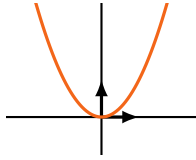


## Fonctions et limites de référence

$x \mapsto x^n$ , avec  $n$  pair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

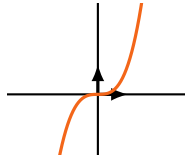
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$



$x \mapsto x^n$ , avec  $n$  impair

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

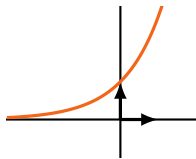
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$



$x \mapsto e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

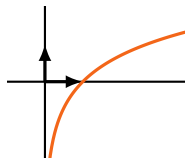
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$



$x \mapsto \ln(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

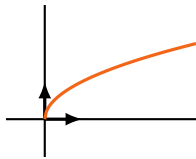
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$



$x \mapsto \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

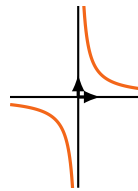
Non dérivable en 0



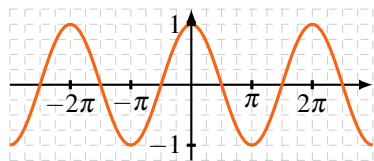
$x \mapsto \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

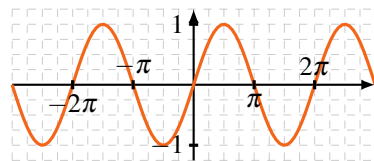
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



$x \mapsto \cos(x)$



$x \mapsto \sin(x)$



### Asymptotes :

- Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ , la droite d'équation  $y = a$  est asymptote à la courbe de  $f$  en  $\pm\infty$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \pm\infty$  ( $b$  fini), la droite d'équation  $x = b$  est asymptote à la courbe de  $f$ .

**Suites géométriques** : Si  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ . Si  $-1 < q < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ .

## Opérations sur les limites (suites ou fonctions)

|                                   |             |           |           |           |           |             |
|-----------------------------------|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$     | $l_1$       | $l_1$     | $l_1$     | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$   |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$     | $l_2$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$   |
| $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$ | $l_1 + l_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | <b>F.I.</b> |

|                                  |           |                 |                 |             |
|----------------------------------|-----------|-----------------|-----------------|-------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$    | $l_1$     | $l_1 \neq 0$    | $\infty$        | $0$         |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$    | $l_2$     | $\infty$        | $\infty$        | $\infty$    |
| $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$ | $l_1 l_2$ | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.) | <b>F.I.</b> |

|  |                   |          |                 |                     |             |          |
|--|-------------------|----------|-----------------|---------------------|-------------|----------|
| $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$                        | $l_1$             | $l_1$    | $l_1 \neq 0$    | $\infty$            | $0$         | $\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$                        | $l_2 \neq 0$      | $\infty$ | $0^+$ ou $0^-$  | $l_2, 0^+$ ou $0^-$ | $0$         | $\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ | $\frac{l_1}{l_2}$ | $0$      | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.)     | <b>F.I.</b> |          |

### Méthodes pour lever une indéterminée :

- Factorisation par les termes de plus haut degré
- Quantité conjuguée (différence de racines carrées)
- Utilisation des croissances comparées

**Croissances comparées** : Pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0$$

### Compositions de limites

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$

### Théorèmes sur les limites

**Théorème de comparaison** : Soit  $a$  un réel ou  $\pm\infty$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$  dont  $a$  est un élément ou un bord.

- Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

**Théorème d'encadrement** : Soit  $a$  un réel. Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  dont  $a$  est un élément ou un bord.

Si, pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  et si  $f$  et  $h$  admettent une même limite **finie**  $\ell$  en  $a$ , alors  $g$  admet également une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$ .

**Suites monotones** :

- Si  $(u_n)$  est **croissante et majorée** par  $M$ , alors  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq M$ .
- Si  $(u_n)$  est **décroissante et minorée** par  $m$ , alors  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq m$ .

**Il est en revanche faux de dire que la limite vaut automatiquement le majorant ou le minorant en question !**

**Algorithme de seuil**

```
1 #Suite croissante
2 def seuil(s):
3     u = #valeur de u(0)
4     n = 0
5     while u < s :
6         u = #expression de u(n+1)
7         n = n + 1
8     return n
```

```
1 #Suite décroissante
2 def seuil(s):
3     u = #valeur de u(0)
4     n = 0
5     while u > s :
6         u = #expression de u(n+1)
7         n = n + 1
8     return n
```

**Théorème du point fixe** : Soit  $f$  une fonction définie, **continue** et à valeurs dans un intervalle  $I$ . Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_0 \in I$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in I$ , alors  $f(\ell) = \ell$ .

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f$  une fonction **continue** sur  $]a; b[$ . Alors pour tout réel  $k$  compris entre  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ , l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution sur  $]a; b[$ .

Si de plus, la fonction  $f$  est **strictement monotone** sur  $]a; b[$ , alors une telle solution est unique.

```
1 #Algorithme de dichotomie
2 #Resolution approchée de f(x)=0
3 def dichotomie(f, a, b, p):
4     while abs(b-a) > 10 ** (-p):
5         m = (a+b)/2
6         if f(a) * f(m) < 0:
7             b = m
8         else:
9             a = m
10    return m
```

**Propriétés de calcul**

**Second degré** : Racines et signe de  $ax^2 + bx + c$ . On pose  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

- Si  $\Delta > 0$ ,  $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ,  $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ . Signe de  $a$  à l'extérieur des racines.
- Si  $\Delta = 0$ ,  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ . Signe de  $a$  partout.
- Si  $\Delta < 0$ , pas de racine réelle, signe de  $a$  partout.

**Avec l'exponentielle** : Pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ . Soit  $a$ ,  $b$  des réels,  $n$  un entier relatif

$$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad (e^a)^n = e^{na}$$

**Avec le logarithme** : Soit  $x > 0$ , on a,  $\ln(x) > 0$  ssi  $x > 1$ . Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln(a^n) = n \times \ln(a)$$

**Dérivées, primitives**

| Fonction $f$                                  | Dérivée                         | UNE Primitive $F$                               |
|---|---------------------------------|---|
| $x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}^*$           | $x \mapsto nx^{n-1}$            | $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$                 |
| $x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$ | $x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$  | $x \mapsto -\frac{1}{(n+1)x^{n-1}}, (n \geq 2)$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$                          | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ (non exigible)           |
| $x \mapsto e^{ax+b}$                          | $x \mapsto a \times e^{ax+b}$   | $x \mapsto \frac{e^{ax+b}}{a}$                  |
| $x \mapsto \ln(x)$                            | $x \mapsto \frac{1}{x}$         | $x \mapsto x \ln(x) - x$ (non exigible)         |
| $x \mapsto \sin(x)$                           | $x \mapsto \cos(x)$             | $x \mapsto -\cos(x)$                            |
| $x \mapsto \cos(x)$                           | $x \mapsto -\sin(x)$            | $x \mapsto \sin(x)$                             |

## Opérations sur les dérivées

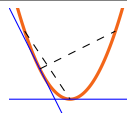
$$\begin{aligned}
 (u+v)' &= u' + v' & (uv)' &= u'v + uv' & \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
 \left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2} & (e^u)' &= u'e^u & (\ln(u))' &= \frac{u'}{u} & (\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
 (u^n)' &= n \times u' \times u^{n-1} & (\cos(u))' &= -u' \times \sin(u) & (\sin(u))' &= u' \times \cos(u)
 \end{aligned}$$

**Équation de la tangente** à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$  :  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

## Convexité, concavité

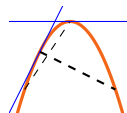
### Fonction convexe

- En-dessous de ses cordes, au-dessus de ses tangentes
- Dérivée croissante, dérivée seconde positive



### Fonction concave

- Au-dessus de ses cordes, en-dessous de ses tangentes
- Dérivée décroissante, dérivée seconde négative



## Équations différentielles

**Équation homogène**  $y' + ay = 0$  : Solutions  $x \mapsto Ce^{-ax}$ ,  $C \in \mathbb{R}$

**Second membre constant**  $y' + ay = b$

- Recherche d'une solution constante  $\varphi$  : on pose  $y' = 0$ , on trouve  $\varphi = \frac{b}{a}$
- Solutions générale :  $x \mapsto Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$

**Second membre fonction**  $y' + ay = g$

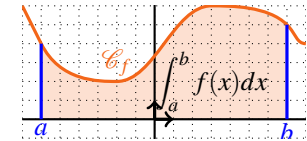
- Recherche ou vérification d'une solution particulière  $\varphi$
- Solutions générale :  $x \mapsto Ce^{-ax} + \varphi$

**Conditions initiales** : Une fois la solution générale trouvée, on remplace  $x$  par  $x_0$  et on résout une équation pour trouver  $C$ .

## Calcul intégral

Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive : **aire sous la courbe** exprimée en unité d'aire

Notation  $\int_a^b f(x)dx$



Si pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ , l'aire entre les courbes de  $f$  et  $g$  vaut  $\int_a^b (g-f)(x)dx$ .

**Théorème fondamental** :  $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .

**Calcul d'intégrale** : Si  $F$  est une primitive de  $f$ ,  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

### Propriétés de l'intégrale

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt; \quad \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

**Croissance** : Si pour tout réel  $x \in [a; b]$ , on a  $f(x) \leq g(x)$  alors  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

**Valeur moyenne d'une fonction** :  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

**Intégration par parties (IPP)** :  $\int_a^b (uv')(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)dx$

## Probabilités conditionnelles

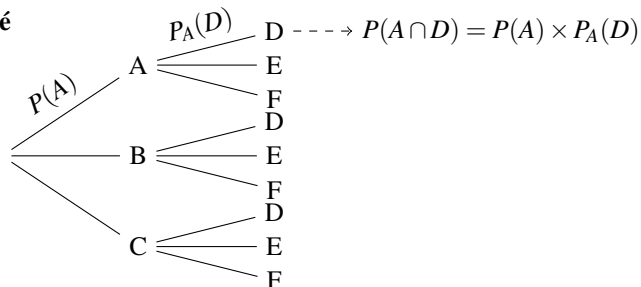
**Probabilité conditionnelle** de  $B$  sachant  $A$  :  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

**Formule des probabilités totales** : On considère un événement  $B$  et  $A_1, A_2, \dots, A_n$  un système complet d'événements de l'univers  $\Omega$ . Alors,

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i)$$

**Indépendance** : Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Arbre pondéré**



**Variable aléatoire**

**Définition** : Fonction définie sur un univers  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$

**Loi d'une variable aléatoire réelle** : Fonction qui à tout réel  $k$  associe  $P(X = k)$ .

**Espérance** : Si  $X$  prend les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \dots + x_n \times P(X = x_n)$$

Interprétation : valeur moyenne de la variable aléatoire

**Linéarité de l'espérance** :  $E(aX + b) = a \times E(X) + b$ ,  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

**Variance** :  $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - E[X]^2$ . Mesure de dispersion.

$V(aX + b) = a^2 \times V(X)$ . Si  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes**,  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

**Écart-type** :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

**Dénombrement**

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ ,  $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$

**Factorielle** :  $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ ,  $0! = 1$

Soit  $A$  un ensemble de cardinal  $n$

- **$p$ -uplet** ou  **$p$ -liste** de  $A$  : élément de  $A^p$ , il y en a  $n^p$
- **$p$ -arrangement** de  $A$  :  $p$ -uplet d'éléments distincts de  $A$ . Il y en a  $\frac{n!}{(n-p)!}$
- Cas  $p = n$  : un  $n$ -arrangement de  $A$  s'appelle une **permutation**.

**Coefficient binomial**  $\binom{n}{k}$  : nombre de sous-ensembles de  $A$  ayant  $k$  éléments.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

**Relation de Pascal** :  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ .  
Permet de construire le triangle de Pascal.

| n \ k | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 |
|-------|---|---|----|----|----|---|---|
| 0     | 1 |   |    |    |    |   |   |
| 1     | 1 | 1 |    |    |    |   |   |
| 2     | 1 | 2 | 1  |    |    |   |   |
| 3     | 1 | 3 | 3  | 1  |    |   |   |
| 4     | 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |   |   |
| 5     | 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1 |   |
| 6     | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

**Épreuve, loi, schéma de Bernoulli**

**Épreuve de Bernoulli** : épreuve à deux issues, le succès  $S$  et l'échec  $\bar{S}$

**Loi de Bernoulli** de paramètre  $p$  : prend la valeur 1 avec proba  $p$  et 0 avec proba  $1 - p$

**Schéma de Bernoulli** : Succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

**Loi binomiale**

**Loi binomiale** de paramètres  $n$  et  $p$  : compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à  $n$  épreuves, chaque épreuves ayant une probabilité de succès de  $p$ .  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

**Formules** Si  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ ,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

**Loi des grands nombres**

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un échantillon d'une v.a. réelle,  $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

$$E(M_n) = E(X_1)$$

$$V(M_n) = \frac{V(X_1)}{n}$$

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{n}}$$

**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** : Pour tout  $\delta > 0$ ,  $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$

**Inégalité de concentration** : Pour tout  $\delta > 0$ ,  $P(|M_n - E(X_1)| \geq \delta) \leq \frac{V(X_1)}{n\delta^2}$

## Géométrie dans l'espace

### Colinéarité et applications

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires** s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

Droite passant par  $A$  dirigée par  $\vec{u}$  : ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.

- Deux droites sont **parallèles** ssi leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Trois points  $A, B$  et  $C$  sont **alignés** si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

### Coplanarité et applications

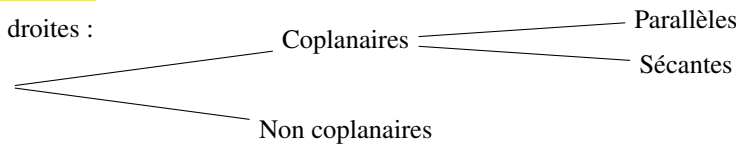
Trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont **coplanaires** si l'un de ces vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres (par exemple  $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ ).

Plan passant par  $A$  et dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires : ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont coplanaires.

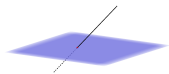
- Quatre points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires s'il existe un plan passant par ces points
- Quatre points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires ssi  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont coplanaires.
- Deux droites sont coplanaires s'il existe un plan contenant ces deux droites

### Positions relatives

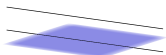
Pour deux droites :



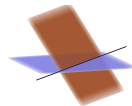
**Droite sécante à un plan**



**Droite parallèle à un plan**



**Plans sécants selon une droite**



**Plans parallèles**



### Repérage dans l'espace

Un **repère** de l'espace est la donnée d'un point  $O$  de l'espace et de trois vecteurs non coplanaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe des réels uniques  $x, y$  et  $z$  tq  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

On note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Si on a  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $B(x_B; y_B; z_B)$ , alors  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  alors  $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$

### Représentation paramétrique de droite

passant par le point  $A(x_A, y_A, z_A)$  dirigée par le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .  $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

### Applications

- Lire directement un point et un vecteur directeur d'une droite
- Vérifier si un point appartient à une droite : remplacer  $x, y$  et  $z$  par les coordonnées de ce point et trouver une unique valeur de  $t$  qui convient.
- **Droites parallèles** : vérifier si les vecteurs directeurs sont colinéaires
- **Droites sécantes** : système à résoudre en identifiant les  $x, y, z$  des deux représentations. On remplace ensuite la valeur de  $t$  trouvée pour le point d'intersection.

### Produit scalaire

**Produit scalaire** : si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ .

Vecteurs orthogonaux : produit scalaire nul.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . En particulier,  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \vec{u} \cdot (k\vec{v} + k'\vec{w}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) + k'(\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad (k\vec{v} + k'\vec{w}) \cdot \vec{u} = k(\vec{v} \cdot \vec{u}) + k'(\vec{w} \cdot \vec{u})$$

**Produit scalaire dans un repère ORTHONORMÉ** :  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$

**Csq** :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et  $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Pour déterminer la mesure d'un angle, on utilise alors  $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

- Deux droites sont **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si elles sont orthogonales ET sécantes.
- Une droite est **orthogonale** à un plan si elle est orthogonale à toute droite de ce plan

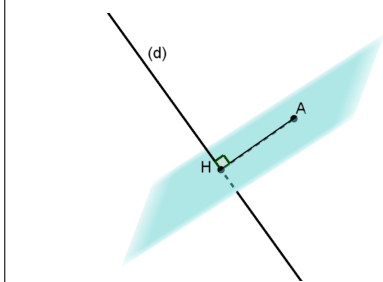
**Vecteur normal** à un plan : Vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan.

Si  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère du plan  $(P)$ ,  $\vec{n}$  est normal à  $(P)$  ssi  $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .

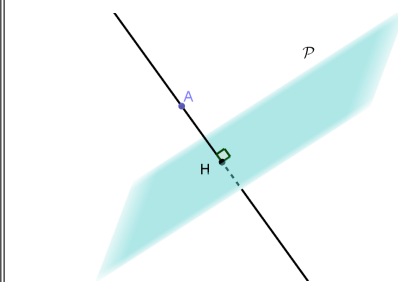
- Une droite est parallèle (ou contenue) à un plan si un vecteur directeur de cette droite est orthogonal à un vecteur normal au plan.
- Une droite est orthogonale à un plan si un de ses vecteurs directeurs est un vecteur normal à ce plan
- Deux plans sont parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires
- Deux plans sont orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

### Projeté orthogonal

Projeté orthogonal de  $A$  sur la droite  $(d)$  : intersection de la droite  $(d)$  et du plan passant par  $A$  orthogonal à  $(d)$ .



Projeté orthogonal de  $A$  sur le plan  $(P)$  : intersection du plan  $(P)$  et de la droite passant par  $A$  et orthogonale à  $(P)$ .



**Distance** d'un point à une droite (ou un plan) = distance du point à son projeté orthogonal

### Équation cartésienne de plan

Passant par  $A(x_A, y_A, z_A)$  de vecteur normal  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  :  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

### Applications :

- Déterminer directement un vecteur normal à un plan
- Vérifier si un point appartient au plan : remplacer  $x, y$  et  $z$  par les coordonnées du point, vérifier si l'égalité est juste.

### Intersection d'une droite et d'un plan

- Établir une représentation paramétrique de la droite
- remplacer  $x, y$  et  $z$  dans l'équation du plan par ceux de la représentation paramétrique
- trouver le paramètre  $t$  en résolvant l'équation
- remplacer ce paramètre dans la représentation de la droite.

### Algorithmique

**Manipulation de listes** ; **Attention** : les indices des éléments d'une liste commencent à 0.

```
1 L1 = [] # liste vide stockee dans L1
2 L2 = [1, 3, 7, 6]
3
4 a = L2[0] # element d'indice 0 de L2
5 b = L2[1] # element d'indice 1 de L2
6 c = L2[-1] # dernier element de L2
7
8 c = len(L) # nombre d'elements de L2
9
10 L2.append(8) # ajoute 8 a la fin de la liste L2
11 L2.remove(3) # retire la premiere apparition de 3 de la liste L2
```

### Génération par compréhension

```
1 [expression for objet in liste if condition]
```

### Itération et parcours

```
1 range(a,b,pas) # "liste" de tous les entiers de a inclus a b exclus en
  # progressant d'un pas donne
2
3 for i in range(n): # pour i allant de 0 a n-1
4     ... # indenter la partie a repeter
5
6 for i in L : # si L est une liste, parcourt les elements de L dans l'ordre
7     ... # indenter la partie a repeter
```