

1. Cours : Combinatoire et dénombrement

1 Cardinal d'ensembles

1.1 Union d'ensembles

Définition 1 : Un **ensemble** A est une collection d'objets distincts que l'on appelle ses éléments.

- On dit qu'un objet x appartient à A si x est un élément de A . On note $x \in A$.
- On dit qu'un ensemble B est inclus dans A si tout élément de B est aussi un élément de A .
On note $B \subset A$.

■ **Exemple 1 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 7; 9; 44\}$. On a $1 \in A$ mais $3 \notin A$.

L'ensemble $B = \{2; 9\}$ est inclus dans A : on a $B \subset A$.

En revanche, l'ensemble $C = \{1; 2; 4; 7\}$ n'est pas inclus dans A puisque 4 est un élément de l'ensemble C mais pas de l'ensemble A .

Par ailleurs, il ne faut pas confondre 2 et $\{2\}$: 2 désigne l'élément alors que $\{2\}$ désigne l'ensemble qui contient un seul élément, 2. On a ainsi $2 \in A$ et $\{2\} \subset A$. ■

Définition 2 : Soit A un ensemble ayant un nombre fini d'éléments.

On appelle **Cardinal** de A , noté $\text{Card}(A)$, $\#A$ ou $|A|$ le nombre d'éléments de A .

■ **Exemple 2 :** Le cardinal de l'ensemble $A = \{1; 3; \pi; 5; \sqrt{2}\}$ est 5. ■

Définition 3 : Soit A et B deux ensembles.

- L'**union** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient tous les éléments qui sont au moins dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B .
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B .
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun, càd $A \cap B = \emptyset$.

■ **Exemple 3 :** On considère les ensemble $A = \{1; 3; 4; 5; 8\}$ et $B = \{1; 2; 4; 6; 7\}$.

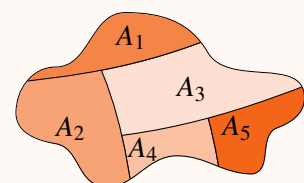
Alors $A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8\}$ et $A \cap B = \{1; 4\}$.

En particulier, les ensembles A et B ne sont pas disjoints. ■

Définition 4 :

Soit Ω un ensemble et A_1, A_2, \dots, A_n des sous-ensembles de Ω .

On dit que les ensembles A_1, \dots, A_n forment une **partition** de Ω si ces ensembles sont deux à deux disjoints et si $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.



Propriété 1 : Soit n un entier naturel non nul et A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$$

Une approche possible du dénombrement est d'établir une disjonction de cas pour découper le problème que l'on étudie en d'autres problèmes plus petits que l'on sait dénombrer. Ceci rappelle naturellement la **formule des probabilités totales**.

■ **Exemple 4 :** Un tournoi de mathématiques est organisé entre 256 joueurs. A chaque manche du tournoi, les participants sont répartis en groupes de 4 candidats et chaque groupe se voit alors attribuer une épreuve à l'issue de laquelle un seul candidat parmi les 4 du groupe pourra se qualifier. A la fin de ce tournoi, il n'y a qu'un seul vainqueur. Combien d'épreuves auront lieu au total ?

- Notons E_1 les épreuves de la première manche. Puisqu'il y a 256 candidats répartis en groupe de 4, il y aura $\frac{256}{4}$ soit 64 épreuves, à l'issue desquelles il restera 64 participants. On a $\text{Card}(E_1) = 64$.
- Notons E_2 les épreuves de la deuxième manche. Puisqu'il reste 64 candidats répartis en groupe de 4, il y aura $\frac{64}{4}$ soit 16 épreuves, à l'issue desquelles il restera donc 16 participants. On a $\text{Card}(E_2) = 16$.
- De même, si l'on note E_3 et E_4 le nombre d'épreuves aux troisièmes et quatrièmes manches, on a $\text{Card}(E_3) = 4$ et $\text{Card}(E_4) = 1$.

Les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont disjoints : il n'est pas possible qu'une épreuve se déroule sur deux manches différentes. Par ailleurs, l'union de ces ensembles constitue l'ensemble de toutes les épreuves. Ainsi, le cardinal de l'ensemble de toutes les épreuves de la compétition est égal à la somme des cardinaux de ces 4 ensembles. Il y a donc $64 + 16 + 4 + 1$ soit 85 épreuves dans cette compétition. ■

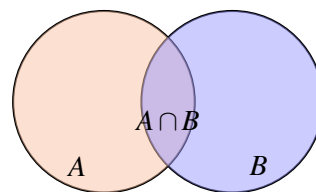
Tout ce raisonnement peut vous sembler inutilement compliqué pour une situation aussi simpliste que celle-là, mais il faut parfois savoir préciser à outrance les objets et les ensembles que l'on manipule pour être certains que les outils mathématiques que nous utilisons sont les bons.

Propriété 2 — Formule du crible : Soit A et B des ensembles finis

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Si l'on compte le nombre d'éléments de A et que l'on ajoute le nombre d'éléments de B , certains éléments ont alors été compté deux fois : ceux communs à A et B (c'est-à-dire les éléments de $A \cap B$).

En retirant le nombre d'éléments de cette intersection à notre compte, on obtient alors le nombre d'éléments de l'union.



Encore une fois, la liaison est à faire avec les probabilités et la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

■ **Exemple 5 :** Pour accompagner leurs frites à la cantine, 150 élèves choisissent leur sauce entre ketchup et mayonnaise (éventuellement les deux). On suppose que tous les élèves ont pris au moins une sauce. Par ailleurs, 92 élèves ont pris du ketchup et 97 ont pris de la mayonnaise. Combien ont pris les deux sauces ?

Notons K l'ensemble des élèves ayant pris du ketchup et M l'ensemble des élèves ayant pris de la mayonnaise. On a alors $\text{Card}(K) = 92$ et $\text{Card}(M) = 97$. De plus, chaque élève ayant pris au moins une sauce, on a alors $\text{Card}(K \cup M) = 150$. Or, $\text{Card}(K \cup M) = \text{Card}(K) + \text{Card}(M) - \text{Card}(K \cap M)$.

Ainsi, $\text{Card}(K \cap M) = 97 + 92 - 150 = 49$. 49 élèves ont pris à la fois du ketchup et de la mayonnaise. ■

1.2 Produit cartésien

Définition 5 : Soit A et B deux ensembles.

- On appelle **produit cartésien** de A et B , noté $A \times B$ (A "croix" B), l'ensemble composé des couples $(a; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
- Le produit cartésien $A \times A$ est également noté A^2 .

■ **Exemple 6 :** On considère les ensembles $A = \{2; 5; 9\}$; et $B = \{3; 5\}$.

- Les éléments de $A \times B$ sont $(2; 3)$, $(2; 5)$, $(5; 3)$, $(5; 5)$, $(9; 3)$ et $(9; 5)$.
- Les éléments de $B \times A$ sont $(3; 2)$, $(3; 5)$, $(3; 9)$, $(5; 2)$, $(5; 5)$, $(5; 9)$.
- Les éléments de B^2 sont $(3; 3)$, $(3; 5)$, $(5; 3)$ et $(5; 5)$.

On remarque sur cet exemple que le produit cartésien n'est pas commutatif !

Définition 6 : La notion de **produit cartésien** s'étend naturellement à plus de deux ensembles.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. le produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, \dots, A_n est l'ensemble des n -uplets $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ avec $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.
- Le produit cartésien $A \times A \times \dots \times A$ où A apparaît n fois est noté A^n . Ses éléments sont appelés les n -uplets de A .

■ **Exemple 7 :** On considère les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$.

- $(1; 7; 3) \in A \times B \times C$ puisque $1 \in A, 7 \in B$ et $3 \in C$.
- $(3; 7; 7; 3; 14) \in B^5$ puisque 3, 7 et 14 sont dans l'ensemble B .

Propriété 3 : Soit A et B des ensembles finis.

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.
- Plus généralement, soit n un entier naturel, A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis.

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \dots \times \text{Card}(A_n).$$

- En particulier, pour tout entier naturel n , on a $\text{Card}(A^n) = [\text{Card}(A)]^n$.

■ **Exemple 8 :** On reprend les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$. On a

- $\text{Card}(A \times B) = 3 \times 3 = 9$;
- $\text{Card}(A \times B \times C) = 3 \times 3 \times 2 = 18$;
- $\text{Card}(A^4) = 3^4 = 81$;
- $\text{Card}(C^{10}) = 2^{10} = 1024$.

Propriété 4 : Le produit cartésien est utilisé pour dénombrer des situations où l'ordre des symboles (chiffres, lettres, signes...) est important et où ces symboles peuvent être utilisés plusieurs fois.

■ **Exemple 9 :** A l'entrée d'un bâtiment est installé un digicode. Pour composer le code, on utilise 4 chiffres compris entre 1 et 6 suivis de deux lettres parmi les lettres A, B, C et D. Un chiffre ou une lettre peuvent être utilisés plusieurs fois. Combien de codes sont possibles ?

On note $A_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $A_2 = \{A; B; C; D\}$. Un digicode est un élément de $A_1^4 \times A_2^2$. Le cardinal de cet ensemble est donc $\text{Card}(A_1)^4 \times \text{Card}(A_2)^2 = 6^4 \times 4^2 = 20736$.

Il y a donc 20736 digicodes possibles. ■

2 Arrangements et permutations

Définition 7 : Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ (**factorielle** de n) le produit de tous les entiers de 1 à n . Ainsi, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

Par ailleurs, on convient que $0! = 1$.

Il est également possible de définir la factorielle par récurrence, en stipulant que $0! = 1$ et que, pour tout entier naturel n , $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Cette version de la factorielle a notamment été rencontrée par les élèves suivants la spécialité NSI lors de leur premier contact avec la récursivité.

■ **Exemple 10 :** $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$; $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$. ■

Définition 8 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n .

Un **k -arrangement** de A est un k -uplet d'éléments distincts de A .

Lorsque $k = n$, on parle de **permutation** de A .

■ **Exemple 11 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 4; 5; 7; 10\}$.

- $(7; 10; 3)$ est un 3-arrangement de A .
- $(10; 5; 4; 1)$ est un 4-arrangement de A .
- En revanche, $(7; 10; 1; 7)$ n'est pas un arrangement de A car l'élément 7 y apparaît deux fois.
- $(3; 7; 4; 5; 1; 10)$ est par ailleurs une permutation de A puisque tous les éléments de A y apparaissent.

Propriété 5 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n .

Le nombre de k -arrangements de A vaut $\frac{n!}{(n-k)!}$.

En particulier, le nombre de permutation de A vaut $n!$.

Démonstration 1 : Pour construire un k -uplet d'éléments distincts de A , on a

- n choix pour le premier élément
- $n-1$ choix pour le deuxième
- ...
- $n-(k-1)$ pour le k -ième

Le nombre de k arrangements de A vaut donc $n \times (n-1) \times \dots \times n - (k+1)$, ce que l'on peut réécrire en

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

d'où

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

■ **Exemple 12 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$, de cardinal 7.

Le nombre de 3-arrangements de A vaut $7 \times 6 \times 5 = 210$. ■

Propriété 6 : Les arrangements sont utilisés pour dénombrer des situations où l'ordre des objets (chiffres, nombres, lettres, signes,...) est important mais où chaque objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 13 :** Une course hippique réunit 8 jockeys et leurs chevaux. Le "quarté dans l'ordre" est un pari qui consiste à deviner les quatre premiers chevaux arrivés dans l'ordre. Combien de paris différents est-il possible de réaliser ?

- On a 8 choix pour le premier cheval arrivé.
- Il reste 7 choix pour le deuxième, 6 pour le troisième et 5 pour le quatrième.
- Le nombre total de paris est donc $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.

Formellement, si on nomme A l'ensemble des chevaux de la course, un quarté dans l'ordre est un 4-arrangement de A . ■

3 Combinaisons d'un ensemble fini

Définition 9 : Une **partie** ou **combinaison** d'un ensemble fini A est un ensemble inclus dans A . L'ensemble des parties de A est noté $\mathcal{P}(A)$.

■ **Exemple 14 :** Soit $A = \{1; 2; 3\}$. Les parties de A sont \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$ et $\{1; 2; 3\}$. Elles sont au nombre de 8

Attention à ne pas oublier l'ensemble vide \emptyset et l'ensemble complet A lui-même en établissant cette liste. ■

Propriété 7 : Soit A un ensemble fini de cardinal n . Le nombre de parties de A est 2^n .

Démonstration 2 : Nous allons montrer qu'il y a autant de parties de A que de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}^n$. Puisque $\{0; 1\}$ possède 2 éléments, le cardinal de $\{0; 1\}^n$ vaut donc 2^n .

Pour cela, à chaque partie de A , on fait correspondre un élément de $\{0; 1\}^n$ de telle sorte que deux parties différentes de A sont associées à deux n -uplets différents de $\{0; 1\}$. On dit qu'on réalise une bijection entre $\mathcal{P}(A)$ et $\{0; 1\}^n$.

L'idée : Pour chaque élément de A , on a deux choix pour construire une partie de A : soit cet élément appartient à la partie que l'on construit, soit il ne lui appartient pas.

On a donc

- 2 choix pour le premier élément de A
- 2 choix pour le deuxième élément...
- ...
- 2 choix pour le n -ième élément de A .

Ainsi, le cardinal de $\mathcal{P}(A)$ vaut $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$.

De manière formelle : Notons a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de A . Soit B une partie de A . On construit un n -uplet $(b_0; b_1; \dots; b_n)$ de $\{0; 1\}$ comme suit : pour tout entier naturel i entre 1 et n

- $b_i = 1$ si $a_i \in B$
- $b_i = 0$ sinon.

Chaque partie de A est ainsi associée de manière unique à un n -uplet de $\{0; 1\}$ et réciproquement. Les cardinaux de $\mathcal{P}(A)$ et $\{0; 1\}^n$ sont donc égaux. \square

Définition 10 : Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel n .

Le nombre de combinaisons à k éléments de A est noté $\binom{n}{k}$ et se lit " k parmi n ".

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux

■ **Exemple 15 :** Soit $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Les parties à deux éléments de A sont $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{2; 5\}, \{3; 4\}, \{3; 5\}$ et $\{4; 5\}$. Il y en a 10 : ainsi, $\binom{5}{2} = 10$. ■

Attention, l'ordre n'a pas d'importance lorsque l'on parle de partie d'un ensemble : le sous-ensemble $\{1; 2\}$ est le même que le sous-ensemble $\{2; 1\}$.

Propriété 8 : Soit n et k deux entiers naturels.

- Si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$;
- Sinon, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration 3 : On sait qu'il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ k -arrangements de A . Cependant, plusieurs k -arrangements utilisent les mêmes éléments de A (par exemple, les couples $(1; 2)$ et $(2; 1)$ utilisent les nombres 1 et 2). Etant donné une partie de A à k éléments, on peut construire $k!$ arrangements différents : on a k choix pour le premier élément, $k-1$ pour le deuxième, etc.

Ainsi, le nombre de k -arrangements est $k!$ fois plus grand que la nombre de combinaisons à k éléments. Ainsi, le nombre de combinaisons à k éléments est égale au nombre de k -arrangements divisé par $k!$, soit $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. \square

■ **Exemple 16 :** Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

Le nombre de parties de A à deux éléments vaut $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$.

Ces parties sont $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 4\}$, $\{2; 3\}$, $\{2; 4\}$ et $\{3; 4\}$. ■

Propriété 9 : Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout entier naturel $k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. $\left| \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1. \right.$

Si $n \geq 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. $\left| \text{Si } n \geq 2, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}. \right.$

Démonstration 4 : (Avec la formule) :

- Pour tout entier naturel $k \leq n$, $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.
 - D'après le premier point, on a bien $\binom{n}{0} = \binom{n}{n-0} = \binom{n}{n}$. Or, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{n!} = 1$.
 - D'après le premier point, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$. Or, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$.
 - D'après le premier point, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$.
- Or, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

□

Démonstration 5 : (Démonstration combinatoire)

- Choisir k objets parmi n revient à exclure $n-k$ objets parmi ces n objets. Ainsi, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Il n'existe qu'un seul ensemble à 0 élément, il s'agit de l'ensemble vide \emptyset . De la même manière, si A est un ensemble à n éléments, la seule partie de A ayant n éléments est l'ensemble A lui-même.

Ainsi, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

- Si A est un ensemble fini $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ de cardinal supérieur ou égal à 1, les parties à 1 élément de A sont simplement les singletons $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ..., $\{a_n\}$.

Ainsi, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

- Soit A un ensemble de cardinal $n \geq 2$. Pour construire une partie à 2 éléments de A , on choisit un premier élément (n choix possibles) puis un second ($n-1$ choix). En faisant ainsi, on peut construire $n(n-1)$ couples d'éléments de A . Or, l'ordre n'ayant pas d'importance, il est possible d'inverser l'ordre dans lequel on choisit les éléments de A .

Le nombre de combinaisons de A à 2 éléments vaut donc $\frac{n(n-1)}{2}$

□

■ **Exemple 17 :** $\binom{100}{98} = \binom{100}{2} = \frac{100 \times 99}{2} = 4950$. ■

Propriété 10 : Les combinaisons sont utilisées pour dénombrer les situations où l'ordre des objets n'est pas important - lorsque l'on tire simultanément plusieurs personnes ou objets au hasard par exemple - et qu'un objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 18 :** A la belote, on utilise un jeu de 32 cartes. Chaque carte est déterminé par sa couleur (Pique, Trèfle, Carreau, Coeur) et sa valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Pour le premier tour de distribution, chaque joueur reçoit 5 cartes, que l'on appelle une main. Combien existe-t-il de mains comportant exactement 2 as ?

L'ordre de distribution des cartes n'a pas d'importance ici : recevoir un as en première carte ou en deuxième carte n'a pas d'influence, on utilise donc les combinaisons.

- La main est composée de 2 as, choisis parmi 4, ce qui donne $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ possibilités.
- Il reste 3 cartes à déterminer, choisis parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as.
Cela donne $\binom{28}{3} = \frac{28!}{3!(28-3)!} = \frac{28!}{3!25!} = \frac{28 \times 27 \times 26}{3 \times 2 \times 1} = 3276$.
- Au total, cela fait $6 \times 3276 = 19656$ mains de 5 cartes contenant exactement 2 as.

■

Propriété 11 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$. On a alors

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Cette relation s'appelle la relation de Pascal.

Démonstration 6 — Avec la formule : On a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

On multiplie le premier quotient par $\frac{k}{k}$ et le second par $\frac{n-k}{n-k}$, ce qui donne

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times (n-1)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{k! \times (n-k-1)! \times (n-k)}$$

Or, $k \times (k-1)! = k!$, $(n-k-1) \times (n-k) = (n-k)!$. Ainsi,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Démonstration 7 — Combinatoire : Soit A un ensemble fini à n éléments et $a \in A$. Soit k un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

L'ensemble des combinaisons à k éléments, noté $\mathcal{P}_k(A)$, est, par définition, de cardinal $\binom{n}{k}$. Il peut se décomposer en deux ensembles disjoints :

- P_1 , l'ensemble des combinaisons à k éléments de A qui contiennent l'élément a . Il reste donc à choisir $k - 1$ éléments parmi les $n - 1$ restants. Le cardinal de cet ensemble est donc $\binom{n-1}{k-1}$;
- P_2 , L'ensemble des combinaisons à k éléments de A qui ne contiennent pas l'élément a . Il faut donc choisir k éléments parmi les $n - 1$ autres éléments. Le cardinal de P_2 est donc $\binom{n-1}{k}$.

On a alors $\mathcal{P}_k(A) = P_1 \cup P_2$ ce qui implique que $\binom{n}{k} = \text{Card}(\mathcal{P}_k(A)) = \text{Card}(P_1 \cup P_2)$. Or, les ensembles P_1 et P_2 sont disjoints. Ainsi, $\text{Card}(P_1 \cup P_2) = \text{Card}(P_1) + \text{Card}(P_2)$.

Autrement dit, on a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. □

Propriété 12 : La relation de Pascal permet de construire récursivement les coefficients binomiaux. Ces coefficients peuvent être arrangés en triangle et forment ce que l'on appelle le triangle de Pascal.

$\begin{smallmatrix} k \\ n \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dans ce triangle, on démarre avec un 1 en haut à gauche. Pour compléter chaque cellule, on ajoute alors le nombre au-dessus avec le nombre en haut à gauche. Les cases vides se voient assigner la valeur

0. On peut alors lire les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce triangle.

2. Exercices

Cardinal d'ensembles

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère l'ensemble $A = \{5; 9; 13\}$. Déterminer l'ensemble B , disjoint de A , tel que $A \cup B = \{1; 2; 5; 8; 9; 13; 14\}$.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère deux ensembles A et B .

- Si $\text{Card}(A) = 18$, $\text{Card}(B) = 23$, A et B étant disjoints, que vaut $\text{Card}(A \cup B)$?
- Si $\text{Card}(A) = 12$, $\text{Card}(B) = 47$ et $\text{Card}(A \cup B) = 58$, A et B sont-ils disjoints ?
- Si $\text{Card}(A) = 14$ et $\text{Card}(A \cup B) = 27$, quel est le nombre minimal d'éléments dans B ?

► Exercice 3 – Voir le corrigé

À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n , on note A_n l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - n = 0$.

Déterminer $\text{Card}(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit $A = \{5; 7\}$ et $B = \{7; 9; 10\}$. Donner l'ensemble des éléments de $A \times B$, de $B \times A$, de A^3 et de B^2 .

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card}(A \times B) = 299$ et $\text{Card}(A \cup B) = 37$. Les ensembles A et B sont-ils disjoints ?

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Parmi tous les nombres de 1 à 1000, combien s'écrivent avec le chiffre 9 ?

► Exercice 8 – Voir le corrigé

En informatique, un octet est une succession de 8 bits, chaque bit ne pouvant prendre que deux valeurs, 0 ou 1. Un octet est donc un 8-uplet de $\{0; 1\}$.

1. Combien d'octets différents existe-t-il ?
2. Dans le système RGB, une couleur est codée à l'aide de 3 octets désignant respectivement les niveaux de rouge, de vert et de bleu. Combien de couleurs différentes est-il ainsi possible de coder ?
3. Une adresse IPv4 est codée sur 4 octets. On considère un sous-réseau dont le masque est 255.255.0.0, c'est-à-dire que toutes les adresses IP des ordinateurs de ce sous-réseau commencent par les deux mêmes octets. Par ailleurs, les adresses se terminant par les octets 0.0 et 255.255 sont réservées respectivement au réseau et au broadcast. Combien de machines différentes peut-on brancher sur un tel réseau ?

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Dans un restaurant figurent au menu

- 12 entrées : 3 avec viande, 3 avec poisson et 6 végétariennes ;
- 20 plats : 10 avec viande, 6 avec poisson et 4 végétariens.

Un client commande au hasard de manière uniforme et indépendante une entrée et un plat.

1. Quelle est la probabilité que le menu de ce client soit végétarien ?
2. Quelle est la probabilité que son menu soit composé d'une entrée et d'un plat tous deux sans poisson ?
3. Quelle est la probabilité que l'entrée et le plat soit de nature différente (par exemple une entrée avec viande et un plat végétarien) ?

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Un trigramme est une figure composée de trois lignes parallèles, chacune pouvant être coupée en deux morceaux ou non. Le drapeau de la Corée du Sud présente par exemple quatre trigrammes entourant un Taiju bleu et rouge.

1. Combien de trigrammes différents peut-on constituer ?
2. Construire les trigrammes ne figurant pas sur le drapeau.



Arrangements et permutations

► Exercice 11 – Voir le corrigé

On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 11\}$. Donner tous les 2-arrangements de A . Combien y en a-t-il ?

► Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère l'ensemble $A = \{c; o; s\}$. Donner toutes les permutations de A . Combien y en a-t-il ?

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 7; 9; 11\}$.

1. Donner deux éléments de A^3 . Combien en existe-t-il ?
2. Donner deux 3-arrangements d'éléments de A . Combien en existe-t-il ?
3. Donner deux permutations de A . Combien en existe-t-il ?

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Une course de 8 athlètes a lieu.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de classements complets possibles ?
3. Anne a participé à la course et a terminé sur le podium. Sachant cette information, combien de classements complets sont possibles ?

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Le professeur souhaite envoyer ses élèves au tableau pour corriger des exercices. Il y a 3 exercices à corriger et 30 élèves dans la classe.

1. Combien y a-t-il de configurations possibles si un même élève ne peut pas venir deux fois au tableau ?
2. Même question si un élève peut être interrogé sur plusieurs exercices.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Deux groupes d'étudiants se rendent au cinéma. Le premier est composé de 6 personnes et le deuxième de 4 personnes. Les étudiants s'installent sur une rangée de dix places.

1. Combien de configurations différentes existe-t-il ?
2. Les deux groupes ne veulent pas être séparés. Combien de configurations sont possibles ?

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On dispose des lettres de SAINTEX. On souhaite construire de nouveaux mots à l'aide de ces lettres, sans s'intéresser au sens de ces mots. On peut par exemple former les mots EXTIA ou SINETAX.

1. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si toutes les lettres peuvent être utilisées autant de fois que l'on veut ?
2. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois ?
3. Combien de mots de 6 lettres ne commençant pas par la lettre X peut-on former, chaque lettre pouvant être utilisée autant de fois que l'on veut ?
4. Combien de mots de 4 lettres comportant la lettre I existe-t-il, chaque lettre ne pouvant être utilisée qu'une seule fois ?

► Exercice 18 (Amérique du Sud 2009) – Voir le corrigé

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres. Par exemple, le mot BBAAC signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des événements suivants :
 - E : " le candidat a exactement une réponse exacte ".
 - F : " le candidat n'a aucune réponse exacte ".
 - G : " le mot-réponse du candidat est un palindrome " (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, BACAB est un palindrome).

► Exercice 19 (Centres étrangers 2024) – Voir le corrigé

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac. Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4; 5; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
(b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

Combinaisons d'un ensemble fini

► Exercice 20 – Voir le corrigé

Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$. donner toutes les parties de A à 2 éléments et en déduire la valeur de $\binom{4}{2}$.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

Donner les valeurs de $\binom{6}{3}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{14}{11}$, $\binom{9}{4}$, $\binom{9}{5}$ et $\binom{8}{3}$.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Calculer les coefficients binomiaux : $\binom{31}{2}$, $\binom{279}{279}$, $\binom{1457}{0}$, $\binom{4321}{4320}$, $\binom{101}{99}$.

► Exercice 23 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

Pour préparer le prochain devoir de mathématiques, le professeur donne une liste de dix exercices et vous recommande d'en travailler cinq.

1. Combien de combinaisons d'exercice pouvez-vous construire ?
2. Le professeur insiste sur le fait que l'exercice 8 est à le travailler absolument. Il vous reste donc 4 exercices à choisir. Combien de combinaisons pouvez-vous construire ?

► Exercice 25 – Voir le corrigé

Dans une grille de loto, il faut choisir cinq nombres de 1 à 49 ainsi qu'un nombre chance allant de 1 à 10. De combien de manières différentes peut-on remplir sa grille de loto ?

► Exercice 26 – Voir le corrigé

On considère un jeu de 32 cartes. Chaque carte possède une couleur (Cœur, Pique, trèfle, Carreau) et une valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Une main est un ensemble de 5 cartes tirées dans ce paquet, sans tenir compte de l'ordre des cartes tirées. Déterminer le nombre de mains :

- comportant exactement 3 cœurs ;
- comportant exactement un roi et exactement deux dames ;
- comportant au plus 2 roi.

► Exercice 27 – Voir le corrigé

On lance simultanément dix pièces de monnaies et on regarde de quel côté elles tombent.

1. Combien de configurations avec 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?
2. Combien de configurations avec au plus 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?

► Exercice 28 – Voir le corrigé

Un entraîneur doit constituer une équipe de football. Il a à sa disposition 3 gardiens de buts, 8 défenseurs, 6 milieux de terrain et 6 attaquants. Il doit alors constituer une équipe en désignant 1 gardien, 4 défenseurs, 3 milieux de terrain et 3 attaquants. Combien d'équipes peut-il ainsi construire ?

► Exercice 29 – Voir le corrigé

En entrant en première, il vous a été demandé de choisir trois spécialités parmi les douze proposées.

1. Combien de choix différents pouviez-vous faire ?
2. Un élève de seconde sait qu'il devra abandonner une spécialité en terminale. Il décide donc de choisir deux spécialités qu'il conservera et une qu'il abandonnera. Combien a-t-il de choix ?

Exercices de synthèse

► Exercice 30 – Voir le corrigé

Une association sportive propose diverses activités telles que le football, le handball, l'athlétisme etc. Ces activités sont au nombre de 20. Sur sa fiche d'inscription, chaque adhérent doit alors choisir 3 activités au maximum parmi ces 20.

1. Si la préférence des activités n'entre pas en compte, combien de fiches d'inscription différentes peut-on former ?
2. Face à l'affluence grandissante, l'association à ses adhérents de classer ces 3 disciplines au maximum selon les préférences de l'adhérent. Combien de fiches différentes peut-on alors former ?

► Exercice 31 – Voir le corrigé

Parmi tous les nombres entiers entre 1 et 10^9 , combien ont une somme de chiffres qui vaut 3 ?

► Exercice 32 – Voir le corrigé

Une assemblée de 30 personnes souhaite élire une délégation de 4 personnes pour les représenter à un congrès.

1. Combien de délégations peut-on ainsi désigner ?
2. Alice et Bob ne se supportent pas et ne souhaitent pas faire tous deux partie de la délégation. Combien de possibilités reste-t-il ?
3. Alice et Bob acceptent finalement de mettre leur différend de côté. Cependant, les inséparables Camille et Dominique imposent que si l'un d'entre eux fait partie de la délégation, alors l'autre doit en être également. Combien de possibilités reste-t-il ?

► **Exercice 33 – Voir le corrigé**

Soit n un entier naturel non nul et A un ensemble fini de cardinal n . Pour tout $k \leq n$, on note P_k l'ensemble des parties de A ayant k éléments.

1. Rappeler le cardinal de P_k .
2. Que vaut l'union des P_k pour k allant de 0 à n ? Cette union est-elle disjointe ?
3. En déduire que
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

► **Exercice 34 – Voir le corrigé**

Dans une assemblée de n personnes, on souhaite élire k personnes dans une commission. L'une de ces k personnes en sera la présidente.

1. Combien de commissions avec son président peut-on ainsi constituer ?
2. On procède différemment : on choisit d'abord le président de la commission puis on choisit les autres membres parmi les personnes restantes. De combien de manières peut-on procéder ?
3. En déduire que $n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}$.
4. Retrouver cette égalité à l'aide de la formule sur les coefficients binomiaux.

► **Exercice 35 – Voir le corrigé**

Soit n un entier naturel. On s'intéresse aux mots de taille $2n$ comportant exactement n fois la lettre A et n fois la lettre B.

1. Combien de tels mots peut-on construire ?
2. (a) Combien de tels mots contenant 0 fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
(b) Combien de tels mots contenant 1 fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
(c) Soit $k \geq n$. Combien de tels mots contenant k fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
3. A l'aide des questions précédentes, simplifier l'expression
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2.$$

► **Exercice 36 – Voir le corrigé**

Outre des baguettes croustillantes et de délicieux croissants, le boulanger vend également d'autres produits. On trouve ainsi 10 sortes de pâtisseries différentes, 4 types de cookies, 12 types de boissons ainsi que 15 sandwiches différents.

1. La vitrine du boulanger n'étant pas assez grande pour accueillir tous les types de sandwiches en même temps, le boulanger doit en choisir 8 qu'il pourra exposer et ainsi mettre en avant. L'ordre dans lequel il place les sandwiches dans la vitrine étant important, combien de choix s'offrent au boulanger pour réaliser sa présentation ?
2. Une formule est composée d'un sandwich, d'une boisson et d'un dessert, ce-dernier pouvant être une pâtisserie ou un cookie. Combien de formules différentes peut-on ainsi constituer ?
3. Un client un peu gourmand souhaite goûter à un échantillon des produits du boulanger. Il compte ainsi commander 3 gâteaux et 2 cookies, tous différents les uns des autres pour varier les plaisirs. Combien de choix s'offrent à lui pour réaliser sa commande ?
4. Face au succès des cookies, notre boulanger-mathématicien décide de lancer un service de cookies personnalisés. Chaque client peut alors choisir une base de cookie (nature ou chocolat) et les ingrédients à mettre dessus. 5 ingrédients sont disponibles et les clients peuvent choisir d'en mettre autant qu'ils veulent sur leur gâteau. Ils peuvent ainsi tout à fait choisir de n'en mettre aucun comme de mettre les 5 en même temps. Combien de recettes de cookies différentes est-il alors possible de créer ?

► Exercice 37 – Voir le corrigé

Lors de la Seconde Guerre Mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés, incompréhensibles pour leurs opposants. Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers différentes composants.

Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer. Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine est une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement des rotors dans la machine est important. Combien de configurations différentes ces rotors permettent-ils ?
2. Chaque rotor peut alors être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. La position d'un rotor n'influence pas la position des autres, ceux-ci sont totalement indépendants. Les trois rotors étant choisis, combien de positions différentes peut-on donner au mécanisme formé par ces trois rotors ?
3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Six lettres resteront inchangées. Les vingt restantes seront reliées par paire à l'aide de câbles.
 - (a) Combien de manières a-t-on de choisir les six lettres inchangées ?
 - (b) Parmi les vingt lettres restantes, on en choisit deux que l'on relie à l'aide du câble numéro 1. Combien a-t-on de choix différents ?
 - (c) Parmi les dix-huit lettres restantes, on en choisit de nouveau 2 qui seront reliées par le câble numéro 2. Combien a-t-on de choix différents ?
 - (d) On poursuit ainsi jusqu'à ce que les vingt lettres soient toutes reliées. En remarquant que l'ordre de câblage n'a pas d'importance (inverser le câble 1 et le câble 2 donnera le même résultat), donner le nombre de câblages de la machine Enigma.
4. En déduire un ordre de grandeur du nombre de configurations de la machine Enigma.
5. En supposant qu'un ordinateur soit capable de tester un milliard de configurations par seconde, combien d'années faudrait-il pour passer en revue toutes les configurations d'Enigma ?

3. Corrigés

Cardinal d'ensembles

► Correction 1 – Voir l'énoncé

On prend les éléments de $A \cup B$ qui ne sont pas dans A . $B = \{1; 2; 8; 14\}$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

- Puisque A et B sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 18 + 23 = 41$.
- On a $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 47 + 12 = 59 \neq \text{Card}(A \cup B)$, A et B ne sont pas disjoints.
- B comporte au moins $27 - 24 = 13$ éléments.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Il est possible de résoudre cet exercice en utilisant un tableau.

	Informatique	Chimie	Astronomie	Total
Anglais	3	9	8	20
Allemand	6	6	4	16
Total	9	15	12	36

► Correction 4 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n , on note A_n l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - n = 0$. Ainsi, $A_0 = \{0\}$ et pour tout entier naturel non nul, $A_n = \{-\sqrt{n}; \sqrt{n}\}$. Ces ensembles sont disjoints et de cardinal 2.

Ainsi, $\text{Card}(A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_0) + \text{Card}(A_1) + \dots + \text{Card}(A_n) = 1 + 2 + 2 + \dots + 2 = 2n + 1$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

On a

- $A \times B = \{(5; 7), (5; 9), (5; 10), (7; 7), (7; 9), (7; 10)\}$,
- $B \times A = \{(7; 5), (7; 7), (9; 5), (9; 7), (10; 5), (10; 7)\}$,
- $A^3 = \{(5; 5; 5), (5; 5; 7), (5; 7; 5), (5; 7; 7), (7; 5; 5), (7; 5; 7), (7; 7; 5), (7; 7; 7)\}$,
- $B^2 = \{(7; 7), (7; 9), (7; 10), (9; 7), (9; 9), (9; 10), (10; 7), (10; 9), (10; 10)\}$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

$299 = 1 \times 299 = 13 \times 23$. Les seules possibilités pour les cardinaux de A et B sont donc 1, 13, 23 et 299.

Or, $13 + 23 = 39$ et $1 + 299 = 300$, qui sont différents de 37. Ainsi, A et B ne sont pas disjoints.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Comptons le nombre de nombres n'ayant aucun 9 dans leur écriture. Il y a 9 choix pour le premier chiffre, 9 pour le deuxième, 9 pour le troisième soit $9^3 = 729$ possibilités. Ainsi, les nombres qui s'écrivent avec un 9 sont au nombre de $1000 - 729 = 271$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Il existe 2^8 soit 256 octets. Il est alors possible de coder 256^3 soit 16777216 couleurs dans le système RGB.

Pour établir une adresse IPv4 de ce sous-réseau, on a 256 possibilités pour le troisième octet et 256 pour le quatrième. Il faut alors retirer les deux adresses réservées. Il est alors possible de connecter $256^2 - 2$ soit 65534 machines au réseau.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Il y a 12×20 soit 240 menus au total. Il y a par ailleurs 6×4 menus végétariens.

La probabilité que le menu soit végétarien est de $\frac{24}{240}$ soit $\frac{1}{10}$.

Il y a 9 entrées sans poissons et 14 plats sans poissons, soit 9×14 menus sans poisson.

La probabilité que le menu soit sans poisson est de $\frac{9 \times 14}{240} = \frac{21}{40}$.

Le nombre de menus ayant entrée et plat différents est $3 \times 10 + 3 \times 14 + 6 \times 16$ soit 168.

La probabilité de l'événement recherché est donc $\frac{168}{240}$ soit $\frac{7}{10}$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Il est possible de constituer 8 trigrammes.

Arrangements et permutations

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Les 2-arrangements de A sont $(1;3), (1;7), (1;11), (3;1), (3;7), (3;11), (7;1), (7;3), (7;11), (11;1), (11;3), (11;7)$. Il y en a 12.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Les permutations de A sont $(s;i;n), (s;n;i), (i;s;n), (i;n;s), (i;s;n), (i;n;s)$. Il y en a 6.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

- $(1;3;3)$ et $(7;7;1)$ sont deux éléments de A^3 . Il en existe 5^3 soit 125.
- $(1;7;11)$ et $(7;9;1)$ sont deux 3-arrangements d'éléments de A . Il en existe $5 \times 4 \times 3 = 60$.
- $(1;7;3;11;9)$ et $(11;9;3;7;1)$ sont deux permutations de A . Il en existe $5! = 120$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Il y a $8 \times 7 \times 6$ soit 336 podiums possibles. Il y a $8!$ soit 40320 classements possibles.

Classons les 7 autres personnes : il y a $7!$ classements possibles. Il faut alors insérer Anne en première, deuxième ou troisième position. Le nombre de classements complets vaut alors $3 \times 7!$ soit 15120.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Si un élève ne peut pas venir deux fois au tableau, il y a 30 possibilités pour le premier élève, 29 pour le deuxième et 28 pour le troisième, soit un total de $30 \times 29 \times 28 = 24360$ configurations.

Si, en revanche, un élève peut passer plusieurs fois, il y a 30 choix pour chaque exercice, soit un total de $30^3 = 27000$ configurations.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Il existe $10! = 3628800$ configurations possibles.

Si les étudiants ne souhaitent pas se séparer, il y a deux situations possibles.

- On place le premier groupe puis le deuxième. Il y a $6!$ manières de placer le premier groupe et $4!$ pour le deuxième.
- On place le deuxième groupe puis le premier, on obtient le même nombre de placements.
- Le nombre de configurations possibles est donc de $2 \times 6! \times 4! = 34560$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

1. On peut former $7^4 = 2401$ mots.
2. On peut former $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ mots.
3. Il y a 6 choix pour la première lettre, puis 7 pour la deuxième, 7 pour la troisième et ainsi de suite. Le nombre de mots est de $6 \times 7^5 = 100842$.
4. On divise les mots selon la position de la lettre I.
 - Si elle est en première position, on a alors 6 choix pour la deuxième lettre, 5 pour la troisième, 4 pour la quatrième, soit 120 possibilités.
 - Le même raisonnement vaut si le O est en position 2, 3 ou 4.
 - Il y a donc 480 possibilités au total.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

1. Il y a à chaque fois 3 choix par question, soit 3^5 mots-réponses possibles.
2.
 - On distingue selon la position de la bonne réponse.
 - S'il s'agit de la première réponse, il y a $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ mots-réponses possibles.
 - Le même raisonnement tient s'il s'agit de la deuxième, troisième, quatrième ou cinquième réponse.
 - Au total 80 mots-réponses contiennent exactement une bonne réponse.

La probabilité d'avoir exactement une bonne réponse est donc de $\frac{80}{243}$.

- Il y a deux mauvaises réponses par question. La probabilité de n'avoir aucune réponse exacte est donc $\frac{2^5}{243} = \frac{32}{243}$.
- Il y a 3 choix pour la première lettre, 3 pour la deuxième et 3 pour la troisième. Il n'y a qu'un choix pour la quatrième qui doit être la même que la deuxième et un seul choix également pour la cinquième qui doit être la même que la première.

La probabilité d'avoir un palindrome est donc de $\frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

L'ordre des tirages est pris en compte et il y a remise entre chaque tirage. Nous avons 8 possibilités pour le premier tirage, 8 pour le deuxième et 8 pour le troisième. Il y a donc $8^3 = 512$ tirages possibles.

Le nombre de tirages sans répétition est de $8 \times 7 \times 6 = 336$. Le nombre de tirage contenant au moins une répétition est donc de $512 - 336 = 176$.

Combinaisons d'un ensemble fini

► Correction 20 – Voir l'énoncé

Les parties de A à deux éléments sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$ et $\{3;4\}$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

- $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3 \times 2 \times 1)3!} = 5 \times 4 = 20.$
- $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{(3 \times 2 \times 1)7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120.$
- $\binom{14}{11} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11!}{11! \times (3 \times 2 \times 1)} = 14 \times 13 \times 2 = 364.$
- $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!(4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 3 \times 7 \times 6 = 126.$
- $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = 126$ d'après le calcul précédent.
- $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!(1 \times 2 \times 3)} = 8 \times 7 = 56.$

► Correction 22 – Voir l'énoncé

$$\binom{31}{2} = \frac{31 \times 30}{2} = 465, \binom{279}{279} = 1, \binom{1457}{0} = 1, \binom{4321}{4320} = 4321, \binom{101}{99} = \frac{101 \times 100}{2} = 5050.$$

► Correction 23 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n , $u_n > 0$. Pour savoir si $u_{n+1} \geq u_n$, on regarde donc si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2) \times (2n+1) \times (2n)!}{n! \times (n+1) \times n! \times (n+1)} \times \frac{n!n!}{(2n)!}.$$

En simplifiant, on trouve alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

Or, pour tout entier naturel n , $2n+1 \geq n+1$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. La suite (u_n) est croissante.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

Il faut choisir 5 exercices parmi 10 soit

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5!} = 252 \text{ possibilités.}$$

Si l'exercice 8 est imposé, il faut choisir 4 exercices parmi les 9 restants, soit

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!} = 126 \text{ possibilités.}$$

► **Correction 25 – Voir l'énoncé**

On a donc $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19068840$ manières de remplir une grille de loto.

► **Correction 26 – Voir l'énoncé**

Pour obtenir une main comptant exactement 3 cœurs

- On choisit 3 cœurs parmi les 8 : $\binom{8}{3} = 56$;
- On choisit 2 cartes parmi les 24 restantes : $\binom{24}{2} = 276$;
- Le nombre total de mains ayant exactement 3 cœurs est donc de $56 \times 276 = 15456$.

Pour obtenir une main ayant exactement un roi et deux dames

- On choisit un roi parmi 4 puis deux dames parmi 4 : $\binom{4}{1} \binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24$;
- On choisit 2 cartes parmi les 24 restantes : $\binom{24}{2} = 276$;
- Le nombre total de mains comptant exactement un roi et deux dames est donc de $4 \times 6 \times 276 = 6624$.

Pour obtenir une main contenant au plus deux rois, on compte les mains ayant exactement 0, 1 ou 2 roi et on ajoute les différents cas.

- Aucun roi : On choisit 5 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des rois, soit $\binom{28}{5} = 98280$;
- Un roi : On choisit un roi parmi 4 puis 4 cartes parmi les 28 restantes, soit $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 81900$;
- Deux rois : On choisit deux rois parmi 4 puis 3 cartes parmi les 28 restantes, soit $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19656$;
- Le nombre total de mains comportant au plus deux rois vaut donc $98280 + 81900 + 19656 = 199836$.

► **Correction 27 – Voir l'énoncé**

Il existe $\binom{10}{3} = 120$ configurations avec 3 pièces tombant sur FACE.

Il existe $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$ configurations avec au plus 3 pièces tombant sur FACE.

► **Correction 28 – Voir l'énoncé**

Le nombre d'équipes est de $\binom{3}{1} \times \binom{8}{4} \times \binom{6}{3} \times \binom{6}{3} = 84000$.

► **Correction 29 – Voir l'énoncé**

Il fallait choisir 3 spécialités parmi 12. Le nombre de choix est donc de $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$.

On choisit 3 spécialités parmi 12 puis une parmi les 3 qu'on abandonnera.

Le nombre de choix est donc de $\binom{12}{3} \times \binom{3}{1} = 220 \times 3 = 660$.

Exercices de synthèse

► Correction 30 – Voir l'énoncé

Si la préférence des activités n'entre pas en compte, chaque adhérent choisi 1, 2 ou 3 activités parmi 20. Il y a donc $\binom{20}{1} + \binom{20}{2} + \binom{20}{3} = 20 + 190 + 1140 = 1350$ fiches différentes.

Supposons que l'ordre compte : si l'adhérent choisit une seule discipline, il a 20 choix. S'il en choisit deux, il a 20 choix pour la première et 19 pour la deuxième soit $20 \times 19 = 380$ choix au total. S'il en choisit trois, il a $20 \times 19 \times 18 = 6840$ choix. Au total, il y a 7240 fiches possibles.

► Correction 31 – Voir l'énoncé

Notons d'abord que 10^9 n'est pas une solution. On regarde donc tous les nombres composés de 9 chiffres (quitte à compléter avec des 0 devant les nombres). Pour avoir un nombre dont la somme des chiffres vaut 3, il y a trois possibilités :

- Il est composé de huit 0 et d'un 3 : il y a alors 9 possibilités pour placer le chiffre 3 dans ce nombre ;
- Il est composé de sept 0, d'un 1 et d'un 2 : il y a alors 9 possibilités pour placer le chiffre 1 et 8 possibilités pour placer le chiffre 2, soit 72 possibilités au total ;
- Il est composé de six 0 et de trois 1 : il faut placer trois fois le chiffre 1 parmi neuf emplacements. Cela donne $\binom{9}{3}$ possibilités, soit 84.

Au total, il y a 165 nombres entre 1 et 10^9 dont la somme des chiffres vaut 2.

► Correction 32 – Voir l'énoncé

1. On peut désigner $\binom{30}{4} = 27405$ délégations différentes.

2. On distingue les cas :

- Aucun ne fait partie de la délégation. On choisit donc 4 personnes parmi 28 : $\binom{28}{4} = 20475$;
- Alice fait partie de la délégation et pas Bob.
Il reste à choisir 3 personnes parmi 28, soit $\binom{28}{3} = 3276$ possibilités ;
- Bob fait partie de la délégation et pas Alice. On a de nouveau 3276 possibilités.
- Au total, il y a $20475 + 3276 + 3276 = 27027$ délégations possibles.

Une autre technique consiste à compter les délégations où Alice et Bob font tous deux parties de la délégation et de retrancher ce nombre au total. Si les deux font partie de la délégation, on doit encore choisir 2 membres parmi les 28 restants, soit $\binom{28}{2} = 378$ possibilités. Il y a donc $27405 - 378 = 27027$ délégations convenables.

3. On distingue les cas

- Camille et Dominique font tous deux parties de la délégation. Il faut encore choisir deux membres parmi les 28 restants, soit $\binom{28}{2} = 378$
- Camille et Dominique n'en font pas partie. On choisit donc 4 membres parmi les 28 restants, soit $\binom{28}{4} = 20475$ possibilités
- En tout, on a donc $20475 + 378 = 20853$ possibilités.

► Correction 33 – Voir l'énoncé

Le cardinal de P_k vaut $\binom{n}{k}$. Or, l'union des P_k vaut $\mathcal{P}(A)$ et cette union est disjointe.

Ainsi, $\text{Card}(\mathcal{P}(A)) = \text{Card}(P_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_n) = \text{Card}(P_0) + \text{Card}(P_1) + \dots + \text{Card}(P_n)$ et donc $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.

► Correction 34 – Voir l'énoncé

On choisit k personnes parmi les n personnes. Puis, parmi ces k personnes, on en choisit une qui sera la présidente. Le nombre de choix est $\binom{n}{k} \times \binom{k}{1}$ soit $k \binom{n}{k}$.

On choisit 1 personne pour présider l'assemblée parmi les n personnes. Pour la suite, on choisit alors $k-1$ personnes sur les $n-1$ présentes pour constituer la commission.

Le nombre de choix est donc $\binom{n}{1} \times \binom{n-1}{k-1} = n \binom{n-1}{k-1}$.

On a déterminé le nombre de manières d'élire un comité et un président de deux manières différentes, ces deux quantités sont donc égales. On a donc bien $n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}$.

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k compris entre 1 et n ,

$$n \binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

On multiplie en haut et en bas par k

$$n \binom{n-1}{k-1} = k \times \frac{n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k}.$$

► Correction 35 – Voir l'énoncé

Parmi les $2n$ emplacements pour les lettres, on en choisit n pour placer les A : les autres recevront la lettre B. Il y a donc $\binom{2n}{n}$ tels mots.

- Il n'y a qu'un seul mot qui comporte 0 fois la lettre A parmi les n premières.
- On choisit 1 lettre parmi les n premières pour placer la lettre A puis $n-1$ lettres parmi les n dernières pour placer la lettre A. On aura bien au total n fois la lettre A. Il y a $\binom{n}{1} \binom{n}{n-1}$ mots de ce type.
- On choisit k lettres parmi les n premières pour placer la lettre A puis $n-k$ lettres parmi les n dernières pour placer la lettre A. On aura bien au total n fois la lettre A. Il y a $\binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$ mots de ce type.

On note E l'ensemble des mots recherchés et E_k l'ensemble des mots contenant k fois la lettre A parmi les n premières lettres. Les ensembles E_k sont disjoints et leur union fait E . Ainsi, $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_0) + \text{Card}(E_1) + \dots + \text{Card}(E_n)$.

Or, pour tout entier naturel k , $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$, mais $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Finalement, $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}^2$ et on en déduit que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

► Correction 36 – Voir l'énoncé

1. L'ordre est important et il n'y a pas de répétitions : il s'agit d'un arrangement. Le boulanger a donc 15 choix pour le premier sandwich, 14 pour le deuxième, 13 pour le troisième etc. La nombre de possibilités vaut donc $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ soit 259 459 200.
2. Il y a 15 choix de sandwich, 12 choix de boissons et 14 choix de dessert. Le nombre de formules est donc de $15 \times 12 \times 14$ soit 2520.
3. Le client choisit 3 pâtisseries parmi 10 et 2 cookies parmi 4. Le nombre de possibilités vaut donc $\binom{10}{3} \binom{4}{2}$, soit 720.
4. Il y a deux choix de bases. Pour choisir les ingrédients, on a alors 2^5 possibilités (pour chaque ingrédient, on a 2 choix : le prendre ou pas). Le nombre total de cookies que l'on peut former est donc 2×2^5 soit 64.

► Correction 37 – Voir l'énoncé

1. Il y a donc 5 possibilités pour le premier rotor, 4 pour le deuxième, 3 pour le troisième, soit $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités pour les rotors.
2. Cela donne 26 placements pour le premier rotor, 26 pour le deuxième et 26 pour le troisième, soit un total de $26 \times 26 \times 26 = 17576$ possibilités.
3. (a) Il y a $\binom{26}{6}$ manières de choisir 6 lettres parmi 26, soit $\frac{26!}{6!20!}$, c'est-à-dire 230230 possibilités.
 (b) Il y a $\binom{20}{2}$ choix possibles.
 (c) Il y a alors $\binom{18}{2}$ possibilités.
 (d) On a alors $\binom{20}{2} \times \binom{18}{2} \times \binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{16}{2}$ possibilités.
 Cette écriture est simplifiable, puisque ce nombre vaut

$$\frac{20 \times 19}{2} \times \frac{18 \times 17}{2} \times \frac{16 \times 15}{2} \times \frac{14 \times 13}{2} \times \frac{12 \times 11}{2} \times \frac{10 \times 9}{2} \times \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 1}{2} = \frac{20!}{2^{10}}.$$

Or, l'ordre des câbles n'a pas d'importance : les lettres reliées par le câble 1 auraient pu l'être par le câble 2. Au total, on peut permuer les 10 câbles de $10!$ façons différentes. Le nombre de câblages d'Enigma vaut donc $\frac{20!}{2^{10} \times 10!}$ soit 654729075

- (e) Le nombre de configurations de la machine Enigma vaut donc $60 \times 17576 \times 230230 \times 654729075$ soit environ 1.59×10^{20} configurations possibles !
- (f) En supposant qu'un ordinateur soit capable de tester un milliard de configurations par seconde, il faudrait environ $\frac{1.59 \times 10^{20}}{10^9 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365}$ soit 5040 années !