# 1. Exercices

## Limite d'une suite

### ▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \sqrt{n}$.

1. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100$.
2. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100000$.
3. Soi $A$ un réel quelconque. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant A$.
4. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite $(u_n)$ ?

### ▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4 - 3n$.

1. Calculer $u_{30}$, $u_{70}$, $u_{1000}$. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?
2. Soit $A$ un réel. Résoudre l'équation $u_n \leqslant A$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite $(u_n)$ ?

### ▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}$. A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ?

### ▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3-5n}{10n+2}$. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?

### ▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2$.

1. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?
2. Cette limite change-t-elle si $u_0 = 3$ ?

### ▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1. Donner des valeurs approchées au centième de $u_{10}$, $u_{100}$, $u_{1000}$ .
2. La suite $(u_n)$ semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$. Quel est le signe de cette quantité ?
4. En déduire que $|u_n - 3| = u_n - 3$. On rappelle que la valeur absolue d'un réel $x$ vaut $x$ si ce réel est positif et $-x$ sinon.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $|u_n - 3| < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Conclure.

### ▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = (-1)^n$. La suite $(u_n)$ semble-t-elle avoir une limite ?

# Opérations sur les limites

### ► Exercice 8 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$.

**a.** $u_n = n^2 + \sqrt{n}$ **b.** $u_n = \dfrac{1}{n} - n^3$ **c.** $u_n = \mathrm{e}^{-n} + 3n$

**d.** $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n$ **e.** $u_n = -6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}$ **f.** $u_n = \dfrac{1+n}{n}$

**g.** $u_n = (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right)$ **h.** $u_n = \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right)$ **i.** $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$

**j.** $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{1 + \frac{1}{n}}$ **k.** $u_n = \dfrac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}$ **l.** $u_n = \dfrac{-1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

**m.** $u_n = n^2 - n$ **n.** $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{3}{n^2}\right)$ **o.** $u_n = \dfrac{3 + \sqrt{n}}{1 + \dfrac{2}{n}}$

**p.** $u_n = -2n^2 - \dfrac{5}{n+1}$ **q.** $u_n = \dfrac{5}{-1-n}$ **r.** $u_n = (3n+1)\left(\dfrac{1}{n} - 2\right)$

### ► Exercice 9 – Voir le corrigé

Donner deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

### ► Exercice 10 – Voir le corrigé

Donner deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 3$.

### ► Exercice 11 – Voir le corrigé

Démontrer la propriété suivante : soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

### ► Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit $(u_n)$ une suite convergente et $(v_n)$ une suite divergente. En procédant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est divergente.

### ► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$.

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Calculer $v_0$, $v_1$, $v_2$ et $v_3$. Quelle semble être la nature de la suite $(v_n)$ ?
   (b) Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier naturel $n$. L'hypothèse de la question précédente est-elle vérifiée ?
   (c) En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.
   (d) En déduire une expression de $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.
   (e) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

### ▸ Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = u_n - n^2$.

1. Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
2. Déterminer une expression de $v_n$ puis $u_n$ pour tout entier naturel $n$.
3. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

### ▸ Exercice 15 (Nouvelle-Calédonie 2023) – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

1. Donner $v_0$.
2. Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.
3. En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$
4. En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1}{n + 0.5} - 2$.
5. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

### ▸ Exercice 16 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x - 2}{2x - 1}$. Déterminer le sens de variations de $f$ sur son domaine de définition.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = 2$.
   (b) En déduire une expression de $v_n$ puis de $u_n$ pour tout entier naturel $n$.
   (c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

# Formes indéterminées

### ▸ Exercice 17 – Voir le corrigé

En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

**a.** $u_n = \dfrac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3}$ **b.** $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 3}$ **c.** $u_n = \dfrac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$

**d.** $u_n = \dfrac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$ **e.** $u_n = \dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2 - 3n^2}$ **f.** $u_n = \dfrac{n^2 - \frac{1}{n^4}}{n^3 + 3}$ pour $n > 0$

### ► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 < u_n < 3$.
3. Pour tout entier naturel $n$, on pose $a_n = \dfrac{1}{3-u_n}$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{3}$. Pour cela, on exprimera $a_{n+1}$ en fonction de $u_{n+1}$, puis en fonction de $u_n$, puis en fonction de $a_n$.
   (c) En déduire que la suite $(a_n)$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (d) Exprimer $a_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.
   (e) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

### ► Exercice 19 – Voir le corrigé

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

**a.** $u_n = \sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}$

**b.** $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{2n+5}$

**c.** $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

**d.** $u_n = \sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+2}$

### ► Exercice 20 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

**a.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}$

**b.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{n+\mathrm{e}^{-n}}$

**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}}$

### ► Exercice 21 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-n-1}$.

1. En utilisant la quantité conjuguée, montrer que pour tout entier naturel $n > 1$

$$u_n = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2} + \sqrt{n^2-n-1}}.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$,

$$u_n = \frac{4-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}.$$

3. En déduire, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)$.

# 2. Corrigés

### ► Correction 1 – Voir l'énoncé

Puisque $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 100$ si et seulement si $n \geqslant 100^2$ c'est-à-dire $n \geqslant 10000$.

Puisque $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 100000$ si et seulement si $n \geqslant 100^2$ c'est-à-dire $n \geqslant 10000000000$.

On considère un réel $A$ quelconque.

- Si $A < 0$, alors pour tout $n$, $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, on sait que $\sqrt{n} \geqslant A \Leftrightarrow n \geqslant A^2$. Ainsi, dès que $n \geqslant A^2$, on a $u_n \geqslant A$ et ceci est valable quelque soit la valeur de $A$.

Puisque pour tout $A$, on a $u_n \geqslant A$ à partir d'un certain rang, on peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

### ► Correction 2 – Voir l'énoncé

On a $u_{30} = -86$, $u_{70} = -206$, $u_{1000} = -2996$. Il semble que la limite de la suite $(u_n)$ soit $-\infty$.

$u_n \leqslant A$ si et seulement si $4-3n \leqslant A$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{A-4}{-3}$. Puisque pour tout réel $A$, on a $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, on peut en conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

### ► Correction 3 – Voir l'énoncé

Cette suite tend pas vers $+\infty$. En effet, on rappelle qu'il existe une infinité de nombres premiers, et donc une infinité de valeur de $n$ pour lesquels $u_n = 1$. Prenons en particulier $A = 2$ dans la définition de la limite infinie. On a donc que, pour tout $N$, il existe un rang $n \geqslant N$ tel que $u_n < 2$ : il n'est pas possible d'avoir tous les termes de la suite supérieurs à 2 à partir d'un certain rang. La limite de la suite ne peut donc être $+\infty$.

### ► Correction 4 – Voir l'énoncé

Il semble que la limite de la suite $(u_n)$ soit $-\dfrac{1}{2}$.

### ► Correction 5 – Voir l'énoncé

Il semblerait que la limite de cette suite soit 4. On obtient la même limite si on prend $u_0 = 3$.

### ► Correction 6 – Voir l'énoncé

On a $u_{10} = \dfrac{36}{11} \simeq 3.272$, $u_{100} = \dfrac{306}{101} \simeq 3.030$, $u_{1000} = \dfrac{3006}{1001} \simeq 3.003$. Il semblerait que la suite $(u_n)$ soit convergente, de limite 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3n+6}{3+1} - \dfrac{3(n+1)}{n+1} = \dfrac{3n+6-3n-3}{n+1} = \dfrac{3}{n+1}$. Puisque cette valeur est positive, on a $|u_n - 3| = u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, on a $|u_n - 3| < \varepsilon$. Ainsi, la suite $(u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

### ► Correction 7 – Voir l'énoncé

Les termes de rang pair de cette suite valent 1 alors que les termes de rang impair valent -1. Cette suite n'admet pas de limite.

### ► Correction 8 – Voir l'énoncé

**a.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.

**b.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - n^3\right) = -\infty$;

**c.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-n} + 3n\right) = +\infty$.

**d.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n\right) = +\infty$.

**e.** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}\right) = -\infty$ .

**f.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+n}{n}\right) = 1$.

**g.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + 2\right) = 2$.
Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right) = +\infty$.

**h.** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{n}\right) = 3$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right) = -2$. Finalement, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right) = 3 \times (-2) = -6$.

**i.** Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser $u_n$. Pour tout entier $n$, $u_n = \sqrt{n}(1-n^2)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

**j.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n}{1 + \dfrac{1}{n}} = +\infty$.

**k.** On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6 + \dfrac{3}{n^2}\right) = 6$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{n} - 1\right) = -1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6 + \dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{5}{n} - 1} = \dfrac{6}{-1} = -6$.

**l.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=+\infty$. Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous $n>0$, $u_n=n^2\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$ et utiliser les règles de calcul sur un produit.

**m.** Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty-\infty$". Il faut donc factoriser $u_n$. Pour tout entier naturel $n$, $u_n=n(n-1)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

**n.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)=2$.
Ainsi, par limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

**o.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+\sqrt{n})=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

**p.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n^2=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{5}{n}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

**q.** Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-n)=-\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

**r.** D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+1)=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=-2$. Ainsi, en utilisant la règle des limites sur les produits, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ (ne pas oublier la règle des signes).

### ► Correction 9 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n=n$ et $v_n=\dfrac{1}{n^2}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_nv_n=\dfrac{1}{n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=0$.

### ► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n=n$ et $v_n=3-n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$. Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n+v_n3$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=3$

### ► Correction 11 – Voir l'énoncé

Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif et $A$ un réel

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, il existe un entier $N_1$ tel que, pour tout entier $n\geqslant N_1$, on a $u_n\geqslant A-l+\varepsilon$
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$, il existe un entier $N_2$ tel que, pour tout entier $n\geqslant N_2$, on a $v_n\in[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$. En particulier, $v_n\geqslant\varepsilon$

Prenons alors $N=\max(N_1;N_2)$. Alors, pour tout entier naturel $n\geqslant N$, on a $u_n+v_n\geqslant A-l+\varepsilon+l-\varepsilon$, c'est-à-dire $u_n\geqslant A$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$.

### ► Correction 12 – Voir l'énoncé

Supposons que la suite $(u_n+v_n)$ converge. Alors, pour tout entier naturel $n$, $v_n=(u_n+v_n)-u_n$. $(v_n)$ est donc la différence de deux suites convergentes, elle est donc convergente, ce qui est contraire à ce qu'indique l'énoncé. Finalement, la suite $(u_n+v_n)$ diverge.

### ► Correction 13 – Voir l'énoncé

On a $u_1 = \dfrac{1}{1+2\times 1} = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{5}$ et $u_3 = \dfrac{\frac{1}{5}}{1+2\times\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{1}{7}$.

Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $P(n)$ : « $u_n > 0$ ».

- Initialisation : $u_0 = 1 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > 0$ et donc $1+2u_n > 0$. $u_{n+1}$ est le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc également strictement positif.
- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

On a alors $v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$. La suite $(v_n)$ semble arithmétique.

Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+2u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 2.

Pour tout entier naturel $n$, $v_n = v_0 + 2n = 1 + 2n$ et $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2n+1}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

### ► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - (n+1)^2 - (u_n - n^2) = u_n + 2n - 1 - (n^2+2n+1) - u_n + n^2 = -2.$$

Ainsi, $(v_n)$ est arithmétique, de premier terme $v_0 = u_0 - 0^2 = 3$ et de raison $-2$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_n = 3 - 2n$.

Or, puisque $v_n = u_n - n^2$, il en vient que $u_n = v_n + n^2 = n^2 - 2n + 3$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)$. Or, $\overset{2}{\lim\limits_{n\to+\infty}} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right) = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

### ► Correction 15 – Voir l'énoncé

On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ et donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2}$.

Or, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n-4}{u_n+3}$. On remplace donc $u_{n+1}$ par cette valeur. Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2u_n+6)}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{u_n+2}{u_n+3}} = \frac{u_n+3}{u_n+2}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3}{u_n+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{u_n+2}{u_n+2} = 1.$$

Finalement, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 1 + v_n$. La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 1.

Pour tout entier naturel $n$, on a donc $v_n = v_0 + n \times 1$ soit $v_n = \frac{1}{2} + n$.

Pour tout entier naturel $n$, on a $v_n = \frac{1}{u_n+2}$. Ainsi, $\frac{1}{v_n} = u_n + 2$ et $u_n = \frac{1}{v_n} - 2 = \frac{1}{n+0.5} - 2$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+0.5} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

### ► Correction 16 – Voir l'énoncé

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

$f$ est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Pour tout réel $x \neq \frac{1}{2}$,

$$f'(x) = \frac{3(2x-1) - 2(3x-2)}{(2x-1)^2} = \frac{6x - 3 - 6x + 4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0.$$

$f$ est donc strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Pour tout entier naturel $n$, on considère la proposition $P(n)$ : « $u_n > 1$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 2 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > 1$. La fonction $f$ étant strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, on a donc $f(u_n) > f(1)$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \frac{3 \times 1 - 2}{2 \times 1 - 1} = 1$. Ainsi, $u_{n+1} > 1$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Puisque pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$, il en vient que $u_n - 1 \neq 0$ et la suite $(v_n)$ est donc bien définie.

Pour tout entier naturel $n$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2}{2u_n-1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2-(2u_n-1)}{2u_n-1}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{u_n-1}{2u_n-1}} - \frac{1}{u_n - 1}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{2u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2(u_n - 1)}{u_n - 1} = 2.$$

Finalement, pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite $(v_n)$ est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$, $v_n = 1 + 2n$.

Par ailleurs, $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ et donc $u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{1+2n} + 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

### ► Correction 17 – Voir l'énoncé

**a.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\frac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3} = \frac{n^3\left(3 + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{2}{n^3} - 4\right)} = \frac{3 + \frac{2}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{\frac{2}{n^3} - 4}$.

En appliquant les règles de calcul classiques sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3} = -\frac{3}{4}$.

**b.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n^2+1}{n+3}=\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}=n\times\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}$ .

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+1}{n+3}=+\infty$.

**c.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}=\dfrac{n^3\times\left(\dfrac{1}{n^3}-2\right)}{n^3\times\left(\dfrac{1}{n}-3\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{n^3}-2}{\dfrac{1}{n}-3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3}==\dfrac{-2}{-3}=\dfrac{2}{3}$.

**d.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}=\dfrac{n^4\left(\dfrac{1}{n^4}-6\right)}{n^6\left(5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}\right)}=\dfrac{1}{n^2}\times\dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}=-\dfrac{6}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1}=0$.

**e.** Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\frac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2}=\frac{n\times\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\times n^2\times\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\times\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)}=n\times\frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)=-3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)=1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2}=-\infty$.

**f.** Pour tout entier naturel non nul $n$, $\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}=\dfrac{n^2\times\left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)}{n^3\times\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)}=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{n^6}}{1+\dfrac{3}{n^3}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)=1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3}=0$.

### ► Correction 18 – Voir l'énoncé

$u_1=\dfrac{9}{6-1}=\dfrac{9}{5}$, $u_2=\dfrac{9}{6-\frac{9}{5}}=\dfrac{9}{\frac{21}{5}}=\dfrac{45}{21}=\dfrac{15}{7}$.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $P(n)$ : « $0<u_n<3$ ».

- **Initialisation** : Puisque $u_0=1$, on a bien $0<u_0<3$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Ainsi, $0<u_n<3$ En multipliant par $-1$, qui est négatif, on a donc $0>-u_n>-3$. On ajoute 6 pour avoir $6>6-u_n>3$. On applique alors la fonction inverse

qui est décroissante sur $]0;+\infty[$. On a donc $\dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{6-u_n} < \dfrac{1}{3}$. Enfin, on multiplie par 9 pour obtenir $\dfrac{3}{2} < \dfrac{9}{6-u_n} < 3$. Or, puisque $0 < \dfrac{3}{2}$, on a bien $0 < u_{n+1} < 3$. $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, $P$ est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n = \dfrac{1}{3-u_n}$. Puisque $a_n \neq 0$, on peut appliquer la fonction inverse à cette égalité. On a alors $\dfrac{1}{a_n} = 3 - u_n$. Ainsi, $u_n = 3 - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{1}{3-u_n}$. Ainsi, $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-u_{n+1}}$.

Or, $u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}$. Ainsi $a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - \dfrac{9}{6-u_n}} = \dfrac{1}{\dfrac{3(6-u_n)-9}{6-u_n}} = \dfrac{6-u_n}{9-3u_n}$.

Or, d'après la question précédente, $u_n = \dfrac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi, $a_{n+1} = \dfrac{6 - \dfrac{3a_n-1}{a_n}}{9 - 3 \times \dfrac{3a_n-1}{a_n}} = \dfrac{\dfrac{6a_n - (3a_n-1)}{a_n}}{\dfrac{9a_n - 3\times(3a_n-1)}{a_n}}$.

On a donc $a_{n+1} = \dfrac{3a_n+1}{a_n} \times \dfrac{a_n}{3} = \dfrac{3a_n+1}{3} = a_n + \dfrac{1}{3}$.

La suite $(a_n)$ est donc arithmétique de raison $r = \dfrac{1}{3}$. Son premier terme vaut $a_0 = \dfrac{1}{3-u_0} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$. On rappelle que si $(a_n)$ est une suite arithmétique de raison $r$, alors pour tout entier naturel $n$, $a_n = a_0 + rn$. Dans notre cas, pour tout entier naturel $n$, $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{3}$.

On sait que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel $n$,

$$u_n = \frac{3\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{3}\right)-1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{3}} = \frac{\dfrac{3}{2}+n-1}{\dfrac{3+2n}{6}} = \frac{6\times\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{3+2n} = \frac{6n+3}{3+2n}.$$

En utilisant les règles sur les calculs de limites, on aboutit à une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Or, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n = \dfrac{n\left(6+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(\dfrac{3}{n}+2\right)} = \dfrac{6+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{3}{n}+2}$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{6}{2} = 3$.

### ► Correction 19 – Voir l'énoncé

**a.** Pour tout entier naturel $n > 3$,

$$\sqrt{n-3} - \sqrt{n+8} = (\sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}) \times \frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}} = \frac{n-3-(n+8)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}$$

et donc

$$\sqrt{n-3} - \sqrt{n+8} = -\frac{11}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8})=0$.

**b.** Attention à ne pas se lancer dans des calculs par pur automatisme, il ne s'agit pas ici d'une forme indéterminée ! $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+5}=+\infty$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$,

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{(n+1)-(n+2)}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{-1}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})=+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

**d.** Pour tout entier naturel $n$,

$$u_n=(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n+2})\times\frac{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}=\frac{4n+3-(4n+2)}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}=\frac{1}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.

### ► Correction 20 – Voir l'énoncé

**a.** Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\frac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}=\frac{\sqrt{n}\times\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+1\right)}{\sqrt{n\left(\frac{4}{n}+1\right)}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\times\frac{\frac{4}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{\frac{4}{n}+1}}=\frac{\frac{4}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{\frac{4}{n}+1}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+1\right)=1$. Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}+1\right)=1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4}{n}+1}=\sqrt{1}=1$.

Finalement, $\lim_{n\to+\infty}\frac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}=1$.

**b.** Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+\mathrm{e}^{-n}}=\frac{\sqrt{n^2}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)}=\frac{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{n\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)=2$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{2}$.

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)=1$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty}w_n=\sqrt{2}$.

**c.** Pour tout entier naturel $n$,

$$\frac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}=\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}^{-n}+1)}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n}}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n}}=1$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}}=\sqrt{1}=1$.

### ► Correction 21 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul $n$,

$$u_n = \sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-n-1} \times \frac{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}.$$

En développant le numérateur, on a alors

$$u_n = \frac{n^2+3n-2-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}} = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}.$$

On a en effet

$$\sqrt{n^2+3n-2} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = n\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

et

$$\sqrt{n^2-n-1} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = n\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi

$$u_n = \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)=4$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)=1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}\right)=\frac{4}{1+1}=2$.