_{(q)nm} = \frac{\partial P_{nm}(\boldsymbol{sin}\,\varphi)}{\partial(\boldsymbol{sin}\,\varphi)}\frac{\partial(\boldsymbol{sin}\,\varphi)}{\partial q} - \frac{n+1}{r}P_{nm}(\boldsymbol{sin}\,\varphi)\frac{\partial r}{\partial q},$$

$$B_{(q)nm} = mP_{nm}(\boldsymbol{sin}\,\varphi)\frac{\partial \lambda}{\partial q}$$

Поэлементные выражения имеют вид

$$A_{(x)nm} = -\frac{xz}{r^3}\frac{\partial P_{nm}(s)}{\partial s} - \frac{n+1}{r}P_{nm}(s)\frac{x}{r},$$

$$A_{(y)nm} = -\frac{yz}{r^3}\frac{\partial P_{nm}(s)}{\partial s} - \frac{n+1}{r}P_{nm}(s)\frac{y}{r},$$

$$A_{(z)nm} = -\frac{r^2 - z^2}{r^3}\frac{\partial P_{nm}(s)}{\partial s} - \frac{n+1}{r}P_{nm}(s)\frac{z}{r},$$

$$B_{(x)nm} = -m\frac{y}{x^2 + y^2}P_{nm}(s),$$

$$B_{(y)nm} = m\frac{x}{x^2 + y^2}P_{nm}(s),$$

$$B_{(z)nm} = 0,$$

$$P_{nm}(s) = P_{nm}(\boldsymbol{sin}\,\varphi).$$

Модель возмущенного движения, включенная в библиотеку **SPACE,** учитывает возмущающие ускорения от зональных членов разложения геопотенциала с индексами 20, 30, 40, а также тессеральные и секториальные гармоники по 44 включительно.

Вычисление возмущения от торможения в атмосфере (j=1).

Проекции возмущающего ускорения от силы аэродинамического торможения в атмосфере могут быть рассчитаны по формулам:

$$\Delta g_{1,x} = -A(\dot{X} + \omega_0 Y),$$
$$\Delta g_{1,y} = -A(\dot{Y} + \omega_0 X),$$
$$\Delta g_{1,z} = -A\dot{Z},$$

где

$A = C_b \rho V$,

$V = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}$,

$C_b = \dfrac{C_x S}{2m}$ – баллистический коэффициент КА,

ρ – плотность атмосферы;

ω_0 – угловая скорость вращения атмосферы, принимаемая равной угловой скорости вращения планеты.

За вычисление плотности атмосферы «отвечает» планета, в поле которой движется космический аппарат.

Модели плотности атмосферы устанавливает ГОСТ 25654.115-84. Значение плотности ВСА-82, выраженное в *кг/м*^{3}, вычисляется по формуле:

$$\rho(h) = A\boldsymbol{exp}\left[-k_1(h - h_j) + k_2(h - h_j)^2\right],$$

где h – высота;

h_j – верхняя граница слоя, определяющая значения коэффициентов, входящих в правую часть формулы плотности:

h, км	h_j*, км*	*A, кг/м*^{3}	$k_1 \cdot 10^2$*, 1/км*	$k_2 \cdot 10^5$*, 1/км*^{2}
0..19	0	$1.225 \cdot 10^9$	7.825	-263.9
20..59	20	$0.891 \cdot 10^8$	16.37	44.07
60..99	60	$2.578 \cdot 10^5$	5.905	-256
100..149	100	$4.061 \cdot 10^2$	17.87	146.9
150..299	150	2.13	3.734	8.004
300..599	300	$4.764 \cdot 10^{-2}$	0.7735	0.7111
600..899	600	$8.726 \cdot 10^{-3}$	0.928	0.1831
≥900	900	$6.367 \cdot 10^{-4}$	0.954	0

Исходя из модели ДСА–84 плотность может быть рассчитана по формуле:

а) для высот в диапазоне 0..120 км

$$\rho(h) = A\boldsymbol{exp}\left[-k_1\left(h-h_j\right)+k_2\left(h-h_j\right)^2\right],$$

где

h, км	***h_j, км***	***A, кг/м³***	***$k_1\cdot10^2$, 1/км***	***$k_2\cdot10^5$, 1/км²***
0..19	0	$1.225\cdot10^9$	7.825	-263.9
20..59	20	$0.891\cdot10^8$	16.37	44.07
60..99	60	$2.578\cdot10^5$	5.905	-256
100..149	100	$4.061\cdot10^2$	17.87	146.9

б) для высот в диапазоне 120..1500 км

$$\rho(h) = \rho_n k_0 k_1 k_2 k_3 k_4,$$

где $\rho_n = 9.80665\boldsymbol{exp}\left[A_1 - A_2\sqrt{h-A_3}\right]$ – плотность «ночной» атмосферы;

k_0 – коэффициент, учитывающий вариации плотности, вызванные средневзвешенным значением коэффициента солнечной активности,

k_1 – коэффициент, учитывающий суточный эффект перераспределения плотности,

k_2 – коэффициент, учитывающий полугодовой эффект перераспределения плотности,

k_3 - коэффициент, учитывающий вариации плотности, определяемые отклонением коэффициента солнечной активности от средневзвешенного значения

k_4 - коэффициент, учитывающий зависимость плотности атмосферы от геомагнитной активности. Эти коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$k_0 = 1 + \left(L_0 + L_1 h + L_2 h^2\right)\left(\bar{F}_{10.7} - F_{10.7}\right);$$

$$k_1 = 1 + \left(C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3\right)\left[\frac{1+C_\varphi}{2}\right]^{0.5\left(n_0 + n_1 h\right)};$$

$$k_2 = 1 + A(D)\left(D_0 + D_1 h + D_2 h^2 + D_3 h^3\right);$$

$$k_3 = 1 - \left(B_0 + B_1 h + B_2 h^2\right)\frac{\bar{F}_{10.7} - F_{10.7}}{F_{10.7}};$$

$$k_4 = 1 + \left(E_0 + E_1 h + E_2 h^2 + E_3 h^3\right)\left(E_4 + E_5 K_p + E_6 K_p^2\right);$$

$$C_\varphi = \frac{1}{R}\left[Z\,\boldsymbol{sin}\,\delta_c + \boldsymbol{cos}\,\delta_c\left(X\,\boldsymbol{cos}\,\beta + Y\,\boldsymbol{sin}\,\beta\right)\right];$$

$$\beta = \alpha_c - S - \omega_0\left(T_D - \delta T\right) + \varphi_1$$

T_D – местное время в секундах;

S – звездное время на текущей долготе;

δT – сдвиг местного (поясного) времени по отношению GMT;

D – число суток с начала года до местной даты расчета;

α_c, δ_c – прямое восхождение и склонение Солнца;

$\overline{F}_{10.7}$ – средневзвешенный коэффициент солнечной активности на волне 10.7 см;

K_p – коэффициент геомагнитной активности.

Коэффициенты A_j, D_j, B_j, C_j, n_j, φ_1, E_j, L_j и значения функции $A(D)$ задаются в табличной форме.

Вычисление возмущений от гравитационных полей Луны и Солнца (j=2,3).

Луна и солнце считаются материальными точками. Проекции возмущающих ускорений являются частными производными возмущающей функции, которая определяется формулой:

$$F_k = \mu_k \left(\frac{1}{\Delta_k} - \frac{XX_k + YY_k + ZZ_k}{R_k^3} \right),$$

где

μ_k – гравитационная постоянная возмущающего тела;

X_k, Y_k, Z_k – координаты k-го возмущающего тела в абсолютной планетоцентрической системе координат;

X, Y, Z – абсолютные планетоцентрические координаты КА;

Δ_k – расстояние между КА и k-м возмущающим телом

$$\Delta_k = \sqrt{(X - X_k)^2 + (Y - Y_k)^2 + (Z - Z_k)^2};$$

$$R_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2}.$$

Таким образом

$$\Delta g_{k,x} = \frac{\partial F_k}{\partial X} = \mu_k \left(\frac{X_k - X}{\Delta_k^3} - \frac{X_k}{R_k^3} \right),$$

$$\Delta g_{k,y} = \frac{\partial F_k}{\partial Y} = \mu_k \left(\frac{Y_k - Y}{\Delta_k^3} - \frac{Y_k}{R_k^3} \right),$$

$$\Delta g_{k,y} = \frac{\partial F_k}{\partial Z} = \mu_k \left(\frac{Z_k - Z}{\Delta_k^3} - \frac{Z_k}{R_k^3} \right).$$

Вычисление возмущений от светового давления.

Математическая модель ускорения g_{sp}, от давления солнечных лучей, (в случае, если ИСЗ не затенён ни Луной, ни Землей) определяется следующей формулой:

$$g_{sp} = k \times \left[\frac{A}{R}\right]^2 \times C_R \times \frac{S}{m} \times \frac{\vec{\mathbf{R}}}{R},$$

где

$k = 4.56 \times 10\text{-}6$ *Н/м*^{2} - давление солнечных лучей в окрестности орбиты Земли;

$A = 1.4959787061 \times 10^{11}$ *м* - астрономическая единица;

S - площадь облучаемой поверхности ИСЗ;

m - масса ИСЗ;

C_R - коэффициент отражения;

$\vec{\mathbf{R}}$, R - геоцентрический вектор ИСЗ и его модуль соответственно

Определение координат Солнца и Луны.

Чтобы достаточно точно определить координаты Луны удобно использовать аппроксимацию возмущенного движения тригонометрическими рядами Брауна, по которым могут быть вычислены эклиптические долгота λ_m, широта β_m и синус параллакса Π_m

$$\lambda_m = L + \sum_n a_n \boldsymbol{sin}(il + jl' + kF + mD) + \sum_i k_i \boldsymbol{sin}(a_i + b_i t),$$

$$\beta_m = \sum_n a_n \boldsymbol{sin}(il + jl' + kF + mD),$$

$$\Pi_m = \sum_n a_n \boldsymbol{sin}(il_m + jl' + kF + mD)$$

Здесь первая сумма - это ряды долготы, широты и синуса параллакса – т.е. солнечные члены, вторая сумма ряда долготы – т.е. планетные члены.

Фундаментальные аргументы L, l_m, l', F, D вычисляются по формулам

$$L = 0.75112060108 + 1336.8552309941\boldsymbol{T} - 0.00314815 \cdot 10^{-3}\boldsymbol{T}^2,$$

$$l = 0.8225128009 + 1325.5523586343\boldsymbol{T} + 0.25532406 \cdot 10^{-3}\boldsymbol{T}^2,$$

$$l' = 0.9957662037 + 99.9973604167\boldsymbol{T} - 0.00041667 \cdot 10^{-3}\boldsymbol{T}^2,$$

$$F = 0.0312524691 + 1342.2278476389\boldsymbol{T} - 0.00891975 \cdot 10^{-3}\boldsymbol{T}^2,$$

$$D = 0.9742707958 + 1236.8530950463\boldsymbol{T} - 0.00398919 \cdot 10^{-3}\boldsymbol{T}^2,$$

где время $\boldsymbol{T}$ считается в юлианских столетиях от фундаментальной эпохи 1900, 0 –го января.

Далее координаты Луны в абсолютной геоцентрической экваториальной системе координат вычисляются по формулам:

$$
\begin{aligned}
&R_m = \frac{R_e}{\Pi_m}, \\
&X_m = R_m \cos\beta_m \cos\lambda_m \\
&Y_m = R_m\left(\cos\beta_m \sin\lambda_m \cos\varepsilon - \sin\beta_m \sin\varepsilon\right), \\
&Z_m = R_m\left(\cos\beta_m \sin\lambda_m \sin\varepsilon + \sin\beta_m \cos\varepsilon\right),
\end{aligned}
$$

где

ε – наклонение эклиптики к плоскости экватора;

R_e – экваториальный радиус Земли.

Движение Солнца понимается как видимое отображение орбитального движения Земли. Эклиптические координаты солнца рассчитываются по приближенным формулам:

$$
\begin{aligned}
&X_s = R_s \cos\lambda_s, \\
&Y_s = R_s \sin\lambda_s \cos\varepsilon, \\
&Z_s = R_s \sin\lambda_s \sin\varepsilon,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&R_s = \frac{a_s\left(1-e_s^2\right)}{1+e_s \cos\vartheta_s}, \qquad a_s = 149.559787061 \cdot 10^6 \\
&\omega_s = L - D - l', \\
&e_s = 0.01675104 - 0.0000418\boldsymbol{T}, \\
&\vartheta_s = M_s + 2e_s \sin M_s + \frac{5}{4} e_s^2 \sin 2M_s, \\
&M_s = l'.
\end{aligned}
$$

1.4. Аналитическая модель возмущенного движения

Основные факторы, возмущающие движение ИСЗ на низких орбитах:

- нецентральность поля тяготения Земли
- аэродинамическое торможение

Наибольшее влияние на движение ИСЗ оказывается второй зональной гармоникой C_{20} , учитывающей полярное сжатие. Она вызывает вековые изменения параметров M, Ω, ω и периодические изменения всех параметров на одном витке. Учитывая, что коэффициенты C_{30}, C_{40} на три порядка меньше, при анализе вековых возмущений можно ограничиться только учетом второй зональной гармоники. Модель вековых изменений оскулирующих элементов орбиты в функции интервала времени t-t_0 без учета торможения в атмосфере имеет вид:

$$
\begin{aligned}
a &= a_0 \\
i &= i_0 \\
e &= e_0 \\
\Omega &= \Omega_0 - \frac{3}{2} C_{20} \left(\frac{R_E}{p} \right)^2 n_0 (t - t_0) \boldsymbol{cos}\, i \\
\omega &= \omega_0 + \frac{3}{4} C_{20} \left(\frac{R_E}{p} \right)^2 n_0 (t - t_0) (5 \boldsymbol{cos}^2 i - 1) \\
M &= M_0 + n_0 (t - t_0) + \frac{3}{4} C_{20} \left(\frac{R_E}{p} \right)^2 n_0 (t - t_0) (3 \boldsymbol{cos}^2 i - 1) \sqrt{1 - e_0^2}
\end{aligned}
$$

где $n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}$;

$p = a(1 - e^2)$