1. Nombres complexes : forme algébrique

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Définition 1 : Il existe un ensemble de nombres appelé **nombres complexes** et noté $\mathbb{C}$ tel que

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.
- Il existe un nombre complexe, noté i, et tel que $i^2 = -1$.
- L'addition et la multiplication des réels se prolonge "naturellement" dans l'ensemble des complexes.
- Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels (a,b) tel que $z = a + ib$.
  - a est appelée **partie réelle** de z, notée $Re(z)$.
  - b est appelée **partie imaginaire** de z, notée $Im(z)$.
  - L'écriture $z = a + ib$ est la **forme algébrique** de z.

■ **Exemple 1 :** $2+3i$, $7i$, $\sqrt{5}$, $\frac{1}{2} - \frac{4}{5}i$ sont des nombres complexes. ■

Définition 2 : Soit z un nombre complexe.

- z est un nombre réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.
- Si $Re(z) = 0$, on dit que z est un nombre imaginaire pur. On note $z \in i\mathbb{R}$.

■ **Exemple 2 :** $2i$ est un nombre imaginaire pur. ■

L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent naturellement pour les nombres complexes. Le nombre i joue le rôle de facteur. Il ne faut toutefois pas oublier que $i^2 = -1$, notamment pour la multiplication. Ainsi, on peut développer, factoriser, et l'on retrouve évidemment les identités remarquables.

■ **Exemple 3 :** Soit $z = 2+5i$ et $z' = 1-3i$. Alors $z + z' = 2+5i+1-3i = 3+2i$ et

$$zz' = (2+5i)(1-3i) = 2\times 1 + 5i \times 1 + 2 \times (-3i) + 5i \times (-3i) = 2 + 5i - 6i - 15i^2 = 17 - i.$$

Enfin, $z^2 = (2+5i)^2 = 4^2 + 2\times 2 \times 5i + (5i)^2 = 16 + 20i - 25 = -9 + 20i$. ■

Propriété 1 : Soit z un nombre complexe. On a $z = 0$ si et seulement si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

Démonstration 1 : D'une part, si $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$, alors $z = Re(z) + i \times Im(z) = 0 + i0 = 0$.

D'autre part, si $z = 0$, notons a et b les parties réelles et imaginaires de z. Ainsi, $a + ib = 0$.

Nous allons raisonner par l'absurde pour montrer que nécessairement, a et b valent tous deux 0. Pour cela, nous allons supposer le contraire et aboutir à une absurdité, ce qui nous permettra de conclure que l'hypothèse faite au départ était fausse. Supposons donc que soit a, soit b ne soit pas nul.

- Si $b = 0$, puisque $a + ib = 0$, on obtient également que $a = 0$, ce qui est contraire à ce que nous avons supposé. Ainsi, on a forcément $b \neq 0$.
- Si $b \neq 0$, alors, puisque $a + ib = 0$, on a donc $i = -\dfrac{a}{b}$. i serait donc réel. C'est absurde.

Ainsi, $a = b = 0$. □

Propriété 2 : Soit z et z' deux complexes. Alors $z = z'$ si et seulement si $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

Démonstration 2 : Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On a $z = z'$ si et seulement si $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a - a' + i(b - b') = 0$. D'après le premier point, c'est équivalent à dire que $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$.

Finalement, $z = z'$ si et seulement si $a = a'$ et $b = b'$. □

Cette propriété nous permet notamment de résoudre des équations dans $\mathbb{C}$.

■ **Exemple 4 :** Résoudre l'équation $2z + i - 3 = 5i + 4z - 7$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$2z + i - 3 = 5i + 4z - 7 \Leftrightarrow 2z - 4z = 5i - 7 + 3 - i \Leftrightarrow -2z = -4 + 4i \Leftrightarrow z = 2 - 2i$$

Ainsi, $S = \{2 - 2i\}$. ■

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition et propriétés

Définition 3 : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

Le **conjugué** de z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ et qui vaut $\overline{z} = a - ib$.

■ **Exemple 5 :** Le conjuqué de $7 + 3i$ est $7 - 3i$. Le conjugué de $2i$ est $-2i$. ■

Propriété 3 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$;
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Démonstration 3 — Premier point : Soit $z = a + ib$ avec a et b des réels. On a donc $\overline{z} = a - ib$.

- Si $z = \overline{z}$, alors $a + ib = a - ib$ ce qui implique que $2ib = 0$ et donc $b = 0$. z est donc réel.
- Si z est réel, alors $b = 0$. Ainsi, $z = a$ et $\overline{z} = a$. On a bien $z = \overline{z}$.

□

La démonstration du deuxième point fait l'objet d'un exercice.

Propriété 4 : Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes

$$\overline{\overline{z}} = z \qquad \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$$

Démonstration 4 : Notons $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

On a $\overline{\overline{z}} = \overline{a - ib} = a - (-ib) = a + ib = z$.

Par ailleurs, $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'} = \overline{a + a' + i(b + b')} = a + a' - i(b + b') = a - ib + a' - ib' = z - z'$.

Pour montrer la propriété sur le produit, on raisonne en deux temps.

- D'une part,

$$\overline{z}\times\overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = aa' - iab' - ia'b + i^2bb' = aa' - bb' - i(ab'+a'b).$$

- D'autre part,

$$zz' = (a+ib)(a'+ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' = aa' - bb' + i(ab'+a'b).$$

On a bien $\overline{zz'} = \overline{z}\times\overline{z'}$. □

Propriété 5 : Soit z un nombre complexe et n un entier naturel non nul. Alors $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Démonstration 5 : Soit z un nombre complexe. Nous allons démontrer cette propriété par récurrence.

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ ».

- **Initialisation** : Pour $n=1$, on a $\overline{z^1} = \overline{z} = \overline{z}^1$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
  Or, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n\times z}$. La propriété précédente nous assure donc que $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n}\times\overline{z}$.
  Or, par hypothèse de récurrence, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
  Ainsi, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z}^n\times\overline{z} = \overline{z}^{n+1}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

□

2.2 Résolution d'équation en z et $\overline{z}$

Lorsque des équations font intervenir z et $\overline{z}$, il est préférable d'écrire ces nombres sous forme algébrique, puis d'identifier les parties réelles et imaginaires de chaque membre de l'équation.

■ **Exemple 6 :** On souhaite résoudre l'équation (E) : $2z+3i-5 = 3i\overline{z}-2i+5$, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

On pose alors $z=a+ib$. On a donc $\overline{z} = a-ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2z+3i-5 = 3\overline{z}-2i+7 \quad &\Leftrightarrow \quad 2(a+ib)+3i-5 = 3i(a-ib)-2i+5 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a+2ib+3i-5 = 3ia+3b-2i+5 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a-3b-5-5+i(2b+3-3a+2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2a-3b-10+i(2b-3a+5) = 0
\end{aligned}$$

Or, un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaires sont nulles. On obtient donc le système suivant.

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2a-3b-10 & = & 0 \\ -3a+2b+5 & = & 0 \end{array}\right.$$

On peut alors résoudre ce système avec la méthode de son choix. Par exemple, en procédant par combinaison. On multiplie la première ligne par 3 et la deuxième par 2.

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 6a-9b-30 & = & 0 \\ -6a+4b+10 & = & 0 \end{array}\right.$$

On remplace L_2 par L_2+L_1

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 6a-9b-30 & = & 0 \\ -5b-20 & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient donc

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 6a-9\times(-4)-30 & = & 0 \\ b & = & -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 6a+6 & = & 0 \\ b & = & -4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & -4 \end{array} \right.$$

On a donc $S=\{-1-4i\}$. ■

3 Division dans $\mathbb{C}$

Définition 4 : Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un unique complexe z' tel que $zz'=1$.

z' est appelé inverse de z et est noté $\dfrac{1}{z}$.

■ **Exemple 7 :** On a $(1+2i)\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i\right)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i-\dfrac{2}{5}i+\dfrac{4}{5}=1$. On a donc $\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i=\dfrac{1}{1+2i}$. ■

Définition 5 : Soit z un complexe et $\overline{z}$ un complexe non nul.

On définit le quotient de z par z' par $\dfrac{z}{z'}=z\times\dfrac{1}{z'}$.

■ **Exemple 8 :** Calculons $\dfrac{3+i}{1+2i}$. On a alors $\dfrac{3+i}{1+2i}=(3+i)\times\dfrac{1}{1+2i}$.

Or, d'après l'exemple précédent, $\dfrac{1}{1+2i}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$. Ainsi,

$$\frac{3+i}{1+2i}=(3+i)\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i+\frac{i}{5}-\frac{2}{5}i^2=1-i.$$

■

Dans un précédent exercice sur les conjugués, nous avons pu exprimer le produit $z\overline{z}$ et constater que ce produit était en fait un réel.

Pour mettre sous forme algébrique un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur. Ainsi, le dénominateur du quotient obtenu sera un nombre réel.

■ **Exemple 9 :** On souhaite exprimer $\dfrac{4+3i}{3-i}$ sous forme algébrique.

Le dénominateur est $3-i$, dont le conjugué est $3+i$.

On multiplie donc numérateur et dénominateur par $3+i$.

$$\frac{4+3i}{3-i}=\frac{(4+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{12+4i+9i+3i^2}{3^2-i^2}=\frac{12+13i-3}{9-(-1)}=\frac{9}{10}+\frac{13}{10}i.$$

■

■ **Exemple 10 :** On souhaite résoudre l'équation $2z+3-i=(1+i)z-2+i$. Soit donc $z\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}2z+3-i=(1+i)z-2+i &\Leftrightarrow 2z-(1+i)z=-2+i-3+i\\ &\Leftrightarrow (1-i)z=-5+2i\\ &\Leftrightarrow z=\frac{-5+2i}{1-i}\end{aligned}$$

Il reste alors à écrire $\frac{-5+2i}{1-i}$ sous forme algébrique.

$$\frac{-5+2i}{1-i}=\frac{(-5+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-5-5i+2i-2}{1^2-i^2}=\frac{-7-3i}{2}=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$$

L'unique solution de l'équation $2z+3-i=(1+i)z-2+i$ est donc $-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}i$. ■

Propriété 6 : Soit z un complexe et z' un complexe non nul. Alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\overline{z'}} \quad \text{et} \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$$

Démonstration 6 : Soit z un complexe non nul.

D'après la propriété sur le produit des conjugués, on a $\overline{z}\times\overline{\frac{1}{z}}=\overline{z\times\frac{1}{z}}=\overline{1}=1$ et donc $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$.

Par ailleurs, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{z\times\frac{1}{z'}}=\overline{z}\times\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}$ d'après la proposition sur le conjugué du produit.

Mais alors, d'après la propriété précédemment démontrée, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. □

4 Équations du second degré à coefficients réels

Propriété 7 : Soit a un réel strictement positif.
Les solutions de l'équation $z^2=-a$ d'inconnue complexe z sont les réels $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$.

Démonstration 7 : On a en effet $z^2+a=z^2-i^2\times a=z^2-(i\sqrt{a})^2=(z-i\sqrt{a})(z+i\sqrt{a})$.
Ainsi, $z^2+a=0$ si et seulement si $z-i\sqrt{a}=0$ ou $z+i\sqrt{a}=0$, d'où le résultat. □

■ **Exemple 11 :** Les solutions de l'équation $z^2=-4$ sont $2i$ et $-2i$. ■

L'exemple que nous venons de voir est un peu simpliste mais permet de vous rafraîchir la mémoire. Passons donc aux choses sérieuses.

Théorème 8 : Soit a, b et c des **réels**. Soit $P : z \mapsto az^2+bz+c$.

Notons $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du polynôme P.

- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines réelles distinctes : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, alors P admet une racine réelle double : $-\dfrac{b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors P admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration 9 : Écrivons P sous forme canonique. Pour tout complexe z,

$$az^2+bz+c = a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

- Si $\Delta > 0$, alors, pour tout complexe z,

$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(z+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

  Ainsi, P possède deux racines réelles qui sont $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout complexe z, $az^2+bz+c = a\left(z+\dfrac{b}{2a}\right)^2$. L'unique racine de P est $-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$. Ainsi, pour tout complexe z,

$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - i^2 \times \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right).$$

  On se retrouve dans le même cas que dans la propriété précédente, et on procède donc de la même manière. Pour tout complexe z,

$$az^2+bz+c = a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(z+\frac{b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z+\frac{b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right).$$

  Ainsi, P admet deux racines complexes conjuguées : $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

□

■ **Exemple 12 :** On cherche à résoudre l'équation $2z^2+3z+5=0$.

Le discriminant du polynôme $2z^2+3z+5$ vaut $3^2-4\times2\times5 = -31 < 0$.

L'équation $2z^2+3z+5=0$ possède donc deux solutions : $z_1 = \dfrac{-3+i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2 = \dfrac{-3-i\sqrt{31}}{4}$. ■

Remarque : La démonstration met en évidence la factorisation de tout polynôme de degré 2 à coefficients réels, peu importe la nature de leurs racines (réelles ou imaginaires).

Si z_1 et z_2 sont les deux racines du polynôme az^2+bz+c, alors pour tout complexe z, on a

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2).$$

2. Exercices : Nombres complexes (1)

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Exprimer les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

$1+2i-4i+7-3i^2$

$(1+2i)(5-4i)$

$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{4}i\right)$

$(5+3i)(10-6i)$

$(2i)^{10}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$z+2i-4=5i+3$

$\frac{z-4i}{3}=\frac{1}{2}+5i$

$(3+2i)z+i-5=1+5i$

$(z-3+i)(2z-5i)=0$

$\frac{z+1+i}{1-z}=0$

$\frac{z-3i+1}{z-3}=\frac{1}{4}$

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Résoudre les système suivants, d'inconnues complexes z_1 et z_2.

$$\begin{cases} 2z_1+3z_2 &= 5-3i \\ z_1-3z_2 &= 4+6i \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z_1+4z_2 &= 1+2i \\ z_1-2z_2 &= 2+i \end{cases}$$

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit x un réel et $z=2x+1+i(x^2+5x-4)$

1. Déterminer la valeurs de x pour laquelle z est un imaginaire pur. Que vaut alors z ?
2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est réel ? Que vaut alors z ?

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit z et z' deux complexes tels que $Re(zz')=Re(z)\times Re(z')$. Montrer que z ou z' est réel.

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout z dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2+2z+9$.

1. Soit $z=a+ib$ un complexe. Exprimer les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de a et b.
2. Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout complexe z, on note $P(z)=6z^3+(1-30i)z^2-(12+5i)z+60i$.

1. Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
2. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout complexe z, $P(z)=(z-5i)(az^2+bz+c)$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation $P(z)=0$.

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Résoudre l'équation $z^2=-3+4i$ sur $\mathbb{C}$. On pourra par exemple poser $z=a+ib$.

Conjugué d'un nombre complexe

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Exprimer le produit $z\overline{z}$ en fonction de a et b.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Démontrer la propriété du cours suivante : Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z} = -z$.

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit z un nombre complexe.

1. Montrer que $Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
2. Trouver et démontrer une relation similaire pour exprimer $Im(z)$ en fonction de z et $\overline{z}$.

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère le complexe $z = (1-3i)(5+4i)(1+3i)(10-8i)$. Sans calcul, montrer que $z \in \mathbb{R}$.

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$2z+3 = 3\overline{z}+4-i$	$2z-4\overline{z} = 6-3i$	$z+\overline{z} = 3+4i$
$2z+4+i = (3+i)\overline{z}+2-3i$	$\overline{z}-1 = z\overline{z}-i$	$\overline{z} = iz$

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \overline{z} + 1 = 0$.

Division dans $\mathbb{C}$

▶ Exercice 15 – Voir le corrigé

Ecrire les nombres suivants sous forme algébrique.

$\dfrac{1}{i}$	$\dfrac{1}{1+i}$	$\dfrac{2}{4-5i}$	$\dfrac{2i}{i-3}$	$\dfrac{1-6i}{2+4i}$	$\dfrac{3-2i}{2i-3}$

▶ Exercice 16 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues complexes z. On exprimera le résultat sous forme algébrique.

$(1+2i)z+3 = 5-4i$	$(3-4i)z+1-3i = 2iz$	$\dfrac{z-i}{iz-1} = \dfrac{1}{3}$

▶ Exercice 17 – Voir le corrigé

Pour tout complexe z différent de 1, on pose $f(z) = \dfrac{2-iz}{1-z}$

1. Montrer que $f(z)$ ne peut pas être égal à i.
2. Soit Z un complexe différent de i. Déterminer, s'il(s) existe(nt), le(s) antécédent(s) de Z par f.

▶ Exercice 18 – Voir le corrigé

Soit z un complexe non nul. Montrer de deux manières différentes que $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}}$ est un réel.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

Soit $j=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $j^2=\frac{1}{j}=\overline{j}$.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère la suite (z_n) définie par $z_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\frac{z_n-6}{1+i}$

1. Exprimer z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=z_n-6i$
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   (b) En déduire une expression de u_n puis de z_n en fonction de n.
3. On considère la suite (t_n) définie par $t_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1}=\frac{t_n-6}{1-i}$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $t_n=\overline{z_n}$
   (b) Sans avoir recours à un nouveau calcul, exprimer t_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f:z\mapsto\frac{z-i}{z+i}$, définie sur $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

1. Exprimer $f(1+2i)$ sous forme algébrique.
2. Montrer que pour tout complexe $z\neq -i$, $f(z)\neq 1$.
3. Soit Z un complexe différent de 1. Déterminer l'unique antécédent de Z par f.
4. Soit x un réel. Montrer que $f(x)\times\overline{f(x)}=1$.
5. Réciproquement, soit z un complexe différent de $-i$ tel que $f(z)\times\overline{f(z)}=1$. Montrer que z est réel.

Équations du second degré

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue complexe z.

$z^2-2z+5=0$	$z^2=-9$	$2z^2=3-\pi$
$4z^2+3z+2=0$	$z^3+2z^2+3z=0$	$(z^2+3)(z^2+z+1)=0$.

► Exercice 23 – Voir le corrigé

Trouver deux nombres complexes dont la somme vaut 5 et le produit vaut 12.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $z^4+2z^2-8=0$

► Exercice 25 – Voir le corrigé

Pour tout complexe z, on pose $P(z)=z^3-3z^2+7z-5$.

1. Déterminer une solution « évidente » de l'équation $P(z)=0$. On note α cette solution.
2. Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout complexe z, $P(z)=(z-\alpha)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre l'équation $P(z)=0$ sur $\mathbb{C}$.

► Exercice 26 – Voir le corrigé

Soit $x\in]0;\pi[$. Résoudre l'équation $z^2+2z\cos(x)+1=0$, d'inconnue complexe z.

3. Corrigés

Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

► Correction 1 – Voir l'énoncé

On a

- $1+2i-4i+7-3i^2 = 8-2i+3 = 11-2i$.
- $(1+2i)(5-4i) = 1\times 5+1\times(-4i)+2i\times 5+2i\times(-4i) = 5-4i+10i+8 = 13+6i$.
- $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{4}i\right) = \frac{1}{3}\times\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}i+\frac{2}{5}i\times\frac{5}{2}+\frac{2}{5}i\times\frac{1}{4}i = \frac{5}{6}+\frac{1}{12}i+i-\frac{1}{10} = \frac{11}{15}+\frac{13}{12}i$.
- $(5+3i)(10-6i) = 5\times 10+5\times(-6i)+3i\times 10+3i\times(-6i) = 50-30i+30i+18 = 68$.
- $(2i)^{10} = 2^{10}\times i^{10} = 1024\times(i^2)^5 = 1024\times(-1)^5 = -1024$.
- Calculons d'abord $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ en utilisant une identité remarquable.

  On a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}i+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2 = \frac{2}{4}+i-\frac{2}{4} = i$.

  Ainsi, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^4 = i^4 = i\times i\times i\times i = (-1)\times(-1) = 1$

► Correction 2 – Voir l'énoncé

- $z+2i-4 = 5i+3 \Leftrightarrow z = 3+4+5i-2i \Leftrightarrow z = 7+3i$.
- $\frac{z-4i}{3} = \frac{1}{2}+5i \Leftrightarrow z = 3\times\left(\frac{1}{2}+5i\right)+4i \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}+19i$.
- $(3+2i)z+i-5 = 1+5i \Leftrightarrow (3+2i)z = 1+5+5i-i \Leftrightarrow (3+2i)z = 6+4i \Leftrightarrow (3+2i)z = 2\times(3+2i) \Leftrightarrow z = 2$.
- $(z-3+i)(2z-5i) = 0 \Leftrightarrow z-3+i = 0$ ou $2z-5i = 0 \Leftrightarrow z = -3-i$ ou $z = \frac{5}{2}i$.
- Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\frac{z+1+i}{1-z} = 0 \Leftrightarrow z+1+i = 0 \Leftrightarrow z = -1-i$.
- Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{3\}$.
  $\frac{z-3i+1}{z-3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(z-3i+1) = z-3 \Leftrightarrow 4z-12i+4 = z-3 \Leftrightarrow 3z = -7+12i \Leftrightarrow z = -\frac{7}{3}+4i$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Premier système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2z_1+3z_2 &=& 5-3i \\ z_1-3z_2 &=& 4+6i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2z_1+3z_2 &=& 5-3i \\ 3z_1 &=& 9+3i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2z_1+3z_2 &=& 5-3i \\ z_1 &=& 3+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2(3+i)+3z_2 &=& 5-3i \\ z_1 &=& 3+i \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 6+2i+3z_2 &=& 5-3i \\ z_1 &=& 3+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3z_2 &=& -1-5i \\ z_1 &=& 3+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z_1 &=& -3+i \\ z_2 &=& -\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i \end{array}\right.$$

Second système

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3z_1+4z_2 &=& 1+2i \\ z_1-2z_2 &=& 2+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3z_1+4z_2 &=& 1+2i \\ 3z_1-6z_2 &=& 6+3i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3z_1+4z_2 &=& 1+2i \\ 10z_2 &=& -5-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3z_1+4z_2 &=& 1+2i \\ z_2 &=& -\frac{1}{2}-\frac{i}{10} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3z_1+4\left(-\frac{1}{2}-\frac{i}{10}\right) &=& 1+2i \\ z_2 &=& -\frac{1}{2}-\frac{i}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3z_1-2-\frac{2i}{5} &=& 1+2i \\ z_2 &=& -\frac{1}{2}-\frac{i}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3z_1 &=& 3+\frac{12i}{5} \\ z_2 &=& -\frac{1}{2}-\frac{i}{10} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z_1 &=& 1+\frac{4i}{5} \\ z_2 &=& -\frac{1}{2}-\frac{i}{10} \end{array}\right.$$

► Correction 4 – Voir l'énoncé

z est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $2x+1=0$ et donc $x=-\frac{1}{2}$. Dans ce cas,

$$z=\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)-4\right)i=\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{2}-4\right)i=-\frac{25i}{4}.$$

z est réel si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire $x^2+5x-4=0$. Les solutions sont $-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}$ et $-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}$. Dans le premier cas, on a alors $z=-4-\sqrt{41}$. Dans le second cas, on a $z=-4+\sqrt{41}$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Notons $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$. On a alors $Re(z)\times Re(z')=aa'$.

Par ailleurs, $zz'=aa'-bb'+i(ab'+a'b)$ et donc $Re(zz')=aa'-bb'$. Ainsi, $Re(zz')=Re(z)\times Re(z')$ si et seulement si $aa'-bb'=aa'$ soit $bb'=0$ et donc $b=0$ ou $b'=0$. Autrement dit, z ou z' est réel.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

$f(a+ib)=(a+ib)^2+2(a+ib)+9=a^2+2aib+(ib)^2+2a+2ib+9=a^2-b^2+2a+i\times 2b(a+1)$.

$f(a+ib)$ est réel si sa partie imaginaire, c'est-à-dire $2b(a+1)$ vaut 0. Ainsi, $f(z)$ est réel si et seulement si z est réel ou $Re(z)=-1$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Soit b un réel. On a alors

$$P(ib)=6(ib)^3+(1-30i)(ib)^2-(12+5i)ib+60i=-6ib^3-b^2+30ib^2-12ib+5b+60i$$

$$=-b^2+5b+i(-6b^3+30b^2+12b+60).$$

Ainsi, $P(ib)=0$ si et seulement si $-b^2+5b=0$ et $-6b^3+30b^2+12b+60=0$.

La première équation donne $b=0$ ou $b=5$. Testons donc ces deux valeurs.

On a $P(0i)=P(0)=60i\neq 0$. Par ailleurs,

$$P(5i)=6\times(5i)^3+(1-30i)\times(5i)^2-(12+5i)\times 5i+60i=-750i-25+750i-60i+25+60i=0$$

Ainsi, l'équation $P(z)=0$ admet bien une unique solution imaginaire pure. Cette solution est $5i$.

Pour tout complexe z, on a $(z-5i)(az^2+bz+c)=az^3+(b-5ai)z^2+(c-5bi)z-5ci$.

Ainsi, en identifiant les coefficients, on a $P(z) = (z-5i)(az^2+bz+c)$ si et seulement si $a=6$, $b-5ai = 1-30i$, $c-5bi = -12-5i$ et $-5ci = 60i$.

On obtient donc $a=6$, $b=1$ et $c=-12$. Pour tout complexe z, on a $P(z) = (z-5i)(6z^2+z-12)$.

Or, $6z^2+z-12$ est un polynôme du second degré à coefficients réels.

Son discriminant vaut $1^2-4\times 6\times(-12) = 289 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles qui sont $\dfrac{-1-\sqrt{289}}{2\times 6} = -\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{289}}{2\times 6} = \dfrac{4}{3}$.

Les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont donc $5i$, $-\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{4}{3}$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Posons $z = a+ib$, avec a et b réels. On a alors $z^2 = a^2-b^2+2iab = -3+4i$.

Ainsi, en identifiant parties réelles et imaginaires, on a $a^2-b^2 = -3$ et $2ab = 4$.
En particulier, a et b sont non nuls et on a donc $b = \dfrac{2}{a}$.

En remplaçant b dans la première équation, on obtient $a^2 - \dfrac{4}{a^2} = -3$ et donc $\dfrac{a^4+3a^2-4}{a^2} = 0$.

Posons $x = a^2$, on a alors $x^2+3x-4 = 0$, un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et -4.

On a donc $a^2 = 1$ ou $a^2 = -4$. Puisque a est réel, cette dernière égalité est impossible.
Finalement, on a forcément $a^2 = 1$ et donc $a = 1$ ou $a = -1$.

Si $a = 1$, alors $b = \dfrac{2}{a} = 2$. Si $a = -1$, alors $b = \dfrac{2}{a} = -2$. On a donc $z = 1+2i$ ou $z = -1-2i$.

Vérifions :

- $(1+2i)^2 = 1^2+4i+(2i)^2 = 1+4i-4 = -3+4i$.
- $(-1-2i)^2 = (-(1+2i))^2 = -3+4i$.

Les solutions de l'équation $z^2 = -3+4i$ sont donc $1+2i$ et $-1-2i$.

Conjugué d'un nombre complexe

► Correction 9 – Voir l'énoncé

On a $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2$. Une formule bien utile et qui nous sera bien utile dans un prochain chapitre !

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Soit $z = a+ib$ un complexe.

Si z est un imaginaire pur, alors $a = 0$. Ainsi, $z = ib$ et $\bar{z} = -ib = -z$.

Si $z = -\bar{z}$, alors $a+ib = -(a-ib) = -a+ib$. Il en résulte que $2a = 0$ et donc $a = 0$. z est donc imaginaire pur.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Soit $z = a+ib$ un complexe.

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = \frac{2a}{2} = a = Re(z).$$

De même,

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{a+ib-(a-ib)}{2} = \frac{2ib}{2i} = b = Im(z).$$

► Correction 12 – Voir l'énoncé

D'une part, remarquons que $10-8i = 2(5-4i)$. Ainsi, $z = 2(1-3i)(5+4i)(1+3i)(5-4i)$

D'après les formules sur le produit de conjugués, on a

$$\overline{z} = \overline{2(1-3i)(5+4i)(1+3i)(5-4i)} = \overline{2} \times \overline{(1-3i)} \times \overline{(5+4i)} \times \overline{(1+3i)} \times \overline{(5-4i)}.$$

Ainsi,

$$\overline{z} = 2(1+3i)(5-4i)(1-3i)(5+4i) = z$$

Puisque $\overline{z} = z$, on en conclut que z est réel.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

- Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$.
  On a $2z+3 = 3\overline{z}+4-i \Leftrightarrow 2(a+ib)+3 = 3(a-ib)+4-i \Leftrightarrow 2a-3a+3-4+i(2b+3b+1) = 0 \Leftrightarrow -a-1+i(5b+1) = 0$.
  On a donc le système $\begin{cases} -a-1 & = & 0 \\ 5b+1 & = & 0 \end{cases}$ ce qui conduit à $a = -1$ et $b = -\dfrac{1}{5}$
  La solution de cette équation est donc $-1-\dfrac{i}{5}$.
- Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$.
  On a $2z-4\overline{z} = 6-3i \Leftrightarrow 2(a+ib)-4(a-ib) = 6-3i \Leftrightarrow 2a-4a-6+i(2b+4b+3) = 0 \Leftrightarrow -2a-6+i(6b+3) = 0$.
  On a donc le système $\begin{cases} -2a-6 & = & 0 \\ 6b+3 & = & 0 \end{cases}$ ce qui conduit à $a = -3$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.
  La solution de cette équation est donc $-3-\dfrac{i}{2}$.
- Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$.
  On a $z+\overline{z} = 3+4i \Leftrightarrow a+ib+a-ib = 3+4i \Leftrightarrow 2a-3-4i = 0$.
  Or, la partie imaginaire du membre de gauche est non nulle. Cette équation n'admet aucune solution (on aurait également tout simplement pu utiliser un exercice précédent : $z+\overline{z} = 2Re(z)$.
- Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$.
  On a $2z+4+i = (3+i)\overline{z}+2-3i \Leftrightarrow 2(a+ib)+4+i = (3+i)(a-ib)+2-3i \Leftrightarrow 2a+2ib+i+4 = 3a-3ib+ia+b+2-3i$.
  $\Leftrightarrow 2a-3a-b-2+4+i(2b+1+3b-a+3) \Leftrightarrow -a-b+2+i(-a+5b+4) = 0$.
  Ceci nous amène à résoudre le système
  $$\begin{cases} -a-b+2 & = & 0 \\ -a+5b+4 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b+2 & = & 0 \\ -6b-2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b+2 & = & 0 \\ b & = & -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$
  $$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2 & = & 0 \\ b & = & -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & \dfrac{7}{3} \\ b & = & -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$
  La solution de cette équation est $\dfrac{7}{3}-\dfrac{i}{3}$.

- Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$.
On a $\overline{z}-1=z\overline{z}-i \Leftrightarrow a-ib-1=(a+ib)(a-ib)-i \Leftrightarrow a-ib-1=a^2+b^2-i \Leftrightarrow a-a^2-b^2+i(b+1)=0$.
On a donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} a-a^2-b^2 & = & 0 \\ b+1 & = & 0 \end{array}\right.$.
La seconde ligne nous donne $b=-1$. En remplaçant b par -1 dans la première équation, on a alors $a-a^2-1=0$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $1^2-4\times(-1)\times(-1)=-3$. Ainsi, l'équation $a-a^2-1=0$ n'admet pas de solution réelle. L'équation de départ n'a donc pas de solution.
- Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$
On a $\overline{z}=iz \Leftrightarrow a-ib=i(a+ib) \Leftrightarrow a+b-i(a+b)=0$.
Cette équation est équivalente à $a=-b$. Les solutions sont donc les nombres complexes $a-ia$ pour tout réel a.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$. On a

$$z^2-\overline{z}+1=0 \Leftrightarrow (a+ib)^2-(a-ib)+1=0 \Leftrightarrow a^2+2aib-b^2-a+ib+1=0 \Leftrightarrow a^2-b^2-a+1+ib(2a+1)=0.$$

On a donc le système $\left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2-a+1 & = & 0 \\ b(2a+1) & = & 0 \end{array}\right.$.

La deuxième ligne nous amène à différencier deux cas :

- Soit $b=0$. La première équation devient alors $a^2-a+1=0$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut -3. Il ne possède donc pas de racine réelle.
- Soit $a=-\dfrac{1}{2}$. La première équation devient alors $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}+1=b^2$ soit $b^2=\dfrac{7}{4}$ ce qui conduit à $b=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ou $b=-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Les solutions sont donc $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{7}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{7}}{2}$.

Division dans $\mathbb{C}$

► Correction 15 – Voir l'énoncé

On a ...

- $\dfrac{1}{i}=\dfrac{-i}{i\times -i}=\dfrac{-i}{1}=-i$.
- $\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-i}{1^2-i^2}=\dfrac{1-i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$.
- $\dfrac{2}{4-5i}=\dfrac{2(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\dfrac{8+10i}{4^2-(5i)^2}=\dfrac{8}{41}+\dfrac{10i}{41}$.
- $\dfrac{2i}{i-3}=\dfrac{(2i)(-i-3)}{(i-3)(-i-3)}=\dfrac{2-6i}{3^2-i^2}=\dfrac{2}{10}-\dfrac{6i}{10}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{3i}{5}$.
- $\dfrac{1-6i}{2+4i}=\dfrac{(1-6i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\dfrac{2-4i-12i-24}{2^2-(4i)^2}=-\dfrac{22}{20}-\dfrac{16i}{22}=-\dfrac{11}{10}-\dfrac{8i}{11}$.

- $\dfrac{3-2i}{2i-3}=\dfrac{-(2i-3)}{2i-3}=-1$. Attention à ne pas se lancer précipitamment dans les calculs !

► Correction 16 – Voir l'énoncé

- Soit $z\in\mathbb{C}$. On a $(1+2i)z+3=5-4i \Leftrightarrow (1-2i)z=2-4i \Leftrightarrow z=\dfrac{2-4i}{1+2i}$
  On met alors $\dfrac{2-4i}{1+2i}$ sous forme algébrique : $\dfrac{2-4i}{1+2i}=\dfrac{(2-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{2-4i-4i-8}{1^2-(2i)^2}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8i}{5}$
  La solution de cette équation est donc $-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8i}{5}$.
- Soit $z\in\mathbb{C}$.
  On a $(3-4i)z+1-3i=2iz \Leftrightarrow (3-4i)z-2iz=-1+3i \Leftrightarrow (3-6i)z=-1+3i \Leftrightarrow z=\dfrac{-1+3i}{3-6i}$.
  On met alors $\dfrac{-1+3i}{3-6i}$ sous forme algébrique.
  $\dfrac{-1+3i}{3-6i}=\dfrac{(-1+3i)(3+6i)}{(3-6i)(3+6i)}=\dfrac{-3-6i+9i-18}{3^2-(6i)^2}=-\dfrac{21}{45}+\dfrac{3i}{45}=-\dfrac{7}{15}+\dfrac{i}{15}$.
  La solution de cette équation est donc $-\dfrac{7}{15}+\dfrac{i}{15}$.
- Voyons d'abord quand le dénominateur s'annule. Soit $z\in\mathbb{C}$. On a $iz-1=0 \Leftrightarrow iz=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{i} \Leftrightarrow z=-i$.
  Soit donc $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$.
  $$\frac{z-i}{iz-1}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(z-i)=iz-1 \Leftrightarrow 3z-iz=-1+3i \Leftrightarrow (3-i)z=(-1+3i) \Leftrightarrow z=\frac{-1+3i}{3-i}.$$
  On met alors $\dfrac{-1+3i}{3-i}$ sous forme algébrique.
  $$\frac{-1+3i}{3-i}=\frac{(-1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{-3-i+9i-3}{3^2-i^2}=-\frac{6}{45}+\frac{8i}{45}=-\frac{3}{5}+\frac{4i}{5}.$$
  La solution de cette équation est donc $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4i}{5}$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Supposons qu'il existe un complexe z différent de 1 tel que $\dfrac{2-iz}{1-z}=i$.

On a alors $2-iz=i(1-z)$ et donc $2-iz=i-iz$ et finalement $2=i$. C'est absurde ! Ainsi, pour tout complexe z différent de 1, $f(z)$ est différent de i.

Soit Z un complexe différent de i et z un complexe différent de 1.

$f(z)=Z \Leftrightarrow \dfrac{2-iz}{1-z}=Z \Leftrightarrow 2-iz=Z(1-z) \Leftrightarrow zZ-iz=Z-2 \Leftrightarrow z(Z-i)=Z-2 \Leftrightarrow z=\dfrac{Z-2}{Z-i}$.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Méthode 1 : D'après le cours, on sait que $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$. Or, on a vu plus tôt dans un exercice que pour tout complexe Z, $Z+\overline{Z}=Re(Z)$. En particulier, $Z+\overline{Z}$ est réel. $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$ est donc un réel.

Méthode 2 : Soit $z=a+ib$ un complexe,

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{a+ib}+\frac{a-ib}{=}\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}+\frac{a+ib}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{2a}{a^2+b^2}.$$

Ainsi, a et b étant réels, $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est aussi un réel.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

D'une part,

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi, $j^2=\overline{j}$. De plus,

$$j^3=j^2\times j=\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

On a donc $j^3=1$, soit $j^2\times j=1$ et donc $j^2=\frac{1}{j}$.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

1. On a
   - $z_1=\frac{1-6}{1+i}=\frac{-5(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-5+5i}{1^2-i^2}=-\frac{5}{2}+\frac{5i}{2}$.
   - $z_2=\frac{-\frac{5}{2}+\frac{5i}{2}+1}{1+i}=\frac{\left(-\frac{3}{2}+\frac{5i}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}+\frac{3i}{2}+\frac{5i}{2}+\frac{5}{2}\right)=\frac{1+4i}{2}$.
2. (a) Pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1}=z_{n+1}-6i=\frac{z_n-6}{1+i}-6i=\frac{z_n-6-6i(1+i)}{1+i}=\frac{z_n-6-6i+6}{1+i}=\frac{z_n-6i}{1+i}=\frac{u_n}{1+i}$$

   La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{1+i}$.

   (b) On sait que $u_0=z_0-6i=1-6i$. Pour tout entier naturel n, on a donc $u_n=\frac{1-6i}{(1+i)^n}$ et donc $z_n=u_n+6i=\frac{1-6i}{(1+i)^n}+6i$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: $t_n=\overline{z_n}$.
   - **Initialisation** : On a $t_0=1$ et $z_0=1$. Ainsi, $t_0=\overline{z_0}$. $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $t_n=\overline{z_n}$. Or,

     $$t_{n+1}=\frac{t_n-6}{1-i}=\frac{\overline{z_n}-6}{1-i}=\frac{\overline{z_n-6}}{\overline{1+i}}=\overline{\left(\frac{z_n-6}{1+i}\right)}=\overline{z_{n+1}}$$

     Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) Pour tout entier naturel n,

   $$t_n=\overline{z_n}=\overline{\frac{1-6i}{(1+i)^n}+6i}=\frac{1+6i}{(1-i)^n}-6i.$$

► Correction 21 – Voir l'énoncé

On a $f(1+2i)=\dfrac{1+2i-i}{1+2i+i}=\dfrac{1+i}{1+3i}=\dfrac{(1+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\dfrac{1-3i+i+3}{1^2-(3i)^2}=\dfrac{4}{10}-\dfrac{2i}{10}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{i}{5}$.

Supposons qu'il existe un complexe z différent de $-i$ tel que $f(z)=1$.

On a alors $\dfrac{z-i}{z+i}=1$ et donc $z-i=z+i$ et finalement $2i=0$, ce qui est absurde. Ainsi, pour tout complexe $z\neq -i$, $f(z)\neq 1$.

Soit Z un complexe différent de 1 et z un complexe différent de $-i$,

$$f(z)=Z\Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i}=Z\Leftrightarrow z-i=Z(z+i)\Leftrightarrow z-zZ=i+Zi\Leftrightarrow z(1-Z)=i+Zi\Leftrightarrow z=\frac{i(1+Z)}{1-Z}.$$

Soit x un réel. On a alors $\overline{x}=x$. Ainsi, $f(x)\times\overline{f(x)}=\dfrac{x-i}{x+i}\times\overline{\left(\dfrac{x-i}{x+i}\right)}=\dfrac{x-i}{x+i}\times\dfrac{x+i}{x-i}=1$.

Soit z un complexe différent de $-i$ tel que $f(z)\times\overline{f(z)}=1$.

On a alors $\dfrac{z-i}{z+i}\times\overline{\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)}=1$ et donc $\dfrac{z-i}{z+i}\times\dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i}=1$.

En développant, on obtient que $\dfrac{z\overline{z}-i\overline{z}+iz+1}{z\overline{z}+i\overline{z}-iz+1}=1$ et donc $z\overline{z}-i\overline{z}+iz+1=z\overline{z}+i\overline{z}-iz+1$.

On en déduit que $2i(z-\overline{z})=0$. Or, $z-\overline{z}=\dfrac{Im(z)}{2i}$. Ainsi $Im(z)=0$. z est donc un réel.

Équations du second degré

► Correction 22 – Voir l'énoncé

- Le discriminant de z^2-2z+5 vaut $(-2)^2-4\times 5=-16<0$. L'équation $z^2-2z+5=0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1=\dfrac{-(-2)+i\sqrt{16}}{2}=1+2i$ et $z_2=1-2i$.
- Les solutions de $z^2=-9$ sont $z_1=3i$ et $z_2=-3i$.
- Remarquons que $3-\pi<0$. On a $2z^2=3-\pi$ si et seulement si $z^2=\dfrac{3-\pi}{2}$ et donc $z=i\sqrt{\dfrac{\pi-3}{2}}$ ou $z=-i\sqrt{\dfrac{\pi-3}{2}}$.
- Le discriminant de $4z^2+3z+2$ vaut $3^2-4\times 4\times 2=23$. L'équation $4z^2+3z+2=0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1=\dfrac{-3+i\sqrt{23}}{8}$ et $z_2=\dfrac{-3-i\sqrt{23}}{8}$.
- On a $z^3+2z^2+3z=0$ si et seulement si $z(z^2+2z+3)=0$, c'est-à-dire $z=0$ ou $z^2+2z+3=0$. Le discriminant de s^2+2z+3 vaut $2^2-4\times 3\times 1=-8<0$. L'équation $z^2+2z+3=0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées qui sont $z_1=\dfrac{-2-i\sqrt{8}}{2\times 1}=-1-i\sqrt{2}$ et $z_2=-1+i\sqrt{2}$. Les solutions de l'équation $z^3+2z^2+3z=0$ sont donc 0, $-1-i\sqrt{2}$ et $-1+i\sqrt{2}$.
- On a $z^2+3=0$ si et seulement si $z^2=-3$ soit $z=i\sqrt{3}$ ou $z=-i\sqrt{3}$. Par ailleurs, z^2+z+1 est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $1^2-4\times 1\times 1=-3<0$. Ce polynôme admet donc

deux racines complexes conjuguées qui sont $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation sont donc $-i\sqrt{3}$, $i\sqrt{3}$, $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

Notons z_1 et z_2 les deux nombres recherchés. On a alors $z_1+z_2=5$ et donc $z_1=5-z_2$. De plus, on a $z_1z_2=12$ soit $(5-z_2)z_2=12$ et donc $-z_2^2+5z_2-12=0$. Il s'agit d'une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $-z^2+5z-12$ vaut $5^2-4\times(-12)\times(-1)=-23<0$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $\dfrac{-5-i\sqrt{23}}{-2}$ et $\dfrac{-5+i\sqrt{23}}{-2}$. Ces deux racines sont les nombres recherchées.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

Posons $Z=z^2$. On a $z^4+2z^2-8=0$ si et seulement si $Z^2+2Z-8=0$. Il s'agit d'une équation du second degré dont les solutions sont réelles et valent -4 et 2.

Ainsi, $z^4+2z^2-8=0$ si et seulement si $z^2=-4$ ou $z^2=2$. Les solutions de cette équation sont donc $2i$, $-2i$, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Remarquons que $P(1)=0$.

On a alors $(z-1)(az^2+bz+c)=az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c$. Ainsi, $P(z)=(z-1)(az^2+bz+c)$ si et seulement si $a=1$, $b-a=-3$, $c-b=7$ et $-c=-5$ soit $a=1$, $b=-2$ et $c=5$.

Ainsi, pour tout complexe z, $P(z)=(z-1)(z^2-2z+5)$.

z^2-2z+5 est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-2)^2-4\times1\times5=-16<0$. Ses racines sont donc $\dfrac{-(-2)+i\sqrt{16}}{2\times1}=1+2i$ et $1-2i$.

Les solutions de l'équation $P(z)=0$ sont donc 1, $1+2i$ et $1-2i$.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

Le discriminant de $z^2+2z\cos(x)+1$ vaut $(2\cos(x))^2-4\times1\times1=4(cos^2(x)-1)=-4\sin^2(x)<0$ puisque $x\in]0;\pi[$. De plus, sur cet intervalle, on a $\sin(x)>0$.

Les racines de ce polynôme sont donc $\dfrac{-2\cos(x)+i\sqrt{4\sin^2(x)}}{2\times1}=-\cos(x)+i\sin(x)$ et $-\cos(x)-i\sin(x)$.