1. Cours : Compléments sur la dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I la fonction

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$ ■

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$mx+p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	
$\exp(ax+b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est également dérivable sur I. On a alors

$(ku)' =$ $\qquad$ $(u+v)' =$

$(uv)' =$ $\qquad$ $\left(\frac{u}{v}\right)' =$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2-3x+1)\exp(3x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2-3x+1$ et $v(x) = \exp(3x+1)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) =$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) =$

On a $f = uv$. Ainsi, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a $f' = u'v + uv'$. Ainsi, pour tout réel x,

$f'(x) =$

■

1.4 Tangente à la courbe

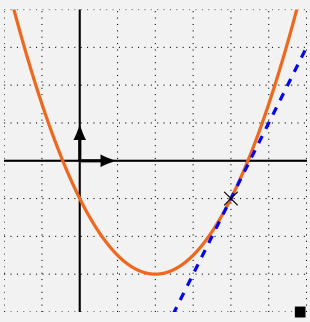
Définition 2 — Tangente à la courbe : Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a;f(a))$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$y =$

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - 1$. Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4



■

1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

■ **Exemple 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\exp(3x+1)$ étudiée précédemment.

On a vu que pour tout réel x, on a $f'(x) = (3x^2 - 7x)\exp(3x+1) = x(3x-7)\exp(3x+1)$.

$f'(x)$ étant écrite sous forme factorisée, on peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

■

2 Dérivée seconde

Définition 3 — Dérivée seconde : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).

On appelle fonction *dérivée seconde* de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

Pour tout $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$.

■ **Exemple 5 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x-2}$. Posons, pour tout réel x, $u_1(x) = 2x+1$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x-2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) =$
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) =$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$f'(x) =$

Posons alors, pour tout réel x, $u_2(x) = 6x+5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$.

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_2'(x) =$
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_2'(x) =$

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) =$$

■

3 Composition de fonctions

Définition 4 — Fonction composée : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x)).$$

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g : x \overset{g}{\longmapsto} g(x) \overset{f}{\longmapsto} f[g(x)]$$

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) =$
- $g \circ f(x) =$

■

Attention ! En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 3 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x).$$

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2+3x-2$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) =$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) =$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) =$$

■

Propriété 4 — Cas particuliers : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' =$
- e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' =$
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' =$
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) =$

■ **Exemple 8 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x+1)^9$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 4x+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, $f = u^9$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' =$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a

$$f'(x) =$$

■

■ **Exemple 9 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Or, $f = \dfrac{1}{u}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' =$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) =$$

■

■ **Exemple 10 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Bien que la fonction f soit définie sur l'intervalle fermé $[-2;2]$, elle n'est en revanche dérivable que sur l'intervalle ouvert $]-2;2[$. Pour tout réel $x \in]-2;2[$, on a

$$f'(x) =$$

■