1. Exercices

Logarithme népérien

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de résolution.

a. $2\ln(x)+1=3$ **b.** $\ln(3x-4)=0$ **c.** $e^{3x+2}=4$

d. $2+3\ln(3x-2)=-1$ **e.** $\ln(e^{3x+4})=5$ **g.** $e^{2x-3}=3-\pi$

h. $(e^{2x}-3)(e^x+5)=0$ **i.** $(\ln(x))^2-\ln(x)=0$ **j.** $(e^x-1)\ln(x-e)=0$

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x}+9e^x-30=0$ sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Résoudre les inéquations suivantes. On précisera bien les domaines de résolution.

a. $\ln(5x-3)\geqslant 0$ **b.** $\ln(9x-2)<0$ **c.** $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée sinus hyperbolique de x.

1. Justifier que sh est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $sh''(x)=sh(x)$.
2. Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Montrer que pour tout réel x, $(sh\circ f)(x)=x$ et $(f\circ sh)(x)=x$.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit f la fonction $x\mapsto\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel $y\in]-1;1[$, il existe un unique réel x tel que $y=f(x)$.
2. Soit $y\in]-1;1[$ et $x\in\mathbb{R}$ tel que $y=f(x)$. Exprimer x en fonction de y.

Propriétés algébriques

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Simplifier les écritures suivantes.

$\ln(3)+\ln(4)-\ln(6)$ $\dfrac{\ln(9)}{\ln(3)}-\ln(1)$

$4\ln(3)-\ln(9)+2\ln(27)$ $\ln(3x^2)-\ln(3)$ avec $x>0$

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Résoudre l'équation $\ln(4x^2)+6\ln(x)-3=0$, d'inconnue $x>0$.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Montrer que pour tout réel $x > 1$, $\ln(x^2-1) - \ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Que vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln\left(\dfrac{3}{4}\right) + \ldots + \ln\left(\dfrac{49}{50}\right)$?

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Montrer que pour tout réel x, $\ln(1+e^{-x}) = \ln(1+e^x) - x$.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $e^2 \leqslant u_n$.
2. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \ln(u_n) - 2$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \exp\left(2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
   (d) Retrouver la limite de la suite (u_n) à l'aide de cette expression.

► Exercice 12 (Logarithme décimal et applications) – Voir le corrigé

Soit a un réel strictement positif et x un réel.

On appelle exponentielle de x en base a le réel noté a^x et qui vaut $e^{x\ln(a)}$.

1. Soit b un réel strictement positif. Montrer que l'unique solution de l'équation $a^x = b$ est $x = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$. Ce nombre est appelé le logarithme de b en base a.

Un cas particulier : le logarithme en base 10 est alors noté log. Ainsi, pour tout réel a strictement positif, $\log(a) = \dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$ et $\log(a)$ est l'unique solution de l'équation $10^x = a$.

2. En chimie, le pH d'une solution vaut $-\log(C)$ où C est la concentration de cette solution en ions hydronium H_3O^+, exprimée en mol.L^{-1}.
   (a) Quel est le pH d'une solution ayant une concentration en ions hydronium de 10^{-4} mol.L^{-1} ?
   (b) Si le pH baisse de 1, par combien a été multipliée la concentration en ion hydronium ?
   (c) Le cola a un pH de 2.5. Quelle est sa concentration en ions hydronium ?
   (d) On dit qu'une solution est basique si son pH est strictement supérieur à 7. A quelles concentrations cette situation correspond-elle ?
3. Le niveau de bruit d'une source sonore se mesure en décibels.
   La formule qui donne le niveau de bruit N en fonction de l'intensité I de la source, exprimée en W.m^{-2} est $N = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}.
   (a) Quelle est l'intensité sonore d'une avion qui décolle avec un niveau de bruit de 120 dB ?
   (b) De combien de dB le niveau sonore augmente-t-il lorsque l'intensité sonore double ?
   (c) Une cri possède un niveau sonore de 80 dB. On admet que quand plusieurs personnes crient, les intensités s'ajoutent. Combien doit-on réunir de personnes pour que leurs cris réunis aient une intensité sonore de 120 dB ?

Fonction logarithme népérien

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$ **c.** $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2\ln(x))$ **e.** $\lim\limits_{x\to0^+} (2x^2\ln(x))$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x))$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x-x)$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x-x)$ **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-\ln(x))$

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
4. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
6. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ possède une unique solution sur $[1;+\infty[$. Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-2} près.
7. Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=(\ln(x))^2$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. Attention, $(\ln(x))^2\neq\ln(x^2)$!

1. Résoudre l'équation $f(x)=1$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
5. Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

A l'aide du logarithme, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant les conditions suivantes.

a. $2^n\geqslant 40000$ **b.** $1.01^n\geqslant 2$ **c.** $0.7^n\leqslant 10^{-3}$

d. $121\times 0{,}97^{2n+1}\leqslant 1$ **e.** $3\times 1{,}1^n-150\geqslant 365$ **f.** $10^{12}\times 2^{-n}\leqslant 0{,}1$

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Résoudre l'inéquation $(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)<0$ sur $\mathbb{R}$. On précisera le domaine de définition de cette expression.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{7}{8}u_n + 1$. Pour tout entier naturel n, on pose alors $a_n = u_n - 8$.

1. Montrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{7}{8}$ et déterminer son premier terme.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 8 - 3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^n$. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?
3. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $u_n \geqslant 7{,}999$.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

La population d'une ville augmente de 3% chaque année. Après combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

► Exercice 21 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Cette fonction, utilisée en intelligence artificielle, est appelée fonction SoftPlus.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.
4. Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
5. (a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) En déduire que pour tout réel x, $f(x) \geqslant x$.
6. Construire l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x)$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$.
3. Quel est le sens de variations de la fonction f ?
4. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $\sqrt{\alpha} = -\ln(\alpha)$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

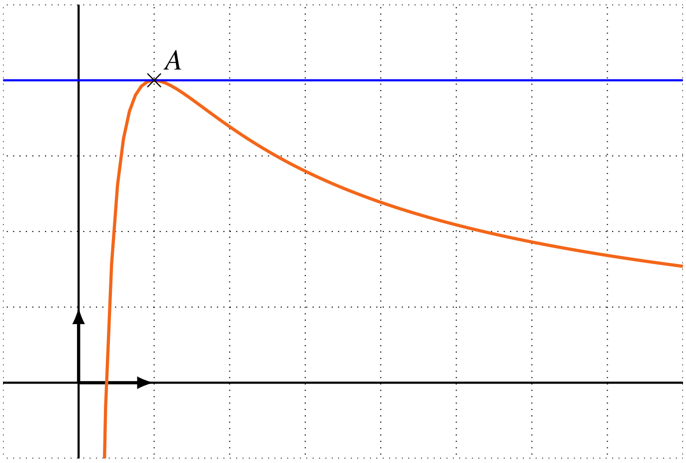
► Exercice 23 – Voir le corrigé

Faire l'étude complète de la fonction $x \mapsto \ln(e^x - x)$ sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal.

Exercices de synthèse

► Exercice 24 (Amérique du Nord 2021) – Voir le corrigé

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1;4)$.



1. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a+b\ln(x)}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels fixés.}$$

2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a

$$f'(x) = \frac{b-a-b\ln(x)}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs de a et de b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4+4\ln(x)}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f''(x) = \frac{-4+8\ln(x)}{x^3}.$$

7. Construire le tableau de signes de f''. Nous verrons dans un prochain chapitre que le signe de f'' nous permet de déterminer la convexité de la fonction f.

► Exercice 25 (Métropole 2022) – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - x\ln(x)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\ln(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite $(un_)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ u_{n+1} = u_n - u_n\ln(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur $[0,5;1]$.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) converge.
   (b) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par $f_k(x) = kx - x\ln(x)$.

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel k, $x_k = y_x$.

► Exercice 26 (Centres étrangers 2021) – Voir le corrigé

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05.

On possède un test de dépistage de cette maladie. On considère un échantillon de n personnes ($n > 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Justifier que X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Justifier que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0.95^n$.
3. Que représente l'espérance de X_n dans ce cadre ? Montrer que $E(X_n) = n+1-n\times 0,95^n$.
4. On considère la fonction f définie sur $[20;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.
   (a) Montrer que f est décroissante sur $[20;+\infty[$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20;+\infty[$. Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
   (c) En déduire le signe de f sur $[20;+\infty[$.
5. On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans cet exercice, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus. La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$. En utilisant les questions précédentes, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

2. Corrigés

► Correction 1 – Voir l'énoncé

a. Soit $x > 0$, $2\ln(x)+1 = 3 \Leftrightarrow 2\ln(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftarrow x = e$. $S = \{e\}$.

b. Soit $x > \frac{4}{3}$, $\ln(3x-4) = 0 \Leftrightarrow 3x-4 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$. $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{3x+2} = 4 \Leftrightarrow 3x+2 = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)-2}{3}$. $S = \left\{\frac{\ln(4)-2}{3}\right\}$.

d. Soit $x > \frac{2}{3}$. $2+3\ln(3x-2) = -1 \Leftrightarrow \ln(3x-2) = -1 \Leftrightarrow 3x-2 = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{e^{-1}+2}{3}$. $S = \left\{\frac{e^{-1}+2}{3}\right\}$.

e. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\ln(e^{3x+4}) = 5 \Leftrightarrow 3x+4 = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

f. Puisque $3-\pi < 0$, l'équation $e^{2x-3} = 3-\pi$ ne possède pas de solution réelle.

g. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(e^{2x+1}-3)(e^x+5) = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1}-3 = 0$ ou $e^x+5 = 0$.

- $e^{2x+1}-3 = 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} = 3 \Leftrightarrow 2x+1 = \ln(3) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)-1}{2}$.
- $e^x+5 = 0$ est impossible puisque $e^x > 0$.

Ainsi, $S = \left\{\frac{\ln(3)-1}{2}\right\}$.

h. Soit $x > 0$. $(\ln(x))^2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$. $S = \{1, e\}$.

i. Soit $x > e, (x-1)\ln(x-e) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$ ou $\ln(x-e) = 0$. Or,

- $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. 1 n'est cependant pas une solution car il n'est pas dans l'ensemble de résolution.
- $\ln(x-e) = 0 \Leftrightarrow x-e = 1 \Leftrightarrow x = 1+e$.

L'unique solution de cette équation est donc $1+e$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $X = e^x$. Ainsi,

$$3e^{2x}+9e^x-30 = 0 \Leftrightarrow 3X^2+9X-30 = 0.$$

Cette deuxième équation est une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $3X^2+9X-30$ vaut 441 qui est strictement positif. Ce polynôme a donc deux racines qui sont 2 et -5.

On a donc $X = 2$ ou $X = -5$, c'est-à-dire $e^x = 2$ (et donc $x = \ln(2)$) ou $e^x = -5$ ce qui est impossible.

L'unique solution de l'équation est donc $\ln(2)$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

a. $\ln(5x-3)$ existe si et seulement si $5x-3 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{5}{3}$. Soit donc $x > \frac{5}{3}$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(5x-3) \geqslant 0$ si et seulement si $5x-3 \geqslant 1$ soit $x \geqslant \frac{4}{5}$. $S = \left[\frac{4}{5}+\infty\right[$.

b. $\ln(9x-2)$ existe si et seulement si $9x-2 > 0$, c'est-à-dire $x > \frac{2}{9}$. Soit donc $x > \frac{2}{9}$. Alors par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(9x-2)<0$ si et seulement si $9x-2<1$ soit $x<\frac{1}{3}$. Ainsi, $S=\left]\frac{2}{9};\frac{1}{3}\right[$.

c. $\ln(3x+1)$ existe si et seulement si $3x+1>0$, c'est-à-dire $x>-\frac{1}{3}$. Par ailleurs, $\ln(3-x)$ existe si et seulement si $3-x>0$, c'est-à-dire $x<3$. Les deux expressions existent toutes deux lorsque $-\frac{1}{3}<x<3$. Soit donc $x\in\left]-\frac{1}{3};3\right[$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$ si et seulement si $3x+1\geqslant 3-x$ soit $x\geqslant\frac{1}{2}$. Finalement, $S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\cap\left]-\frac{1}{3};3\right[$ soit $S=\left[\frac{1}{2};3\right[$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

sh est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$sh'(x)=\frac{e^x-(-e^{-x})}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

et

$$sh''(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh(x).$$

Pour tout réel x,

$$sh\circ f(x)=\frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}{2}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2}.$$

Ainsi

$$sh\circ f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}{2(x+\sqrt{x^2+1})}=\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1-1}{2(x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x(x+\sqrt{x^2+1})}{2(x+\sqrt{x^2+1})}=x.$$

Par ailleurs, pour tout réel x,

$$f\circ sh(x)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}+1}\right).$$

Or,

$$\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}+1=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Ainsi,

$$f\circ sh(x)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\right).$$

Or, pour tout réel x, $e^x+e^{-x}\geqslant 0$ et donc $\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$. Ainsi,

$$f \circ sh(x) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \ln\left(\frac{2e^x}{2}\right) = x.$$

▶ Correction 5 – Voir l'énoncé

D'une part, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$.

Enfin, f est continue sur $]-\infty; +\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $y \in]-1; 1[$, il existe un réel x tel que $y = f(x)$.

De plus, f est dérivable et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - (e^x - 1)e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel $y \in]-1; 1[$, le réel x tel que $f(x) = y$ est unique.

Soit donc $y \in]-1; 1[$ et x le réel tel que $y = f(x)$. On a alors $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et donc $y(e^x + 1) = e^x - 1$.

Ainsi, $ye^x + y = e^x - 1$. On a alors $ye^x - e^x = -1 - y$ soit $e^x(y - 1) = -1 - y$ et donc $e^x = \frac{-1 - y}{y - 1} = \frac{1 + y}{1 - y}$.

Puisque $y \in]-1; 1[$, on a bien $\frac{1 + y}{1 - y} > 0$ puisque c'est le quotient de deux réels strictement positifs.

Finalement, on a $x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$.

▶ Correction 6 – Voir l'énoncé

- $\ln(3) + \ln(4) - \ln(6) = \ln\left(\frac{3 \times 4}{6}\right) = \ln(2)$
- $\frac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1) = \frac{\ln(3^2)}{\ln(3)} - 0 = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)} = 2$
- $4\ln(3) - \ln(9) + 2\ln(27) = 4\ln(3) - \ln(3^2) + 2\ln(3^3) = 4\ln(3) - 2\ln(3) + 6\ln(3) = 8\ln(3)$.
- $\ln(3x^2) - \ln(3) = \ln(3) + \ln(x^2) - \ln(3) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$ car $x > 0$

▶ Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout $x > 0$

$$\ln(4x^2) + 6\ln(x) - 3 = \ln(4) + \ln(x^2) + 6\ln(x) - 3 = 8\ln(x) + \ln(4) - 3.$$

Ainsi

$$\ln(4x^2) + 6\ln(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow 8\ln(x) + \ln(4) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3 - \ln(4)}{8} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{3 - \ln(4)}{8}\right).$$

▶ Correction 8 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x > 1$,

$$\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 2x + 1) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}\right) = \ln\left(\frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)^2}\right) = \ln\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right).$$

► Correction 9 – Voir l'énoncé

$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{49}{50}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{49}{50}\right)$.

Après simplification, il reste donc

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{49}{50}\right)=\ln\left(\frac{1}{50}\right).$$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, en factorisant dans le ln par e^{-x}, on a

$$\ln(1+e^{-x})=\ln\left(e^{-x}\times\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)\right)=\ln(e^{-x})+\ln\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)=-x+\ln(1+e^{x}).$$

► Correction 11 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $e^2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ ».
   - Initialisation : On a $u_0=e^3$ et $u_1=e\times\sqrt{e^3}=e^{5/2}$. On a bien $e^2\leqslant u_1\leqslant e$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $e^2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$. En appliquant la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a alors $e\leqslant\sqrt{u_{n+1}}\leqslant\sqrt{u_n}$. On multiplie alors par e et on obtient $e\times e\leqslant e\sqrt{u_{n+1}}\leqslant e\sqrt{u_n}$ soit $e^2\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers une limite que l'on note l. Par ailleurs, la fonction $x\mapsto e\sqrt{x}$ est continue sur $[e^2;+\infty[$. On a donc $l=e\sqrt{l}$ et donc $l=0$ ou $l=e^2$. L'unique possibilité est alors $l=e^2$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, $a_n=\ln(u_n)-2$ d'où $\ln(u_n)=a_n+2$ et $u_n=e^{a_n+2}$
   (b) Pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\sqrt{u_n})-2=\ln(e)+\ln(\sqrt{u_n})-2=1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-2=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)=\frac{1}{2}a_n.$$
   (c) La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0=\ln(u_0)-2$
   On a donc $a_0=\ln(e^3)-2=3-2=1$.
   (d) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n=\exp(a_n+2)=\exp\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.
   (e) Puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right)=2$. La fonction exponentielle étant continue en 2, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^2$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

1. On a $a^x=b$ si et seulement si $e^{x\ln(a)}=b$ si et seulement si $x\ln(a)=\ln(b)$ si et seulement si $x=\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$.
2. (a) Le pH de cette solution vaut $-\log(10^{-4})=-\dfrac{\ln(10^{-4})}{\ln(10)}=-\dfrac{-4\ln(10)}{\ln(10)}=4$.
   (b) Soit pH_1 et pH_2 tel que $pH_1=pH_2-1$. Notons C_1 et C_2 les concentrations en ions hydronium associées. En remarquant que $1=\log(10)$, on a alors $-log(C_1)=-\log(C_2)-\log(10)$ soit $\log(C_1)=\log(C_2)+\log(10)$ et donc $\log(C_1)=\log(10C_2)$ Ainsi, $C_1=10C_2$. Si le pH baisse de 1, c'est que la concentration en ions hydronium a été multipliée par 10.

(c) Notons C la concentration en ions hydronium du cola. On a $-\log(C) = 2.5$, d'où $-\dfrac{\ln(C)}{\ln(10)} = 2.5$ et donc $C = e^{-2.5\ln(10)} \simeq 3.2 \times 10^{-3}$ mol.L-1.

(d) Notons C la concentration correspondant à un pH supérieur à 7. On a alors $-\log(C) \geqslant 7$ soit $C \leqslant 10^{-7}$ mol.L^{-1}.

3. (a) Notons I l'intensité sonore d'un avion au décollage.
On a alors $120 = 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ soit $\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 12$. Ainsi, $\dfrac{I}{I_0} = 10^{12}$ et donc $I = 10^{12}I_0 = 1$ W.m^{-2}.

(b) On a $10\log\left(\dfrac{2I}{I_0}\right) = 10\log(2) + 10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$. Or, $10\log(2) \simeq 3$. Lorsque l'intensité sonore est multipliée par 2, le niveau sonore augmente de 3 décibels.

(c) On cherche n tel que $10\log\left(\dfrac{nI}{I_0}\right) = 120$ sachant que $10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right) = 80$.
Or, $10\log\left(\dfrac{nI}{I_0}\right) = 10\log(n) + 10\log\left(\dfrac{nI}{I_0}\right) = 10\log(n) + 80$.
Il faut donc que $10\log(n) + 80 = 120$ soit $\log(n) = 4$ et donc $n = 10^4$. Il faut réunir 10000 personnes pour que le niveau sonore cumulé de leur cri atteigne 120 dB.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

a. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-x) = +\infty$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x} = \dfrac{x^2}{x^2} \times \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1$. La fonction ln étant continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right) = \ln(1) = 0$.

c. $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2x+3) = 3$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+x) = 0^+$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right) = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2\ln(x)) = +\infty$.

e. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+}(2x^2\ln(x)) = 0$.

f. Pour tout $x > 1$, $x - \ln(x) = x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. Or, par croissances, comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(x)) = +\infty$.

g. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - x) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x-x) = +\infty$.

h. Pour tout $x > 0$, $e^x - x = e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-x) = +\infty$.

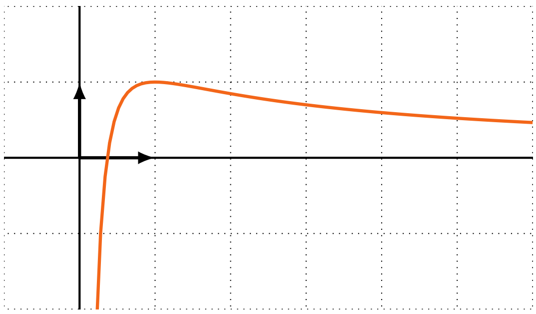
i. Pour tout réel $x > 0$, $e^x - \ln(x) = e^x\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\times\dfrac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-\ln(x)) = +\infty$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

1. Soit $x > 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
2. On a $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\ln(x)) = -\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.
   Par ailleurs, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = 1+\ln(x)$ et $v(x) = x$. u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et v ne s'y annule pas. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty$ et pour tout réel $x > 0$,
   $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln(x))\times 1}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}.$$
4. Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-\ln(x)$. Or, $-\ln(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. On trace l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



6. La fonction f est continue sur $[1;+\infty[$. De plus, $f(1) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans $[1;+\infty[$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{2}$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, ce réel est unique. A l'aide de la calculatrice, on trouve $x \simeq 5{,}36$.
7. Si $m \leqslant 0$, l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution sur $]0;+\infty[$.
   Si $0 < m < 1$, cette équation possède deux solutions. Si $m = 1$, il n'y a qu'une solution.
   Enfin, si $m > 1$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution.

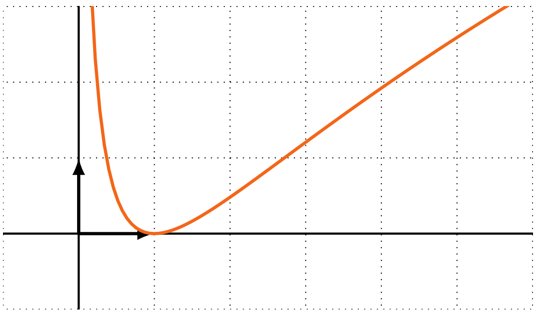
► Correction 15 – Voir l'énoncé

1. Soit $x > 0$
   $$f(x) = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \text{ OU } \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e \text{ OU } x = \frac{1}{e}.$$
2. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=2\times\ln(x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln(x)}{x}$, qui est du signe de $\ln(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. On trace l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



5. Si $m<0$, l'équation $f(x)=m$ n'admet aucune solution sur $]0;+\infty[$.
Si $m=0$, cette équation possède une unique solution. Si $m>0$, il y a deux solutions.

▶ Correction 16 – Voir l'énoncé

Le discriminant du polynôme x^2-2x+3 vaut -8 qui est négatif. Ainsi, pour tout réel x, $x^2-2x+3>0$. f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x\mapsto x^2-2x+3$ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+3}$.

Puisque pour tout réel x, $x^2-2x+3>0$, $f'(x)$ est du signe de $2x-2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

▶ Correction 17 – Voir l'énoncé

a. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $2^n\geqslant 40000$ si et seulement si $\ln(2^n)\geqslant\ln(40000)$ soit $n\ln(2)\geqslant\ln(40000)$ et, $\ln(2)$ étant positif, $n\geqslant\dfrac{\ln(40000)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 16.

b. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $1.01^n\geqslant 2$ si et seulement si $\ln(1.01^n)\geqslant\ln(2)$ soit $n\ln(1.01)\geqslant\ln(2)$ et, $\ln(1.01)$ étant positif, $n\geqslant\dfrac{\ln(2)}{\ln(1.01)}$. L'entier recherché est 70.

c. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $0.7^n \leqslant 10^{-3}$ si et seulement si $\ln(0.7^n) \leqslant \ln(10^{-3})$ soit $n\ln(0.7) \leqslant -3\ln(10)$ et, $\ln(0.7)$ étant négatif, $n \geqslant \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(0.7)}$. L'entier recherché est 20.

d. $121\times 0{,}97^{2n+1} \leqslant 1$ si et seulement si $0{,}97^{2n+1} \leqslant \dfrac{1}{121}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $(2n+1)\ln(0.97) \leqslant -\ln(121)$. En divisant par $\ln(0.97)$ qui est négatif, on obtient $2n+1 \geqslant -\dfrac{\ln(121)}{\ln(0.97)}$ et donc $n \geqslant \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln(121)}{\ln(0.97)}-1\right)$. L'entier recherché est 79.

e. $3\times 1{,}1^n - 150 \geqslant 365$ si et seulement si $1.1^n \geqslant \dfrac{515}{3}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $n\ln(1.1) \geqslant \ln(515)-\ln(3)$ et donc $n \geqslant \dfrac{\ln(515)-\ln(3)}{\ln(1.1)}$. L'entier recherché est 54.

f. $10^{12}\times 2^{-n} \leqslant 0{,}1$ équivaut à $2^{-n} \leqslant 10^{-13}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $-n\ln(2) \leqslant -13\ln(10)$ et donc $n \geqslant \dfrac{13\ln(10)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 44.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

L'expression $(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)$ existe pour tout réel $x>0$. Construisons le tableau de signe de cette expression.

x	0		$\ln(3)/2$		e		$+\infty$
$e^{2x}-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)-1$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble solution recherché est $S = \left]0;\dfrac{\ln(3)}{2}\right[\cup]e;+\infty[$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = u_{n+1}-8 = \dfrac{7}{8}u_n+1-8 = \dfrac{7}{8}(a_n+8)-7 = \dfrac{7}{8}a_n$.
   La suite (a_n) est donc géométrique, de raison $\dfrac{7}{8}$ et de premier terme $a_0 = u_0-8 = -3$.
2. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = -3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ et $u_n = a_n+8 = 8-3\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$.
3. Soit n un entier naturel. On a $u_n \geqslant 7{,}999$ si et seulement si $8-3\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^n \geqslant 7.999$, soit $\left(\dfrac{7}{8}\right)^n \leqslant \dfrac{0.001}{3}$.
   Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $n\ln\left(\dfrac{7}{8}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{0.001}{3}\right)$ et donc, en divisant par $\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)$ qui est négatif, $n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{0.001}{3}\right)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)}$. L'entier recherché est 60.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

Soit n un entier naturel. Après n années, la population de cette ville a été multipliée par 1.03^n. On cherche donc à résoudre l'équation $1.03^n \geqslant 2$, ce qui équivaut à $n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1.03)}$. L'entier recherché est 24 : la population aura doublé en 24 ans.

▶ Correction 21 – Voir l'énoncé

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et donc $1+e^x > 0$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable comme composition de fonctions dérivables. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant.

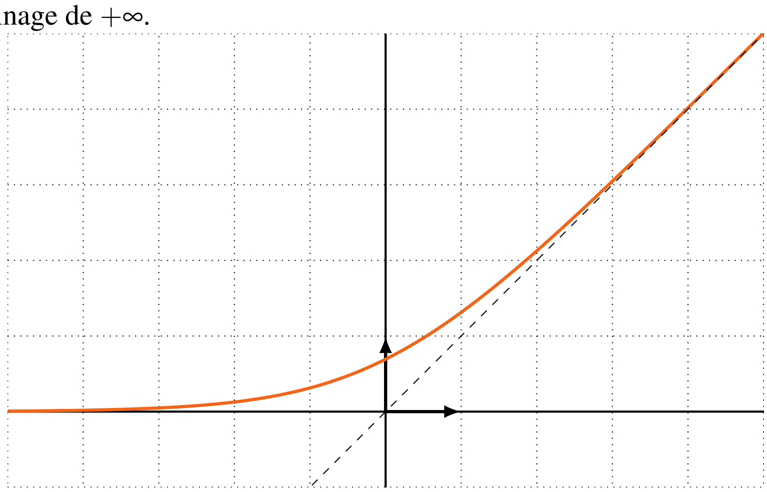
x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$+\infty$ ↗	$+\infty$

4. (a) Pour tout réel x,

$$g(x) = f(x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(e^{-x}+1).$$

   (b) Pour tout réel x, $1+e^{-x} > 1$ et donc $\ln(1+e^{-x}) > 0$, par croissance du logarithme népérien sur $[1;+\infty[$. Il en vient que pour tout réel x, $g(x) > 0$, soit $f(x) - x > 0$ et donc $f(x) > x$.

   (c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. La courbe de f se rapproche de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

5. 

▶ Correction 22 – Voir l'énoncé

1. Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{2x} + \dfrac{2}{2x} = \dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}$.

3. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{\alpha} + \ln(\alpha) = 0$ ou encore $\sqrt{\alpha} = -\ln(\alpha)$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 0.49$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

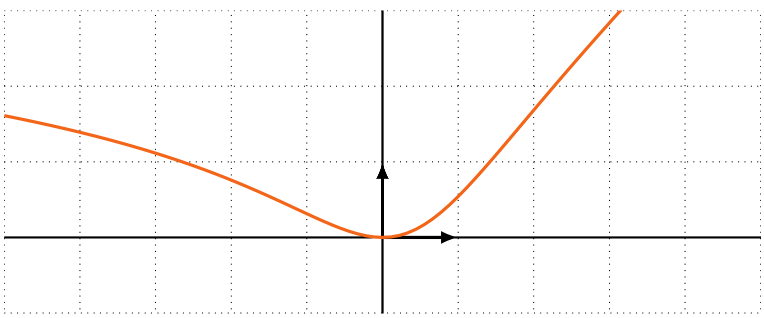
Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^x - x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x - 1$. On en déduit le tableau de variations de u.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, pour tout réel x, $e^x - x \geqslant 1$ et donc $e^x - x > 0$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. f est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. Les variations de f sont les mêmes que les variations de u. On a donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors tracer l'allure de la courbe de f.



► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. D'après le graphique, on a $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.

2. Pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2}.$$

3. D'une part, $f(1) = 4$ d'après le graphique. Or, en utilisant la formule, on a $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a$. Ainsi, $a = 4$. Par ailleurs, $f'(1) = 0$ d'après le graphique, et $f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln(1)}{1^2} = b - 4$ en utilisant la formule. Il en vient que $b - 4 = 0$ et donc $b = 4$.
4. On a $\lim\limits_{x\to 0^+} (4 + 4\ln(x)) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (f(x)) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln(x)}{x}$. Par croissances comparées et somme de limites, $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)) = 0$.
5. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln(x)}{x^2}$ est du signe opposé à celui de $\ln(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

6. Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{-\frac{4}{x} \times x^2 - (-4\ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{x(-4 + 8\ln(x))}{x^4} = \dfrac{-4 + 8\ln(x)}{x^3}$.
7. Pour tout $x > 0$, on a $x^3 > 0$ et $-4 + 8\ln(x) > 0$ si et seulement si $\ln(x) > \dfrac{1}{2}$ soit $x > \sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Partie A

1. Par croissances, comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x(1 - \ln(x))$. Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - \ln(x)) = -\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.
3. (a) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln(x) + 1 = -\ln(x)$.
   (b) On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. On a $f(x) = x$ si et seulement si $x - x\ln(x) = x$ soit $-x\ln(x) = 0$. Puisque $x > 0$, l'unique solution de cette équation est $x = 1$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».
   - On a $u_0 = 0.5$ et $u_1 = 0.5 - 0.5\ln(0.5) \simeq 0.84$. On a bien $0.5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0.5; 1]$ on a alors $f(0.5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$. Or, $f(0.5) \geqslant 0.5$ et $f(1) = 1$. Ainsi, on a $0.5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. (a) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
   (b) Puisque la fonction f est continue sur $[0.5; 1]$ et que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0.5; 1]$, alors $f(\ell) = \ell$. Or, l'unique solution de cette équation sur cet intervalle est 1. Ainsi, $\ell = 1$.

Partie C

Pour tout réel k, pour tout réel x, f_k est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f_k'(x) = k - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = k - 1 - \ln(x)$.
Or, $f_k'(x) \leqslant 0$ si et seulement si $k - 1 - \ln(x) \leqslant 0$ si et seulement si $k - 1 \leqslant \ln(x)$ si et seulement si $x \geqslant e^{k-1}$

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, f_k admet un maximum en $x_k = e^{k-1}$.
Par ailleurs, $f_k(x_k) = ke^{k-1} - e^{k-1} \times \ln(e^{k-1}) = ke^{k-1} - (k-1)e^{k-1} = e^{k-1}$.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

1. Si le test est négatif on aura fait un test : dans ce cas, on a $X_n = 1$. Sinon, on aura fait un test joint puis n tests individuels : on aura alors $X_n = n + 1$.
2. $\mathbb{P}(X_n = 1)$ est la probabilité que l'on ne fasse qu'un test : cela signifie que le test des n personnes est négatif et donc qu'elles ne sont pas malades. La probabilité qu'une personne au hasard soit malade est égale à 0.05. La probabilité qu'une personne au hasard soit saine est donc de 0.95. Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on suppose ceux-ci indépendants. La probabilité que les n personnes soient saines vaut donc 0.95^n.

3. Puisque X_n ne peut prendre que les valeurs 1 et $n+1$, on a alors $\mathbb{P}(X_n = n+1) = 1 - 0.95^n$.
   Ainsi, $E[X_n] = (n+1) \times \mathbb{P}(X_n = n+1) + 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) = (n+1)(1-0.95^n) + 0.95^n$ et donc $E[X_n] = n+1-n\times 0.95^n$.
   Cette espérance représente le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon de n personnes.
4. (a) f est dérivable sur $[20;+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(0.95)$.
   Or, $x \geqslant 20$ et donc $\dfrac{1}{x} \leqslant 0.05$ puis $f'(x) \leqslant 0.05 + \ln(0.95) < 0$. f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$.
   Par ailleurs, pour tout réel $x \geqslant 20$, $f(x) = x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \ln(0.95)\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \ln(0.95)\right) = \ln(0.95) < 0$.
   Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   (b) La fonction f est continue sur $[20;+\infty[$. On a $f(20) \simeq 1.97$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \geqslant 20$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur cet intervalle, une telle solution est unique. On trouve $87 < \alpha < 87.1$.
   (c) En utilisant les deux questions précédentes, on en déduit que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [20;\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in [\alpha;+\infty[$.
5. Soit $n \geqslant 20$. On a $E(X_n) < n$ si et seulement si $n+1-n\times 0.95^n < n$ soit $1 < n \times 0.95^n$.
   On applique le logarithme, qui est strictement croissant sur $[1;+\infty[$. Ainsi, $E(X_n) < n$ si et seulement si $0 < \ln(n \times 0.95^n)$.
   Tester toutes les personnes conduira à moins d'analyses qu'avec la méthode groupée pour des échantillons de 20 à 87 personnes au maximum. Au delà il vaut mieux utiliser la méthode de test groupés.