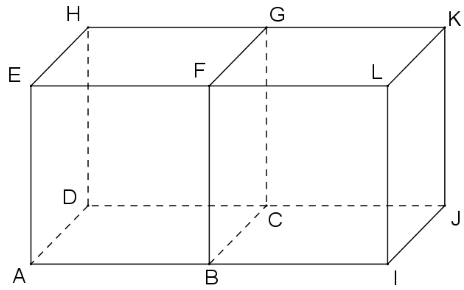
Vecteurs de l'espace

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. Compléter les égalités de vecteurs suivantes.



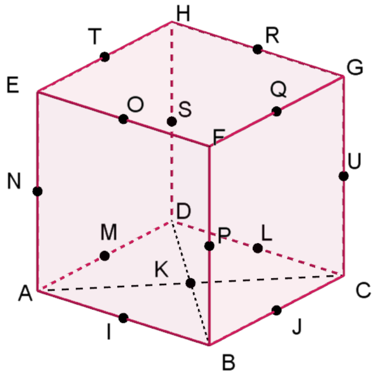
$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{A\ldots}$	$\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{B\ldots}$
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{E\ldots}$	$\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{F\ldots}$
$\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{A\ldots}$	$\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{\ldots A}$

► Exercice 2 – Voir le corrigé

En utilisant la même figure, exprimer...

- ... le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{DL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JE}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{BK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{CG}$.

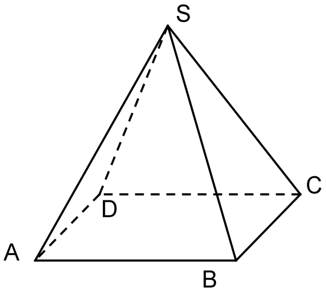
► Exercice 3 – Voir le corrigé



On considère un cube ABCDEFGH sur lequel on a placé les milieux des arêtes ainsi que le centre de la face ABCD. Donner...

- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{TR}$.
- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{OJ}$.
- Trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$.
- Deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{DK}$.
- Deux vecteurs coplanaires à $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

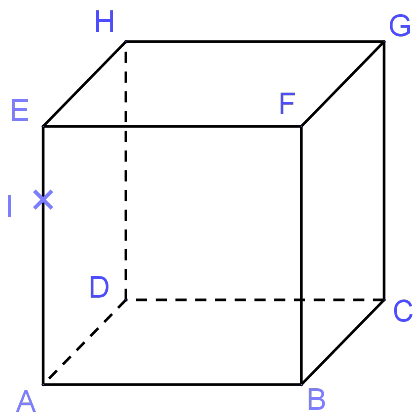


On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.

On considère les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{SA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}$.
Montrer que $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$.
Que peut-on en déduire sur ces trois vecteurs ?

Droites et plans de l'espace

► Exercice 5 – Voir le corrigé



On considère le $ABCDEFGH$ ci-contre, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$.
Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG)	(AF) et (IE)
(CD) et (EB)	(DI) et (EH)
(IB) et (FA)	(GF) et (DA)

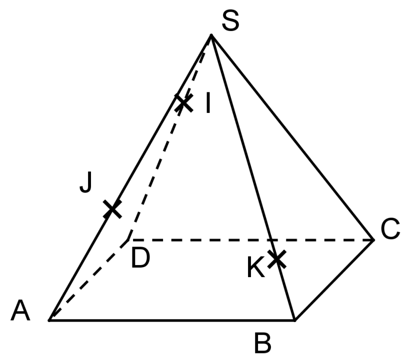
► Exercice 6 – Voir le corrigé

Sur le cube précédent, déterminer...

a. l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH).
b. un plan parallèle au plan (BFG).
c. l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB).
d. l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD).
e. un plan parallèle au plan (IEB).
f. l'intersection de la droite (AI) et du plan (FGH).

► Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et de base carrée. On place un point I sur $[DS]$, un point J sur $[AS]$ et un point K sur $[BS]$ de telle sorte que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles, de même que les droites (IK) et (BD).



1. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
2. Justifier que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
3. Construire alors l'intersection des plans (ABD) et (IJK).
4. Sans justifier la construction, vérifier que l'intersection des droites (JK) et (AB) se trouve sur cette droite.

► Exercice 8 (Théorème du toit) – Voir le corrigé

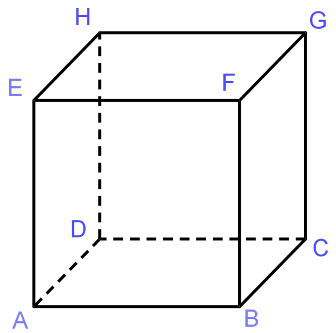
Soit P_1 et P_2 deux plans sécants et Δ la droite d'intersection de ces plans. Soit (d_1) une droite du plan P_1 et (d_2) une droite du plan P_2 telles que (d_1) et (d_2) sont parallèles.

En raisonnant par l'absurde, montrer que Δ est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

Repère de l'espace

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

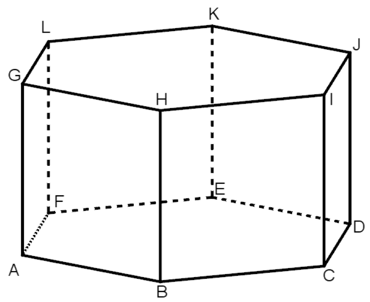
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, donner...



- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point G dans le repère $(B;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point I, milieu du segment $[BG]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point J, milieu du segment $[FH]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$.



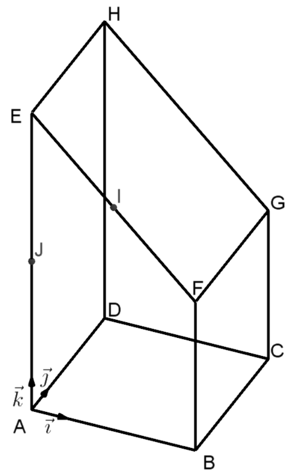
1. On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})$.
   (a) Donner les coordonnées des points D, E, H et J dans ce repère.
   (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans ce repère.
2. Reprendre les questions précédentes en se plaçant cette fois dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AH})$.

▶ Exercice 11 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

On considère le prisme droit $ABFEDCGH$ de base $ABFE$, rectangle en A. On associe à ce prisme le repère $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que

$$\vec{\imath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus, on a $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.
On note I le milieu du segment $[EF]$ et J le milieu du segment $[AE]$.
Donner les coordonnées des points H, I et J.



▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(5;1;8)$, $C(-3;2;-1)$ et $D(-1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?
3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

► Exercice 13 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1;3;5)$, $B(2;7;-1)$ et $C(5;19;-19)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;1;1)$ et $D(5;1;6)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B C et D ?

► Exercice 16 – Voir le corrigé

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2;2;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;3)$ et $E(-1;4;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3. Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

Représentations paramétriques de droite

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2;5;-3)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère les points $A(1;3,-2)$ et $B(2;5;-4)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

► Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère les points $A(1;2;7)$ et $B(3;-1;6)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1+6t \\ z = -3+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Le point A appartient-il à la droite Δ ?
2. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $C(6;-1;2)$ et parallèle à Δ.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

$$(d_1) : \begin{cases} x = -5+2t \\ y = 11-3t \\ z = 11-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 7-4t' \\ y = 1-2t' \\ z = -2+5t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

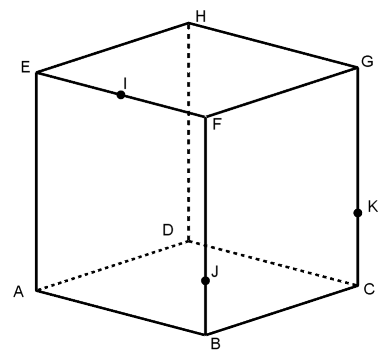
$$(d_1) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = -5+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 2+t' \\ y = -1 \\ z = 3+6t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

Exercices de synthèse

► Exercice 22 – Voir le corrigé

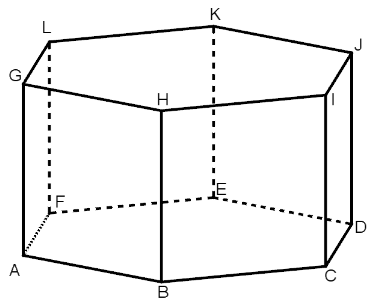
On se place dans un cube $ABCDEFGH$, d'arêtes de longueur 1. On note I le milieu du segment $[EF]$.
On considère par ailleurs le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ et le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$.
L'espace est muni du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$



1. Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes. On note M leur point d'intersection
2. A l'aide de deux autres droites sécantes, construire sur la figure ci-dessus, en justifiant la construction, l'intersection des plans (ABC) et (IJK)
3. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{5}{9};1;1\right)$
   (a) Sur quelle arête se situe le point L ?
   (b) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
   (c) En déduire que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes.
   (d) Donner une équation paramétrique de ces deux droites et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

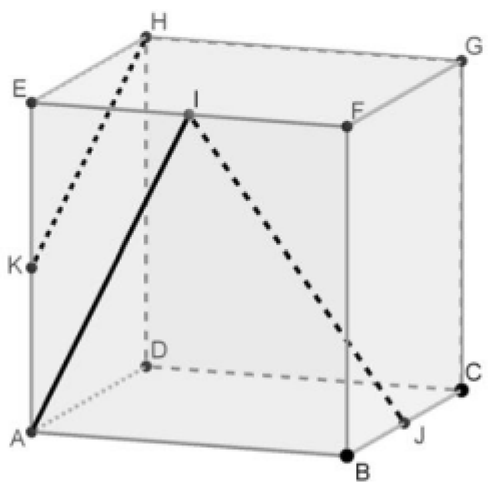
► Exercice 23 – Voir le corrigé

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$. Les droites (AI) et (BK) sont-elles sécantes ?



► Exercice 24 (Amérique du Nord 2021) – Voir le corrigé

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

2. Donner les coordonnées des points I et J.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

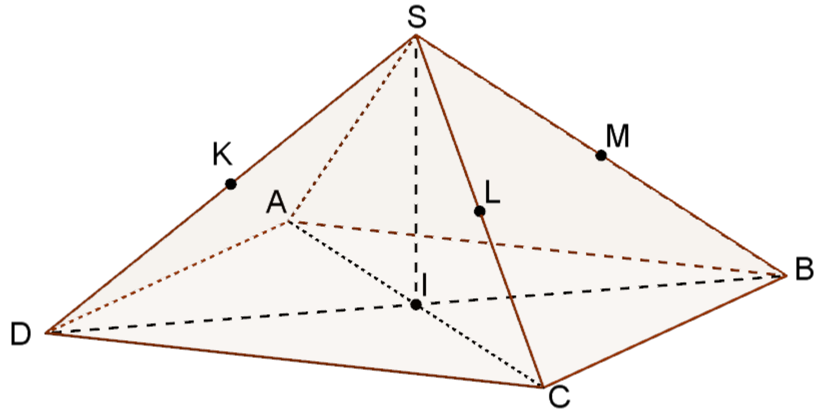
On considère les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques ci-dessous.

$$(d_1) : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t \\ z = -2+3t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 1+t \\ z = 8+2t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}$$

4. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

► Exercice 25 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.



$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré $ABCD$.

On suppose que $IC = IB = IS = 1$. Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé $(I,\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0,0,0), A(-1,0,0), B(0,1,0), C(1,0,0), D(0,-1,0), S(0,0,1)$$

2. Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont...

   a. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont...

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est

   a. $\left\{\begin{array}{l}x=-1-t\\y=t\\z=-t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$ **b.** $\left\{\begin{array}{l}x=-1+2t\\y=0\\z=1+2t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$

   c. $\left\{\begin{array}{l}x=t\\y=0\\z=1+t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$ **d.** $\left\{\begin{array}{l}x=-1+t\\y=1+t\\z=1-t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$