1. Cours : Logarithme népérien

1 Logarithme népérien

Définition 1 : Soit a un réel strictement positif. On appelle *logarithme népérien* de a, noté $\ln(a)$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1 : Derrière cette définition se cache une démonstration : une telle solution existe-t-elle ? Si elle existe, cette solution est-elle unique ?

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par définition de l'exponentielle. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a \in]0;+\infty[$, il existe un réel x tel que $e^x = a$.

La fonction exponentielle étant par ailleurs strictement monotone sur $\mathbb{R}$, cette solution est unique. □

■ **Exemple 1 :** $\ln(1) = 0$. En effet, l'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$. ■

■ **Exemple 2 :** $\ln(e) = 1$, $\ln(e^2) = 2$. ■

Propriété 1 : Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.

Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

Démonstration 2 : Soit a un réel strictement positif. $\ln(a)$ est, par définition, solution de l'équation $e^x = a$. On a donc $e^{\ln(a)} = a$.

Par ailleurs, pour tout réel a, $e^a > 0$. Par définition du logarithme népérien, $\ln(e^a)$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, $x = a$ est une solution de cette équation. On a donc $\ln(e^a) = a$. □

■ **Exemple 3 :** On cherche à résoudre l'équation $3e^x - 6 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$3e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3e^x = 6 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2).$$

■

Attention : il n'existe pas de logarithme népérien de réels négatifs !

■ **Exemple 4 :** On cherche à résoudre l'équation $\ln(x+2)+3 = 0$. $\ln(x+2)$ n'existe que si $x+2 > 0$, c'est-à-dire $x > -2$. Soit donc $x > -2$.

$$\ln(x+2)+3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = -3 \Leftrightarrow x+2 = e^{-3} \Leftrightarrow x = e^{-3} - 2.$$

Puisque $e^{-3} > 0$, on a alors $e^{-3} - 2 > -2$. L'unique solution de l'équation est donc $e^{-3} - 2$. ■

2 Propriétés algébriques

Propriété 2 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 3 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}.$$

En appliquant ln à cette égalité, on a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. □

■ **Exemple 5 :** On a $\ln(2) + \ln(3) + \ln(4) = \ln(2 \times 3 \times 4) = \ln(24)$. ■

■ **Exemple 6 :** Soit x un réel. Alors,

$$\ln(1 + e^{-x}) + x = \ln(1 + e^{-x}) + \ln(e^x) = \ln((1 + e^{-x})e^x) = \ln(e^x + 1).$$

■

Propriété 3 : Soit a et b des réels strictement positifs. Alors,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 4 : Puisque $\ln(1) = 0$, on a $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$, et donc, d'après la propriété précédente, $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$. Ainsi, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Par ailleurs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. □

■ **Exemple 7 :** On a $\ln(21) - \ln(7) = \ln\left(\frac{21}{7}\right) = \ln(3)$. ■

Propriété 4 : Soit a un réel strictement positif. Alors,

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

Démonstration 5 : Puisque pour tout réel $a > 0$, $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, on a

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$$

et donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$. □

Propriété 5 : Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier **relatif** n

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

Démonstration 6 : Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

- **Initialisation** : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie : $\mathscr{P}$ est héréditaire.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$. Ainsi, $\ln(a^n \times a^{-n}) = \ln(a^n) + \ln(a^{-n}) = 0$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -\ln(a^n)$. Or, $\ln(a^n) = n\ln(a)$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$. □

■ **Exemple 8 :** On souhaite simplifier $\ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6)$.

$$\begin{aligned}
\ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6) &= \ln(12 \times 3) - 2\ln(6) \\
&= \ln(36) - 2\ln(6) \\
&= \ln(6^2) - 2\ln(6) \\
&= 2\ln(6) - 2\ln(6) = 0.
\end{aligned}$$
■

■ **Exemple 9 :** On a $\dfrac{\ln(10000)}{\ln(0.001)} = \dfrac{\ln(10^4)}{\ln(10^{-3})} = \dfrac{4ln(10)}{-3\ln(10)} = -\dfrac{4}{3}$. ■

3 Fonction logarithme népérien

Définition 2 : On appelle *fonction logarithme népérien* la fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie pour tout réel x strictement positif.

Cette fonction est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle.

3.1 Limites

Propriété 6 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

De plus, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

La puissance de x l'emporte sur le logarithme en cas d'indéterminée : ce sont les croissances comparées au logarithme.

Démonstration 7 — Au programme : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x)$ **:** Pour $x > 0$, posons $X = \ln(x)$.

Ainsi, $x\ln(x) = e^X \times X$. Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$. Par composition de limite, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$. □

3.2 Dérivabilité

Propriété 7 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

La fonction ln est donc également continue sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 8 — Au programme : On admet que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=e^{\ln(x)}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

- D'une part, on sait que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=1$.
- D'autre part, en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on sait que

$$f'(x)=\ln'(x)\times e^{\ln(x)}=\ln'(x)\times x.$$

Ainsi, pour tout $x>0$, $\ln'(x)\times x=1$ et donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. □

■ **Exemple 10 :** Pour tour réel $x>0$, on pose $f(x)=e^x\ln(x)$.

- Pour tout réel x, on pose $u(x)=e^x$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $u'(x)=e^x$.
- Pour tout réel x, on pose $v(x)=\ln(x)$. v est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout réel $x>0$

$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=e^x\times\ln(x)+e^x\times\frac{1}{x}=\frac{e^x(x\ln(x)+1)}{x}.$$

■

On en déduit naturellement la propriété suivante.

Propriété 8 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$.

Alors $\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$

■ **Exemple 11 :** Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2-2x+5$ et $f(x)=\ln(u(x))=\ln(x^2-2x+5)$.

Il faut avant tout vérifier que pour tout réel x, $u(x)>0$! Sans quoi, la fonction f ne serait pas définie sur $\mathbb{R}$.

Or, u une fonction polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $(-2)^2-4\times1\times5=-16>0$. Ainsi, pour tout réel x, $u(x)$ est du signe du coefficient dominant, 1, c'est-à-dire $u(x)>0$.

Par ailleurs, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x)=2x-2$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}.$$

■

Puisque $\ln(u)$ n'est définie que lorsque u est strictement positive, on en déduit que u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations.

3.3 Étude de la fonction ln

Propriété 9 : La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 9 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif. ln est donc strictement croissante. □

La stricte croissance du logarithme nous est notamment utile pour déterminer le signe d'une expression mettant en jeu des logarithmes, et en particulier...

Propriété 10 : Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors $\ln(x)\geqslant\ln(y)$ si et seulement si $x\geqslant y$. En particulier, $\ln(x)\geqslant 0$ si et seulement si $x\geqslant 1$.

■ **Exemple 12 :** On souhaite déterminer l'entier n à partir duquel $3-12\times 0.9^n\geqslant 2.9$.

En soustrayant trois aux deux membres de cette inégalité, on obtient $-12\times 0.9^n\geqslant -0.1$. En divisant alors par -12 qui est négatif, on a alors $0.9^n\leqslant\dfrac{1}{120}$.

L'inconnu que nous cherchons est en exposant et les deux quantités dans cette inégalité sont strictement positives, nous allons donc pouvoir utiliser le logarithme népérien.

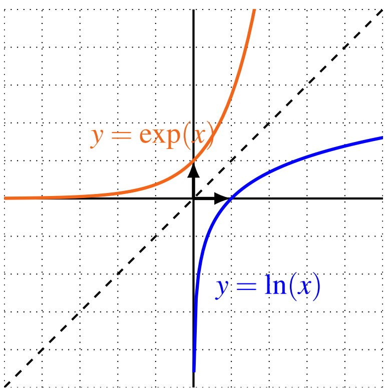
Puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $0.9^n\leqslant\dfrac{1}{120}$ si et seulement si $\ln(0.9^n)\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{120}\right)$, soit $n\ln(0.9)\leqslant -\ln(120)$.

Puisque $0.9<1$, on a $\ln(0.9)<0$. En divisant l'inégalité par $\ln(0.9)$, **il faudra donc changer son sens !**

Ainsi, $n\ln(0.9)\leqslant -\ln(120)$ si et seulement si $n\geqslant -\dfrac{\ln(120)}{\ln(0.9)}$.

Or, $-\dfrac{\ln(120)}{\ln(0.9)}\simeq 45.4$. Le premier entier n tel que $3-12\times 0.9^n\geqslant 2.9$ est donc $n=46$. ■

Propriété 11 : La courbe de la fonction ln est symétrique à la courbe de la fonction exp par rapport à la droite d'équation $y=x$.



Cette propriété est vraie pour toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre. Par exemple, vous pouvez observer le même phénomène en regardant les courbes des fonctions $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$. Autre exemple, la fonction inverse, qui est sa propre réciproque. La courbe de cette fonction est elle-même symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$.