# 1. Cours : Limites de suite

## 1 Limite d'une suite

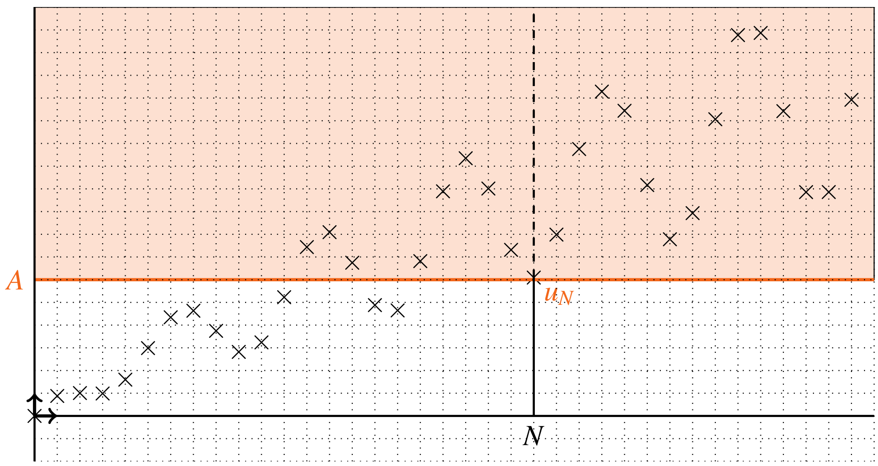
### 1.1 Limite infinie

**Définition 1 — Limite infinie :** Soit $(u_n)$ une suite réelle.

- On dit que $u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un entier naturel $N$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que $u_n$ tend vers $-\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, l'intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un entier naturel $N$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

La première définition traduit le fait que la suite dépasse n'importe quel seuil donné sans jamais repasser en dessous par la suite. Attention, cela ne signifie pas que les termes de la suite sont de plus en plus grands ; une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

**Illustration :** On a représenté graphiquement une certaine suite $(u_n)$ ci-dessous. On se fixe un seuil $A = 6$.




On remarque que $u_{12} \geqslant 6$. Cependant, certains des termes suivants sont inférieurs à 6 : pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que **tous les termes** à partir d'un certain rang soient au-dessus du seuil $A$, et ce, peu importe le seuil $A$. On voit ainsi que, pour tout $n \geqslant 22$, il semblerait qu'on ait bien $u_n \geqslant 6$.

Le raisonnement que nous venons de tenir pour $A = 6$ tient pour toutes les valeurs de $A$, aussi grandes soient-elles : la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$.

Naturellement, plus la valeur de $A$ est grande, plus la valeur à partir de laquelle tous les termes de la suite sont tous plus grands que $A$ sera lointaine.

Il faut par ailleurs remarquer et insister **lourdement** sur le fait qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante. Cette suite ici représentée en est un exemple. Il est également faux de dire qu'une suite qui est strictement croissante tend forcément vers $+\infty$.

■ **Exemple 1 :** Pour tout $n$, on pose $u_n = n^2$. $u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

En effet, fixons un réel $A$.

- Si $A < 0$, alors pour tout entier naturel $n$, on aura $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, alors pour tout entier $n$ supérieur ou égal à $\sqrt{A}$, on a $n^2 \geqslant \sqrt{A}^2$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}+$. Ceci revient à dire que $u_n \geqslant A$.

Dans tous les cas, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(u_n)$ sont au-dessus de $A$, peu importe le réel $A$ choisi : la suite $(u_n)$ tend donc vers $+\infty$. ■

Il y a une différence entre une suite qui tend vers $+\infty$ et une suite non majorée. : évidemment, toute suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée, puisque pour tout réel $A$, il y a des termes de la suite supérieurs à $A$.

La réciproque est en revanche fausse sans davantage d'hypothèse sur la suite. Considérons par exemple la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = (1+(-1)^n)n$. La suite $(u_n)$ n'est pas majorée : elle a des termes arbitrairement grands. Cependant, elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ puisqu'un terme sur deux de cette suite vaut 0. Elle ne reste donc pas supérieure à n'importe quel réel donné à partir d'un certain rang (elle est en particulier en dessous de 1 tous les termes impairs).

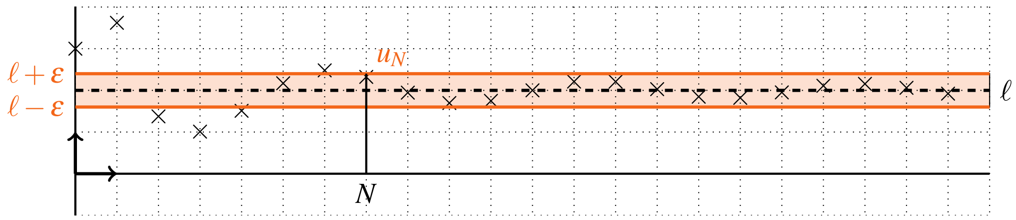
## 1.2 Limite finie : suite convergente

**Définition 2 :** Soit $(u_n)$ une suite réelle et $\ell$ un réel.

On dit que $u_n$ tend vers $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que, dès que $n \geqslant N$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

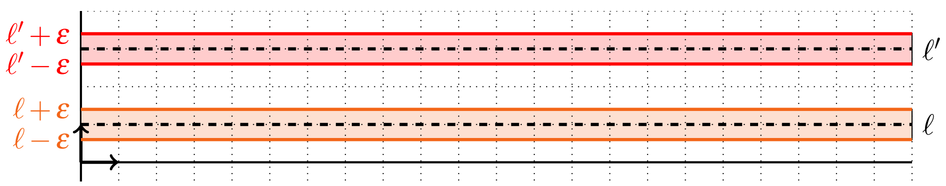
**Illustration :** On a représenté graphiquement une certaine suite $(u_n)$ ci-dessous.




La suite $(u_n)$ semble tendre vers 2. Par exemple, pour $\varepsilon = 0{,}4$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$, soit $]1{,}6; 2{,}4[$ à partir du rang 7. Ce raisonnement vaut pour n'importe quel $\varepsilon$, aussi petit soit-il.

**Propriété 1 :** Soit $(u_n)$ une suite réelle, $\ell$ et $\ell'$ deux réels. Si $u_n$ tend vers $\ell$ et $u_n$ tend vers $\ell'$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, alors $\ell = \ell'$.

L'idée de la démonstration suivante est assez simple : elle consiste à montrer l'impossibilité d'être à la fois très proche de $\ell$ et de $\ell'$ si ces deux valeurs sont différentes. Pour cela, on va trouver une valeur de $\varepsilon$ pour lesquels les intervalles $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$ sont disjoints, ce qui contredira le fait que ces deux intervalles doivent tous deux contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



**Démonstration 1 :** Supposons que $\ell \neq \ell'$, par exemple que $\ell > \ell'$. Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif.

- Puisque $u_n$ tend vers $\ell$ en $+\infty$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang $N$. En particulier, à partir d'un certain rang $N$, tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à $\ell-\varepsilon$
- Puisque $u_n$ tend vers $\ell'$ en $+\infty$, l'intervalle $]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, à partir d'un certain rang $N'$, tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à $\ell'+\varepsilon$

Ainsi, à partir de la plus grande valeur entre $N$ et $N'$, les termes de la suite sont à la fois strictement supérieurs à $\ell-\varepsilon$ et strictement inférieurs à $\ell'+\varepsilon$. Autrement dit, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell-\varepsilon < u_n < \ell'+\varepsilon$.

Puisque cela vaut pour n'importe quelle valeur de $\varepsilon$, cela reste vrai en prenant par exemple $\varepsilon = \dfrac{\ell-\ell'}{2}$ (ce réel est bien strictement positif puisque $\ell > \ell'$).

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell - \dfrac{\ell-\ell'}{2} < u_n < \ell' + \dfrac{\ell-\ell'}{2}$ et donc $\dfrac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \dfrac{\ell+\ell'}{2}$ et en particulier $\dfrac{\ell+\ell'}{2} < \dfrac{\ell+\ell'}{2}$. C'est impossible : notre supposition de départ, qui était que $\ell \neq \ell'$ était donc erroné. Par conséquent, on a $\ell = \ell'$.

Le raisonnement que nous venons d'appliquer, qui consiste, en supposant une proposition vraie, à aboutir à une conclusion fausse et à en déduire que la proposition de départ devait donc également être fausse s'appelle le **raisonnement par l'absurde**. □

Cette propriété nous permet de définir sans ambiguïté la notion de limite d'une suite.

**Définition 3 — Limite finie, suite convergente :** Soit $(u_n)$ une suite réelle et $\ell$ un réel.

Si $u_n$ tend vers $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, on dit que $\ell$ est **LA** *limite* de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*.

Dans le cas contraire, on parle de suite *divergente* : cela regroupe les suites qui ont une limite infinie mais aussi les suites qui n'admettent pas de limite.

■ **Exemple 2 :** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{4n+5}$.

Pour se faire une idée de la limite, il est possible de calculer quelques termes de la suite. Ainsi, $u_0 = \dfrac{1}{5}$, $u_{10} = \dfrac{21}{45} \simeq 0.467$, $u_{100} = \dfrac{201}{405} \simeq 0.496$... Il semble que la suite soit convergente et que sa limite vaille $\dfrac{1}{2}$.

Pour le prouver formellement, repassons pas la définition : pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, il faut trouver un rang $N$ à partir duquel, pour tout $n > N$, on ait $u_n \in \left]\dfrac{1}{2}-\varepsilon ; \dfrac{1}{2}+\varepsilon\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{4n+2}{2(4n+5)} - \frac{4n+5}{2(4n+5)} = \frac{-3}{2(4n+5)}$$

Cette quantité est négative. On a alors

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2(4n+5)}$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. Ainsi,

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2(4n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+5} < \frac{2\varepsilon}{3} \Leftrightarrow 4n+5 > \frac{3}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4}$, on a $u_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon ; \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$. La suite $(u_n)$ est bien convergente et sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

Par exemple, si $\varepsilon = 0.001$, on a $\frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4} = 374.99$.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 375$, on a $0.499 \leqslant u_n \leqslant 0.501$. ■

Nous verrons très bientôt des résultats qui nous permettront de passer outre cet aspect formel. Même si une telle démonstration de la convergence d'une suite n'est que rarement demandée en classe de terminale, comprendre les bases de ce raisonnement constituera un avantage certain dans les études supérieures.

**Propriété 2 :** Si une suite est convergente, elle est bornée. Par contraposée, si une suite n'est pas bornée, elle ne peut être convergente.

La réciproque est fausse : toute suite bornée n'est pas convergente.

Par exemple, pour tout $n$, prenons $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)$ est bornée puisque, pour tout $n$, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. En revanche, elle n'est pas convergente : ses termes de rangs pairs valent tous 1 et ses termes de rangs impairs valent tous $-1$. Une limite étant unique, la suite $(u_n)$ ne peut être convergente.

## 1.3 Limites de suites usuelles

**Propriété 3 :** Les limites suivantes sont à connaître.

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel non nul $\alpha$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$$

Les suites $(\cos(n))$, $(\sin(n))$ et $((-1)^n)$ n'admettent quant à elles pas de limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

# 2 Opérations sur les limites

## 2.1 Limite de la somme

**Propriété 4 :** On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ et deux réels $\ell_1$ et $\ell_2$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell_1$ | $\ell_1$ | $\ell_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$ | $\ell_1+\ell_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Indéterminé** |

**Démonstration 2 :** Bien qu'elles ne soient pas explicitement au programme, les démonstrations de ces résultats permettent de manipuler et comprendre les définitions des différentes limites de suite.

On s'intéresse ici au cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Les autres démonstrations pourront être traitées en guise d'exercice.

Soit donc $A$ un réel.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier naturel $N_1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N_1$, on a $u_n \geqslant A$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier naturel $N_2$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N_2$, on a $u_n \geqslant 0$.

Posons alors $N = \max(N_1, N_2)$. Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $u_n + v_n \geqslant A + 0$ et donc $u_n + v_n \geqslant A$. Ainsi, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$ □

■ **Exemple 3 :** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = n^2 + \mathrm{e}^{-n} - 4$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4) = -4$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ■

Les cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ n'obéissent à aucune règle précise : il faut les traiter séparément. L'expression "Forme indéterminée" ne signifie pas qu'il est impossible de déterminer une éventuelle limite : il précise simplement qu'il nous est impossible d'appliquer directement les règles de calcul sur les limites de suite.

La limite de la somme peut alors aussi bien être 0, 1, $+\infty$, $-\infty$ ou peut même ne pas exister du tout !

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = n$, $v_n = 1 - n$ et $w_n = n^2 + n$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite $(u_n + v_n)$ avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel $n$, $u_n + v_n = 1$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = 1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Là encore, il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite $(v_n + w_n)$ avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel $n$, $v_n + w_n = n^2 + 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n+w_n) = +\infty$.

Nous avons là deux exemples où la somme de limites "$\infty - \infty$" produit des résultats totalement différents. ■

## 2.2 Limite du produit

**Propriété 5 :** On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ et deux réels $\ell_1$ et $\ell_2$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell_1$ | $\ell_1 \neq 0$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell_2$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$ | $\ell_1 \ell_2$ | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.) | **Indéterminé** |

**r.s. : Règle des signes**

■ **Exemple 5 :** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \left(\dfrac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{n} - 4\right) = -4$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + \sqrt{n}) = +\infty$.
- Finalement, d'après les règles de calcul de limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

■

■ **Exemple 6 :** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \dfrac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n v_n = 2$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 2$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n w_n = 2n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

On voit sur cet exemple que le produit d'une limite infinie et d'une limite qui vaut 0 peut aboutir à plusieurs résultats différents. ■

## 2.3 Limite du quotient

**Définition 4 :** Soit $(u_n)$ une suite réelle et $a$ un réel.

- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^+$ si $u_n$ tend vers $a$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier $N$ tel que, pour tout entier naturel $n$ supérieur à $N$, on a $u_n \geqslant a$.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^-$ si $u_n$ tend vers $a$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier $N$ tel que, pour tout entier naturel $n$ supérieur à $N$, on a $u_n \leqslant a$.

■ **Exemple 7 :** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$. Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. On pourra alors écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1^-$. ■

Cette petite subtilité nous est notamment utile lorsque l'on étudie la limite de quotients dans certains cas...

**Propriété 6 :** On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels $l_1$ et $l_2$, avec $l_2 \neq 0$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\ell_1$ | $\ell_1$ | $\ell_1 \neq 0$ | $\infty$ | 0 | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\ell_2 \neq 0$ | $\infty$ | $0^+$ ou $0^-$ | $l_2$, $0^+$ ou $0^-$ | 0 | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ | $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ | 0 | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.) | **Indéterminé** | |

**r.s. : Règle des signes**

■ **Exemple 8 :** Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $u_n = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{3+n}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+n) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

■ **Exemple 9 :** Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $u_n = \dfrac{1-n}{\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n}}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul $n$, $\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n} \geqslant 0$.
On a en fait $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{1}{n}\right) = 0^+$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ne pas oublier d'appliquer la règle des signes !). ■

# 3 Formes indéterminées

## 3.1 Factorisation par le terme dominant

■ **Exemple 10 :** Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = 4n^2+2n+3$ et $v_n = 3n^2+7n-1$.

On cherche à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$. Or, en utilisant les règles sur les calculs de limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. On se retrouve dans le cas "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Il est toutefois possible de factoriser $u_n$ et $v_n$ par leur terme de plus haut degré (ici, $n^2$ dans les deux cas). Pour tout entier non nul $n$, on a donc

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{4n^2+2n+3}{3n^2+7n-1} = \frac{n^2\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{1}{n^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right) = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) = 3$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{4}{3}$. ■

Il est à noter qu'avant de se lancer dans la factorisation par le terme dominant, il faut s'assurer que celle-ci est nécessaire : en voulant lever une forme indéterminée inexistante, on peut très vite se retrouver à en créer une involontairement.

## 3.2 Quantité conjuguée

La partie suivante s'intéresse aux formes indéterminées faisant intervenir des racines carrées.

**Propriété 7 :** Soit $(u_n)$ une suite réelle positive et $a$ un réel positif.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty$.

■ **Exemple 11 :** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n}$.

D'une part, pour tout entier naturel non nul $n$, $4n^2+1 = n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc

$$\sqrt{4n^2+1} = \sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2}\times\sqrt{4+\frac{1}{n^2}} = n\times\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $u_n = \sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right) = 4$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$. ■

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

L'objectif est ici d'utiliser l'identité remarquable $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$. En particulier, dans le cas des racines carrées, cela entraîne que, pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2 = a-b.$$

■ **Exemple 12 :** Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$. Il s'agit de la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$, il n'est pas possible de conclure directement sur sa limite. Or,

$$u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Le numérateur vaut 2 et le dénominateur tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

# 2. Exercices

## Limite d'une suite

### ▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \sqrt{n}$.

1. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100$.
2. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100000$.
3. Soi $A$ un réel quelconque. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant A$.
4. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(u_n)$ ?

### ▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4 - 3n$.

1. Calculer $u_{30}$, $u_{70}$, $u_{1000}$. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?
2. Soit $A$ un réel. Résoudre l'équation $u_n \leqslant A$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite $(u_n)$ ?

### ▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}$. A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ?

### ▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3-5n}{10n+2}$. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?

### ▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2$.

1. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?
2. Cette limite change-t-elle si $u_0 = 3$ ?

### ▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1. Donner des valeurs approchées au centième de $u_{10}$, $u_{100}$, $u_{1000}$ .
2. La suite $(u_n)$ semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$. Quel est le signe de cette quantité ?
4. En déduire que $|u_n - 3| = u_n - 3$. On rappelle que la valeur absolue d'un réel $x$ vaut $x$ si ce réel est positif et $-x$ sinon.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $|u_n - 3| < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Conclure.

### ▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)$ semble-t-elle avoir une limite ?

# Opérations sur les limites

### ▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$.

**a.** $u_n = n^2 + \sqrt{n}$

**b.** $u_n = \dfrac{1}{n} - n^3$

**c.** $u_n = \mathrm{e}^{-n} + 3n$

**d.** $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n$

**e.** $u_n = -6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}$

**f.** $u_n = \dfrac{1+n}{n}$

**g.** $u_n = (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right)$

**h.** $u_n = \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right)$

**i.** $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$

**j.** $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{1+\frac{1}{n}}$

**k.** $u_n = \dfrac{6+\frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n}-1}$

**l.** $u_n = \dfrac{-1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

**m.** $u_n = n^2 - n$

**n.** $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{3}{n^2}\right)$

**o.** $u_n = \dfrac{3+\sqrt{n}}{1+\dfrac{2}{n}}$

**p.** $u_n = -2n^2 - \dfrac{5}{n+1}$

**q.** $u_n = \dfrac{5}{-1-n}$

**r.** $u_n = (3n+1)\left(\dfrac{1}{n} - 2\right)$

### ▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

Donner deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

### ▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Donner deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 3$.

### ▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Démontrer la propriété suivante : soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

### ▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit $(u_n)$ une suite convergente et $(v_n)$ une suite divergente. En procédant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est divergente.

### ▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Calculer $v_0$, $v_1$, $v_2$ et $v_3$. Quelle semble être la nature de la suite $(v_n)$ ?
   (b) Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier naturel $n$. L'hypothèse de la question précédente est-elle vérifiée ?
   (c) En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.
   (d) En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.
   (e) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

### ► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = u_n - n^2$.

1. Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
2. Déterminer une expression de $v_n$ puis $u_n$ pour tout entier naturel $n$.
3. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

### ► Exercice 15 (Nouvelle-Calédonie 2023) – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

1. Donner $v_0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.
3. En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$
4. En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1}{n + 0.5} - 2$.
5. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

### ► Exercice 16 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x - 2}{2x - 1}$. Déterminer le sens de variations de $f$ sur son domaine de définition.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = 2$.
   (b) En déduire une expression de $v_n$ puis de $u_n$ pour tout entier naturel $n$.
   (c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

# Formes indéterminées

### ► Exercice 17 – Voir le corrigé

En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

**a.** $u_n = \dfrac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3}$

**b.** $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 3}$

**c.** $u_n = \dfrac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$

**d.** $u_n = \dfrac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$

**e.** $u_n = \dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2 - 3n^2}$

**f.** $u_n = \dfrac{n^2 - \dfrac{1}{n^4}}{n^3 + 3}$ pour $n > 0$

### ► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 < u_n < 3$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $a_n = \dfrac{1}{3-u_n}$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{3}$. Pour cela, on exprimera $a_{n+1}$ en fonction de $u_{n+1}$, puis en fonction de $u_n$, puis en fonction de $a_n$.
   (c) En déduire que la suite $(a_n)$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (d) Exprimer $a_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.
   (e) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

### ► Exercice 19 – Voir le corrigé

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

**a.** $u_n = \sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}$

**b.** $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{2n+5}$

**c.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

**d.** $u_n = \sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+2}$

### ► Exercice 20 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

**a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}$

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{n+\mathrm{e}^{-n}}$

**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}}$

### ► Exercice 21 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-n-1}$.

1. En utilisant la quantité conjuguée, montrer que pour tout entier naturel $n > 1$

$$u_n = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2} + \sqrt{n^2-n-1}}.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$,

$$u_n = \frac{4 - \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}}}.$$

3. En déduire, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)$.

# 3. Corrigés

### ► Correction 1 – Voir l'énoncé

Puisque $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 100$ si et seulement si $n \geqslant 100^2$ c'est-à-dire $n \geqslant 10000$.

Puisque $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 100000$ si et seulement si $n \geqslant 100^2$ c'est-à-dire $n \geqslant 10000000000$.

On considère un réel $A$ quelconque.

- Si $A < 0$, alors pour tout $n$, $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, on sait que $\sqrt{n} \geqslant A \Leftrightarrow n \geqslant A^2$. Ainsi, dès que $n \geqslant A^2$, on a $u_n \geqslant A$ et ceci est valable quelque soit la valeur de $A$.

Puisque pour tout $A$, on a $u_n \geqslant A$ à partir d'un certain rang, on peut en conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

### ► Correction 2 – Voir l'énoncé

On a $u_{30} = -86$, $u_{70} = -206$, $u_{1000} = -2996$. Il semble que la limite de la suite $(u_n)$ soit $-\infty$.

$u_n \leqslant A$ si et seulement si $4 - 3n \leqslant A$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{A-4}{-3}$. Puisque pour tout réel $A$, on a $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, on peut en conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

### ► Correction 3 – Voir l'énoncé

Cette suite tend pas vers $+\infty$. En effet, on rappelle qu'il existe une infinité de nombres premiers, et donc une infinité de valeur de $n$ pour lesquels $u_n = 1$. Prenons en particulier $A = 2$ dans la définition de la limite infinie. On a donc que, pour tout $N$, il existe un rang $n \geqslant N$ tel que $u_n < 2$ : il n'est pas possible d'avoir tous les termes de la suite supérieurs à 2 à partir d'un certain rang. La limite de la suite ne peut donc être $+\infty$.

### ► Correction 4 – Voir l'énoncé

Il semble que la limite de la suite $(u_n)$ soit $-\dfrac{1}{2}$.

### ► Correction 5 – Voir l'énoncé

Il semblerait que la limite de cette suite soit 4. On obtient la même limite si on prend $u_0 = 3$.

### ► Correction 6 – Voir l'énoncé

On a $u_{10} = \dfrac{36}{11} \simeq 3.272$, $u_{100} = \dfrac{306}{101} \simeq 3.030$, $u_{1000} = \dfrac{3006}{1001} \simeq 3.003$. Il semblerait que la suite $(u_n)$ soit convergente, de limite 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3n+6}{3+1} - \dfrac{3(n+1)}{n+1} = \dfrac{3n+6-3n-3}{n+1} = \dfrac{3}{n+1}$. Puisque cette valeur est positive, on a $|u_n - 3| = u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, on a $|u_n - 3| < \varepsilon$. Ainsi, la suite $(u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

### ► Correction 7 – Voir l'énoncé

Les termes de rang pair de cette suite valent 1 alors que les termes de rang impair valent -1. Cette suite n'admet pas de limite.

### ► Correction 8 – Voir l'énoncé

**a.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.

**b.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - n^3\right) = -\infty$;

**c.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-n} + 3n\right) = +\infty$.

**d.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n\right) = +\infty$.

**e.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-6n^2 + 1 + \frac{1}{n}\right) = -\infty$ .

**f.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right) = 1$.

**g.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2$.
Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right) = +\infty$.

**h.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = -2$. Finalement, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = 3 \times (-2) = -6$.

**i.** Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser $u_n$. Pour tout entier $n$, $u_n = \sqrt{n}(1-n^2)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**j.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty$.

**k.** On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{3}{n^2}\right) = 6$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n} - 1\right) = -1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1} = \frac{6}{-1} = -6$.

**l.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right) = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$. Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous $n>0$, $u_n = n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)$ et utiliser les règles de calcul sur un produit.

**m.** Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty-\infty$". Il faut donc factoriser $u_n$. Pour tout entier naturel $n$, $u_n = n(n-1)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**n.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2$.
Ainsi, par limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**o.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+\sqrt{n}) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**p.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n^2 = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**q.** Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1-n) = -\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**r.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}-2\right) = -2$. Ainsi, en utilisant la règle des limites sur les produits, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ne pas oublier la règle des signes).

### ► Correction 9 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n v_n = \frac{1}{n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

### ► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = n$ et $v_n = 3-n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n + v_n 3$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = 3$

### ► Correction 11 – Voir l'énoncé

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif et $A$ un réel

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier $N_1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N_1$, on a $u_n \geqslant A - l + \varepsilon$
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, il existe un entier $N_2$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N_2$, on a $v_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. En particulier, $v_n \geqslant \varepsilon$

Prenons alors $N = \max(N_1; N_2)$. Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $u_n + v_n \geqslant A - l + \varepsilon + l - \varepsilon$, c'est-à-dire $u_n \geqslant A$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$.

### ► Correction 12 – Voir l'énoncé

Supposons que la suite $(u_n+v_n)$ converge. Alors, pour tout entier naturel $n$, $v_n = (u_n+v_n) - u_n$. $(v_n)$ est donc la différence de deux suites convergentes, elle est donc convergente, ce qui est contraire à ce qu'indique l'énoncé. Finalement, la suite $(u_n+v_n)$ diverge.

### ► Correction 13 – Voir l'énoncé

On a $u_1 = \dfrac{1}{1+2\times 1} = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{5}$ et $u_3 = \dfrac{\frac{1}{5}}{1+2\times\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{1}{7}$.

Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $P(n)$ : « $u_n > 0$ ».

- Initialisation : $u_0 = 1 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > 0$ et donc $1+2u_n > 0$. $u_{n+1}$ est le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc également strictement positif.
- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

On a alors $v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$. La suite $(v_n)$ semble arithmétique.

Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+2u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 2.

Pour tout entier naturel $n$, $v_n = v_0 + 2n = 1 + 2n$ et $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2n+1}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

### ► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - (n+1)^2 - (u_n - n^2) = u_n + 2n - 1 - (n^2+2n+1) - u_n + n^2 = -2.$$

Ainsi, $(v_n)$ est arithmétique, de premier terme $v_0 = u_0 - 0^2 = 3$ et de raison $-2$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_n = 3 - 2n$.

Or, puisque $v_n = u_n - n^2$, il en vient que $u_n = v_n + n^2 = n^2 - 2n + 3$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)$. Or, $\overset{2}{\lim\limits_{n\to+\infty}} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right) = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

### ► Correction 15 – Voir l'énoncé

On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ et donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2}$.

Or, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n-4}{u_n+3}$. On remplace donc $u_{n+1}$ par cette valeur. Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2u_n+6)}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{u_n+2}{u_n+3}} = \frac{u_n+3}{u_n+2}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3}{u_n+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{u_n+2}{u_n+2} = 1.$$

Finalement, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 1 + v_n$. La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 1.

Pour tout entier naturel $n$, on a donc $v_n = v_0 + n \times 1$ soit $v_n = \frac{1}{2} + n$.

Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$. Ainsi, $\frac{1}{v_n} = u_n + 2$ et $u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1}{n + 0.5} - 2$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+0.5} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

### ► Correction 16 – Voir l'énoncé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

$f$ est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$,

$$f'(x) = \frac{3(2x-1) - 2(3x-2)}{(2x-1)^2} = \frac{6x - 3 - 6x + 4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0.$$

$f$ est donc strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $P(n)$ : « $u_n > 1$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 2 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > 1$. La fonction $f$ étant strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, on a donc $f(u_n) > f(1)$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \frac{3 \times 1 - 2}{2 \times 1 - 1} = 1$. Ainsi, $u_{n+1} > 1$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Puisque pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$, il en vient que $u_n - 1 \neq 0$ et la suite $(v_n)$ est donc bien définie.

Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2}{2u_n - 1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 2 - (2u_n - 1)}{2u_n - 1}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{2u_n - 1}} - \frac{1}{u_n - 1}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2.$$

Finalement, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite $(v_n)$ est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2 - 1} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_n = 1 + 2n$.

Par ailleurs, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ et donc $u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{1 + 2n} + 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

### ► Correction 17 – Voir l'énoncé

**a.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\frac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3} = \frac{n^3\left(3 + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{2}{n^3} - 4\right)} = \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{\frac{2}{n^3} - 4}$.

En appliquant les règles de calcul classiques sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3} = -\frac{3}{4}$.

**b.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n^2+1}{n+3} = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)} = n \times \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}$ .

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n+3} = +\infty$.

**c.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3} = \dfrac{n^3\times\left(\dfrac{1}{n^3}-2\right)}{n^3\times\left(\dfrac{1}{n}-3\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{n^3}-2}{\dfrac{1}{n}-3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3} == \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

**d.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1} = \dfrac{n^4\left(\dfrac{1}{n^4}-6\right)}{n^6\left(5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}\right)} = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}} = -\dfrac{6}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1} = 0$.

**e.** Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\frac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2} = \frac{n\times\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\times n^2\times\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\times\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)} = n \times \frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{n^2}-3\right) = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2} = -\infty$.

**f.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3} = \dfrac{n^2\times\left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)}{n^3\times\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{n^6}}{1+\dfrac{3}{n^3}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^6}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{n^3}\right) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3} = 0$.

### ► Correction 18 – Voir l'énoncé

$u_1 = \dfrac{9}{6-1} = \dfrac{9}{5}$, $u_2 = \dfrac{9}{6-\frac{9}{5}} = \dfrac{9}{\frac{21}{5}} = \dfrac{45}{21} = \dfrac{15}{7}$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $P(n)$ : « $0 < u_n < 3$ ».

- **Initialisation** : Puisque $u_0 = 1$, on a bien $0 < u_0 < 3$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Ainsi, $0 < u_n < 3$ En multipliant par $-1$, qui est négatif, on a donc $0 > -u_n > -3$. On ajoute 6 pour avoir $6 > 6-u_n > 3$. On applique alors la fonction inverse

qui est décroissante sur $]0;+\infty[$. On a donc $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6-u_n} < \dfrac{1}{3}$. Enfin, on multiplie par 9 pour obtenir $\dfrac{3}{2} < \dfrac{9}{6-u_n} < 3$. Or, puisque $0 < \dfrac{3}{2}$, on a bien $0 < u_{n+1} < 3$. $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, $P$ est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n = \dfrac{1}{3-u_n}$. Puisque $a_n \neq 0$, on peut appliquer la fonction inverse à cette égalité. On a alors $\dfrac{1}{a_n} = 3 - u_n$. Ainsi, $u_n = 3 - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{1}{3-u_n}$. Ainsi, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-u_{n+1}}$.

Or, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}$. Ainsi $a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - \dfrac{9}{6-u_n}} = \dfrac{1}{\dfrac{3(6-u_n)-9}{6-u_n}} = \dfrac{6-u_n}{9-3u_n}$.

Or, d'après la question précédente, $u_n = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$. Ainsi, $a_{n+1} = \dfrac{6 - \dfrac{3a_n-1}{a_n}}{9 - 3 \times \dfrac{3a_n - 1}{a_n}} = \dfrac{\dfrac{6a_n - (3a_n - 1)}{a_n}}{\dfrac{9a_n - 3\times(3a_n-1)}{a_n}}$.

On a donc $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n} \times \dfrac{a_n}{3} = \dfrac{3a_n+1}{3} = a_n + \dfrac{1}{3}$.

La suite $(a_n)$ est donc arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$. Son premier terme vaut $a_0 = \dfrac{1}{3-u_0} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$. On rappelle que si $(a_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$, alors pour tout entier naturel $n$, $a_n = a_0 + rn$. Dans notre cas, pour tout entier naturel $n$, $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{3}$.

On sait que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{3 \times \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{3}\right) - 1}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{3}} = \frac{\dfrac{3}{2} + n - 1}{\dfrac{3+2n}{6}} = \frac{6 \times \left(n + \dfrac{1}{2}\right)}{3+2n} = \frac{6n+3}{3+2n}.$$

En utilisant les règles sur les calculs de limites, on aboutit à une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n = \dfrac{n\left(6 + \dfrac{3}{n}\right)}{n\left(\dfrac{3}{n} + 2\right)} = \dfrac{6 + \dfrac{3}{n}}{\dfrac{3}{n} + 2}$.

Finalement, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{6}{2} = 3$.

### ► Correction 19 – Voir l'énoncé

**a.** Pour tout entier naturel $n > 3$,

$$\sqrt{n-3} - \sqrt{n+8} = (\sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}) \times \frac{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+8}}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+8}} = \frac{n-3-(n+8)}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+8}}$$

et donc

$$\sqrt{n-3} - \sqrt{n+8} = -\frac{11}{\sqrt{n-3} + \sqrt{n+8}}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8})=0$.

**b.** Attention à ne pas se lancer dans des calculs par pur automatisme, il ne s'agit pas ici d'une forme indéterminée ! $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+5}=+\infty$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$,

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{(n+1)-(n+2)}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{-1}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})=+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

**d.** Pour tout entier naturel $n$,

$$u_n=(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n+2})\times\frac{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}=\frac{4n+3-(4n+2)}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}=\frac{1}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

### ► Correction 20 – Voir l'énoncé

**a.** Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\frac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}=\frac{\sqrt{n}\times\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+1\right)}{\sqrt{n\left(\frac{4}{n}+1\right)}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\times\frac{\frac{4}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{\frac{4}{n}+1}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{\frac{4}{n}+1}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+1\right)=1$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}+1\right)=1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4}{n}+1}=\sqrt{1}=1$.

Finalement, $\lim_{n\to+\infty}\frac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}=1$.

**b.** Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+\mathrm{e}^{-n}}=\frac{\sqrt{n^2}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)}=\frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{2}$.

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)=1$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty}w_n=\sqrt{2}$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$,

$$\frac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}=\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}^{-n}+1)}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n}}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n}}=1$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}}=\sqrt{1}=1$.

### ► Correction 21 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$u_n = \sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-n-1} \times \frac{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}.$$

En développant le numérateur, on a alors

$$u_n = \frac{n^2+3n-2-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}} = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}.$$

On a en effet

$$\sqrt{n^2+3n-2} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = n\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

et

$$\sqrt{n^2-n-1} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = n\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi

$$u_n = \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right) = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right) = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}\right) = \frac{4}{1+1} = 2$.