МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторної роботи № 3 на тему:

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ КРАМЕРА ТА МЕТОДОМ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ

Львів-2018

Мета роботи: ознайомлення на практиці з методом Крамера та методом оберненої матриці розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

4.1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Математичні моделі багатьох процесів зводяться до розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Розв’язати деякі нелінійні задачі можна послідовним розвязуванням систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Прямі (точні) методи дають змогу розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за скінченну кількість арифметичних операцій. Якщо всі операції виконують точно (без похибок заокруглення), то розв’язок заданої системи також отримують точним. До прямих методів належать: метод Крамера, метод оберненої матриці, метод Гауса та його модифікації, метод прогонки, метод LU-розкладу та його частковий випадок - метод квадратного кореня, метод ортогоналізації.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь записують у розгорнутій формі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

або у скороченому вигляді

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{4.2}$$

або у матричній формі

$$A \cdot X = B, \tag{4.3}$$

де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overline{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

A- прямокутна матриця коефіцієнтів системи розмірності $m \times n$; X - вектор-стовпець невідомих розмірності n; B- вектор-стовпець вільних членів розмірності m.

Розв'язком системи (4.1; 4.2; 4.3) називають n-компонентний вектор-стовпець $\overline{X}$, який перетворює співвідношення (4.1; 4.2; 4.3) у правильну числову тотожність.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь може мати один розв'язок, безліч або не мати жодного. Кількість невідомих m в системі називають порядком СЛАР.

Якщо система має хоча б один розв'язок, то її називають ***сумісною***, і ***несумісною***, якщо не має жодного.

Сумісна система називається ***визначеною***, якщо вона має єдиний розв'язок, і ***невизначеною***, якщо вона має безліч розв'язків. СЛАР є ***невиродженою***, якщо визначник системи $\det A \neq 0$. У випадку, коли визначник системи $\det A = 0$, СЛАР є ***виродженою.***

Якщо всі вільні члени $b_i = 0 (i = \overline{1,m})$, то СЛАР називають ***однорідною***. Однорідна система має завжди ***тривіальний*** розв'язок $x_i = 0 \; (i = \overline{1,n})$.

Систему лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язують числовими методами лише у тому випадку, коли вона є сумісною, визначеною та невиродженою.

3.2. Метод Крамера

Розглянемо СЛАР, яка містить n рівнянь та n невідомих, причому визначник її не дорівнює нулеві. Для знаходження невідомих x_i застосовують формули Крамера:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

де $\det A$ - визначник матриці A, $\det A_i$ - визначник матриці A_i, яку отримують з матриці A шляхом заміни її i -го стовпця стовпцем вільних членів

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Щоб розв’язати СЛАР з n невідомими потрібно обчислити $(n+1)$ визначників n-го порядку, що приводить до виконання $nn!$ операцій. Через громіздкість обчислень визначників метод Крамера не застосовують на практиці для великої розмірності матриці коефіцієнтів СЛАР.

4.3. Метод оберненої матриці (матричний метод)

У лінійній алгебрі часто використовують матричний метод розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Цей метод ґрунтується на обчисленні оберненої матриці A^{-1}, яка існує лише при умові, коли визначник матриці A відмінний від нуля $\det A \neq 0$.

Якщо обидві частини матричного рівняння (4.3) зліва домножити на матрицю A^{-1}, то отримаємо співвідношення

$$A^{-1}AX = A^{-1}B. \tag{4.6}$$

Враховуючи, що добуток оберненої матриці на саму матрицю дає одиничну матрицю

$$A^{-1}A = E, \tag{4.7}$$

а результатом добутку одиничної матриці E на матрицю-стовпець X є матриця-стовпець X, тобто $EX = X$, одержимо матричний розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді

$$X = A^{-1}B. \tag{4.8}$$

Для знаходження оберненої матриці A^{-1} необхідно застосувати алгоритм, який складається з таких пунктів:

1. Обчислення визначника $\det A$ матриці A коефіцієнтів системи . Якщо він не дорівнює нулеві, то продовжуємо розв'язувати СЛАР. Якщо $\det A = 0$, то матриця A є виродженою і для неї не існує оберненої.
2. Знаходження алгебраїчних доповнень для елементів матриці A. Вони дорівнюють мінорам для відповідних елементів a_{ij} $(i, j = \overline{1, n})$, помноженим на $(-1)^{i+j}$, тобто

   $$\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \tag{4.9}$$

   а мінор M_{ij} отримують із матриці A шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.
3. Формування матриці $\bar{A}$, елементами якої є алгебраїчні доповнення матриці A.
4. Транспонування матриці $\bar{A}$ і знаходження приєднаної матриці $\tilde{A} = \bar{A}^T$.
5. Визначення оберненої матриці за формулою

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}. \tag{4.10}$$

Зауваження. Обчислення для системи із трьох рівнянь не є громіздкими. У випадку системи із чотирьох рівнянь кількість обчислень значно зростає і для визначення оберненої матриці доводиться шукати шістнадцять визначників третього порядку. Для системи із n рівнянь необхідно обчислити

n^2 визначників $(n-1)$-го порядку. Тому на практиці матричний метод не є ефективним для розв'язування СЛАР високого порядку (більше десяти).

4.4. Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1. Методом Крамера розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язування. Обчислимо визначники $\det A$, $\det A_1$, $\det A_2$, $\det A_3$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -23; \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -22; \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

Невідомі x_i $(i = \overline{1,3})$ обчислюємо за формулою (4.4):

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-14}{-23} = 0{,}609, \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-22}{-23} = 0{,}957,$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-3}{-23} = 0{,}13.$$

Відповідь: $x_1 = 0{,}609$, $x_2 = 0{,}957$, $x_3 = 0{,}13$.

Приклад 4.2. Матричним методом розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1+1+2-1+1+2=6 .$$

Оскільки $\det A \neq 0$, то обернена матриця A^{-1} існує. Для її знаходження обчислимо мінори і алгебраїчні доповнення матриці A.

Знайдемо мінор M_{11} та відповідне йому алгебраїчне доповнення A_{11}. Для цього в матриці Aвикреслимо 1-й рядок і 1-й стовпець. У результаті отримаємо

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 2.$$

Аналогічно обчислимо решту мінорів та алгебраїчних доповнень:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 3;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = -1;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 2;$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 0;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 2;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 0;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -3;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -3.$$

Запишемо матрицю алгебраїчних доповнень

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

та транспоновану до неї матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо формулу (4.10) до матриці $\tilde{A}$ і обчислимо елементи оберненої матриці

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отримуємо розв’язок СЛАР

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

Варіанти завдань

Скласти програму розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці та методом Крамера.

1. $\begin{cases} 0,65x_1 - 0,93x_2 + 0,45x_3 = -0,72 \\ 1,15x_1 + 0,43x_2 - 0,72x_3 = 1,24 \\ 0,56x_1 - 0,18x_2 + 1,03x_3 = 2,15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 0,62x_1 + 0,56x_2 - 0,43x_3 = 1,16 \\ 1,32x_1 - 0,88x_2 + 1,76x_3 = 2,07 \\ 0,73x_1 + 1,42x_2 - 0,34x_3 = 2,18 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75 \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11 \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3,01x_1 - 0,14x_2 - 0,15x_3 = 1,00 \\ 1,11x_1 + 0,13x_2 - 0,75x_3 = 0,13 \\ 0,17x_1 - 2,11x_2 + 0,71x_3 = 0,17 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15 \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62 \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 0,95x_1 + 0,72x_2 - 1,14x_3 = 2,15 \\ 0,63x_1 + 0,24x_2 + 0,38x_3 = 0,74 \\ 1,23x_1 - 1,08x_2 - 1,16x_3 = 0,97 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 0,32x_1 - 0,42x_2 + 0,85x_3 = 1,32 \\ 0,63x_1 - 1,43x_2 - 0,58x_3 = -0,44 \\ 0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 = 0,64 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 1,24x_1 - 0,87x_2 - 3,17x_3 = 0,46 \\ 2,11x_1 - 0,45x_2 + 1,44x_3 = 1,50 \\ 0,48x_1 + 1,25x_2 - 0,63x_3 = 0,35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 0{,}13x_1 - 0{,}14x_2 - 2{,}00x_3 = 0{,}15 \\ 0{,}75x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}77x_3 = 0{,}11 \\ 0{,}28x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}39x_3 = 0{,}12 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 0{,}34x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 2{,}08 \\ 0{,}71x_1 - 0{,}65x_2 - 0{,}18x_3 = 0{,}17 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}35x_2 + 0{,}75x_3 = 1{,}28 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0{,}21x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}75x_3 = 0{,}11 \\ 0{,}13x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}11x_3 = 2{,}00 \\ 3{,}01x_1 - 0{,}33x_2 + 0{,}11x_3 = 0{,}13 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 0{,}46x_1 + 1{,}72x_2 + 2{,}53x_3 = 2{,}44 \\ 1{,}53x_1 - 2{,}32x_2 - 1{,}83x_3 = 2{,}83 \\ 0{,}75x_1 + 0{,}86x_2 + 3{,}72x_3 = 1{,}06 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 1{,}26x_1 - 2{,}34x_2 + 1{,}17x_3 = 3{,}14 \\ 0{,}75x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}48x_3 = -1{,}17 \\ 3{,}44x_1 - 1{,}85x_2 + 1{,}16x_3 = 1{,}83 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 0{,}43x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}58x_3 = 2{,}71 \\ 0{,}74x_1 + 0{,}83x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}26 \\ 1{,}43x_1 - 1{,}58x_2 + 0{,}83x_3 = 1{,}03 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 0{,}83x_1 + 1{,}41x_2 - 0{,}58x_3 = 2{,}71 \\ 1{,}23x_1 + 0{,}83x_2 + 1{,}17x_3 = 5{,}26 \\ 1{,}43x_1 - 1{,}58x_2 + 0{,}83x_3 = 1{,}03 \end{cases}$

Вимоги до програми

У програмі слід передбачити такі можливості:

1. Автоматизоване знаходження розв’язку СЛАР третього порядку методами Крамера та оберненої матриці.
2. Передбачити вивід покрокового виконання для кожного методу.

Контрольні запитання

1. Дати означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Що називається розв’язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
3. Записати СЛАР у розгорнутій, скороченій та матричній формах.
4. Які СЛАР називають сумісними?
5. Які СЛАР називають виродженими?

6. Які СЛАР називають визначеними?
7. Які СЛАР називають однорідними?
8. Назвати прямі методи розв'язування СЛАР. Що їх об'єднує?
9. У якому випадку для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь застосовують матричний метод?
10. Дати означення алгебраїчного доповнення до елемента матриці.
11. Пояснити суть методу оберненої матриці.
12. Пояснити суть методу Крамера.