1. Cours : Logarithme népérien

1 Logarithme népérien

Définition 1 : Soit a un réel strictement positif. On appelle *logarithme népérien* de a, noté $\ln(a)$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1 : Derrière cette définition se cache une démonstration : une telle solution existe-t-elle ? Si elle existe, cette solution est-elle unique ?

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par définition de l'exponentielle. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a \in]0;+\infty[$, il existe un réel x tel que $e^x = a$.

La fonction exponentielle étant par ailleurs strictement monotone sur $\mathbb{R}$, cette solution est unique. □

■ **Exemple 1 :** $\ln(1) = 0$. En effet, l'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$. ■

■ **Exemple 2 :** $\ln(e) = 1$, $\ln(e^2) = 2$. ■

Propriété 1 : Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.

Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

Démonstration 2 : Soit a un réel strictement positif. $\ln(a)$ est, par définition, solution de l'équation $e^x = a$. On a donc $e^{\ln(a)} = a$.

Par ailleurs, pour tout réel a, $e^a > 0$. Par définition du logarithme népérien, $\ln(e^a)$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, $x = a$ est une solution de cette équation. On a donc $\ln(e^a) = a$. □

■ **Exemple 3 :** On cherche à résoudre l'équation $3e^x - 6 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$3e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3e^x = 6 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2).$$

■

Attention : il n'existe pas de logarithme népérien de réels négatifs !

■ **Exemple 4 :** On cherche à résoudre l'équation $\ln(x+2) + 3 = 0$. $\ln(x+2)$ n'existe que si $x + 2 > 0$, c'est-à-dire $x > -2$. Soit donc $x > -2$.

$$\ln(x+2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = -3 \Leftrightarrow x + 2 = e^{-3} \Leftrightarrow x = e^{-3} - 2.$$

Puisque $e^{-3} > 0$, on a alors $e^{-3} - 2 > -2$. L'unique solution de l'équation est donc $e^{-3} - 2$. ■

2 Propriétés algébriques

Propriété 2 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 3 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}.$$

En appliquant ln à cette égalité, on a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. □

■ **Exemple 5 :** On a $\ln(2) + \ln(3) + \ln(4) = \ln(2 \times 3 \times 4) = \ln(24)$. ■

■ **Exemple 6 :** Soit x un réel. Alors,

$$\ln(1+e^{-x}) + x = \ln(1+e^{-x}) + \ln(e^x) = \ln((1+e^{-x})e^x) = \ln(e^x+1).$$

■

Propriété 3 : Soit a et b des réels strictement positifs. Alors,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 4 : Puisque $\ln(1) = 0$, on a $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$, et donc, d'après la propriété précédente, $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$. Ainsi, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Par ailleurs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. □

■ **Exemple 7 :** On a $\ln(21) - \ln(7) = \ln\left(\frac{21}{7}\right) = \ln(3)$. ■

Propriété 4 : Soit a un réel strictement positif. Alors,

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

Démonstration 5 : Puisque pour tout réel $a > 0$, $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, on a

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$$

et donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$. □

Propriété 5 : Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier **relatif** n

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

Démonstration 6 : Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

- **Initialisation** : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie : $\mathscr{P}$ est héréditaire.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$. Ainsi, $\ln(a^n \times a^{-n}) = \ln(a^n) + \ln(a^{-n}) = 0$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -\ln(a^n)$. Or, $\ln(a^n) = n\ln(a)$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$. □

■ **Exemple 8 :** On souhaite simplifier $\ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6)$.

$$\begin{aligned}
\ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6) &= \ln(12 \times 3) - 2\ln(6) \\
&= \ln(36) - 2\ln(6) \\
&= \ln(6^2) - 2\ln(6) \\
&= 2\ln(6) - 2\ln(6) = 0.
\end{aligned}$$
■

■ **Exemple 9 :** On a $\dfrac{\ln(10000)}{\ln(0.001)} = \dfrac{\ln(10^4)}{\ln(10^{-3}} = \dfrac{4ln(10)}{-3\ln(10)} = -\dfrac{4}{3}$. ■

3 Fonction logarithme népérien

Définition 2 : On appelle *fonction logarithme népérien* la fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie pour tout réel x strictement positif.

Cette fonction est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle.

3.1 Limites

Propriété 6 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

De plus, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

La puissance de x l'emporte sur le logarithme en cas d'indéterminée : ce sont les croissances comparées au logarithme.

Démonstration 7 — Au programme : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$ **:** Pour $x > 0$, posons $X = \ln(x)$.

Ainsi, $x\ln(x) = e^X \times X$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$. Par composition de limite, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. □

3.2 Dérivabilité

Propriété 7 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

La fonction ln est donc également continue sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 8 — Au programme : On admet que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=e^{\ln(x)}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

- D'une part, on sait que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=1$.
- D'autre part, en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on sait que

$$f'(x)=\ln'(x)\times e^{\ln(x)}=\ln'(x)\times x.$$

Ainsi, pour tout $x>0$, $\ln'(x)\times x=1$ et donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. □

■ **Exemple 10 :** Pour tour réel $x>0$, on pose $f(x)=e^x\ln(x)$.

- Pour tout réel x, on pose $u(x)=e^x$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $u'(x)=e^x$.
- Pour tout réel x, on pose $v(x)=\ln(x)$. v est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout réel $x>0$

$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=e^x\times\ln(x)+e^x\times\frac{1}{x}=\frac{e^x(x\ln(x)+1)}{x}.$$

■

On en déduit naturellement la propriété suivante.

Propriété 8 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$.

Alors $\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$

■ **Exemple 11 :** Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2-2x+5$ et $f(x)=\ln(u(x))=\ln(x^2-2x+5)$.

Il faut avant tout vérifier que pour tout réel x, $u(x)>0$! Sans quoi, la fonction f ne serait pas définie sur $\mathbb{R}$.

Or, u une fonction polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $(-2)^2-4\times1\times5=-16>0$. Ainsi, pour tout réel x, $u(x)$ est du signe du coefficient dominant, 1, c'est-à-dire $u(x)>0$.

Par ailleurs, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x)=2x-2$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}.$$

■

Puisque $\ln(u)$ n'est définie que lorsque u est strictement positive, on en déduit que u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations.

3.3 Étude de la fonction ln

Propriété 9 : La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 9 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif. ln est donc strictement croissante. □

La stricte croissance du logarithme nous est notamment utile pour déterminer le signe d'une expression mettant en jeu des logarithmes, et en particulier...

Propriété 10 : Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors $\ln(x)\geqslant\ln(y)$ si et seulement si $x\geqslant y$. En particulier, $\ln(x)\geqslant 0$ si et seulement si $x\geqslant 1$.

■ **Exemple 12 :** On souhaite déterminer l'entier n à partir duquel $3-12\times 0.9^n\geqslant 2.9$.

En soustrayant trois aux deux membres de cette inégalité, on obtient $-12\times 0.9^n\geqslant -0.1$. En divisant alors par -12 qui est négatif, on a alors $0.9^n\leqslant\dfrac{1}{120}$.

L'inconnu que nous cherchons est en exposant et les deux quantités dans cette inégalité sont strictement positives, nous allons donc pouvoir utiliser le logarithme népérien.

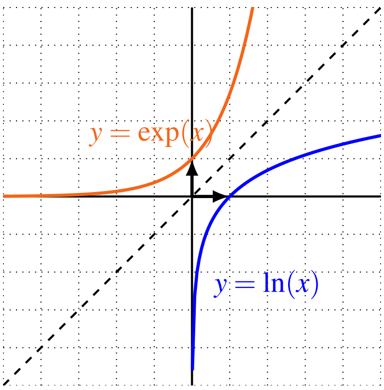
Puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $0.9^n\leqslant\dfrac{1}{120}$ si et seulement si $\ln(0.9^n)\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{120}\right)$, soit $n\ln(0.9)\leqslant -\ln(120)$.

Puisque $0.9<1$, on a $\ln(0.9)<0$. En divisant l'inégalité par $\ln(0.9)$, **il faudra donc changer son sens !**

Ainsi, $n\ln(0.9)\leqslant -\ln(120)$ si et seulement si $n\geqslant -\dfrac{\ln(120)}{\ln(0.9)}$.

Or, $-\dfrac{\ln(120)}{\ln(0.9)}\simeq 45.4$. Le premier entier n tel que $3-12\times 0.9^n\geqslant 2.9$ est donc $n=46$. ■

Propriété 11 : La courbe de la fonction ln est symétrique à la courbe de la fonction exp par rapport à la droite d'équation $y=x$.



Cette propriété est vraie pour toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre. Par exemple, vous pouvez observer le même phénomène en regardant les courbes des fonctions $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$. Autre exemple, la fonction inverse, qui est sa propre réciproque. La courbe de cette fonction est elle-même symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$.

2. Exercices

Logarithme népérien

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

a. $2\ln(x)+1=3$ **b.** $\ln(3x-4)=0$ **c.** $e^{3x+2}=4$

d. $2+3\ln(3x-2)=-1$ **e.** $\ln(e^{3x+4})=5$ **g.** $e^{2x-3}=3-\pi$

h. $(e^{2x}-3)(e^x+5)=0$ **i.** $(\ln(x))^2-\ln(x)=0$ **j.** $(e^x-1)\ln(x-e)=0$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x}+9e^x-30=0$ sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Résoudre les inéquations suivantes. On précisera bien les domaines de résolution.

a. $\ln(5x-3)\geqslant 0$ **b.** $\ln(9x-2)<0$ **c.** $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée sinus hyperbolique de x.

1. Justifier que sh est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $sh''(x)=sh(x)$.
2. Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Montrer que pour tout réel x, $(sh\circ f)(x)=x$ et $(f\circ sh)(x)=x$.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit f la fonction $x\mapsto\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel $y\in]-1;1[$, il existe un unique réel x tel que $y=f(x)$.
2. Soit $y\in]-1;1[$ et $x\in\mathbb{R}$ tel que $y=f(x)$. Exprimer x en fonction de y.

Propriétés algébriques

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Simplifier les écritures suivantes.

$\ln(3)+\ln(4)-\ln(6)$ $\dfrac{\ln(9)}{\ln(3)}-\ln(1)$

$4\ln(3)-\ln(9)+2\ln(27)$ $\ln(3x^2)-\ln(3)$ avec $x>0$

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Résoudre l'équation $\ln(4x^2)+6\ln(x)-3=0$, d'inconnue $x>0$.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Montrer que pour tout réel $x > 1$, $\ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Que vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{49}{50}\right)$?

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Montrer que pour tout réel x, $\ln(1+e^{-x}) = \ln(1+e^x) - x$.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $e^2 \leqslant u_n$.
2. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \ln(u_n) - 2$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \exp\left(2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
   (d) Retrouver la limite de la suite (u_n) à l'aide de cette expression.

► Exercice 12 (Logarithme décimal et applications) – Voir le corrigé

Soit a un réel strictement positif et x un réel.

On appelle exponentielle de x en base a le réel noté a^x et qui vaut $e^{x\ln(a)}$.

1. Soit b un réel strictement positif. Montrer que l'unique solution de l'équation $a^x = b$ est $x = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$. Ce nombre est appelé le logarithme de b en base a.

Un cas particulier : le logarithme en base 10 est alors noté log. Ainsi, pour tout réel a strictement positif, $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$ et $\log(a)$ est l'unique solution de l'équation $10^x = a$.

2. En chimie, le pH d'une solution vaut $-\log(C)$ où C est la concentration de cette solution en ions hydronium H_3O^+, exprimée en mol.L^{-1}.
   (a) Quel est le pH d'une solution ayant une concentration en ions hydronium de 10^{-4} mol.L^{-1} ?
   (b) Si le pH baisse de 1, par combien a été multipliée la concentration en ion hydronium ?
   (c) Le cola a un pH de 2.5. Quelle est sa concentration en ions hydronium ?
   (d) On dit qu'une solution est basique si son pH est strictement supérieur à 7. A quelles concentrations cette situation correspond-elle ?
3. Le niveau de bruit d'une source sonore se mesure en décibels.
   La formule qui donne le niveau de bruit N en fonction de l'intensité I de la source, exprimée en W.m^{-2} est $N = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}.
   (a) Quelle est l'intensité sonore d'une avion qui décolle avec un niveau de bruit de 120 dB ?
   (b) De combien de dB le niveau sonore augmente-t-il lorsque l'intensité sonore double ?
   (c) Une cri possède un niveau sonore de 80 dB. On admet que quand plusieurs personnes crient, les intensités s'ajoutent. Combien doit-on réunir de personnes pour que leurs cris réunis aient une intensité sonore de 120 dB ?

Fonction logarithme népérien

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$ **c.** $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2\ln(x))$ **e.** $\lim\limits_{x\to0^+} (2x^2\ln(x))$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x))$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x-x)$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x-x)$ **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-\ln(x))$

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
4. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
6. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ possède une unique solution sur $[1;+\infty[$. Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près.
7. Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=(\ln(x))^2$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. Attention, $(\ln(x))^2\neq\ln(x^2)$!

1. Résoudre l'équation $f(x)=1$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
5. Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

A l'aide du logarithme, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant les conditions suivantes.

a. $2^n\geqslant 40000$ **b.** $1.01^n\geqslant 2$ **c.** $0.7^n\leqslant 10^{-3}$

d. $121\times 0{,}97^{2n+1}\leqslant 1$ **e.** $3\times 1{,}1^n-150\geqslant 365$ **f.** $10^{12}\times 2^{-n}\leqslant 0{,}1$

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Résoudre l'inéquation $(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)<0$ sur $\mathbb{R}$. On précisera le domaine de définition de cette expression.

▶ Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{7}{8}u_n + 1$. Pour tout entier naturel n, on pose alors $a_n = u_n - 8$.

1. Montrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{7}{8}$ et déterminer son premier terme.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 8 - 3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?
3. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $u_n \geqslant 7{,}999$.

▶ Exercice 20 – Voir le corrigé

La population d'une ville augmente de 3% chaque année. Après combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

▶ Exercice 21 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln(1+e^x)$. Cette fonction, utilisée en intelligence artificielle, est appelée fonction SoftPlus.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.
4. Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \ln(1+e^{-x})$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
5. (a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) En déduire que pour tout réel x, $f(x) \geqslant x$.
6. Construire l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

▶ Exercice 22 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{2x}$.
3. Quel est le sens de variations de la fonction f ?
4. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $\sqrt{\alpha} = -\ln(\alpha)$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

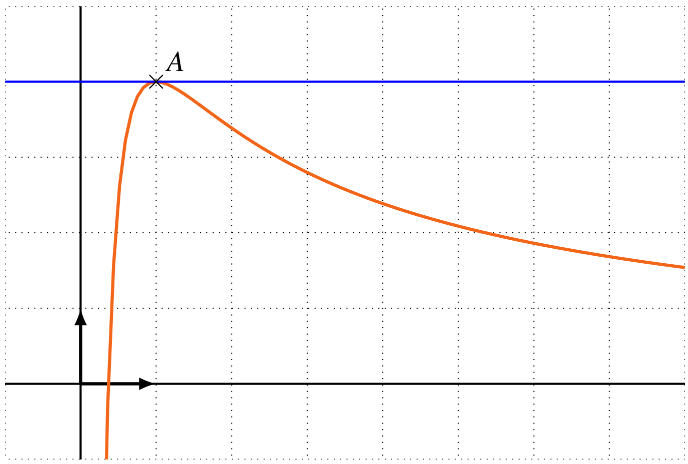
▶ Exercice 23 – Voir le corrigé

Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \ln(e^x - x)$ sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal.

Exercices de synthèse

► Exercice 24 (Amérique du Nord 2021) – Voir le corrigé

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1;4)$.



1. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a+b\ln(x)}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels fixés.}$$

2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a
$$f'(x) = \frac{b-a-b\ln(x)}{x^2}.$$
3. En déduire les valeurs de a et de b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4+4\ln(x)}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif,
$$f''(x) = \frac{-4+8\ln(x)}{x^3}.$$
7. Construire le tableau de signes de f''. Nous verrons dans un prochain chapitre que le signe de f'' nous permet de déterminer la convexité de la fonction f.

► Exercice 25 (Métropole 2022) – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - x\ln(x)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\ln(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite $(un_)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ u_{n+1} = u_n - u_n\ln(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur $[0{,}5;1]$.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) converge.
   (b) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par $f_k(x) = kx - x\ln(x)$.

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel k, $x_k = y_x$.

► Exercice 26 (Centres étrangers 2021) – Voir le corrigé

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05.

On possède un test de dépistage de cette maladie. On considère un échantillon de n personnes ($n > 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Justifier que X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Justifier que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0.95^n$.
3. Que représente l'espérance de X_n dans ce cadre ? Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0{,}95^n$.
4. On considère la fonction f définie sur $[20;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0{,}95)$.
   (a) Montrer que f est décroissante sur $[20;+\infty[$ et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20;+\infty[$. Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
   (c) En déduire le signe de f sur $[20;+\infty[$.
5. On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans cet exercice, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus. La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$. En utilisant les questions précédentes, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

3. Corrigés

Logarithme népérien

► Correction 1 – Voir l'énoncé

a. Soit $x > 0$, $2\ln(x)+1=3 \Leftrightarrow 2\ln(x)=2 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftarrow x=e$. $S=\{e\}$.

b. Soit $x > \frac{4}{3}$, $\ln(3x-4)=0 \Leftrightarrow 3x-4=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$. $S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{3x+2}=4 \Leftrightarrow 3x+2=\ln(4) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(4)-2}{3}$. $S=\left\{\frac{\ln(4)-2}{3}\right\}$.

d. Soit $x > \frac{2}{3}$. $2+3\ln(3x-2)=-1 \Leftrightarrow \ln(3x-2)=-1 \Leftrightarrow 3x-2=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{e^{-1}+2}{3}$. $S=\left\{\frac{e^{-1}+2}{3}\right\}$.

e. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\ln(e^{3x+4})=5 \Leftrightarrow 3x+4=5 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$. $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

f. Puisque $3-\pi<0$, l'équation $e^{2x-3}=3-\pi$ ne possède pas de solution réelle.

g. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(e^{2x+1}-3)(e^x+5)=0 \Leftrightarrow e^{2x+1}-3=0$ ou $e^x+5=0$.

- $e^{2x+1}-3=0 \Leftrightarrow e^{2x+1}=3 \Leftrightarrow 2x+1=\ln(3) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(3)-1}{2}$.
- $e^x+5=0$ est impossible puisque $e^x>0$.

Ainsi, $S=\left\{\frac{\ln(3)-1}{2}\right\}$.

h. Soit $x>0$. $(\ln(x))^2-\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0$ ou $\ln(x)=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=e$. $S=\{1,e\}$.

i. Soit $x>e$,$(x-1)\ln(x-e)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $\ln(x-e)=0$. Or,

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. 1 n'est cependant pas une solution car il n'est pas dans l'ensemble de résolution.
- $\ln(x-e)=0 \Leftrightarrow x-e=1 \Leftrightarrow x=1+e$.

L'unique solution de cette équation est donc $1+e$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $X=e^x$. Ainsi,

$$3e^{2x}+9e^x-30=0 \Leftrightarrow 3X^2+9X-30=0.$$

Cette deuxième équation est une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $3X^2+9X-30$ vaut 441 qui est strictement positif. Ce polynôme a donc deux racines qui sont 2 et -5.

On a donc $X=2$ ou $X=-5$, c'est-à-dire $e^x=2$ (et donc $x=\ln(2)$) ou $e^x=-5$ ce qui est impossible.

L'unique solution de l'équation est donc $\ln(2)$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

a. $\ln(5x-3)$ existe si et seulement si $5x-3>0$, c'est-à-dire $x>\frac{5}{3}$. Soit donc $x>\frac{5}{3}$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(5x-3)\geqslant 0$ si et seulement si $5x-3\geqslant 1$ soit $x\geqslant\frac{4}{5}$. $S=\left[\frac{4}{5}+\infty\right[$.

b. $\ln(9x-2)$ existe si et seulement si $9x-2>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{2}{9}$. Soit donc $x>\dfrac{2}{9}$. Alors par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(9x-2)<0$ si et seulement si $9x-2<1$ soit $x<\dfrac{1}{3}$. Ainsi, $S=\left]\dfrac{2}{9};\dfrac{1}{3}\right[$.

c. $\ln(3x+1)$ existe si et seulement si $3x+1>0$, c'est-à-dire $x>-\dfrac{1}{3}$. Par ailleurs, $\ln(3-x)$ existe si et seulement si $3-x>0$, c'est-à-dire $x<3$. Les deux expressions existent toutes deux lorsque $-\dfrac{1}{3}<x<3$. Soit donc $x\in\left]-\dfrac{1}{3};3\right[$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$ si et seulement si $3x+1\geqslant 3-x$ soit $x\geqslant\dfrac{1}{2}$. Finalement, $S=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[\cap\left]-\dfrac{1}{3};3\right[$ soit $S=\left[\dfrac{1}{2};3\right[$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

sh est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$sh'(x)=\frac{e^x-(-e^{-x})}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

et

$$sh''(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh(x).$$

Pour tout réel x,

$$sh\circ f(x)=\frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}{2}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2}.$$

Ainsi

$$sh\circ f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}{2(x+\sqrt{x^2+1})}=\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1-1}{2(x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x(x+\sqrt{x^2+1})}{2(x+\sqrt{x^2+1})}=x.$$

Par ailleurs, pour tout réel x,

$$f\circ sh(x)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}+1}\right).$$

Or,

$$\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}+1=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Ainsi,

$$f\circ sh(x)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\right).$$

Or, pour tout réel x, $e^x+e^{-x}\geqslant 0$ et donc $\sqrt{\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. Ainsi,

$$f \circ sh(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \ln\left(\frac{2e^x}{2}\right) = x.$$

► Correction 5 – Voir l'énoncé

D'une part, puisque $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, on a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. Ainsi, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$.

Enfin, f est continue sur $]-\infty; +\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $y \in]-1;1[$, il existe un réel x tel que $y = f(x)$.

De plus, f est dérivable et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel $y \in]-1;1[$, le réel x tel que $f(x) = y$ est unique.

Soit donc $y \in]-1;1[$ et x le réel tel que $y = f(x)$. On a alors $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et donc $y(e^x + 1) = e^x - 1$.

Ainsi, $ye^x + y = e^x - 1$. On a alors $ye^x - e^x = -1 - y$ soit $e^x(y-1) = -1 - y$ et donc $e^x = \frac{-1-y}{y-1} = \frac{1+y}{1-y}$.

Puisque $y \in]-1;1[$, on a bien $\frac{1+y}{1-y} > 0$ puisque c'est le quotient de deux réels strictement positifs.

Finalement, on a $x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

Propriétés algébriques

► Correction 6 – Voir l'énoncé

- $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6) = \ln\left(\frac{3 \times 4}{6}\right) = \ln(2)$
- $\frac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1) = \frac{\ln(3^2)}{\ln(3)} - 0 = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)} = 2$
- $4\ln(3) - \ln(9) + 2\ln(27) = 4\ln(3) - \ln(3^2) + 2\ln(3^3) = 4\ln(3) - 2\ln(3) + 6\ln(3) = 8\ln(3)$.
- $\ln(3x^2) - \ln(3) = \ln(3) + \ln(x^2) - \ln(3) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$ car $x > 0$

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout $x > 0$

$$\ln(4x^2) + 6\ln(x) - 3 = \ln(4) + \ln(x^2) + 6\ln(x) - 3 = 8\ln(x) + \ln(4) - 3.$$

Ainsi

$$\ln(4x^2) + 6\ln(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 8\ln(x) + \ln(4) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3 - \ln(4)}{8} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{3 - \ln(4)}{8}\right).$$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x > 1$,

$$\ln(x^2-1)-\ln(x^2+2x+1)=\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right)=\ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

► Correction 9 – Voir l'énoncé

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{49}{50}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{49}{50}\right).$

Après simplification, il reste donc

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{49}{50}\right)=\ln\left(\frac{1}{50}\right).$$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, en factorisant dans le ln par e^{-x}, on a

$$\ln(1+e^{-x})=\ln\left(e^{-x}\times\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)\right)=\ln(e^{-x})+\ln\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)=-x+\ln(1+e^{x}).$$

► Correction 11 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $e^2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
   - Initialisation : On a $u_0 = e^3$ et $u_1 = e\times\sqrt{e^3}=e^{5/2}$. On a bien $e^2 \leqslant u_1 \leqslant e$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $e^2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. En appliquant la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a alors $e \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n}$. On multiplie alors par e et on obtient $e\times e \leqslant e\sqrt{u_{n+1}} \leqslant e\sqrt{u_n}$ soit $e^2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers une limite que l'on note l. Par ailleurs, la fonction $x\mapsto e\sqrt{x}$ est continue sur $[e^2;+\infty[$. On a donc $l=e\sqrt{l}$ et donc $l=0$ ou $l=e^2$. L'unique possibilité est alors $l=e^2$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, $a_n=\ln(u_n)-2$ d'où $\ln(u_n)=a_n+2$ et $u_n=e^{a_n+2}$

   (b) Pour tout entier naturel n,

   $$a_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\sqrt{u_n})-2=\ln(e)+\ln(\sqrt{u_n})-2=1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-2=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)=\frac{1}{2}a_n.$$

   (c) La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0=\ln(u_0)-2$
   On a donc $a_0=\ln(e^3)-2=3-2=1$.

   (d) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n=\exp(a_n+2)=\exp\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

   (e) Puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right)=2$. La fonction exponentielle étant continue en 2, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^2$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

1. On a $a^x=b$ si et seulement si $e^{x\ln(a)}=b$ si et seulement si $x\ln(a)=\ln(b)$ si et seulement si $x=\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$.

2. (a) Le pH de cette solution vaut $-\log(10^{-4}) = -\dfrac{\ln(10^{-4})}{\ln(10)} = -\dfrac{-4\ln(10)}{\ln(10)} = 4$.
   (b) Soit pH_1 et pH_2 tel que $pH_1 = pH_2 - 1$. Notons C_1 et C_2 les concentrations en ions hydronium associées. En remarquant que $1 = \log(10)$, on a alors $-log(C_1) = -\log(C_2) - \log(10)$ soit $\log(C_1) = \log(C_2) + \log(10)$ et donc $\log(C_1) = \log(10C_2)$ Ainsi, $C_1 = 10C_2$. Si le pH baisse de 1, c'est que la concentration en ions hydronium a été multipliée par 10.
   (c) Notons C la concentration en ions hydronium du cola. On a $-\log(C) = 2.5$, d'où $-\dfrac{\ln(C)}{\ln(10)} = 2.5$ et donc $C = e^{-2.5\ln(10)} \simeq 3.2 \times 10^{-3}$ mol.L-1.
   (d) Notons C la concentration correspondant à un pH supérieur à 7. On a alors $-\log(C) \geqslant 7$ soit $C \leqslant 10^{-7}$ mol.L^{-1}.
3. (a) Notons I l'intensité sonore d'un avion au décollage.
   On a alors $120 = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ soit $\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 12$. Ainsi, $\dfrac{I}{I_0} = 10^{12}$ et donc $I = 10^{12}I_0 = 1$ W.m^{-2}.
   (b) On a $10\log\left(\dfrac{2I}{I_0}\right) = 10\log(2) + 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$. Or, $10\log(2) \simeq 3$. Lorsque l'intensité sonore est multipliée par 2, le niveau sonore augmente de 3 décibels.
   (c) On cherche n tel que $10\log\left(\dfrac{nI}{I_0}\right) = 120$ sachant que $10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 80$.
   Or, $10\log\left(\dfrac{nI}{I_0}\right) = 10\log(n) + 10\log\left(\dfrac{nI}{I_0}\right) = 10\log(n) + 80$.
   Il faut donc que $10\log(n) + 80 = 120$ soit $\log(n) = 4$ et donc $n = 10^4$. Il faut réunir 10000 personnes pour que le niveau sonore cumulé de leur cri atteigne 120 dB.

Fonction logarithme népérien

▶ Correction 13 – Voir l'énoncé

a. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x} = \dfrac{x^2}{x^2} \times \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1$. La fonction ln étant continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right) = \ln(1) = 0$.

c. $\lim\limits_{x\to0^+} (x^2-2x+3) = 3$ et $\lim\limits_{x\to0^+} (x^2+x) = 0^+$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right) = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2\ln(x)) = +\infty$.

e. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+} (2x^2\ln(x)) = 0$.

f. Pour tout $x > 1$, $x - \ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. Or, par croissances, comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x)) = +\infty$.

g. $\lim_{x\to-\infty}(e^x - x) = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x - x) = +\infty$.

h. Pour tout $x > 0$, $e^x - x = e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$.
Ainsi, $\lim_{x\to+\infty}(e^x - x) = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty}\ln(e^x - x) = +\infty$.

i. Pour tout réel $x > 0$, $e^x - \ln(x) = e^x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty}(e^x - \ln(x)) = +\infty$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

1. Soit $x > 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
2. On a $\lim_{x\to0^+}(1+\ln(x)) = -\infty$ et donc, par quotient, $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

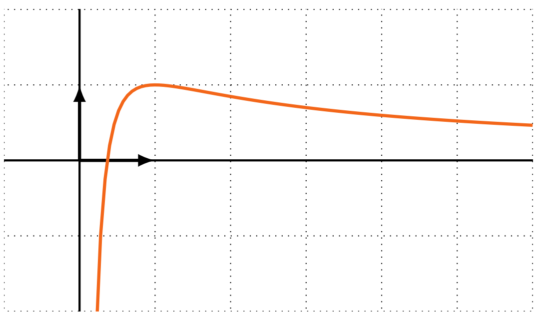
   Par ailleurs, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$. Or, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = 1 + \ln(x)$ et $v(x) = x$. u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et v ne s'y annule pas. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln(x))\times 1}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

4. Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-\ln(x)$. Or, $-\ln(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. On trace l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



6. La fonction f est continue sur $[1;+\infty[$. De plus, $f(1) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans $[1;+\infty[$ tel que $f(c) = \frac{1}{2}$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, ce réel est unique. A l'aide de la calculatrice, on trouve $x \simeq 5{,}36$.

7. Si $m \leqslant 0$, l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution sur $]0;+\infty[$.
   Si $0 < m < 1$, cette équation possède deux solutions. Si $m = 1$, il n'y a qu'une solution.
   Enfin, si $m > 1$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.

▶ Correction 15 – Voir l'énoncé

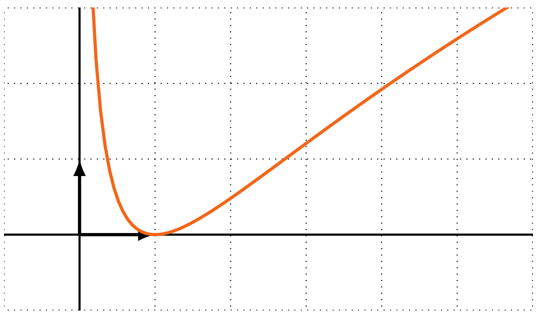
1. Soit $x > 0$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ OU } \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e \text{ OU } x = \frac{1}{e}.$$

2. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 2 \times \ln(x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x)}{x}$, qui est du signe de $\ln(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4. On trace l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



5. Si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune solution sur $]0;+\infty[$.
   Si $m = 0$, cette équation possède une unique solution. Si $m > 0$, il y a deux solutions.

▶ Correction 16 – Voir l'énoncé

Le discriminant du polynôme $x^2 - 2x + 3$ vaut -8 qui est négatif. Ainsi, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$. f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}$.

Puisque pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x - 2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

► Correction 17 – Voir l'énoncé

a. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $2^n \geqslant 40000$ si et seulement si $\ln(2^n) \geqslant \ln(40000)$ soit $n\ln(2) \geqslant \ln(40000)$ et, $\ln(2)$ étant positif, $n \geqslant \dfrac{\ln(40000)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 16.

b. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $1.01^n \geqslant 2$ si et seulement si $\ln(1.01^n) \geqslant \ln(2)$ soit $n\ln(1.01) \geqslant \ln(2)$ et, $\ln(1.01)$ étant positif, $n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1.01)}$. L'entier recherché est 70.

c. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $0.7^n \leqslant 10^{-3}$ si et seulement si $\ln(0.7^n) \leqslant \ln(10^{-3})$ soit $n\ln(0.7) \leqslant -3\ln(10)$ et, $\ln(0.7)$ étant négatif, $n \geqslant \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(0.7)}$. L'entier recherché est 20.

d. $121 \times 0{,}97^{2n+1} \leqslant 1$ si et seulement si $0{,}97^{2n+1} \leqslant \dfrac{1}{121}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $(2n+1)\ln(0.97) \leqslant -\ln(121)$. En divisant par $\ln(0.97)$ qui est négatif, on obtient $2n+1 \geqslant -\dfrac{\ln(121)}{\ln(0.97)}$ et donc $n \geqslant \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln(121)}{\ln(0.97)} - 1\right)$. L'entier recherché est 79.

e. $3 \times 1{,}1^n - 150 \geqslant 365$ si et seulement si $1.1^n \geqslant \dfrac{515}{3}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $n\ln(1.1) \geqslant \ln(515) - \ln(3)$ et donc $n \geqslant \dfrac{\ln(515)-\ln(3)}{\ln(1.1)}$. L'entier recherché est 54.

f. $10^{12} \times 2^{-n} \leqslant 0{,}1$ équivaut à $2^{-n} \leqslant 10^{-13}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $-n\ln(2) \leqslant -13\ln(10)$ et donc $n \geqslant \dfrac{13\ln(10)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 44.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

L'expression $(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)$ existe pour tout réel $x > 0$. Construisons le tableau de signe de cette expression.

x	0		$\ln(3)/2$		e		$+\infty$
$e^{2x}-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)-1$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution recherché est $S = \left]0;\dfrac{\ln(3)}{2}\right[\cup]e;+\infty[$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = u_{n+1} - 8 = \frac{7}{8}u_n + 1 - 8 = \frac{7}{8}(a_n+8) - 7 = \frac{7}{8}a_n$.
   La suite (a_n) est donc géométrique, de raison $\frac{7}{8}$ et de premier terme $a_0 = u_0 - 8 = -3$.
2. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = -3\left(\frac{7}{8}\right)^n$ et $u_n = a_n + 8 = 8 - 3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$.
3. Soit n un entier naturel. On a $u_n \geqslant 7{,}999$ si et seulement si $8 - 3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n \geqslant 7.999$, soit $\left(\frac{7}{8}\right)^n \leqslant \frac{0.001}{3}$.
   Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $n\ln\left(\frac{7}{8}\right) \leqslant \ln\left(\frac{0.001}{3}\right)$ et donc, en divisant par $\ln\left(\frac{7}{8}\right)$ qui est négatif, $n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{0.001}{3}\right)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)}$. L'entier recherché est 60.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

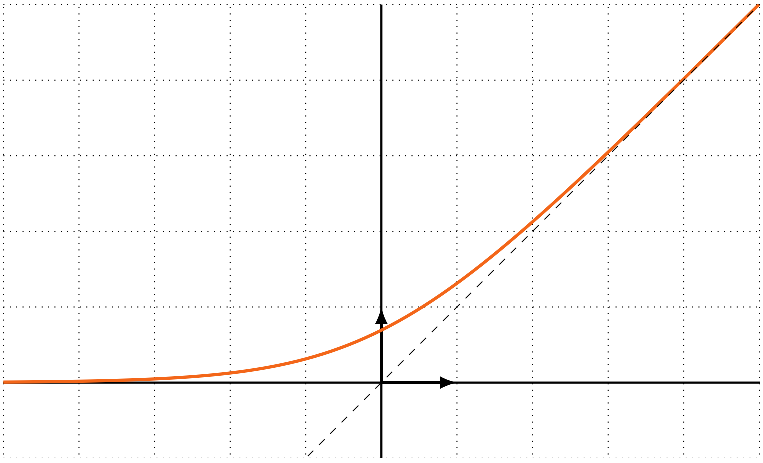
Soit n un entier naturel. Après n années, la population de cette ville a été multipliée par 1.03^n. On cherche donc à résoudre l'équation $1.03^n \geqslant 2$, ce qui équivaut à $n \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(1.03)}$. L'entier recherché est 24 : la population aura doublé en 24 ans.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et donc $1 + e^x > 0$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable comme composition de fonctions dérivables. Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) Pour tout réel x,
   $$g(x) = f(x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(e^{-x}+1).$$
   (b) Pour tout réel x, $1 + e^{-x} > 1$ et donc $\ln(1+e^{-x}) > 0$, par croissance du logarithme népérien sur $[1;+\infty[$. Il en vient que pour tout réel x, $g(x) > 0$, soit $f(x) - x > 0$ et donc $f(x) > x$.
   (c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. La courbe de f se rapproche de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

5. 

► Correction 22 – Voir l'énoncé

1. Par somme de limites, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{2x} + \dfrac{2}{2x} = \dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{\alpha} + \ln(\alpha) = 0$ ou encore $\sqrt{\alpha} = -\ln(\alpha)$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 0.49$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

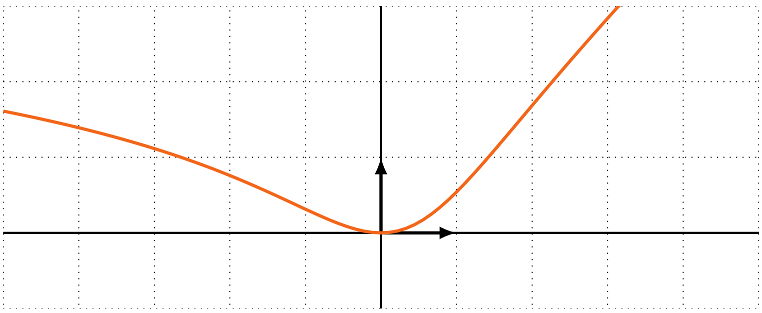
Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^x - x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x - 1$. On en déduit le tableau de variations de u.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, pour tout réel x, $e^x - x \geqslant 1$ et donc $e^x - x > 0$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. f est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. Les variations de f sont les mêmes que les variations de u. On a donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors tracer l'allure de la courbe de f.



Exercices de synthèse

▶ Correction 24 – Voir l'énoncé

1. D'après le graphique, on a $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.
2. Pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2}.$$

3. D'une part, $f(1) = 4$ d'après le graphique. Or, en utilisant la formule, on a $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a$. Ainsi, $a = 4$. Par ailleurs, $f'(1) = 0$ d'après le graphique, et $f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln(1)}{1^2} = b - 4$ en utilisant la formule. Il en vient que $b - 4 = 0$ et donc $b = 4$.
4. On a $\lim\limits_{x \to 0^+} (4 + 4\ln(x)) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (f(x)) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln(x)}{x}$. Par croissances comparées et somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)) = 0$.
5. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln(x)}{x^2}$ est du signe opposé à celui de $\ln(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

6. Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{-\dfrac{4}{x} \times x^2 - (-4\ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{x(-4+8\ln(x))}{x^4} = \dfrac{-4+8\ln(x)}{x^3}$.
7. Pour tout $x > 0$, on a $x^3 > 0$ et $-4+8\ln(x) > 0$ si et seulement si $\ln(x) > \dfrac{1}{2}$ soit $x > \sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Partie A

1. Par croissances, comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x(1-\ln(x))$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln(x)) = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. (a) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln(x) + 1 = -\ln(x)$.
   (b) On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. On a $f(x) = x$ si et seulement si $x - x\ln(x) = x$ soit $-x\ln(x) = 0$. Puisque $x > 0$, l'unique solution de cette équation est $x = 1$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».
   - On a $u_0 = 0.5$ et $u_1 = 0.5 - 0.5\ln(0.5) \simeq 0.84$. On a bien $0.5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0.5;1]$ on a alors $f(0.5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$. Or, $f(0.5) \geqslant 0.5$ et $f(1) = 1$. Ainsi, on a $0.5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. (a) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
   (b) Puisque la fonction f est continue sur $[0.5;1]$ et que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0.5;1]$, alors $f(\ell) = \ell$. Or, l'unique solution de cette équation sur cet intervalle est 1. Ainsi, $\ell = 1$.

Partie C

Pour tout réel k, pour tout réel x, f_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f_k'(x) = k - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = k - 1 - \ln(x)$.
Or, $f_k'(x) \leqslant 0$ si et seulement si $k - 1 - \ln(x) \leqslant 0$ si et seulement si $k - 1 \leqslant \ln(x)$ si et seulement si $x \geqslant e^{k-1}$

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, f_k admet un maximum en $x_k = e^{k-1}$.

Par ailleurs, $f_k(x_k) = ke^{k-1} - e^{k-1} \times \ln(e^{k-1}) = ke^{k-1} - (k-1)e^{k-1} = e^{k-1}$.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

1. Si le test est négatif on aura fait un test : dans ce cas, on a $X_n = 1$. Sinon, on aura fait un test joint puis n tests individuels : on aura alors $X_n = n + 1$.
2. $\mathbb{P}(X_n = 1)$ est la probabilité que l'on ne fasse qu'un test : cela signifie que le test des n personnes est négatif et donc qu'elles ne sont pas malades. La probabilité qu'une personne au hasard soit malade est égale à 0.05. La probabilité qu'une personne au hasard soit saine est donc de 0.95. Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on suppose ceux-ci indépendants. La probabilité que les n personnes soient saines vaut donc 0.95^n.
3. Puisque X_n ne peut prendre que les valeurs 1 et $n+1$, on a alors $\mathbb{P}(X_n = n+1) = 1 - 0.95^n$.
   Ainsi, $E[X_n] = (n+1) \times \mathbb{P}(X_n = n+1) + 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) = (n+1)(1 - 0.95^n) + 0.95^n$ et donc $E[X_n] = n + 1 - n \times 0.95^n$.
   Cette espérance représente le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon de n personnes.
4. (a) f est dérivable sur $[20;+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(0.95)$.
   Or, $x \geqslant 20$ et donc $\dfrac{1}{x} \leqslant 0.05$ puis $f'(x) \leqslant 0.05 + \ln(0.95) < 0$. f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$.
   Par ailleurs, pour tout réel $x \geqslant 20$, $f(x) = x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \ln(0.95)\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \ln(0.95)\right) = \ln(0.95) < 0$.
   Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
   (b) La fonction f est continue sur $[20;+\infty[$. On a $f(20) \simeq 1.97$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \geqslant 20$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur cet intervalle, une telle solution est unique. On trouve $87 < \alpha < 87.1$.
   (c) En utilisant les deux questions précédentes, on en déduit que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [20;\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in [\alpha;+\infty[$.

5. Soit $n \geqslant 20$. On a $E(X_n) < n$ si et seulement si $n+1-n\times 0.95^n < n$ soit $1 < n \times 0.95^n$.
On applique le logarithme, qui est strictement croissant sur $[1;+\infty[$. Ainsi, $E(X_n) < n$ si et seulement si $0 < \ln(n \times 0.95^n)$.
Tester toutes les personnes conduira à moins d'analyses qu'avec la méthode groupée pour des échantillons de 20 à 87 personnes au maximum. Au delà il vaut mieux utiliser la méthode de test groupés.