1. Exercices

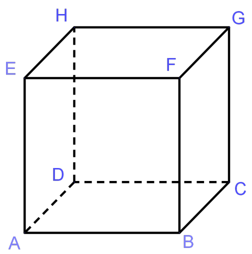
Produit scalaire

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère trois points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1. Calculer les produits scalaires suivants



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$
$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{ED}$	$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{FB}$
$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CE}$	$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{ED}$

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Est-il possible d'avoir 3 points de l'espace A, B et C tels que $AB = 3$, $BC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$?

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$.

1. Que vaut $2\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot (4\vec{w} + \vec{u})$?

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1. $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 4$
2. $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 3$
3. $||\vec{u} - \vec{v}|| = 7$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 12$

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 4$ et $||u \vec{-} v|| = 5$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Soit A, B et C trois points de l'espace tel que $AB + BC = AC$. Montrer que ces points sont alignés.

Base orthonormée

► Exercice 10 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;1;2)$, $C(8;2;x)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

► Exercice 12 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(3;4;2)$, $B(5;2;2x)$, $C(3;10;x)$. Pour quelles valeurs du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

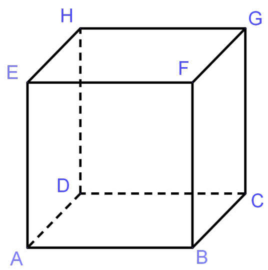
► Exercice 13 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. Calculer les longueurs AB et AC.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie eu degré près.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1 ainsi que les points I, J et K, centres respectifs des faces $ABCD$, $BCGF$ et $ABFE$. On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$
3. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{JIK}$.
4. Quelle est la nature du triangle IJK ?

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
2. Soit λ un réel et $\vec{V}=\vec{v}+\lambda\vec{u}$. Déterminer la valeur de λ pour que $\vec{V}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.
3. Soit μ_1 et μ_2 deux réels et $\vec{W}=\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u}$. Déterminer les valeurs de μ_1 et μ_2 pour que le vecteur $\vec{W}$ soit orthogonal aux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{u}$.
4. En déduire une base orthonormée de l'espace différente de $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Ce procédé pour exhiber une base orthonormée à partir de vecteurs non coplanaires est appelé algorithme de Gram-Schmidt.

Orthogonalité

► Exercice 16 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;2;3)$ et $C(3;6;2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Quelle est la nature du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$.
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère les points $A(2;1;5)$ et $B(3;2;3)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+t \\ z = -5+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Les droites (AB) et Δ sont-elles orthogonales ?

► Exercice 19 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques respectives

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} (d_2) : \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite (d_1) et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite (d_2).
2. Montrer que le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3. Montrer que le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2).
4. Montrer que la droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire aux droites (d_1) et (d_2).

► Exercice 20 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;-1;6)$ et $D(6;1;6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $\vec{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3;-2;-2)$, $B(1;3;-8)$ et $C(-2;0;4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

► Exercice 23 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;3;-1)$, $B(2;4;1)$ et $C(0;1;1)$.

1. Justifier que les points A, B et C forment bien un plan.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Equations cartésiennes de plan

Dans tous les exercices suivants, l'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-z+1=0$ ainsi que les points $A(2,-3,1)$, $B(0,0,1)$, $C(0,2,5)$ et $D(1,5,3)$.

1. Quels sont les points qui appartiennent au plan $\mathscr{P}$?
2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

► Exercice 25 – Voir le corrigé

Soit P le plan d'équation $2x-5y+3z-2=0$ et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$.

Montrer que la droite (d) est incluse dans le plan P.

► Exercice 26 – Voir le corrigé

Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2;5;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

► Exercice 27 – Voir le corrigé

On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$, $D(5;3;0)$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Le point D appartient-il à ce plan ?
4. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan (ABC) passant par D.

► Exercice 28 – Voir le corrigé

Soit P_1 et P_2 les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+3y-5z+1=0$ et $4x+6y-10z+3=0$. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont parallèles mais non confondus.

► Exercice 29 – Voir le corrigé

On considère les points $A(2;-1;0)$, $B(1;0;-3)$ et $C(6;6;1)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-y-z+4=0$. Montrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

► Exercice 30 – Voir le corrigé

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection du plan P d'équation $2x-3y-2z+1=0$ et de la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

► Exercice 31 – Voir le corrigé

On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x+y-z+3=0$ et $3x+2y-z+1=0$.

1. Donner un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$. Ces plans sont-ils parallèles ?
2. Montrer que les points $A(1;1;6)$ et $B(2;0;7)$ appartiennent aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$.

Projeté orthogonal

► Exercice 32 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(5;1;3)$, le point B de coordonnées $(-2;-2;-2)$ et le plan $\mathscr{P}$ passant par B et dirigé par $\vec{v_1}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$.
On considère le point H de coordonnées $(2;4;1)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
2. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$
3. Montrer que le point H appartient au plan $\mathscr{P}$.
4. Que peut-on en déduire sur le point H ?

► Exercice 33 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+4y-5z+1=0$ ainsi que le point $A(6;8;-9)$.

1. Le point A appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

► Exercice 34 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE).
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AG).
4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point G sur le plan (BDE).

► Exercice 35 (Amérique du nord 2021) – Voir le corrigé

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ dans un repère orthonormé. Montrer que le point $L(4,0,3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5,3,1)$ sur le plan $\mathscr{P}$.

► Exercice 36 – Voir le corrigé

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point $A(3{,}5{,}1)$ et la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

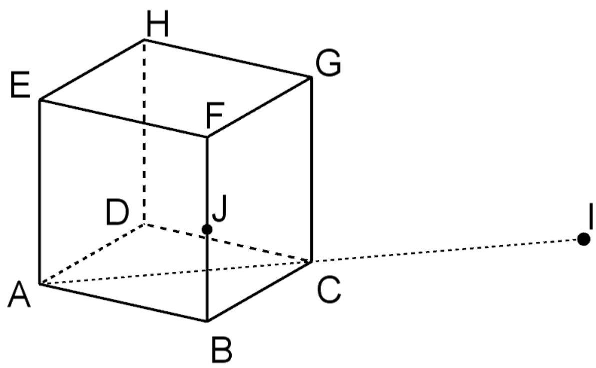
Soit M un point de la droite D, de paramètre t.

1. Montrer que la distance AM vaut $\sqrt{11t^2-22t+29}$.
2. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \sqrt{11x^2-22x+29}$.
   (a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Montrer que f admet un minimum en une valeur x_0 que l'on précisera. Que vaut ce minimum ?
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Exercices de synthèse

► Exercice 37 – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté de longueur 1. L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On considère le point I, symétrique du point A par rapport au point C ainsi que le point J, milieu du segment $[BF]$.



1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD)
3. En déduire une équation cartésienne du plan (IJD).
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
5. Déterminer les coordonnées du point K, point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH).
6. Calculer $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}$ ainsi que les longueurs KB et KD.
7. En déduire une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BKD}$.

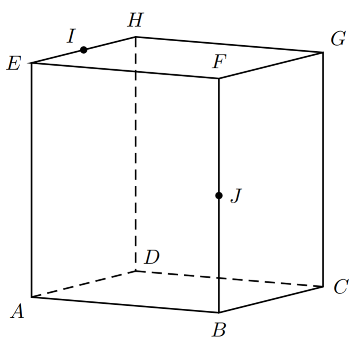
► Exercice 38 (Centres étrangers 2021) – Voir le corrigé

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants : $A(2;-1;0)$; $B(3;-1;2)$; $C(0;4;1)$ et $S(0;1;4)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan ABC en H.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
   (b) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2;2;3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{Aire de la base } \times \text{ Hauteur}}{3}$. Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5. (a) Calculer la longueur SA.
   (b) On indique que $SB = \sqrt{17}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

► Exercice 39 – Voir le corrigé

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côtés de longueur 1 représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



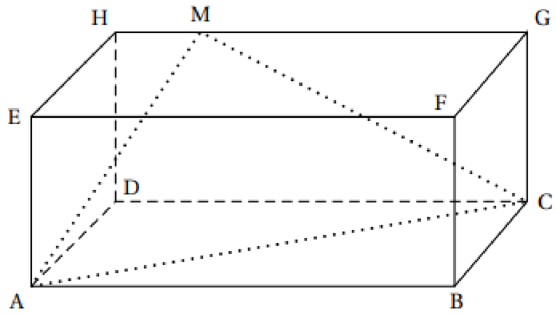
L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   (a) En utilisant le triangle FIG pour base, montrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ vaut $\dfrac{1}{6}$.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{4}{9};\dfrac{5}{9}\right)$.
   (d) Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.

► Exercice 40 – Voir le corrigé

Dans la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5;0;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$.



1. (a) Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).
2. Soit M un point du segment $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec $k \in [0;1]$.
   (a) Justifier que les coordonnées de M sont $(5k;3;2)$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$
   (c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M. Quelles sont les coordonnées du point M dans ces cas ?

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1;3;2)$. On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1;3;0)$.
   (a) Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   (b) En déduire le volume du tétraèdre $MACD$.
4. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ est normal au plan (AMC). En déduire une équation cartésienne du plan (AMC).
5. On note Q le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (AMC).
   (a) Déterminer les coordonnées du point Q.
   (b) S'agit-il du projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC) ?
6. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC). Calculer la distance DP; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

2. Corrigés

► Correction 1 – Voir l'énoncé

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$. Ainsi, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{14}{7\times 4} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ (ou 60°).

► Correction 2 – Voir l'énoncé

On a ...

- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AD\times AB\times\cos(\widehat{BAD}) = 1\times 1\times 0 = 0$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FG} = AD\times FG\times\cos(0) = 1\times 1\times 1 = 1$
- $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{ED} = EH\times ED\times\cos(\widehat{HED}) = 1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$
- $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{FB} = DH\times FB\times\cos(180°) = 1\times 1\times(-1) = -1$
- $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CE} = CG\times CE\times\cos(\widehat{GCE}) = 1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$. On utilise ici la relation $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ dans un triangle rectangle.
- $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{ED} = EG\times ED\times\cos(60°) = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2} = 1$

► Correction 3 – Voir l'énoncé

On aurait $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{20}{18}$. Un cosinus étant toujours entre -1 et 1, c'est impossible.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

$2\vec{u}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v}+4\vec{w}) = 6||\vec{u}||^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + 8\vec{u}\cdot\vec{w} = 96-12-8 = 76$

$(3\vec{v}-2\vec{u})\cdot(4\vec{w}+\vec{u}) = 12\vec{v}\cdot\vec{w} + 3\vec{v}\cdot\vec{u} - 8\vec{u}\cdot\vec{w} - 2||\vec{u}||^2 = 60+9+8-32 = 45$

► Correction 5 – Voir l'énoncé

On a alors $\vec{u}\cdot(4\vec{v}-3\vec{w}) = 4\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{u}\cdot\vec{w} = 12-12 = 0$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v}-3\vec{w}$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ce qui implique que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 + 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et donc $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{58}$

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 - 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et $||\vec{u}-\vec{v}|| = \sqrt{58}$

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a...

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = -\frac{1}{2}(4^2-3^2-2^2) = \frac{3}{2}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = \frac{1}{2}(3^2-5^2-2^2) = -10$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2) = \frac{1}{4}(12^2-7^2) = \frac{95}{4}$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2) = -\frac{1}{2}(5^2-3^2-4^2) = -\frac{1}{2}(25-9-16) = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

On a alors $BA+BC=AC$. Or, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$. Utilisons alors les formules de polarisation.

On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(||\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}||^2 - AB^2 - BC^2) = -\frac{1}{2}(CA^2-AB^2-BC^2)$. En remplaçant CA par $BA+BC$, on a alors $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}((BA+BC)^2-AB^2-BC^2) = -\frac{1}{2}(BA^2+2BA\times BC+BC^2-AB^2-BC^2) = BA\times BC$.

Or, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$. Il en vient que $\cos(\widehat{ABC})=-1$ et que l'angle entre les vecteurs $\widehat{ABC}$ mesure donc 180 degrés. Cela signifie que les points A, B et C sont alignés (et même que le point B se situe entre A et C).

► Correction 10 – Voir l'énoncé

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times3+5\times3-9\times2 = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\\x-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, c'est-à-dire $1\times6-4\times(-3)+1\times(x-1)=0$ c'est-à-dire $19+x=0$ d'où $x=-17$

► Correction 12 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\2x-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\6\\x-2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, c'est-à-dire $2\times0-2\times6+(2x-2)\times(x-2)=0$

On a donc $2x^2-6x-8=0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 4. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $x=-1$ ou $x=4$

► Correction 13 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\2-2\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\1-2\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Puisque l'on est dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times0+0\times-1+4\times1 = 4$.

On a $AB=\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{20}$ et $BC=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

On sait que $4=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Ainsi, $\sqrt{20}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})=4$ d'où $\cos(\widehat{BAC})=\frac{2}{\sqrt{10}}$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure environ 51 degrés (utiliser arccos ou $\cos^{-1}$ sur la calculatrice).

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Les points I, J et K ont pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ comme coordonnées respectives dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}$. Puisque le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est orthonormé,

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = 0.5\times 0 - 0\times 0.5 + 0.5\times 0.5 = 0.25 = \frac{1}{4}$$

On sait de plus que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = IJ\times IK\times\cos(\widehat{JIK})$. Or,

- $IJ = \sqrt{0.5^2+0^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $IK = \sqrt{0^2+(-0.5)^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $\cos(\widehat{JIK}) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et donc $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$.

Puisque $IJ = IK$, le triangle IJK est isocèle en I. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK}$. Or, $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$ et la somme des angles d'un triangle vaut π radians. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK} = \dfrac{\pi}{3}$. Le triangle IJK est donc équilatéral.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

1. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. Sont donc a et b des réels tels que $\vec{u} = a\vec{v}+b\vec{w}$.
   On a alors $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a+b\\a\end{pmatrix}$, ce qui est impossible. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont donc pas coplanaires.
2. On souhaite que $\vec{V}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{V}\cdot\vec{u} = 0$. Or, $\vec{V}\cdot\vec{u} = (\vec{v}+\lambda\vec{u})\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u}+\lambda\vec{u}\cdot\vec{u}$.
   De plus, $\vec{v}\cdot\vec{u} = 1$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = 2$. Ainsi, $\vec{V}\cdot\vec{u} = 0$ si et seulement si $1+2\lambda = 0$ soit $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. On considère donc $\vec{V} = \vec{v}-\dfrac{1}{2}\vec{u}$. Le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$.
3. On souhaite que $\vec{W}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{W}\cdot\vec{V} = 0$. Or, $\vec{W}\cdot\vec{V} = (\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u})\cdot\vec{V} = \vec{w}\cdot\vec{V}+\mu_1\vec{V}\cdot\vec{V}+\mu_2\vec{u}\cdot\vec{V}$.
   De plus, $\vec{w}\cdot\vec{V} = \dfrac{1}{2}$, $\vec{V}\cdot\vec{V} = \dfrac{3}{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{V} = 0$. Ainsi, $\vec{W}\cdot\vec{V} = 0$ si et seulement si $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mu_1 = 0$ soit $\mu_1 = -\dfrac{1}{3}$.
   On souhaite que $\vec{W}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{W}\cdot\vec{u} = 0$. Or, $\vec{W}\cdot\vec{u} = (\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u})\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{u}+\mu_1\vec{V}\cdot\vec{u}+\mu_2\vec{u}\cdot\vec{u}$.
   De plus, $\vec{w}\cdot\vec{u} = 1$, $\vec{V}\cdot\vec{u} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = 2$. Ainsi, $\vec{W}\cdot\vec{u} = 0$ si et seulement si $1+2\mu_2 = 0$ soit $\mu_2 = -\dfrac{1}{2}$.
   On considère donc $\vec{W} = \vec{w}-\dfrac{1}{3}\vec{V}-\dfrac{1}{2}\vec{u}$. Le vecteur $\vec{W}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$.
4. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ forment une base orthogonale de l'espace. Pour avoir une base orthonormé, il suffit de diviser chacun de ces vecteurs par sa norme.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times1-3\times1+2\times1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Les droites (AB) et (AC) sont donc orthogonales. De plus, ces droites ont le point A en commun, elles sont donc perpendiculaires.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Ce repère est orthonormé.

On a $F(1,0,1)$, $D(0,1,0)$, $B(1,0,0)$, $H(0,1,1)$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BH} = -1\times(-1)+1\times1-1\times1 = 1\neq0$. Les droite (DF) et (BH) ne sont pas perpendiculaires.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

La droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 1\times3-1\times1-2\times2 = 0$. Les droites (AB) et Δ sont orthogonales.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

1. Le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_1). Le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_2).
2. On considère le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_1 = 1\times1-2\times(-1)-3\times1 = 0$;
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_2 = 1\times2-2\times1-3\times0 = 0$.

   $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3. En prenant $t' = 4$ dans l'équation de (d_2), on obtient le point de coordonnées $(3;3;5)$. Le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2)
4. La droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire à la droite (d_2). En effet $\vec{v}$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux et les deux droites ont en commun le point B. On sait de plus que (d_1) et Δ sont orthogonales. Il reste à montrer qu'elles sont sécantes.

   Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 3+t' \\ y = 3-2t' \\ z = 5-3t' \end{cases}$ $,t'\in\mathbb{R}$.

   Chercher l'intersection de (d_1) et Δ revient à chercher deux réels t et t' tels que $\begin{pmatrix}2+t\\3-t\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+t'\\3-2t'\\5-3t'\end{pmatrix}$.

   La dernière ligne permet d'exprimer t en fonction de t'. remplaçons t par $5-3t'$ dans la première ligne. On obtient alors $2+5-3t' = 3+t'$ d'où $t' = 1$. Puisque $t = 5-3t'$, on a alors $t = 2$.

   Vérifions : en remplaçant t par 2 dans l'équation de (d_1), on obtient le point de coordonnées $(4;1;;2)$. En replaçant t' par 1 dans l'équation de Δ, on obtient le point de coordonnées $(4;1;2)$. Les droites Δ et (d_1) sont donc sécantes. Puisqu'elles sont orthogonales, elles sont donc perpendiculaires.

Ainsi, Δ est perpendiculaire à (d_1) et (d_2).

► Correction 20 – Voir l'énoncé

D'une part, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\4-2\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-4\\1-(-1)\\6-6\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires et $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus, on a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6-3\\1-4\\6-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times3-2\times3+0\times5=0$. L'angle $\widehat{ABD}$ est un angle droit. $ABDC$ est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est donc un rectangle.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Puisque le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormé, on a donc

- $\vec{v}_1\cdot\vec{u}=1\times2+4\times(-1)+1\times2=0$;
- $\vec{v}_2\cdot\vec{u}=3\times2-1\times1-2\times2=0$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$. $\vec{u}$ est normal au plan P.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

On a

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(1-3)+2\times(3-(-2))+1\times(-8-(-2))=0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2-3)+2\times(0-(-2))+1\times(4-(-2))=0$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est donc normal au plan (ABC).

► Correction 23 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}2$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et forment donc un plan.

Soit $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

On a alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et donc $x+y+2z=0$. Ainsi, on a $x=-y-2z$.

On a également $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et donc $-x-2y+2z=0$. En remplaçant x par $-y-2z$, on trouve alors $y+2z-2y+2z=0$ et donc $-y+4z=0$ soit $y=4z$.

Prenons alors $z=1$. On a alors $y=4$ et $x=-4-2=-6$. On peut alors vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

► Correction 24 – Voir l'énoncé

On regarde quels sont les points dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$. Pour le point A, on a $3\times2+2\times(-3)-1+1=0$, le point A appartient au plan $\mathscr{P}$. De même, les points B et C appartiennent à ce plan. En revanche, $3\times1+2\times5-3+1=11\neq0$. Le point D n'appartient donc pas au plan $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les point A, B et C ne sont donc pas alignés. Ils définissent bien un plan (ABC) qui n'est autre que le plan $\mathscr{P}$. Or, D n'appartient pas à ce plan, les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Pour tout réel t, $2(2-2t)-5(1+t)+3(1+3t)-2 = 4-4t-5-5t+3+9t-2 = 0$. Tous les points de la droite (d) appartiennent donc au plan P.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

Une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2;5;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est $2(x-2)-3(y-5)+(z+1)=0$ c'est-à-dire $2x-3y+z+12=0$.

► Correction 27 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi,

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 2+(-1)\times 0+(-1)\times 4 = 0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0+(-1)\times(-1)+(-1)\times 1 = 0$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal eu plan (ABC).

Le plan (ABC) passe par A et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $2(x-(-1))-1(y-2)-1(z-0)$, c'est-à-dire $2x-y-z+4=0$.

Le plan parallèle au plan (ABC) passant par D admet également le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation de ce plan est donc $2(x-5)-(y-3)-(z-0)=0$ c'est-à-dire $2x-y-z-7=0$.

► Correction 28 – Voir l'énoncé

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}$ sont normaux respectivement aux plans P_1 et P_2. Ces vecteurs sont colinéaires, les plans P_1 et P_2 sont donc parallèles.

► Correction 29 – Voir l'énoncé

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$. De plus,

- $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 2(1-2)-(0-(-1))-(-3-0) = -2-1-3 = 0$;
- $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC} = 2(6-2)-(6-(-1))-(1-0) = 8-7-1 = 0$.

Le vecteur $\vec{u}$ est donc également normal au plan (ABC). Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

► Correction 30 – Voir l'énoncé

Supposons qu'il existe un point $M(x;y;z)$ dans $P\cap(d)$. On a alors $\begin{cases} x=1+t\\ y=1+2t\\ z=5-3t\\ 2x-3y-2z+1=0\end{cases}$.

En remplaçant les x, y et z de la dernière ligne, on obtient. $2(1+t)-3(1+2t)-2(5-3t)+1=0$ c'est-à-dire $t=5$. Vérifions : en remplaçant t par 5 dans l'équation de (d), on obtient le point de coordonnées $(6;11;-10)$. Or, $2\times 6-3\times 11-2\times(-10)+1=0$. Ce point appartient également au plan P.

► Correction 31 – Voir l'énoncé

Un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont donc pas parallèles. On a par ailleurs

- $2x_A+y_A-z_A+3=2\times 1+1-6+3=0$. Le point A appartient à $\mathscr{P}_1$.
- $2x_B+y_B-z_B+3=2\times 2+0-7+3=0$. Le point B appartient à $\mathscr{P}_1$.
- $3x_A+2y_A-z_A+1=3\times 1+2\times 1-6+1=0$. Le point A appartient à $\mathscr{P}_2$.
- $3x_A+2y_A-z_A+1=3\times 2+2\times 0-7+1=0$. Le point B appartient à $\mathscr{P}_2$.

L'intersection de deux plans sécants étant une droite, on a donc $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=(AB)$. Or, les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ étant $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est donc $\begin{cases} x=1+t\\ y=1-t\\ z=6+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

► Correction 32 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v}_1=-3\times 2+3\times 4-2\times 3=0$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v}_2=-3\times 1+3\times 3-2\times 3=0$. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$, il est donc normal à ce plan.

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $-3(x+2)+3(y+2)-2(z+2)=0$ soit $-3x+3y-2z-4=0$.

Par ailleurs, $-3x_H+3y_H-2z_H-4=-3\times 2+3\times 4-2\times 1-4=0$. Le point H appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

Le point H est en réalité le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

► Correction 33 – Voir l'énoncé

On a $2x_A+4y_A-5z_A+1=2\times 6+4\times 8-5\times(-9)+1=90\neq 0$. A n'appartient donc pas au plan $\mathscr{P}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A dirigée par $\vec{n}$ est $\begin{cases} x=6+2t\\ y=8+4t\\ z=-9-5t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$ n'est autre que l'intersection de la droite (d) et du plan $\mathscr{P}$.

Résolvons donc le système $\begin{cases} x=6+2t\\ y=8+4t\\ z=-9-5t\\ 2x+4y-5z+1=0\end{cases}$.

La dernière ligne nous donne $2(6+2t)+4(8+4t)-5(-9-5t)+1=0$ soit $12+4t+32+16t+45+25t+1=0$

d'où $45t+90=0$ et donc $t=-2$. Ainsi, on a $\begin{cases} t=-2 \\ x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(2;0;1)$.

► Correction 34 – Voir l'énoncé

On a $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AG}=-1\times1+0\times1+1\times1=0$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AG}=-1\times1+1\times1+0\times1=0$. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs du plan (BDE), il est donc normal au plan (BDE).

Le plan (BDE) admet $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et passe par $B(1,0,0)$. Il admet donc comme équation cartésienne $(x-1)+(y-0)+(z-0)=0$ c'est-à-dire $x+y+z-1=0$.

La droite (AG) passe par $A(0,0,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Cette droite admet donc pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

La droite (AG) passe par G et est orthogonale au plan (BDE). Le point d'intersection de (AG) et (BDE) est donc le projeté orthogonal de G sur (BDE). Un point de (AG) possède des coordonnées de la forme (t,t,t) pour un certain réel t. Si ce point appartient au plan (BDE), on a de plus $t+t+t-1=0$ soit $t=\dfrac{1}{3}$. Le point K, point d'intersection du plan (BDE) et de la droite (AG), a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

► Correction 35 – Voir l'énoncé

D'une part, on a $x_L+3y_L-2z_L+2=4+3\times0-2\times3+2=0$. Le point L appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

De plus, on a $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. La droite (LM) est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$. L est donc le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

► Correction 36 – Voir l'énoncé

1. Les coordonnées du point M sont par conséquent $(1+3t\,;\,t\,;\,1-t)$. Le repère considéré est orthonormé. On utilise la formule de la distance :
$$AM=\sqrt{(1+3t-3)^2+(t-5)^2+(1-t-1)^2}=\sqrt{(3t-2)^2+(t-5)^2+(-t)^2}.$$
Ainsi,
$$AM=\sqrt{9t^2-12t+4+t^2-10t+25+t^2}=\sqrt{11t^2-22t+29}.$$

2. (a) Pour tout réel x, $11x^2-22x+29>0$. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-22)^2-4\times11\times29=-792<0$. De plus, la fonction $x\mapsto 11x^2-22x+29$ est

dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{22x-22}{2\sqrt{11x^2-22x+29}} = \frac{11x-11}{\sqrt{11x^2-22x+29}}.$$

(b) Pour tout réel x, $\sqrt{11x^2-22x+29} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $11x-11$. De plus, $f(1) = \sqrt{11-22+29} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$3\sqrt{2}$	$\nearrow$

f admet un minimum en 1. Ce minimum vaut $3\sqrt{2}$.

3. D'après la question 1, la distance entre A et un point M de la droite de paramètre t vaut $\sqrt{11t^2-22t+29}$, c'est-à-dire $f(t)$. Cette distance est minimale lorsque $t=1$, c'est-à-dire pour le point de coordonnées $(4,1,0)$: ce point est donc le projeté orthogonal de A sur la droite (d).

► Correction 37 – Voir l'énoncé

1. On a $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC}$. Ainsi, le point I a pour coordonnées $(2,2,0)$. Par ailleurs, J est le milieu de $[BF]$, ses coordonnées sont donc $\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.
2. On a $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}1\\2\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1/2\end{pmatrix}$. Le repère considéré étant orthonormé, on a alors
   - $\overrightarrow{JI}\cdot\vec{n} = 1\times1-2\times2-6\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;
   - $\overrightarrow{JD}\cdot\vec{n} = 1\times(-1)-2\times1-6\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est ainsi orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJD). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD).
3. Le plan (IJD) passe par le point $I(2,2,0)$ et admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $1\times(x-2)-2\times(y-2)-6\times(z-0)=0$ soit $x-2y-6z+2=0$.
4. La droite (BH) passe par le point $B(1,0,0)$ et admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
5. Le point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH) doit avoir des coordonnées qui vérifient les deux équations.

Soit (x,y,z,t) quatre réels. On doit avoir $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \\ x-2y-6z+2=0 \end{cases}$.

En utilisant la dernière ligne, on a alors $(1-t)-2t-6t+2=0$ soit $t=\dfrac{1}{3}$. On trouve alors $x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$ et $z=\dfrac{1}{3}$. Réciproquement, on vérifie que le point $K\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$ vérifient bien les équations du plan (IJD) et de la droite (BH) .

6. D'une part,

$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(0-\frac{2}{3}\right)+\left(0-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(0-\frac{1}{3}\right)\times\left(0-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}=KB\times KC\times\cos(\widehat{BKD})$. Or,
- $KB=\sqrt{\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
- $KB=\sqrt{\left(0-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{1}{3}\right)^2}=1.$

7. Ainsi, $\cos(\widehat{BKD})=\dfrac{\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}}{KB\times KD}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

L'angle $\widehat{BKD}$ mesure environ 125°.

▶ Correction 38 – Voir l'énoncé

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\-1-(-1)\\2-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\4-(-1)\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$. Puisque le repère est orthonormé, on a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+0\times5+2\times1=0.$$

Ainsi, les droites (AB) et (AC) sont orthogonales. Celles-ci se coupent au point A : ces droites sont donc perpendiculaires et l'angle $\widehat{BAC}$ est donc un angle droit. Le triangle BAC est rectangle en A.

2. (a) On a
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times1+1\times0+(1-)\times2=0$;
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+1\times5+(-1)\times1=0.$

   Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan.

   (b) Le plan (ABC) passe par le point A et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $2(x-2)+1(y-(-1))-1(z-0)=0$ soit $2x+y-z-3=0$.

   (c) On a $2x_S+y_S-z_S-3=2\times0+1-4-3=-6\neq0$. Ainsi, le point S n'appartient pas au plan (ABC) car ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de ce plan. Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. (a) La droite (d) passe par le point S et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$(d)\quad:\quad\begin{cases} x= & & & 2t\\ y= & 1 & + & t\\ z= & 4 & - & t\end{cases},t\in\mathbb{R}.$$

(b) D'une part, les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan (ABC).
En effet, $2\times 2+2-3-3=0$. D'autre part, en prenant $t=1$, on a bien $2t=2$, $1+t=2$ et $4-t=3$. Le point H appartient donc aussi à la droite (d). Il s'agit donc du point d'intersection de (d) et (ABC).
Il est également possible de remplacer x, y et z dans l'équation du plan par $2t$, $1+t$ et $4-t$. On trouve alors $t=1$.

4. Prenons le triangle ABC comme base. Le triangle ABC est rectangle en A. Son aire vaut donc $\dfrac{AB\times AC}{2}$.
Or,
   - $AB=\sqrt{(3-2)^2+(-1-(-1))^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$;
   - $AC=\sqrt{(0-2)^2+(4-(-1))^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$.

   Ainsi, l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{30}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.
   D'autre part, H est le projeté orthogonal du point S sur la plan (ABC). $[SH]$ est donc la hauteur du tétraèdre issue du point S. Or, $SH=\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.
   Ainsi, le volume du tétraèdre $(SABC)$ vaut $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}=5$.

5. (a) On a $SA=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.
   (b) On a $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2-0\\-1-1\\0-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}3-0\\-1-1\\2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=2\times 3-2\times(-2)-4\times(-2)=18$$

   Or, $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=SA\times SB\times\cos\widehat{ASB}$ et donccos$(\widehat{ASB})=\dfrac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}}{SA\times SB}=\dfrac{18}{\sqrt{17}\times 2\sqrt{6}}$.
   Ainsi, $\widehat{ASB}\simeq 27{,}0°$.

► Correction 39 – Voir l'énoncé

1. Le point I a pour coordonnées $\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$. Le point J a pour coordonnées $\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$.

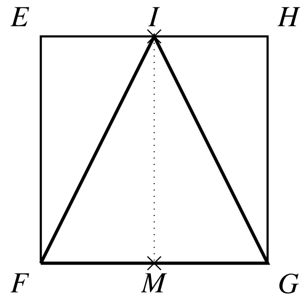
2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$. Ainsi,
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=1\times 0-2\times 1+2\times 1=0$;
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI}=1\times(-1)-2\times 1/2+2\times 1=0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (BGI).

   (b) Le point $B(1{,}0{,}0)$ appartient au plan (BGI), qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.
   Une équation cartésienne de ce plan est donc $(x-1)-2(y-0)+2(z-0)=0$ soit $x-2y+2z-1=0$.

   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Ce point a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+1}{2};\dfrac{1+0}{2};\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. Or, $\dfrac{1}{2}-2\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{4}-1=0$. Les coordonnées du point K vérifient l'équation de (BGI). Le point K appartient donc au plan (BGI).

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   (a) Le triangle FIG est isocèle en I. Notons M le milieu de $[FG]$. La hauteur issue de I dans le triangle FIG est donc la droite (IM). Il en vient que l'aire de ce triangle vaut $\dfrac{FG \times IM}{2}$ soit $\dfrac{1\times 1}{2}$.



   Dans le tétraèdre $FIGB$, la hauteur relative au triangle FIG est BF. Ainsi, le volume de ce tétraèdre vaut $\dfrac{\frac{1}{2}\times 1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

   (b) La droite Δ passant par $F(1,0,1)$ et orthogonale au plan (BGI). Elle est donc dirigée par le vecteur $\vec{n}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. On résout

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \\ x-2y+2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \\ 1+t-2t+2(1+2t)-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2/9 x = 1-2/9 \\ y = 4/9 \\ z = 5/9 \end{cases}.$$

   Le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}; \dfrac{4}{9}; \dfrac{5}{9}\right)$.

   (d) On a

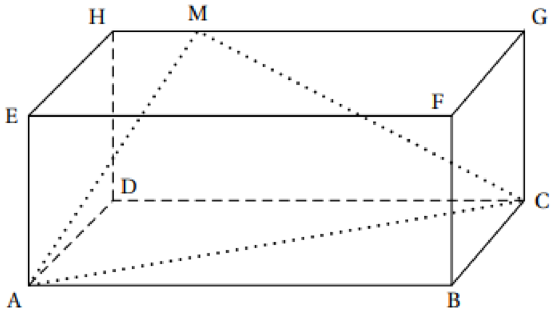
$$FF' = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{4}{9}-0\right)^2 + \left(\frac{5}{9}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

   Or, en utilisant le triangle BGI comme base, la hauteur du tétraèdre $FGBI$ relative à cette base n'est autre que (FF'). Si on note A_{BGI} l'aire du triangle (BGI), il en vient que le volume du tétraèdre vaut $\dfrac{A_{BGI}\times FF'}{3}$ soit $\dfrac{2A_{BGI}}{9}$. Or, d'après les questions précédentes, ce volume vaut $\dfrac{1}{6}$. Ainsi, $A_{BGI} = \dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{2} = \dfrac{3}{4}$.

► Correction 40 – Voir l'énoncé

Dans la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5;0;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$.



1. (a) On a $H(0{,}3{,}2)$ et $G(5{,}3{,}2)$

   (b) Une représentation paramétrique de la droite (GH) est $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}$

2. Soit M un point du segment $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec $k \in [0;1]$.

   (a) Notons $(x{,}y{,}z)$ les coordonnées de M. Puisque $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$, il en vient que $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-3 \\ z-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de M sont $(5k;3;2)$.

   (b) Les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} 5k \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et celles de $\overrightarrow{CM}$ sont $\begin{pmatrix} 5k-5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

   $$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 5k(5k-5) + 4 = 25k^2 - 25k + 4$$

   (c) AMC est un triangle rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$, c'est-à-dire $25k^2 - 25k + 4 = 0$. C'est une équation du second degré dont les solutions sont $\frac{1}{5}$ et $\frac{4}{5}$. Les coordonnées de M pour lesquelles le triangle AMC est rectangle en M sont donc $(1;3;2)$ et $(4;3;2)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1;3;2)$. On admet que le triangle AMC est rectangle en M.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1;3;0)$.

   (a) D'une part, le point K se trouve sur la droite (CD) et appartient donc au plan (ACD). D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{KM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 530 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{KM} = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{KM}$ est donc normal au plan (ACD). K est bien le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

   (b) Prenant ACD comme base, la hauteur correspondante est $[KM]$.
   - L'aire de ACD vaut $5 \times 3 \times 0.5$
   - La longueur KM vaut 2
   - Ainsi, le volume de la pyramide $MACD$ vaut $\frac{1}{3} \times 5 \times 3 \times 0.5 \times 2 = 5$ unités de volume.

(c) On a
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 5 + (-5)\times 3 + 0\times 6 = 0$
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM} = 1\times 3 + 3\times(-5) + 2\times 6 = 0$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-5\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (AMC). Une équation cartésienne du plan (AMC) est donc $3x-5y+6z=0$ (on a utilisé le point $A(0,0,0)$).

(d) On note Q le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (AMC).

i. La droite (FD) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3-3t \\ z = 2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ En injectant ces coordonnées dans l'équation de (AMC) on trouve que $3\times 5t - 5(3-3t) + 6\times 2t = 0$ et donc que $t = \dfrac{15}{42}$. Les coordonnées de Q sont donc $\left(\dfrac{15}{7},\dfrac{9}{4},\dfrac{5}{7}\right)$

ii. Les droites (DQ) et (AC) ne sont pas orthogonales. Q n'est pas le projeté orthogonal de D sur (AMC).

(e) On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC). Prenant AMC comme base du tétraèdre $MACD$, la hauteur associée est DP. Or, l'aire du triangle AMC, rectangle en M vaut $\dfrac{1}{2}\times AM\times MC$.
- $AM = \sqrt{1^2+3^2+2^2} = \sqrt{14}$
- $MC = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Le volume de $MACD$ vaut 5. On a donc $5 = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{14}\times 2\sqrt{5}\times DP$.

Finalement, $DP = \dfrac{5\times 3\times 2}{\sqrt{14}\times 2\sqrt{5}} \simeq 1.8$.