

1. Exercices

Rappels sur la dérivation

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Dériver les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition et de dérivation.

$$f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

$$f_2 : x \mapsto 8x^7 + \frac{4}{x^2}$$

$$f_3 : x \mapsto 2x^4 + e^{3x-1}$$

$$f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)e^x$$

$$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{e^x}{x}$$

$$f_7 : x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$$

$$f_8 : x \mapsto \frac{x + e^3}{e^x}$$

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f .

► Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{10x + 4}{5x^2 + 1}$

1. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} . Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Construire le tableau de variations de f sur \mathbb{R}

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles

$$f'(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f .

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + x + 1)e^{1-3x}$ définie sur \mathbb{R} .

► Exercice 6 (Centres étrangers 2024) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n e^{-u_n}$

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; 1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x , on a $e^x \geq 1 + x$

Dérivée seconde

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Pour chacune des fonctions suivantes, deux fois dérivables sur l'intervalle mentionné, donner une expression de la dérivée seconde.

$$f_1 : x \mapsto 6x^2 + 2x - 1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_2 : x \mapsto 3x^2 + 2x - \frac{3}{x}, \text{ sur }]-\infty; 0[$$

$$f_3 : x \mapsto x^2 e^{3x+1}, \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{3x^2 - 1}{x}, \text{ sur }]-\infty; 0[$$

$$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)e^{3x+2}, \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{e^x}{x}, \text{ sur }]0; +\infty[$$

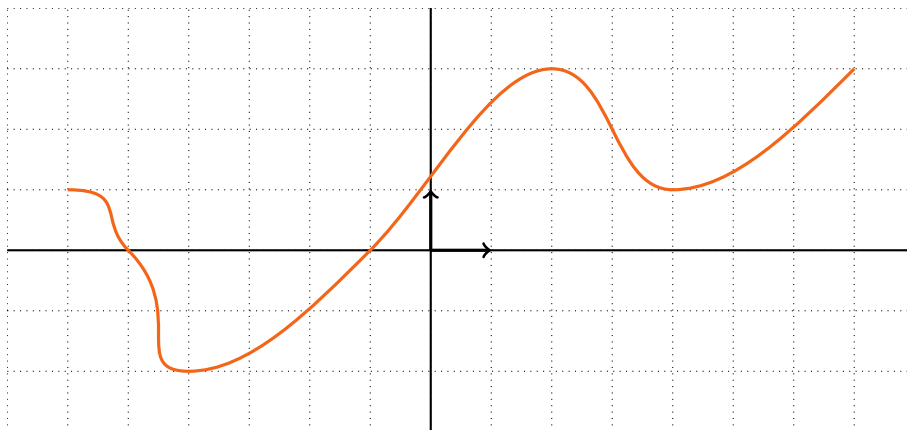
► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. On note f'' la dérivée de f' . Que vaut $f''(x)$?
3. Construire la tableau de signes de f'' .
4. En déduire le tableau de variations de f' .
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f .

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère une fonction f deux fois dérivable. On a représenté ci-dessous la courbe de f' dans un repère orthonormé.



On sait par ailleurs que $f(-6) = -1$, $f(-5,5) = 0$ et $f(-1) = 2$. Construire le tableau de signes de f'' et f sur l'intervalle $[-6; 7]$.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I . Justifier que (fg) est deux fois dérivable sur I et exprimer $(fg)''$ en fonction de f , g et de leurs dérivées.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. Pour tout réel x , on pose $f(x) = (ax + b)e^x$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} puis donner une expression de $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Montrer que pour tout réel x , $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et n un entier naturel. Lorsqu'il est possible de dériver n fois la fonction f sur I , on dit que f est n fois dérivable et on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois. On a alors $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$...

1. On considère la fonction $f : x \mapsto xe^x$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , f est n fois dérivable et pour tout réel x , $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto xe^{-x}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , g est n fois dérivable et pour tout réel x , $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^x$.

Composition de fonctions

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Pour tout réel x , on pose $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x + 2$ et $h(x) = 2 - x$.

Donner une expression de $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(h \circ g)(x)$ et $(f \circ g \circ h)(x)$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Exprimer chacune des fonctions suivantes comme la composition de deux fonctions « usuelles ». On ne se souciera pas des domaines de définition.

$$f_1 : x \mapsto e^{1+x^2}$$

$$f_2 : x \mapsto (3x+8)^7$$

$$f_3 : x \mapsto \sqrt{1+e^x}$$

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Soit f une fonction définie sur un ensemble E . On dit que f est une involution de E si pour tout $x \in E$, $(f \circ f)(x) = x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une involution de \mathbb{R}^* .
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x \mapsto a - x$ est une involution de \mathbb{R} .
3. Soit a et b deux réels, avec $b \neq 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{b}{x-a} + a$ est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Dériver les fonctions suivantes, dérivables sur l'intervalle donné.

$$f_1 : x \mapsto (3x+2)^2, \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_2 : x \mapsto (6x^2+3x+4)^3, \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_3 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}, \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$f_4 : x \mapsto \sqrt{2x^2-5x+7}, \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{1}{(3x+6)^2}, \text{ sur }]-2; +\infty[$$

$$f_6 : x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}, \text{ sur }]-\infty; 0[$$

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x^2+2x-1}$, définie sur \mathbb{R} .

1. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Construire le tableau de variations de f .
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1 .

► **Exercice 19 – Voir le corrigé**

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, définie et dérivable sur \mathbb{R} puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

► **Exercice 20 – Voir le corrigé**

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. On note D le domaine de définition de f et D' son domaine de dérivabilité.

1. Déterminer D et D' .
2. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout $x \in D'$.
3. Pour tout réel $x \in D$, on pose $g(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$.
 - (a) Justifier que g est dérivable sur D' et calculer $g'(x)$ pour tout x dans D' .
 - (b) En déduire le sens de variations de g puis tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

► **Exercice 21 – Voir le corrigé**

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

1. Construire le tableau de variation de f .
2. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout réel x .

► **Exercice 22 – Voir le corrigé**

Pour tout réel x , on pose $f(x) = \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{2} \right)^2$.

1. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Justifier que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x .

► **Exercice 23 – Voir le corrigé**

Donner une expression de la dérivée seconde de la fonction $f : x \mapsto e^{1/x}$ sur $]0; +\infty[$.

► **Exercice 24 – Voir le corrigé**

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{x}}$, définie sur $]0; +\infty[$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{(2x-1)e^x}{2x\sqrt{x}}$.
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

On considère désormais la fonction $g : x \mapsto \frac{e^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

On peut remarquer que pour tout réel x , $g(x) = f(x^2 + x + 1)$.

3. Justifier que g est définie et dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x ,

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Indication : ne pas utiliser la dérivée d'un quotient vous épargnera de longs et pénibles calculs.

4. Construire le tableau de variations de g sur \mathbb{R} .

2. Correction des exercices

► Correction 1 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x , $f'_1(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 3 = 15x^2 + 4x - 3$.

b. Pour tout réel non nul x , $f'_2(x) = 8 \times 7x^6 + 4 \times \left(-\frac{2}{x^3}\right) = 56x^6 - \frac{8}{x^3}$.

Remarque : en mettant au même dénominateur, on a $f'_2(x) = \frac{56x^9 - 8}{x^3}$.

c. Pour tout réel x , $f'_3(x) = 2 \times 4x^3 + 3e^{3x-1} = 8x^3 + 3e^{3x-1}$.

d. Pour tout réel x , on pose $u(x) = 5x^2 + 2x - 1$ et $v(x) = e^x$.

- u est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $u'(x) = 10x + 2$.
- v est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $v'(x) = e^x$.

Ainsi, puisque $f_4 = uv$, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'_4 = u'v + uv'$. Pour tout réel x , on a donc

$$f'_4(x) = (10x + 2)e^x + (5x^2 + 2x - 1)e^x = (5x^2 + 12x + 1)e^x.$$

e. Pour tout réel x , on pose $u(x) = 1 - 6x^2$ et $v(x) = e^{3x+2}$.

- u est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $u'(x) = -12x$.
- v est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $v'(x) = 3e^{3x+2}$.

Ainsi, puisque $f_5 = uv$, f_5 est dérivable sur \mathbb{R} et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x , on a donc

$$f'_5(x) = -12xe^{3x+2} + (1 - 6x^2) \times 3e^{3x+2} = [-12x + (1 - 6x^2) \times 3]e^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)e^{3x+2}.$$

f. Pour tout réel non nul x , on pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$.

- u est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x , $u'(x) = e^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x , $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f_6 = \frac{u}{v}$, f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et $f'_6 = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel non nul x , on a donc

$$f'_6(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

g. Pour tout réel $x \neq 5$, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = x - 5$.

- u est dérivable sur $] -\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $u'(x) = 2x + 3$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $] -\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \frac{u}{v}$, f est dérivable sur $] -\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq 5$, on a donc

$$f'_7(x) = \frac{(2x+3)(x-5) - (x^2+3x+1)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x + 3x - 15 - x^2 - 3x - 1}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x - 16}{(x-5)^2}.$$

h. Pour tout réel x , on pose $u(x) = x + e^3$ et $v(x) = e^x$.

- u est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , $u'(x) = 1$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , $v'(x) = e^x$.

Ainsi, puisque $f = \frac{u}{v}$, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x , on a donc

$$f'_8(x) = \frac{1 \times e^x - (x + e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(-x + 1 - e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x + 1 - e^3}{e^x}.$$

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , on a $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$.

Notons Δ le discriminant du polynôme $3x^2 + 6x - 45$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576 > 0$.

Le polynôme $3x^2 + 6x - 45$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = 3.$$

Par ailleurs, le signe d'un polynôme est celui de son coefficient dominant (ici, 3) à l'extérieur des racines. Il est du signe opposé entre les racines. On peut alors dresser le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	<div><div></div><div>196</div><div></div><div>-60</div><div></div></div>				

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , on pose $u(x) = 10x + 4$ et $v(x) = 5x^2 + 1$

- u est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , $u'(x) = 10$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , $v'(x) = 10x$

Ainsi, puisque $f = \frac{u}{v}$, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x , on a donc

$$f'(x) = \frac{10 \times (5x^2 + 1) - (10x + 4) \times 10x}{(5x^2 + 1)^2} = \frac{-50x^2 - 40x + 10}{(5x^2 + 1)^2}$$

Pour tout réel x , $(5x^2 + 1)^2 > 0$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $-50x^2 - 40x + 10$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-40)^2 - 4 \times 10 \times (-50) = 3600 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-(-40) + \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-40) - \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = \frac{1}{5} = 0.2$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-1	0.2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
f				

► Correction 4 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x$.

- u est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $u'(x) = e^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \frac{u}{v}$, f est dérivable sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{e^x \times (1+x) - e^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel $x \neq -1$, $(1+x)^2 > 0$ et $e^x > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de x (hormis en -1 , valeur interdite).

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		0	$+$
f				

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , on pose $u(x) = -x^2 + x + 1$ et $v(x) = e^x$.

- u est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $u'(x) = -2x + 1$
- v est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $v'(x) = e^x$

Ainsi, puisque $f = uv$, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x , on a donc

$$f'(x) = (-2x + 1)e^x + (-x^2 + x + 1)e^x = (-x^2 - x + 2)e^x.$$

Pour tout réel x , $e^x > 0$. Il ne reste donc qu'à étudier le signe de $-x^2 - x + 2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré. Son discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$. Le polynôme $-x^2 - x + 2$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = -2.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
f			$3e^{-2}$	e		

► Correction 6 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $[0; 1]$

De plus, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a

$$f'(x) = 2 \times e^{-x} + 2x \times (-e^{-x}) = (2 - 2x)e^{-x}.$$

Or, pour tout $x \in [0; 1]$, $e^{-x} > 0$. Par ailleurs, si $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \geq -2x \geq -2$ et donc $2 \geq 2 - 2x \geq 0$. En particulier, pour tout $x \in [0; 1]$, $2 - 2x \geq 0$.

Ainsi, pour tout réel positif $x \in [0; 1]$, $f'(x) \geq 0$. f est donc croissante sur $[0; 1]$.

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 2 \times 0,1 \times e^{-0,1} \simeq 0,18$. On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. La fonction f étant croissante sur $[0; 1]$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1).$$

Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = \frac{2}{e} \leq 1$. Il en vient que



$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{2}{e} \leq 1.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie. \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , on pose $f(x) = e^x - x - 1$. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = e^x - 1$. On sait par ailleurs que $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f		0	

On a en effet $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$. Ainsi, pour tout réel x , $f(x) \geq 0$, soit $e^x - x - 1 \geq 0$ ou $e^x \geq 1 + x$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , $f'_1(x) = 12x + 2$ et $f''_1(x) = 12$.

Pour tout réel $x < 0$, $f'_2(x) = 6x + \frac{3}{x^2}$ et $f''_2(x) = 6 - \frac{6}{x^3}$.

Pour tout réel x , on pose $u_1(x) = x^2$ et $v_1(x) = e^{3x+1}$. u_1 et v_1 sont dérivables sur \mathbb{R} . f est donc également dérivable sur \mathbb{R} et $f' = u'_1 v_1 + u_1 v'_1$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f'_3(x) = 2x \times e^{3x+1} + x^2 \times 3e^{3x+1} = (3x^2 + 2x)e^{3x+1}.$$

Pour tout réel x , on pose $u_2(x) = 3x^2 + 2x$ et $v_2(x) = e^{3x+1}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur \mathbb{R} , f'_3 l'est donc également et $f''_3 = u'_2 v_2 + u_2 v'_2$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f''_3(x) = (6x + 2)e^{3x+1} + (3x^2 + 2x) \times 3e^{3x+1} = (3x^2 + 12x + 2)e^{3x+1}.$$

On peut remarquer que pour tout réel $x < 0$, $f_4(x) = \frac{3x^2}{x} - \frac{1}{x} = 3x - \frac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout réel $x < 0$, $f'_4(x) = 3 + \frac{1}{x^2}$ et $f''_4(x) = -\frac{2}{x^3}$.

Pour tout réel x , on pose $u_1(x) = 1 - 6x^2$ et $v_1(x) = e^{3x+2}$.

- u_1 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $u'_1(x) = -12x$.
- v_1 est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $v'_1(x) = 3e^{3x+2}$.

Ainsi, puisque $f_5 = u_1 v_1$, f_5 est dérivable sur \mathbb{R} et $f'_5 = u'_1 v_1 + u_1 v'_1$. Pour tout réel x , on a donc

$$f'_5(x) = -12xe^{3x+2} + (1 - 6x^2) \times 3e^{3x+2} = [-12x + (1 - 6x^2) \times 3]e^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)e^{3x+2}.$$

Pour tout réel x , on pose alors $u_2(x) = -18x^2 - 12x + 3$ et $v_2(x) = e^{3x+2}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur \mathbb{R} , f'_5 l'est donc également. Pour tout réel x ,

$$f''_5(x) = (-36x - 12)e^{3x+2} + (-18x^2 - 12x + 3) \times 3e^{3x+2} = (-54x^2 - 72x - 3)e^{3x+2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u_1(x) = e^x$ et $v_1(x) = x$. u_1 et v_1 sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f_6 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel x ,

$$f'_6(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

Posons alors, pour tout réel $x > 0$, $u_2(x) = (x-1)e^x$ et $v_2(x) = x^2$. v_2 est dérivable et ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. Par ailleurs, u_1 est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est un produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$

$$u'_1(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$

$$f''_6(x) = \frac{xe^x \times x^2 - (x-1)e^x \times 2x}{x^4} = \frac{(x^3 - 2x^2 + 2x)e^x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}$$

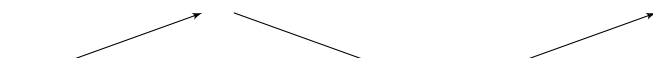
► **Correction 9 – Voir l'énoncé**

Pour tout réel x , $f'(x) = 12x^3 + 48x^2 - 132x - 360$ et $f''(x) = 36x^2 + 96x - 132$.

f'' est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant vaut $96^2 - 4 \times 36 \times (-132) = 28224 > 0$. L'équation $f''(x) = 0$ admet donc deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-96 - \sqrt{28224}}{2 \times 36} = -\frac{11}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-96 + \sqrt{28224}}{2 \times 36} = 1.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f'' . Par ailleurs, f'' étant la dérivée de f' , on en déduit le tableau de variations de f' .

x	$-\infty$	$-11/3$	1	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f'					

Puisque f' est croissante sur $] -\infty; 5]$ et que $f'(5) = 0$, on en déduit que pour tout réel $x \leq 5$, $f'(x) \leq 0$. En raisonnant de même sur les autres intervalles, on en déduit le tableau de signes de f' et donc le tableau de variations de f .

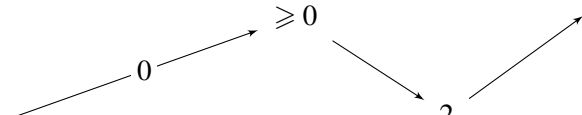
x	$-\infty$	-5	$-11/3$	-2	1	3	$+\infty$			
$f''(x)$		+	+	0	-	-	0	+		
f'										
$f'(x)$		-	0	+	+	0	-	-	0	+
f										

► **Correction 10 – Voir l'énoncé**

f'' est la dérivée de f' . Les variations de f' nous donnent donc le signe de f'' .

x	-6	-4	2	4	7		
f'	1		3		3		
		-2		1			
f''	-	0	+	0	-	0	+

Par ailleurs, à l'aide du signe de f' , on peut construire le tableau de variations de f . Les informations sur les valeurs extrêmes de f nous permettent de construire son tableau de signes.

x	-6	-5.5	-5	-1	7			
$f'(x)$		+	+	0	-	0	+	0
f								
$f(x)$		-	0	+		+		+

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Si f et g sont dérivables, alors fg l'est également et $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus f' et g' sont dérivables, alors $f'g$ et fg' le sont également et

- $(f'g)' = f''g + f'g'$;
- $(fg')' = f'g' + fg''$.

Ainsi, $(fg)'$ est dérivable et $(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Les fonctions $x \mapsto ax + b$ et $x \mapsto e^x$ sont deux fois dérivables sur \mathbb{R} . Leur produit est donc deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , $f'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$ et $f''(x) = ae^x + (ax + a + b)e^x = (ax + 2a + b)e^x$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax + 2a + b)e^x - 2(ax + a + b)e^x + (ax + b)e^x$$

et donc

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax + 2a + b - 2ax - 2a - 2b + ax + b)e^x = 0$$

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « f est n fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$ ».

- **Initialisation** : f est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x , $f^{(0)}(x) = f(x) = (x + 0)e^x$.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors f est n fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$. $f^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R} car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} . f est donc $n + 1$ fois dérivable sur \mathbb{R} . Par ailleurs, pour tout réel x ,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = e^x + (x + n)e^x = (x + n + 1)e^x.$$

$P(n + 1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « g est n fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x - n)e^{-x}$ ».

- **Initialisation** : g est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x , $g^{(0)}(x) = g(x) = (-1)^0(x-0)e^{-x}$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors g est n fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$. $g^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R} car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} . g est donc $n+1$ fois dérivable sur \mathbb{R} . Par ailleurs, pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= (g^{(n)})'(x) = (-1)^n \times (e^{-x} + (x-n) \times (-e^{-x})) \\ &= (-1)^n(1-x+n)e^{-x} \\ &= (-1)^n \times (-(x-n-1))e^{-x} \\ &= (-1)^{n+1}(x-(n+1))e^{-x}. \end{aligned}$$

$P(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x ,

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2 + 1 = (3x+2)^2 + 1 = 9x^2 + 12x + 5$.
- $(g \circ f)(x) = 3f(x) + 2 = 3(x^2 + 1) + 2 = 3x^2 + 5$.
- $(h \circ g)(x) = 2 - g(x) = 2 - (3x+2) = -3x$.
- $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (3h(x) + 2)^2 + 1 = (8 - 3x)^2 + 1 = 9x^2 - 48x + 65$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , on pose $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1 + x^2$. On a alors $f_1 = u \circ v$.

Pour tout réel x , on pose $u(x) = x^7$ et $v(x) = 3x + 8$. On a alors $f_2 = u \circ v$.

Pour tout réel positif x positif, on pose $u(x) = \sqrt{x}$. Pour tout réel x , on pose $v(x) = 1 + e^x$. On a alors $f_3 = u \circ v$.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \neq 0$, $f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. f est bien une involution de \mathbb{R}^* .

Pour tout réel x , $f(f(x)) = a - (a - x) = x$. f est une involution de \mathbb{R} .

Pour tout réel $x \neq a$,

$$f(f(x)) = \frac{b}{\left(\frac{b}{x-a} + a\right) - a} + a = \frac{b}{\frac{b}{x-a}} + a = x - a + a = x.$$

f est une involution de $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x , $f_1'(x) = 3 \times 2(3x+2) = 18x + 12$.

b. Pour tout réel x , $f_2'(x) = (12x+3) \times 3(6x^2+3x+4)^2 = (36x+9)(6x^2+3x+4)^2$.

c. Pour tout réel $x > 0$, $f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$.

d. Pour tout réel x , $f_4'(x) = \frac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+7}}$.

e. Pour tout réel $x > 2$, $f'_5(x) = 3 \times \left(-\frac{2}{(3x+6)^3} \right) = -\frac{6}{(3x+6)^3}$.

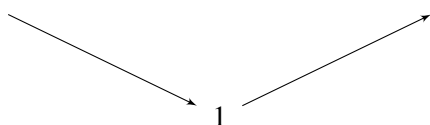
f. Pour tout réel $x \neq 0$, $f'_6(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) e^{x+\frac{1}{x}}$.

► **Correction 18 – Voir l'énoncé**

Pour tout réel x , $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x - 1$. u est dérivable sur \mathbb{R} , f l'est donc aussi et $f' = u'e^u$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f'(x) = (6x+2)e^{3x^2+2x-1}.$$

Pour tout réel x , $e^{3x^2+2x-1} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $6x+2$.

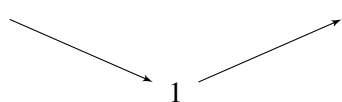
x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

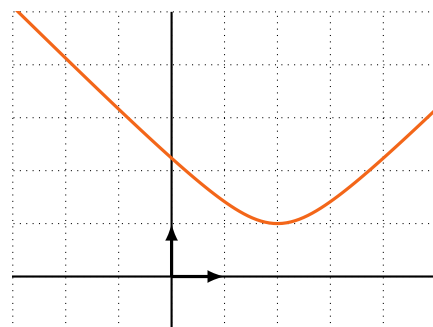
La tangente à la courbe de f à l'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = -4(x+1) + 1$ ou encore $y = -4x - 3$.

► **Correction 19 – Voir l'énoncé**

Pour tout réel x , $x^2 - 4x + 5 > 0$. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif. De plus, $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Ainsi, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f'(x) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-4x+5} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x-4$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			



► **Correction 20 – Voir l'énoncé**

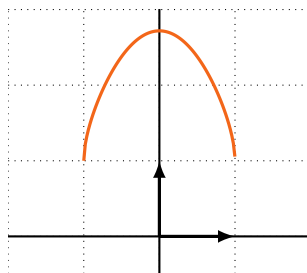
1. $\sqrt{1-x^2}$ existe si et seulement si $1-x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $x^2 \leq 1$ et donc $x \in [-1; 1]$. Par ailleurs, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro. Ainsi, f n'est pas dérivable en -1 et 1 , qui sont les solutions de l'équation $1-x^2=0$. On a donc $D' =]-1; 1[$.
2. Pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. (a) On a $g = e^f$. Or, f est dérivable sur D' , g l'est donc également et pour tout réel x de D' ,

$$g'(x) = f'(x) \times e^{f(x)} = -\frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Puisque pour tout réel $x \in D$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ et $e^{-\sqrt{1-x^2}} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	-1	0	1
$f'(x)$	+	0	-
f	1	e	1

(c) On trace l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

► **Correction 21 – Voir l'énoncé**

f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = (2x+2)e^{x^2+2x-5}$ qui est du signe de $2x+2$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		e^{-6}	

En utilisant la dérivée d'un produit, pour tout réel x , on a

$$f''(x) = 2 \times e^{x^2+2x-5} + (2x+2) \times (2x+2)e^{x^2+2x-5} = (4x^2+8x+6)e^{x^2+2x-5}.$$

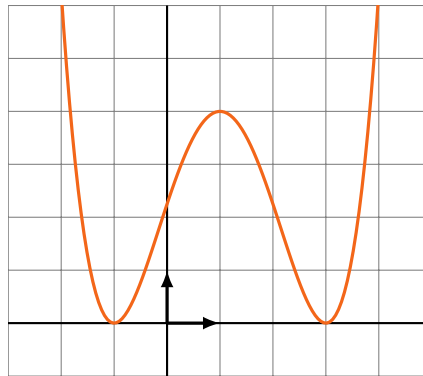
► **Correction 22 – Voir l'énoncé**

Pour tout réel x , on pose $u(x) = \frac{x^2-2x-3}{2}$. u est dérivable sur \mathbb{R} et $f = u^2$. f est donc dérivable sur \mathbb{R} et $f' = 2u'u$. Pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2 \times (x-1) \times \frac{x^2-2x-3}{2} = (x-1)(x^2-2x-3).$$

Le polynôme $x^2 - 2x - 3$ s'annule en -1 et en 3 . Ainsi, pour tout réel x , $f'(x) = (x-1)(x+1)(x-3)$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f					



f' est le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} et est donc dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x ,

$$f''(x) = 1 \times (x^2 - 2x - 3) + (x-1) \times (2x-2) = 3x^2 - 6x - 1.$$

► Correction 23 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = \frac{1}{x}$. u est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f = e^u$. f est donc dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f' = u'e^u$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$.

f' est également dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$. Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$,

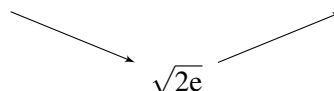
$$f''(x) = -\left(\frac{-\frac{e^{1/x}}{x^2} \times x^2 - e^{1/x} \times 2x}{(x^2)^2} \right) = \frac{(2x+1)e^{1/x}}{x^4}.$$

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x \times \sqrt{x} - e^x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{1}{x} \times \frac{e^x \sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{(2x-1)e^x}{2x\sqrt{x}}.$$

2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $(2x-1)$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

3. La fonction $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ est une fonction dérivable sur \mathbb{R} . Par ailleurs, pour tout réel x , $x^2 + x + 1 > 0$ (on calcule le discriminant du polynôme $x^2 + x + 1$, celui-ci est strictement négatif). Ainsi, g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = (2x + 1) \times \frac{(2(x^2 + x + 1) - 1)e^{x^2 + x + 1}}{2(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

et donc

$$g'(x) = \frac{(2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)e^{x^2 + x + 1}}{2(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

4. $g'(x)$ est du signe de $(2x + 1)$ (on vérifie que pour tout réel x , $2x^2 + 2x + 1 > 0$ à l'aide du discriminant par exemple).

x	0	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	