Repetytorium podstawowych własności wektorów, etc.

(c) Marcin Sydow

Operacje na wektorach

(c) Marcin Sydow

Wektor w standardowym sensie, można wyobrażać sobie np. jak 1-wymiarową tablicę wartości (np. liczb).

- dodawanie wektorów (interpretacja geometryczna: parallelogram)
- mnożenie wektorów przez skalar a

W przypadku wektorów o współrzędnych rzeczywistych, mnożenie przez skalar $a \in R$ ma następującą interpretację:

- $a < 0$ wektor zachowuje kierunek ale zmienia zwrot na przeciwny
- $a > 0$ zachowuje kierunek i zwrot
- $|a| < 1$ wektor jest skracany proporcjonalnie do a
- $|a| > 1$ wektor jest wydłużany proporcjonalnie do a

Operacja transpozycji wektorów

Wektor domyślnie (konwencja) jest wektorem kolumną (pionowy).

Operacja transpozycji: x^T wiersze stają się kolumnami i na odwrót.

(jeśli x to wektor-kolumna, to x^T jest wektorem-wierszem)

Iloczyn skalarny wektorów i jego rola w geometrii

(c) Marcin Sydow

Standardowy iloczyn skalarny wektorów nad R:

$$x^T y = \sum_1^n x_i y_i$$

wektory są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy: $x^T y = 0$

(dotyczy to przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów)

Operacje na macierzach

Macierz $A \in R^{m \times n}$ jest prostokątną tablicą o m wierszach i n kolumnach zawierającą liczby rzeczywiste. Parę (m, n) nazywamy rozmiarem (kształtem) macierzy.

Gdy m==n A nazywamy macierzą kwadratową

Gdy macierze A i B mają takie same rozmiary to można wykonać:

- dodawanie macierzy A+B = C (po współrzędnych: $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$)
- mnożenie macierzy przez skalar $\alpha A = B$ (po współrzędnych: $B_{ij} = \alpha A_{ij}$)
- transpozycja macierzy $A^T \in R^{n \times m}$ (wiersze $\leftrightarrow$ kolumny: $A^T_{ij} = A_{ji}$)

Ślad macierzy kwadratowej A: $trace(A)$ to suma elementów przekątnej tej macierzy

Mnożenie macierzy

$A \in R^{m \times n}, B \in R^{n \times k}$ (warunek niezbędny: liczba kolumn A == liczba wierszy B)

Iloczyn macierzy: $AB = C \in R^{m \times k}$ (Wartość C_{ij} wyniku to iloczyn skalarny i-tego wiersza A i j-tej kolumny B)

Uwaga: iloczyn macierzy nie jest przemienny (AB nie musi być równe BA, może mieć nawet inny kształt!)
$(AB)^T = B^T A^T$

Macierz jednostkowa

Macierz kwadratową o n wierszach (kolumnach) zawierającą jedynki na przekątnej i poza tym zera oznaczamy przez I_n i nazywamy macierzą jednostkową.

Jest ona neutralnym elementem względem mnożenia macierzy:

$AI = IA = A$ dla dowolnej macierzy kwadratowej $A \in R^{n \times n}$

Odwrotność macierzy

Jeśli dla danej macierzy kwadratowej A istnieje macierz A^{-1} taka, że:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

to macierz A nazywamy odwracalną a macierz A^{-1} nazywamy odwrotnością A.
Uwaga: tylko niektóre macierze kwadratowe są odwracalne.
Pozostałe nazywamy nieodwracalnymi albo osobliwymi.

Norma wektora

Normą nazywamy funkcję rzeczywistą $|\ |$ z przestrzeni liniowej V nad F taką, że dla każdego $x \in V$ oraz $a \in F$:

- $|x| \geq 0$ oraz $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $a|x| = |ax|$ (jednorodność)
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Przykład normy wektorowej: Norma euklidesowa

Dla dowolnego wektora $x \in R^n$
$|x|_2 = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$
(interpretacja: długość wektora)

Normę można wyrazić przez iloczyn skalarny:

$$|x| = \sqrt{x^T x}$$

Odległość między punktami wyznaczonymi przez wektory x,y

(c) Marcin Sydow

Odległość między dwoma punktami wyznaczonymi przez wektory x,y w przestrzeni wektorowej można zdefiniować jako normę z różnicy między tymi wektorami.

$$d(x, y) = |x - y|_2$$

Przykład: dla normy euklidesowej tak zdefiniowana odległość spełnia warunki bycia metryką (nierozróżnialność, symetria, nierówność trójkąta)

Kąt i długość również wyrażane przez iloczyn skalarny

długość wektora wyrażona przez iloczyn skalarny:

$$|x|_2 = \sqrt{x^T x}$$

kąt między wektorami: $cos\Theta(x, y) = \frac{x^T y}{|x||y|}$
(ponieważ $|x| = \sqrt{x^T x}$, więc kąt jest w zupełności wyrażalny iloczynem skalarnym)

Dziękuję za uwagę.