Mathématiques

Terminale Générale

Jason LAPEYRONNIE

Sommaire

I Suites et récurrence

II Limites de suites

III Comparaison des limites de suites

IV Compléments sur la dérivation

V Limites de fonctions

XVI Loi binomiale

XVII Loi des grands nombres

Suites et récurrence

1. Cours : Suites et récurrence

1 Démonstration par récurrence

Exemple introductif, tiré de l'épreuve de spécialité de Polynésie 2022 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

A l'aide de cette expression, il est possible de calculer les termes de la suite de proche en proche.

- $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
- $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$.
- ...

Toutefois, il n'est pas possible de calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents... On souhaiterait déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

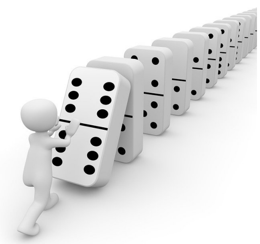
D'après les premiers termes de notre suite, il semblerait que pour tout entier naturel n, on ait $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Cette formule fonctionne pour les rangs 0, 1, 2 et 3 mais qu'en est-il pour le reste ?

Un moyen de s'assurer que cette formule fonctionne pour tous les rangs est de la démontrer par récurrence.

Définition 1 : Lorsque l'on souhaite démontrer une proposition mathématique qui dépend d'un entier n, il est parfois possible de démontrer cette proposition par récurrence.

Pour tout entier n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition qui nous intéresse. La démonstration par récurrence comporte trois étapes :

- **Initialisation** : On montre qu'il existe un entier n_0 pour lequel $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité** : on montre que, si pour un entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également ;
- **Conclusion** : on en conclut que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.



Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, peu importe lequel, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est **l'hérédité**. Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est **l'initialisation**.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre **conclusion**.

■ **Exemple 1 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a

$$\frac{1}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 = u_0.$$

  La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. A partir de ce résultat, on souhaite démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1} = \dfrac{1}{n+2}$.
  Nous avons donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

  On trouve bien que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1}$: $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Nous avons montré que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. ■

Une propriété utile qui peut être démontrée par récurrence est la suivante. Souvenez-vous en, elle reviendra dans un prochain chapitre !

Propriété 1 — Inégalité de Bernoulli : Soit a un réel strictement positif.
Pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Démonstration 1 : Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Fixons-nous un réel a strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note alors $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

- **Initialisation** : Prenons $n = 0$.
  - D'une part, $(1+a)^0 = 1$.
  - D'autre part, $1+0\times a = 1$.

  On a bien $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
  En multipliant des deux côtés de l'inégalité par $(1+a)$, qui est strictement positif, on obtient alors que

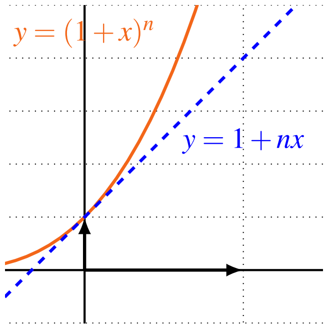
$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a).$$

  Or,

$$(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a.$$

  Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathscr{P}(0)$ est vraie et, si pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$l'est aussi. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

On a bien montré que, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$. □



Une interprétation graphique de cette inégalité est possible.
La droite d'équation $y=1+nx$ n'est autre que la tangente à la courbe d'équation $y=(1+x)^n$ à l'abscisse 0. L'inégalité de Bernoulli dit donc que la courbe se trouve au-dessus de la tangente lorsque $x>0$.

Nous verrons, lorsque la dérivation n'aura plus de secret pour vous, que cette remarque nous fournira une autre démonstration de l'inégalité de Bernoulli.

2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2 — Suites majorées, minorées, bornées : Soit (u_n) une suite réelle. On dit que...

- ...(u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
  Un tel réel M est alors appelé *majorant* de la suite (u_n).
- ...(u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
  Un tel réel m est alors appelé *minorant* de la suite (u_n).
- ...(u_n) est *bornée* si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

Les majorants et minorants sont indépendants de n ! Bien que pour tout $n>0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite (u_n) définie par $u_n = n$ est majorée. Cette indépendance se traduit dans l'ordre des quantificateurs employés dans la définition précédente (le majorant y apparaît avant l'entier n).

■ **Exemple 2 :** Pour tout n, on pose $u_n = \cos(n)$.

La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. ■

■ **Exemple 3 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n^2+1$. La suite (v_n) est minorée puisque pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$. En revanche, elle n'est pas majorée. ■

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (-1)^n n$. Cette suite n'est ni majorée, ni minorée. ■

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration de cette suite peut elle-même être démontrée par récurrence.

■ **Exemple 5 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant 4$ ».

- **Initialisation** : On a bien $u_0 \geqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant 4$.
  En multipliant cette inégalité par 0,5, on en déduit que $0{,}5u_n \geqslant 2$.
  En ajoutant 2, on en déduit que $0{,}5u_n + 2 \geqslant 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 4$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire.
  D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

Si l'on se donne une fonction f définie sur un ensemble I et une suite (u_n) à valeurs dans I telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, l'étude de la fonction f pourra également nous fournir des informations sur la suite (u_n) étudiée.

■ **Exemple 6 :** On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

- **Initialisation** : On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
  La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-1;3]$, lequel contient l'intervalle $[0;3]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (attention, la fonction étant décroissante, l'inégalité sera alors renversée).
  Ainsi, on a $f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$. On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(3) = 0$.
  Enfin, d'après les variations de f, on sait également que $f(-1) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire que $3 \geqslant f(0)$.
  Ainsi, $3 \geqslant f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$, c'est-à-dire $3 \geqslant f(0) \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$.
  On en conclut en particulier que $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

3 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 3 — Variations d'une suite : Soit (u_n) une suite réelle et n_0 un entier naturel.

- On dit que (u_n) est *croissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Étudier la croissance ou la décroissance d'une suite revient donc souvent à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

■ **Exemple 7 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$.

Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 - 1 = 2n \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante. ■

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite **strictement positive** et n_0 un entier naturel.

- (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

■ **Exemple 8 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}.$$

Or, si $n \geqslant 1$, on a, en ajoutant n aux deux membres de l'inégalité, $2n \geqslant n+1$ et donc $\dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. La suite (u_n) est donc croissante. ■

Encore une fois, lorsqu'une suite est définie par récurrence, ses variations peuvent également être étudiées par récurrence.

■ **Exemple 9 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5+u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Montrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n démontrera que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, un résultat qui nous intéressera fortement dans un prochain chapitre...

- **Initialisation :** $u_0 = 4$, $u_1 = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

  En ajoutant 5 à chaque membre, on obtient

  $$5 \leqslant u_{n+1} + 5 \leqslant u_n + 5.$$

  On souhaite "appliquer la racine carrée" à cette inégalité. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, l'appliquer ne changera pas le sens de l'inégalité. On a donc bien

  $$\sqrt{5} \leqslant \sqrt{u_{n+1}+5} \leqslant \sqrt{u_n+5}.$$

  D'une part, $\sqrt{5} \geqslant 0$. D'autre part, $\sqrt{u_{n+1}+5} = u_{n+2}$ et $\sqrt{u_n+5} = u_{n+1}$. Ainsi,

  $$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

  La proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

Comme précédemment, si l'on dispose d'une fonction f que l'on sait étudier et d'une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, il est sans doute possible d'utiliser les informations que nous avons sur la fonction pour en déduire des informations sur notre suite.

Attention ! Ce n'est pas parce que la fonction f est croissante que la suite le sera également !

■ **Exemple 10 :** On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
f		↘	1	↗	2	↗	5	↘	

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On souhaite montrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée par -1 et 5. Pour tout entier naturel n, on considère alors la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = 2$. On a bien $-1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 5$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$.
  La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1;5]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (la fonction étant croissante, le sens de l'inégalité est conservée).
  Ainsi, on a $f(-1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(5)$.
  On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$, que $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, que $f(5) = 5$ et enfin que $f(-1) = 1 \geqslant -1$.
  On en conclut donc que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

Principe

► Exercice 1

Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Soit donc (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + rn$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (b) Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

► Exercice 2

Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Soit donc (u_n) une suite géométrique de raison q.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (b) Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

► Exercice 3

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

► Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

1. Calculer u_2 et u_3
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}.$$

► Exercice 6

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

► Exercice 7
Soit n un entier naturel non nul et

$$u_n = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1).$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 8
On considère les suites (x_n) et (y_n) définies comme suit.

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} = 0.8x_n - 0.6y_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\, y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n^2 + y_n^2 = 25$. Interpréter géométriquement cette propriété.

► Exercice 9 — Suites arithmético-géométriques
Soit a et b deux réels, avec a différent de 0 et 1. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a\,u_n + b.$$

1. Résoudre l'équation $x = ax + b$, d'inconnue réelle x. On note r la corr de cette équation.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r.$$

3. On propose de montrer ce résultat par une autre méthode. On considère pour cela la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par $c_n = u_n - r$.
   (a) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n pour tout entier naturel n.
   (b) Quelle est la nature de la suite (c_n) ?
   (c) En déduire une expression de c_n puis de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

► Exercice 10
On rappelle que pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$, est dérivable, de dérivée $f_n' : x \mapsto n\,x^{n-1}$. Nous allons le démontrer par récurrence.

1. Montrer, à l'aide du taux de variation, que les fonctions $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leur fonctions dérivées.
2. Soit u et v deux fonctions dérivables. Rappeler la formule de la dérivée de uv.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_n'(x) = n\,x^{n-1}$ ». Démontrer cette proposition par récurrence.

Suites majorées, minorées, bornées

► Exercice 11
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

a. $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \neq 0$ **b.** $u_n = \cos(n) + \sin(n)$ **c.** $u_n = -3\cos(n) + 2\sin(n)$

d. $u_n = 2\cos(n) - n$ **e.** $u_n = \cos(n) + 3$ **f.** $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

► Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}\, u_n + 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$.

► Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.

► Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

► Exercice 15

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$.

1. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $f(x) = 4x - 4x^2$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0;1]$.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[0;1]$.
3. En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

Suites croissantes, suites décroissantes

► Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 24n + 3$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$.
2. En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

► Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 8$.
2. Montrer que pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$.
3. Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

► Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

► Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 7$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

► Exercice 20
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ et que (u_n) est décroissante.

► Exercice 21 — Métropole 2021
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

► Exercice 22 — Centres étrangers 2022
On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = \dfrac{1}{10}$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1.$$

3. Corrigés

► **Correction 1**
Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 + rn$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 + r \times 0 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 + rn$. Or, $u_{n+1} = u_n + r$. Ainsi, $u_{n+1} = u_0 + rn + r = u_0 + r(n+1)$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

D'après la question 1, , pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 8n$. Ainsi, $u_{18} = 4 + 8 \times 18 = 144$.

► **Correction 2**
Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 \times q^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 \times q^n$. Or, $u_{n+1} = q u_n$. Ainsi, $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times (-2)^n$. Ainsi, $u_{12} = 3 \times (-2)^{12} = 12288$.

► **Correction 3**
Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = 4 + 8 \times 3^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $4 + 8 \times 3^0 = 4 + 8 \times 1 = 12 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 4 + 8 \times 3^n$. Or, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Ainsi, $u_{n+1} = 3(4 + 8 \times 3^n) - 8 = 3 \times 4 + 3 \times 8 \times 3^n - 8 = 4 + 8 \times 3^{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► **Correction 4**
On a

- $u_2 = \dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ».

- **Initialisation** : $\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 = u_1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.
  Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n

► Correction 5

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}$ ».

- **Initialisation** : On a $\dfrac{9-8\times 0}{3+8\times 0} = \dfrac{9}{3} = 3 = u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}$. On cherche à établir

$$u_{n+1} = \frac{9-8(n+1)}{3+8(n+1)} = \frac{9-8n-8}{3+8n+8} = \frac{1-8n}{11+8n}.$$

Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n-2}{2u_n+5}$. Ainsi, $u_{n+1} = \dfrac{\dfrac{9-8n}{3+8n}-2}{2\times\dfrac{9-8n}{3+8n}+5} = \dfrac{\dfrac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n}}{\dfrac{2(9-8n)+5(3+8n)}{3+8n}}$.

On a alors

$$u_{n+1} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n} \times \frac{3+8n}{2(9-8n)+5(3+8n)} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{2(9-8n)+5(3+8n)}.$$

et donc

$$u_{n+1} = \frac{9-8n-6-16n}{18-16n+15+40n} = \frac{3-24n}{33+24n}.$$

En factorisant par 3, on obtient finalement $u_{n+1} = \dfrac{3(1-8n)}{3(11+8n)} = \dfrac{1-8n}{11+8n}$, qui est bien le résultat voulu. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie, $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 6

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

- D'une part, la somme de tous les entiers entre 1 et 1 vaut évidemment 1. Par ailleurs, $\dfrac{1\times(1+1)}{2} = 1$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = \frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- $\mathscr{P}(1)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

► Correction 7

On a $u_1 = 1$, $u_2 = 1+3 = 4$, $u_3 = 1+3+5 = 9$, $u_4 = 1+3+5+7 = 16$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = n^2$ ».

- **Initialisation** : $1^2 = 1 = u_1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = n^2$. Or,

$$u_{n+1} = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = u_n+(2n+1).$$

Ainsi, puisque $u_n = n^2$ par hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

► Correction 8

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $x_n^2+y_n^2 = 25$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a bien $x_0^2+y_0^2 = (-4)^2+3^2 = 16+9 = 25$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $x_n^2+y_n^2 = 25$. Alors,

$$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2 = (0{,}8x_n-0{,}6y_n)^2+(0{,}6x_n+0{,}8y_n)^2.$$

En développant, on a

$$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2 = 0{,}64x_n^2-0{,}96x_ny_n+0{,}36y_n^2+0{,}36x_n^2+0{,}96x_ny_n+0{,}64y_n^2.$$

En simplifiant, on a donc

$$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2 = x_n^2+y_n^2 = 25.$$

$P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Si l'on se place dans un repère orthonormé, pour tout entier naturel n, le point de coordonnées $(x_n;y_n)$ est sur le cercle de centre l'origine et de rayon 5.

► Correction 9

On a $x = ax+b$ si et seulement si $x-ax = b$ si et seulement si $x(1-a) = b$ si et seulement si $x = \dfrac{b}{1-a}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = a^n(u_0-r)+r$ ».

- **Initialisation** : $a^0\times(u_0-r)+r = u_0-r+r = u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = a^n(u_0-r)+r$. Or,

$$u_{n+1} = au_n+b = a\times(a^n(u_0-r)+r)+b = a^{n+1}(u_0-r)+ar+b.$$

Or, r est corr de l'équation $x = ax+b$. Ainsi, $ar+b = r$. Il en vient que

$$u_{n+1} = a^{n+1}(u_0-r)+r.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n,

$$c_{n+1} = u_{n+1}-r = au_n+b-r$$

Or, r est corr de l'équation $x = ax + b$. Ainsi,

$$c_{n+1} = au_n + b - (ar + b) = a(u_n - r) = a \times c_n.$$

La suite (c_n) est une suite géométrique de raison a.

D'après la question précédente, la suite (c_n) est une suite géométrique de raison a. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$c_n = c_0 \times a^n = (u_0 - r) \times a^n.$$

Or, pour tout entier naturel n, $c_n = u_n - r$ et donc $u_n = c_n + r$. On en conclut que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n (u_0 - r) + r.$$

► Correction 10

Pour tout réel x et tout réel non nul h,

$$\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Ainsi, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_1'(x) = 1$. Par ailleurs, pour tout réel x et tout réel h non nul,

$$\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Ainsi, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_2'(x) = 2x$.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors uv est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n' : x \mapsto nx^{n-1}$ ».

- **Initialisation** : D'après la question 1., f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_2'(x) = 2x = 2x^{2-1}$. $\mathscr{P}(2)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Pour tout réel x

  $$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \times x^n = f_1(x) \times f_n(x).$$

  Or, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (question 1.) et f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

  $$f_{n+1}' = f_1' \times f_n + f_1 \times f_n'.$$

  Pour tout réel x,

  $$f_{n+1}'(x) = 1 \times x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{n+1-1}.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(2)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2

► Correction 11

a. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. Ainsi, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 2$. La suite (u_n) est bornée.

b. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$. Ainsi, $-2 \leqslant \cos(n)+\sin(n) \leqslant 2$. La suite (u_n) est bornée.

c. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $3 \geqslant -3\cos(n) \geqslant -3$, soit $-3 \leqslant -3\cos(n) \leqslant 3$. Par ailleurs, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et donc $-2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2$. Ainsi, $-5 \leqslant -3\cos(n)+2\sin(n) \leqslant 5$. La suite (u_n) est bornée.

d. Pour tout entier naturel n, $-2 \leqslant \cos(n) \leqslant 2$ et $-n \leqslant 0$. Ainsi, $2\cos(n)-n \leqslant 2$. La suite (u_n) est majorée. En revanche, elle n'est pas minorée.

e. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. Ainsi, $2 \leqslant \cos(n)+4 \leqslant 4$. La suite (u_n) est bornée.

f. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant n \leqslant n+1$ et donc $0 \leqslant \dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$. La suite (u_n) est bornée.

► Correction 12

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n \leqslant 10$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0=2$ et donc $u_0 \leqslant 10$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$. Ainsi, $\dfrac{1}{5} \times 10 \leqslant \dfrac{1}{5} \times 10$ et $\dfrac{1}{5}u_n + 8 \leqslant \dfrac{1}{5} \times 10 + 8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 10$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 13

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $3 \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0=5$ et donc $3 \leqslant u_0 \leqslant 5$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.
  Ainsi, $3+3 \leqslant u_n+3 \leqslant 5+3$ et $\dfrac{3+3}{2} \leqslant \dfrac{u_n+3}{2} \leqslant \dfrac{5+3}{2}$, c'est-à-dire $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
  Or, puisque $4 \leqslant 5$, on a donc bien $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 14

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0=1$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Ainsi, $\dfrac{1}{2}+1 \leqslant u_n+1 \leqslant 1+1$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n+1 \leqslant 2$. On applique alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à cette inégalité. Cette fonction étant décroissante sur $]0;+\infty[$, l'inégalité est alors renversée.
  On a donc $\dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{1}{1+u_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$. Or, $\dfrac{2}{3} \leqslant 1$. On a donc bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 15

Pour tout réel x, $f'(x)=4-8x$. On a $f'(x)>0$ si et seulement si $4-8x>0$ si et seulement si $x<\dfrac{1}{2}$. On construit donc le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f sur $[0;1]$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

En particulier, on voit que pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 \leqslant v_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $v_0 = 0{,}3$ et donc $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant v_n \leqslant 1$. En utilisant les résultats de la question précédente, on a alors $0 \leqslant f(v_n) \leqslant 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 16

Soit n un entier naturel. On a

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 24(n+1) + 3 = 2(n^2 + 2n + 1) - 24n - 24 + 3$$

et donc

$$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 - 24n - 24 + 3 = 2n^2 - 20n - 19.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 - 20n - 19 - (2n^2 - 24n + 3) = 4n - 22.$$

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$, c'est-à-dire le signe de $4n - 22$. On a $4n - 22 \geqslant 0$ si et seulement si $n \geqslant 5{,}5$. Ainsi, (u_n) est décroissante jusqu'au rang 5 puis croissante à partir du rang 6. On a par ailleurs $u_5 = -67$ et $u_6 = -69$. Ainsi, (u_n) est en fait décroissante jusqu'au rang 6 puis croissante à partir de ce rang. Une autre méthode consiste simplement à étudier les variations de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 24x + 3$.

► Correction 17

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \leqslant 8$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et donc $u_n \leqslant 8$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 8$.
  On a donc $\dfrac{1}{2}u_n + 4 \leqslant \dfrac{1}{2} \times 8 + 4$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 8$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}u_n + 4 - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n + 4$.

Puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 8$, on a donc $-\dfrac{1}{2}u_n \geqslant -\dfrac{1}{2} \times 8$ et $-\dfrac{1}{2}u_n + 4 \geqslant -\dfrac{1}{2} \times 8 + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

► Correction 18

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$. Or, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+u_n}$. u_{n+1} est donc le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc strictement positif lui aussi. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. On peut donc déterminer les variations de la suite (u_n) en étudiant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Or, pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{2+u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{2}{2+u_n}.$$

Or, puisque $u_n > 0$, il en vient que $2+u_n > 2$ et donc que $\dfrac{2}{2+u_n} < 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et donc $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

► Correction 19

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -21$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{2}{3} \times 2 - 7 = -\dfrac{17}{3}$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant -21$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -21$.
  On a donc $\dfrac{2}{3}u_n - 7 \geqslant \dfrac{2}{3}u_{n+1} - 7 \geqslant -21 \times \dfrac{2}{3} - 7$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant -21$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 20

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 = 5$ et $u_1 = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$.
  On a donc $2u_n - 1 \geqslant 2u_{n+1} - 1 \geqslant 2 \times 1 - 1$. On applique alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'inégalité. Cette fonction étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, le sens de l'inégalité ne change pas.
  Ainsi, $\sqrt{2u_n - 1} \geqslant \sqrt{2u_{n+1} - 1} \geqslant \sqrt{2 \times 1 - 1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant -21$.
  $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 21

La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel positif x,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - 1 \times (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x + 10 - 5x - 4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}.$$

Ainsi, pour tout réel positif x, $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \dfrac{9}{3} = 3$ et donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4).$$

  Or, $f(0) = 2$, qui est supérieur à 0, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = 4$. Il en vient que

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie. $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 22

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $a_0 = \dfrac{1}{10}$, $b_0 = 1$, $a_1 = \mathrm{e}^{-b_0} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $b_1 = \mathrm{e}^{-a_0} = \mathrm{e}^{-0,1}$.
  D'une part, puisque $10 \geqslant \mathrm{e}$, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que $\dfrac{1}{10} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire $a_0 \leqslant a_1$.
  Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ étant croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc que $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-0,1} \leqslant \mathrm{e}^0$, c'est-à-dire $a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$.
  Finalement, on a bien que $0 < a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0 \leqslant 1$. $P(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on a alors

  $$\mathrm{e}^0 > \mathrm{e}^{-a_n} \geqslant \mathrm{e}^{-a_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_{n+1}} \geqslant \mathrm{e}^{-b_n} \geqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

  Ainsi, puisque $\mathrm{e}^{-1} > 0$, on a, en lisant cette inégalité dans l'autre sens,

  $$0 < a_{n+1} \leqslant a_{n+2} \leqslant b_{n+2} \leqslant b_{n+1} \leqslant 1.$$

  $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II Limites de suites

1 Limite d'une suite

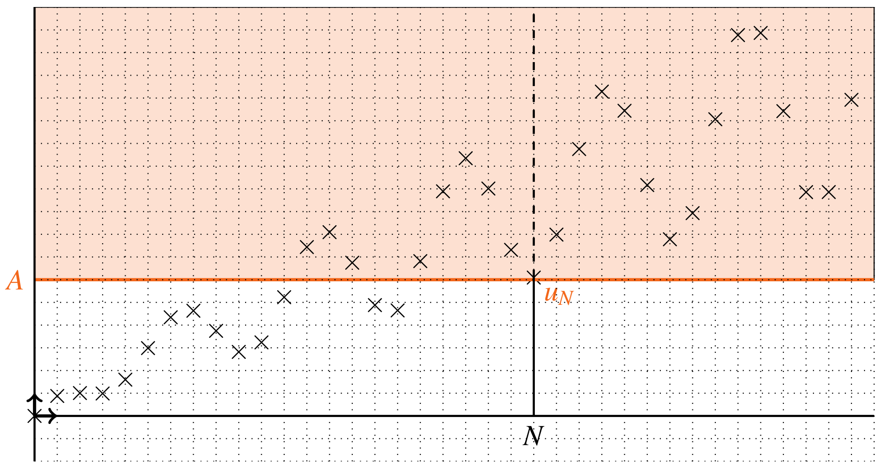
1.1 Limite infinie

Définition 4 — Limite infinie : Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

La première définition traduit le fait que la suite dépasse n'importe quel seuil donné sans jamais repasser en dessous par la suite. Attention, cela ne signifie pas que les termes de la suite sont de plus en plus grands ; une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous. On se fixe un seuil $A = 6$.



On remarque que $u_{12} \geqslant 6$. Cependant, certains des termes suivants sont inférieurs à 6 : pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que **tous les termes** à partir d'un certain rang soient au-dessus du seuil A, et ce, peu importe le seuil A. On voit ainsi que, pour tout $n \geqslant 22$, il semblerait qu'on ait bien $u_n \geqslant 6$.

Le raisonnement que nous venons de tenir pour $A = 6$ tient pour toutes les valeurs de A, aussi grandes soient-elles : la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Naturellement, plus la valeur de A est grande, plus la valeur à partir de laquelle tous les termes de la suite sont tous plus grands que A sera lointaine.

Il faut par ailleurs remarquer et insister **lourdement** sur le fait qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante. Cette suite ici représentée en est un exemple. Il est également faux de dire qu'une suite qui est strictement croissante tend forcément vers $+\infty$.

■ **Exemple 11 :** Pour tout n, on pose $u_n = n^2$. u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

En effet, fixons un réel A.

- Si $A < 0$, alors pour tout entier naturel n, on aura $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, alors pour tout entier n supérieur ou égal à $\sqrt{A}$, on a $n^2 \geqslant \sqrt{A}^2$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}+$. Ceci revient à dire que $u_n \geqslant A$.

Dans tous les cas, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) sont au-dessus de A, peu importe le réel A choisi : la suite (u_n) tend donc vers $+\infty$. ■

Il y a une différence entre une suite qui tend vers $+\infty$ et une suite non majorée. : évidemment, toute suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée, puisque pour tout réel A, il y a des termes de la suite supérieurs à A.

La réciproque est en revanche fausse sans davantage d'hypothèse sur la suite. Considérons par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (1+(-1)^n)n$. La suite (u_n) n'est pas majorée : elle a des termes arbitrairement grands. Cependant, elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ puisqu'un terme sur deux de cette suite vaut 0. Elle ne reste donc pas supérieure à n'importe quel réel donné à partir d'un certain rang (elle est en particulier en dessous de 1 tous les termes impairs).

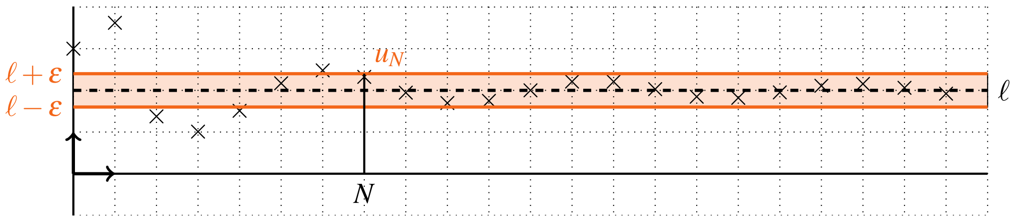
1.2 Limite finie : suite convergente

Définition 5 : Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

On dit que u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, dès que $n \geqslant N$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

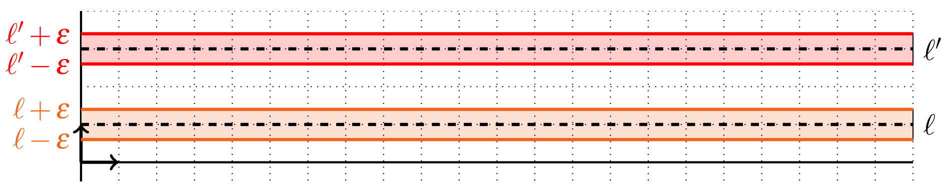
Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous.



La suite (u_n) semble tendre vers 2. Par exemple, pour $\varepsilon = 0{,}4$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$, soit $]1{,}6\,; 2{,}4[$ à partir du rang 7. Ce raisonnement vaut pour n'importe quel ε, aussi petit soit-il.

Propriété 3 : Soit (u_n) une suite réelle, ℓ et ℓ' deux réels. Si u_n tend vers ℓ et u_n tend vers ℓ' lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\ell = \ell'$.

L'idée de la démonstration suivante est assez simple : elle consiste à montrer l'impossibilité d'être à la fois très proche de ℓ et de ℓ' si ces deux valeurs sont différentes. Pour cela, on va trouver une valeur de ε pour lesquels les intervalles $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$ sont disjoints, ce qui contredira le fait que ces deux intervalles doivent tous deux contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Démonstration 2 : Supposons que $\ell \neq \ell'$, par exemple que $\ell > \ell'$. Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque u_n tend vers ℓ en $+\infty$, l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. En particulier, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à $\ell - \varepsilon$
- Puisque u_n tend vers ℓ' en $+\infty$, l'intervalle $]\ell' - \varepsilon, \ell' + \varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, à partir d'un certain rang N', tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à $\ell' + \varepsilon$

Ainsi, à partir de la plus grande valeur entre N et N', les termes de la suite sont à la fois strictement supérieurs à $\ell - \varepsilon$ et strictement inférieurs à $\ell' + \varepsilon$. Autrement dit, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell - \varepsilon < u_n < \ell' + \varepsilon$.

Puisque cela vaut pour n'importe quelle valeur de ε, cela reste vrai en prenant par exemple $\varepsilon = \dfrac{\ell - \ell'}{2}$ (ce réel est bien strictement positif puisque $\ell > \ell'$).

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell - \dfrac{\ell - \ell'}{2} < u_n < \ell' + \dfrac{\ell - \ell'}{2}$ et donc $\dfrac{\ell + \ell'}{2} < u_n < \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ et en particulier $\dfrac{\ell + \ell'}{2} < \dfrac{\ell + \ell'}{2}$. C'est impossible : notre supposition de départ, qui était que $\ell \neq \ell'$ était donc erroné. Par conséquent, on a $\ell = \ell'$.

Le raisonnement que nous venons d'appliquer, qui consiste, en supposant une proposition vraie, à aboutir à une conclusion fausse et à en déduire que la proposition de départ devait donc également être fausse s'appelle le **raisonnement par l'absurde**. □

Cette propriété nous permet de définir sans ambiguïté la notion de limite d'une suite.

Définition 6 — Limite finie, suite convergente : Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

Si u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, on dit que ℓ est **LA** *limite* de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*.

Dans le cas contraire, on parle de suite *divergente* : cela regroupe les suites qui ont une limite infinie mais aussi les suites qui n'admettent pas de limite.

■ **Exemple 12 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{4n+5}$.

Pour se faire une idée de la limite, il est possible de calculer quelques termes de la suite. Ainsi, $u_0 = \dfrac{1}{5}$, $u_{10} = \dfrac{21}{45} \simeq 0.467$, $u_{100} = \dfrac{201}{405} \simeq 0.496$... Il semble que la suite soit convergente et que sa limite vaille $\dfrac{1}{2}$.

Pour le prouver formellement, repassons pas la définition : pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, il faut trouver un rang N à partir duquel, pour tout $n > N$, on ait $u_n \in \left]\dfrac{1}{2} - \varepsilon; \dfrac{1}{2} + \varepsilon\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \frac{1}{2} = \frac{2n+1}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{4n+2}{2(4n+5)} - \frac{4n+5}{2(4n+5)} = \frac{-3}{2(4n+5)}$$

Cette quantité est négative. On a alors

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2(4n+5)}$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. Ainsi,

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{2(4n+5)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+5} < \frac{2\varepsilon}{3} \Leftrightarrow 4n+5 > \frac{3}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4}$, on a $u_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon ; \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$. La suite (u_n) est bien convergente et sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

Par exemple, si $\varepsilon = 0.001$, on a $\frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4} = 374.99$.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 375$, on a $0.499 \leqslant u_n \leqslant 0.501$. ■

Nous verrons très bientôt des résultats qui nous permettront de passer outre cet aspect formel. Même si une telle démonstration de la convergence d'une suite n'est que rarement demandée en classe de terminale, comprendre les bases de ce raisonnement constituera un avantage certain dans les études supérieures.

Propriété 4 : Si une suite est convergente, elle est bornée. Par contraposée, si une suite n'est pas bornée, elle ne peut être convergente.

La réciproque est fausse : toute suite bornée n'est pas convergente.

Par exemple, pour tout n, prenons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. En revanche, elle n'est pas convergente : ses termes de rangs pairs valent tous 1 et ses termes de rangs impairs valent tous -1. Une limite étant unique, la suite (u_n) ne peut être convergente.

1.3 Limites de suites usuelles

Propriété 5 : Les limites suivantes sont à connaître.

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel non nul α, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$$

Les suites $(\cos(n))$, $(\sin(n))$ et $((-1)^n)$ n'admettent quant à elles pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Opérations sur les limites

2.1 Limite de la somme

Propriété 6 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels ℓ_1 et ℓ_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Indéterminé**

Démonstration 3 : Bien qu'elles ne soient pas explicitement au programme, les démonstrations de ces résultats permettent de manipuler et comprendre les définitions des différentes limites de suite.

On s'intéresse ici au cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Les autres démonstrations pourront être traitées en guise d'exercice.

Soit donc A un réel.

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier naturel N_1 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_1$, on a $u_n \geqslant A$.
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un entier naturel N_2 tel que, pour tout entier $n \geqslant N_2$, on a $u_n \geqslant 0$.

Posons alors $N = \max(N_1,N_2)$. Alors, pour tout entier naturel $n \geqslant N$, on a $u_n + v_n \geqslant A + 0$ et donc $u_n + v_n \geqslant A$. Ainsi, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$ □

■ **Exemple 13 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2 + \mathrm{e}^{-n} - 4$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-4) = -4$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ■

Les cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ n'obéissent à aucune règle précise : il faut les traiter séparément. L'expression "Forme indéterminée" ne signifie pas qu'il est impossible de déterminer une éventuelle limite : il précise simplement qu'il nous est impossible d'appliquer directement les règles de calcul sur les limites de suite.

La limite de la somme peut alors aussi bien être 0, 1, $+\infty$, $-\infty$ ou peut même ne pas exister du tout !

■ **Exemple 14 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n$, $v_n = 1 - n$ et $w_n = n^2 + n$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite $(u_n + v_n)$ avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 1$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = 1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. Là encore, il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite $(v_n + w_n)$ avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel n, $v_n + w_n = n^2 + 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n+w_n) = +\infty$.

Nous avons là deux exemples où la somme de limites "$\infty - \infty$" produit des résultats totalement différents. ■

2.2 Limite du produit

Propriété 7 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels ℓ_1 et ℓ_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	$\ell_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell_1 \ell_2$	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**Indéterminé**

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 15 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \left(\frac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{n} - 4\right) = -4$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + \sqrt{n}) = +\infty$.
- Finalement, d'après les règles de calcul de limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

■

■ **Exemple 16 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \frac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $u_n v_n = 2$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 2$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $u_n w_n = 2n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = +\infty$.

On voit sur cet exemple que le produit d'une limite infinie et d'une limite qui vaut 0 peut aboutir à plusieurs résultats différents. ■

2.3 Limite du quotient

Définition 7 : Soit (u_n) une suite réelle et a un réel.

- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^+$ si u_n tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \geqslant a$.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^-$ si u_n tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \leqslant a$.

■ **Exemple 17 :** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Or, pour tout entier naturel non nul n, $1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$. On pourra alors écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$. ■

Cette petite subtilité nous est notamment utile lorsque l'on étudie la limite de quotients dans certains cas...

Propriété 8 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels l_1 et l_2, avec $l_2 \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	ℓ_1	$\ell_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_2 \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	l_2, 0^+ ou 0^-	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$	$\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$	0	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**Indéterminé**	

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 18 :** Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{3+n}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+n) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

■ **Exemple 19 :** Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \dfrac{1-n}{\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n}}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{1}{n}\right) = 0$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n} \geqslant 0$.

On a en fait $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{1}{n}\right) = 0^+$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ne pas oublier d'appliquer la règle des signes !). ■

3 Formes indéterminées

3.1 Factorisation par le terme dominant

■ **Exemple 20 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 4n^2+2n+3$ et $v_n = 3n^2+7n-1$.

On cherche à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$. Or, en utilisant les règles sur les calculs de limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. On se retrouve dans le cas "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Il est toutefois possible de factoriser u_n et v_n par leur terme de plus haut degré (ici, n^2 dans les deux cas). Pour tout entier non nul n, on a donc

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{4n^2+2n+3}{3n^2+7n-1} = \frac{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{7}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right) = 4$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3+\dfrac{7}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right) = 3$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{4}{3}$. ■

Il est à noter qu'avant de se lancer dans la factorisation par le terme dominant, il faut s'assurer que celle-ci est nécessaire : en voulant lever une forme indéterminée inexistante, on peut très vite se retrouver à en créer une involontairement.

3.2 Quantité conjuguée

La partie suivante s'intéresse aux formes indéterminées faisant intervenir des racines carrées.

Propriété 9 : Soit (u_n) une suite réelle positive et a un réel positif.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty$.

■ **Exemple 21 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n}$.

D'une part, pour tout entier naturel non nul n, $4n^2+1 = n^2\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc

$$\sqrt{4n^2+1} = \sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{4+\frac{1}{n^2}} = n \times \sqrt{4+\frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = \sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right) = 4$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{4} = 2$. ■

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

L'objectif est ici d'utiliser l'identité remarquable $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$. En particulier, dans le cas des racines carrées, cela entraîne que, pour tous réels strictement positifs a et b,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a-b.$$

■ **Exemple 22 :** Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$. Il s'agit de la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$, il n'est pas possible de conclure directement sur sa limite. Or,

$$u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+1-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Le numérateur vaut 2 et le dénominateur tend vers $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

5. Exercices

Limite d'une suite

► Exercice 23
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sqrt{n}$.

1. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100$.
2. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant 100000$.
3. Soi A un réel quelconque. Résoudre l'inéquation $u_n \geqslant A$.
4. Que peut-on en déduire sur la limite de la suite (u_n) ?

► Exercice 24
On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 4 - 3n$.

1. Calculer u_{30}, u_{70}, u_{1000}. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?
2. Soit A un réel. Résoudre l'équation $u_n \leqslant A$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$.
3. Que peut-on en conclure sur la limite de la suite (u_n) ?

► Exercice 25
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}$. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$?

► Exercice 26
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3-5n}{10n+2}$. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

► Exercice 27
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 2$.

1. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?
2. Cette limite change-t-elle si $u_0 = 3$?

► Exercice 28
On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1. Donner des valeurs approchées au centième de u_{10}, u_{100}, u_{1000} .
2. La suite (u_n) semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$. Quel est le signe de cette quantité ?
4. En déduire que $|u_n - 3| = u_n - 3$. On rappelle que la valeur absolue d'un réel x vaut x si ce réel est positif et $-x$ sinon.
5. Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $|u_n - 3| < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Conclure.

► Exercice 29
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) semble-t-elle avoir une limite ?

Opérations sur les limites

▶ Exercice 30
Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n.

a. $u_n = n^2 + \sqrt{n}$

b. $u_n = \dfrac{1}{n} - n^3$

c. $u_n = \mathrm{e}^{-n} + 3n$

d. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n$

e. $u_n = -6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}$

f. $u_n = \dfrac{1+n}{n}$

g. $u_n = (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right)$

h. $u_n = \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right)$

i. $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$

j. $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^n}{1 + \frac{1}{n}}$

k. $u_n = \dfrac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}$

l. $u_n = \dfrac{-1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

m. $u_n = n^2 - n$

n. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(2 + \dfrac{3}{n^2}\right)$

o. $u_n = \dfrac{3 + \sqrt{n}}{1 + \dfrac{2}{n}}$

p. $u_n = -2n^2 - \dfrac{5}{n+1}$

q. $u_n = \dfrac{5}{-1-n}$

r. $u_n = (3n+1)\left(\dfrac{1}{n} - 2\right)$

▶ Exercice 31
Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) = 0$.

▶ Exercice 32
Donner deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = 3$.

▶ Exercice 33
Démontrer la propriété suivante : soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

▶ Exercice 34
Soit (u_n) une suite convergente et (v_n) une suite divergente. En procédant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est divergente.

▶ Exercice 35
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3. Quelle semble être la nature de la suite (v_n) ?
   (b) Calculer $v_{n+1} - v_n$ pour tout entier naturel n. L'hypothèse de la question précédente est-elle vérifiée ?
   (c) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (d) En déduire une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

(e) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

► Exercice 36

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - n^2$.

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. On précisera sa raison et son premier terme.
2. Déterminer une expression de v_n puis u_n pour tout entier naturel n.
3. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

► Exercice 37 — Nouvelle-Calédonie 2023

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

1. Donner v_0.
2. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.
3. En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n
4. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{n + 0.5} - 2$.
5. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

► Exercice 38

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x - 2}{2x - 1}$. Déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 2$.
   (b) En déduire une expression de v_n puis de u_n pour tout entier naturel n.
   (c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Formes indéterminées

► Exercice 39

En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3}$ **b.** $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 3}$ **c.** $u_n = \dfrac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$

d. $u_n = \dfrac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$ **e.** $u_n = \dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2 - 3n^2}$ **f.** $u_n = \dfrac{n^2 - \frac{1}{n^4}}{n^3 + 3}$ pour $n > 0$

► Exercice 40

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 3$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{3-u_n}$.
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{3}$. Pour cela, on exprimera a_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n, puis en fonction de a_n.
   (c) En déduire que la suite (a_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (d) Exprimer a_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (e) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

► Exercice 41

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}$

b. $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{2n+5}$

c. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

d. $u_n = \sqrt{4n+3} - \sqrt{4n+2}$

► Exercice 42

Déterminer les limites suivantes.

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}$

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+\mathrm{e}^{-n}}$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}}$

► Exercice 43

Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2+3n-2} - \sqrt{n^2-n-1}$.

1. En utilisant la quantité conjuguée, montrer que pour tout entier naturel $n > 1$

$$u_n = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2} + \sqrt{n^2-n-1}}.$$

2. Montrer que pour tout entier naturel $n > 1$,

$$u_n = \frac{4 - \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}}.$$

3. En déduire, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la suite (u_n).

6. Corrigés

► Correction 23

Puisque $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 100$ si et seulement si $n \geqslant 100^2$ c'est-à-dire $n \geqslant 10000$.

Puisque $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 100000$ si et seulement si $n \geqslant 100^2$ c'est-à-dire $n \geqslant 10000000000$.

On considère un réel A quelconque.

- Si $A < 0$, alors pour tout n, $u_n > A$.
- Si $A \geqslant 0$, on sait que $\sqrt{n} \geqslant A \Leftrightarrow n \geqslant A^2$. Ainsi, dès que $n \geqslant A^2$, on a $u_n \geqslant A$ et ceci est valable quelque soit la valeur de A.

Puisque pour tout A, on a $u_n \geqslant A$ à partir d'un certain rang, on peut en conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 24

On a $u_{30} = -86$, $u_{70} = -206$, $u_{1000} = -2996$. Il semble que la limite de la suite (u_n) soit $-\infty$.

$u_n \leqslant A$ si et seulement si $4 - 3n \leqslant A$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{A-4}{-3}$. Puisque pour tout réel A, on a $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, on peut en conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

► Correction 25

Cette suite tend pas vers $+\infty$. En effet, on rappelle qu'il existe une infinité de nombres premiers, et donc une infinité de valeur de n pour lesquels $u_n = 1$. Prenons en particulier $A = 2$ dans la définition de la limite infinie. On a donc que, pour tout N, il existe un rang $n \geqslant N$ tel que $u_n < 2$: il n'est pas possible d'avoir tous les termes de la suite supérieurs à 2 à partir d'un certain rang. La limite de la suite ne peut donc être $+\infty$.

► Correction 26

Il semble que la limite de la suite (u_n) soit $-\dfrac{1}{2}$.

► Correction 27

Il semblerait que la limite de cette suite soit 4. On obtient la même limite si on prend $u_0 = 3$.

► Correction 28

On a $u_{10} = \dfrac{36}{11} \simeq 3.272$, $u_{100} = \dfrac{306}{101} \simeq 3.030$, $u_{1000} = \dfrac{3006}{1001} \simeq 3.003$. Il semblerait que la suite (u_n) soit convergente, de limite 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3n+6}{3+1} - \dfrac{3(n+1)}{n+1} = \dfrac{3n+6-3n-3}{n+1} = \dfrac{3}{n+1}$. Puisque cette valeur est positive, on a $|u_n - 3| = u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, on a $|u_n - 3| < \varepsilon$. Ainsi, la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$.

► Correction 29

Les termes de rang pair de cette suite valent 1 alors que les termes de rang impair valent -1. Cette suite n'admet pas de limite.

► **Correction 30**

a. On sait que $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.

b. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - n^3\right) = -\infty$;

c. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim_{n\to+\infty} \left(\mathrm{e}^{-n} + 3n\right) = +\infty$.

d. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n\right) = +\infty$.

e. On sait que $\lim_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim_{n\to+\infty} \left(-6n^2 + 1 + \frac{1}{n}\right) = -\infty$.

f. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right) = 1$.

g. D'une part, $\lim_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2$.
Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, $\lim_{n\to+\infty} (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right) = +\infty$.

h. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = -2$. Finalement, par produit de limites, $\lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = 3 \times (-2) = -6$.

i. Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser u_n. Pour tout entier n, $u_n = \sqrt{n}(1-n^2)$. Or, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} (1-n^2) = -\infty$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

j. D'une part, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.
Finalement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty$.

k. On a, $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{3}{n^2}\right) = 6$. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ d'où $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n} - 1\right) = -1$. Finalement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1} = \frac{6}{-1} = -6$.

l. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)=1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$ par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}=+\infty$. Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous $n>0$, $u_n=n^2\left(1+\dfrac{3}{n}\right)$ et utiliser les règles de calcul sur un produit.

m. Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty-\infty$". Il faut donc factoriser u_n. Pour tout entier naturel n, $u_n=n(n-1)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

n. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)=2$.
Ainsi, par limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

o. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+\sqrt{n})=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)=1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

p. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n^2=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}-\dfrac{5}{n}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

q. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-n)=-\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

r. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+1)=+\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=-2$. Ainsi, en utilisant la règle des limites sur les produits, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ (ne pas oublier la règle des signes).

► Correction 31

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n=n$ et $v_n=\dfrac{1}{n^2}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$. Or, pour tout entier naturel non nul n, $u_nv_n=\dfrac{1}{n}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=0$.

► Correction 32

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n=n$ et $v_n=3-n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$. Or, pour tout entier naturel non nul n, u_n+v_n3. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=3$

► Correction 33

Soit ε un réel strictement positif et A un réel

- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$, il existe un entier N_1 tel que, pour tout entier $n\geqslant N_1$, on a $u_n\geqslant A-l+\varepsilon$
- Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$, il existe un entier N_2 tel que, pour tout entier $n\geqslant N_2$, on a $v_n\in[l-\varepsilon,l+\varepsilon]$. En particulier, $v_n\geqslant\varepsilon$

Prenons alors $N=\max(N_1;N_2)$. Alors, pour tout entier naturel $n\geqslant N$, on a $u_n+v_n\geqslant A-l+\varepsilon+l-\varepsilon$, c'est-à-dire $u_n\geqslant A$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=+\infty$.

► Correction 34

Supposons que la suite (u_n+v_n) converge. Alors, pour tout entier naturel n, $v_n=(u_n+v_n)-u_n$. (v_n) est donc la différence de deux suites convergentes, elle est donc convergente, ce qui est contraire à ce qu'indique l'énoncé. Finalement, la suite (u_n+v_n) diverge.

► Correction 35

On a $u_1 = \dfrac{1}{1+2\times 1} = \dfrac{1}{3}$, $u_2 = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{5}$ et $u_3 = \dfrac{\frac{1}{5}}{1+2\times\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \dfrac{1}{7}$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

- Initialisation : $u_0 = 1 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > 0$ et donc $1+2u_n > 0$. u_{n+1} est le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc également strictement positif.
- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

On a alors $v_0 = 1$, $v_1 = 3$, $v_2 = 5$, $v_3 = 7$. La suite (v_n) semble arithmétique.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+2u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 + 2n = 1 + 2n$ et $u_n = \dfrac{1}{v_n} = \dfrac{1}{2n+1}$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

► Correction 36

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - (n+1)^2 - (u_n - n^2) = u_n + 2n - 1 - (n^2+2n+1) - u_n + n^2 = -2.$$

Ainsi, (v_n) est arithmétique, de premier terme $v_0 = u_0 - 0^2 = 3$ et de raison -2. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 - 2n$.

Or, puisque $v_n = u_n - n^2$, il en vient que $u_n = v_n + n^2 = n^2 - 2n + 3$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)$. Or, $\overset{2}{\lim\limits_{n\to+\infty}} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right) = 1$.

Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 37

On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0+2} = \dfrac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$ et donc $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}+2}$.

Or, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n-4}{u_n+3}$. On remplace donc u_{n+1} par cette valeur. Ainsi,

$$v_{n+1} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2(u_n+3)}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2u_n+6)}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{-u_n-4+2u_n+6}{u_n+3}} = \frac{1}{\frac{u_n+2}{u_n+3}} = \frac{u_n+3}{u_n+2}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+3}{u_n+2} - \frac{1}{u_n+2} = \frac{u_n+2}{u_n+2} = 1.$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1 + v_n$. La suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

Pour tout entier naturel n, on a donc $v_n = v_0 + n \times 1$ soit $v_n = \dfrac{1}{2} + n$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_n = \dfrac{1}{u_n+2}$. Ainsi, $\dfrac{1}{v_n} = u_n + 2$ et $u_n = \dfrac{1}{v_n} - 2 = \dfrac{1}{n+0.5} - 2$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+0.5} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

► Correction 38

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

f est dérivable sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. Pour tout réel $x \neq \dfrac{1}{2}$,

$$f'(x) = \frac{3(2x-1) - 2(3x-2)}{(2x-1)^2} = \frac{6x - 3 - 6x + 4}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2} > 0.$$

f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

- **Initialisation** : $u_0 = 2 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n > 1$. La fonction f étant strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$, on a donc $f(u_n) > f(1)$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \dfrac{3\times 1 - 2}{2 \times 1 - 1} = 1$. Ainsi, $u_{n+1} > 1$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Puisque pour tout entier naturel n, $u_n > 1$, il en vient que $u_n - 1 \neq 0$ et la suite (v_n) est donc bien définie.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2}{2u_n-1} - 1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2-(2u_n-1)}{2u_n-1}} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{u_n-1}{2u_n-1}} - \frac{1}{u_n-1}.$$

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{2u_n-2}{u_n-1} = \frac{2(u_n-1)}{u_n-1} = 2.$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2 + v_n$. La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{2-1} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + 2n$.

Par ailleurs, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$ et donc $u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{1}{1+2n} + 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

► Correction 39

a. Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3} = \dfrac{n^3\left(3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\dfrac{2}{n^3} - 4\right)} = \dfrac{3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{5}{n^3}}{\dfrac{2}{n^3} - 4}$.

En appliquant les règles de calcul classiques sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^3+2n-5}{2-4n^3} = -\dfrac{3}{4}$.

b. Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n^2+1}{n+3} = \dfrac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\dfrac{3}{n}\right)} = n \times \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{n+3} = +\infty$.

c. Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3} = \dfrac{n^3\times\left(\dfrac{1}{n^3}-2\right)}{n^3\times\left(\dfrac{1}{n}-3\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{n^3}-2}{\dfrac{1}{n}-3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-2n^3}{n^2-3n^3} == \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

d. Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1} = \dfrac{n^4\left(\dfrac{1}{n^4}-6\right)}{n^6\left(5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}\right)} = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^4}-6}{5+\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^6}} = -\dfrac{6}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1} = 0$.

e. Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2} = \frac{n\times\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\times n^2\times\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\times\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)} = n\times\frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(\dfrac{2}{n^2}-3\right)}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{n^2}-3\right) = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)(n^2+1)}{2-3n^2} = -\infty$.

f. Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3} = \dfrac{n^2\times\left(1-\dfrac{1}{n^6}\right)}{n^3\times\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)} = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1-\dfrac{1}{n^6}}{1+\dfrac{3}{n^3}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^6}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{n^3}\right) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-\dfrac{1}{n^4}}{n^3+3} = 0$.

► Correction 40
$u_1 = \dfrac{9}{6-1} = \dfrac{9}{5}$, $u_2 = \dfrac{9}{6-\frac{9}{5}} = \dfrac{9}{\frac{21}{5}} = \dfrac{45}{21} = \dfrac{15}{7}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < u_n < 3$ ».

- **Initialisation** : Puisque $u_0 = 1$, on a bien $0 < u_0 < 3$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Ainsi, $0 < u_n < 3$ En multipliant par -1, qui est négatif, on a donc $0 > -u_n > -3$. On ajoute 6 pour avoir $6 > 6-u_n > 3$. On applique alors la fonction inverse

qui est décroissante sur $]0;+\infty[$. On a donc $\frac{1}{6} < \frac{1}{6-u_n} < \frac{1}{3}$. Enfin, on multiplie par 9 pour obtenir $\frac{3}{2} < \frac{9}{6-u_n} < 3$. Or, puisque $0 < \frac{3}{2}$, on a bien $0 < u_{n+1} < 3$. $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n = \frac{1}{3-u_n}$. Puisque $a_n \neq 0$, on peut appliquer la fonction inverse à cette égalité. On a alors $\frac{1}{a_n} = 3 - u_n$. Ainsi, $u_n = 3 - \frac{1}{a_n} = \frac{3a_n - 1}{a_n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{1}{3-u_n}$. Ainsi, $a_{n+1} = \frac{1}{3-u_{n+1}}$.

Or, $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$. Ainsi $a_{n+1} = \dfrac{1}{3-\dfrac{9}{6-u_n}} = \dfrac{1}{\dfrac{3(6-u_n)-9}{6-u_n}} = \dfrac{6-u_n}{9-3u_n}$.

Or, d'après la question précédente, $u_n = \frac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi, $a_{n+1} = \dfrac{6-\dfrac{3a_n-1}{a_n}}{9-3\times\dfrac{3a_n-1}{a_n}} = \dfrac{\dfrac{6a_n-(3a_n-1)}{a_n}}{\dfrac{9a_n-3\times(3a_n-1)}{a_n}}$.

On a donc $a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n} \times \frac{a_n}{3} = \frac{3a_n+1}{3} = a_n + \frac{1}{3}$.

La suite (a_n) est donc arithmétique de raison $r = \frac{1}{3}$. Son premier terme vaut $a_0 = \frac{1}{3-u_0} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$. On rappelle que si (a_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n, $a_n = a_0 + rn$. Dans notre cas, pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{1}{2} + \frac{n}{3}$.

On sait que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{3\times\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{3}\right)-1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{3}} = \frac{\dfrac{3}{2}+n-1}{\dfrac{3+2n}{6}} = \frac{6\times\left(n+\dfrac{1}{2}\right)}{3+2n} = \frac{6n+3}{3+2n}.$$

En utilisant les règles sur les calculs de limites, on aboutit à une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n\left(6+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(\dfrac{3}{n}+2\right)} = \dfrac{6+\dfrac{3}{n}}{\dfrac{3}{n}+2}$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{6}{2} = 3$.

► Correction 41

a. Pour tout entier naturel $n > 3$,

$$\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8} = (\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8}) \times \frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}} = \frac{n-3-(n+8)}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}$$

et donc

$$\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8} = -\frac{11}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8})=0$.

b. Attention à ne pas se lancer dans des calculs par pur automatisme, il ne s'agit pas ici d'une forme indéterminée ! $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+5}=+\infty$.

c. Pour tout entier naturel n,

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{(n+1)-(n+2)}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{-1}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

d. Pour tout entier naturel n,

$$u_n=(\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n+2})\times\frac{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}=\frac{4n+3-(4n+2)}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}=\frac{1}{\sqrt{4n+3}+\sqrt{4n+2}}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

► Correction 42

a. Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}=\frac{\sqrt{n}\times\left(\dfrac{4}{\sqrt{n}}+1\right)}{\sqrt{n\left(\dfrac{4}{n}+1\right)}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\times\frac{\dfrac{4}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{\dfrac{4}{n}+1}}=\frac{\dfrac{4}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{\dfrac{4}{n}+1}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{\sqrt{n}}+1\right)=1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{n}+1\right)=1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{n}+1}=\sqrt{1}=1$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4+\sqrt{n}}{\sqrt{4+n}}=1$.

b. Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{\sqrt{2n^2+1}}{n+\mathrm{e}^{-n}}=\frac{\sqrt{n^2}\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}}{n\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)}=\frac{n\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}}{n\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)}=\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)=2$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}=\sqrt{2}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-n}}{n}\right)=1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\sqrt{2}$.

c. Pour tout entier naturel n,

$$\frac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}=\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}^{-n}+1)}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-n}}=1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^n}{1+\mathrm{e}^n}}=\sqrt{1}=1$.

► Correction 43

Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n=\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}\times\frac{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}.$$

En développant le numérateur, on a alors

$$u_n = \frac{n^2+3n-2-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}} = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}.$$

On a en effet

$$\sqrt{n^2+3n-2} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = n\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

et

$$\sqrt{n^2-n-1} = \sqrt{n^2} \times \sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = n\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}.$$

Ainsi

$$u_n = \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)=4$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\right)=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)=1$.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}\right)=\frac{4}{1+1}=2$.

Comparaison des limites de suites

7. Cours : Comparaisons des limites

1 Théorèmes de comparaison et d'encadrement

1.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 4 — Théorème de comparaison 1 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Il n'y a rien de surprenant ici, si l'on fait preuve d'un brin de logique. Si une suite est plus grande qu'une suite qui devient plus grande que n'importe quel réel, alors elle devient elle-même plus grande que n'importe quel réel.

Démonstration 5 : Soit N un entier naturel tel que, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n$.

Soit A un réel. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N' tel que, pour tout entier $n \geqslant N'$, on a $u_n \geqslant A$.

Ainsi, si $n \geqslant N'$ et $n \geqslant N$, on a que $v_n \geqslant u_n \geqslant A$ et par conséquent que $v_n \geqslant A$.

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □

■ **Exemple 23 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n + \cos(n)$.

On sait que, pour tout entier naturel n, $\cos(n) \geqslant -1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant n-1$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$. Les termes de la suite (v_n) sont plus grands que ceux d'une suite qui tend vers $+\infty$, on a donc, par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. ■

Théorème 6 — Théorème de comparaison 2 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant v_n$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Il s'agit d'une version similaire au premier théorème de comparaison : une suite plus petite qu'une suite qui tend vers $-\infty$ tend également vers $-\infty$. La démonstration de ce résultat est d'ailleurs tout à fait similaire.

■ **Exemple 24 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = (\cos(n)-2)n$.

On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n) \leqslant 1$ et donc $\cos(n) - 2 \leqslant -1$ puis $v_n \leqslant -n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. ■

Dans les deux exemples précédents, il était possible d'encadrer les termes de la suite dont on souhaitait déterminer la limite. Ainsi, pour ce dernier exemple, on aurait pu préciser que, pour tout entier naturel n, $-3n \leqslant v_n \leqslant -n$. Cet encadrement est tout à fait juste mais seule l'une de ces inégalités (en l'occurrence, celle de droite), permet d'établir la limite de la suite. Être supérieur à une suite qui tend vers $-\infty$ n'a rien d'incroyable, alors qu'être inférieur à une telle suite est plus « exceptionnel ».

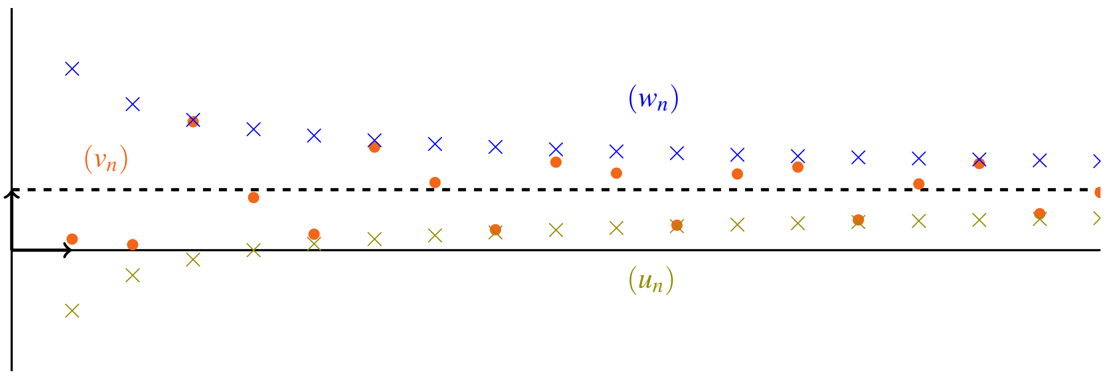
Toutefois, le prochain théorème ne pourra pas se contenter d'une simple inégalité...

1.2 Théorème d'encadrement

Théorème 7 : On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). On suppose qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Si les suites (u_n) et (w_n) sont convergentes et sont **de même limite** ℓ, alors la suite (v_n) est également convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Illustration : Sur l'exemple suivant, trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont représentées. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si l'on sait que (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite, on en déduit la convergence et limite de la suite (v_n).



Ce théorème est également appelé « théorème des gendarmes ». Les suites (w_n) et (u_n) jouent ici le rôle des gendarmes qui encerclent leur cible, la suite (v_n). Peu à peu, les gendarmes se dirigent vers la prison. La suite (v_n), encerclée, n'a d'autre choix que de les suivre. D'autres noms plus ou moins évocateurs sont donnés à ce théorème : théorème des carabiniers ou théorème du sandwich par exemple.

Remarquons que ce théorème est avant tout un théorème qui établit la convergence d'une suite ! Encadrer les termes d'une suite par ceux de deux suites convergentes ne garantit pas la convergence de la suite encadrée.

Si toutefois, la suite est convergente, alors la limite de cette suite est comprise (au sens large) entre les limites des suites encadrantes. La convergence doit cependant être établi au préalable.

Démonstration 8 : Notons N l'entier à partir duquel on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Notons ℓ la limite commune des suites (u_n) et (w_n). Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, il existe un entier N_u à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. En particulier, tous ces termes sont supérieurs à $\ell - \varepsilon$.
- Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, il existe un entier N_w à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. En particulier, tous ces termes sont inférieurs à $\ell + \varepsilon$.

Notons alors $N_v = \max(N, N_u, N_w)$. Cet entier est supérieur aux trois entiers N, N_u et N_w : les trois propriétés précédentes sont donc vérifiées.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant N_v$, on a $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$ et en particulier, $\ell - \varepsilon \leqslant v_n \leqslant \ell + \varepsilon$.

Pour tout $n \geqslant N_v$, on a alors $v_n \in]\ell - \varepsilon\,;\,\ell + \varepsilon[$. On a bien montré que la suite (v_n) converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$ □

■ **Exemple 25 :** Pour tout $n > 0$, on pose $u_n = 3 + \dfrac{\cos(n)}{n}$.

On sait que, pour tout entier non nul n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $3 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 + \dfrac{1}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3$.

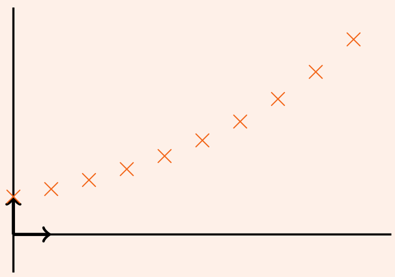
Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, la suite (v_n) est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 3$. ■

2 Suites géométriques

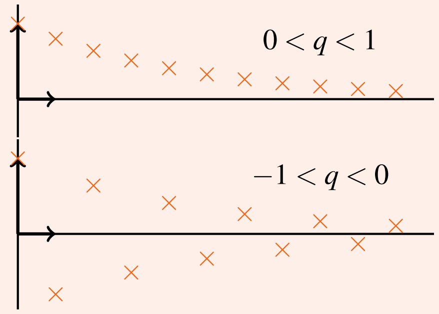
Propriété 10 — Rappel : Inégalité de Bernoulli : Soit a un réel strictement positif.
Pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Propriété 11 : Soit q un réel. On s'intéresse au comportement de la suite (q^n) selon la valeur de q.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.



- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.



- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Démonstration 9 : Traitons séparément les différents cas mentionnés ici :

Premier cas : $q > 1$: Pour tout entier naturel n, $q^n = (1 + (q-1))^n$.

Or, $q - 1 > 0$. Ainsi, d'après l'inégalité de Bernoulli, on a que, pour tout entier naturel n,

$$(1 + (q-1))^n \geqslant 1 + n(q-1)$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + n(q-1)) = +\infty$. Finalement, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

Deuxième cas : $-1 < q < 1$

- Si $q = 0$, le résultat est immédiat puisque la suite est constante égale à 0 à partir du rang 1.
- Si $0 < q < 1$, notons $p = \dfrac{1}{q}$. On a alors $p > 1$ et $q^n = \dfrac{1}{p^n}$.
  Or, d'après le point précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} p^n = +\infty$. Ainsi, en prenant l'inverse, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $-1 < q < 0$, alors, pour tout entier naturel n, $0 < |q| < 1$.
  Par ailleurs, pour tout entier naturel n, on a $-|q|^n < q^n < |q|^n$.
  Or, d'après le cas précédent, $\lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-|q|^n) = 0$.
  D'après le théorème d'encadrement, on a donc également $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Troisième cas : $q \leqslant -1$

Dans ce cas, $q^2 \geqslant 1$.

- D'une part, pour tout entier naturel k, $q^{2k} = (q^2)^k$. Ainsi, $\lim\limits_{k \to +\infty} q^{2k} = +\infty$.
- D'autre part, pour tout entier naturel k, $q^{2k+1} = q \times (q^2)^k$. On en déduit que $\lim\limits_{k \to +\infty} q^{2k+1} = -\infty$.
- Les termes de rangs pairs de la suite (q^n) tendent vers $+\infty$ et les termes de rangs impairs tendent vers $-\infty$. La suite (q^n) ne peut admettre de limite, finie ou infinie.

□

■ **Exemple 26 :** On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $q = 4$.

Pour tout entier naturel n, on a alors $u_n = -2 \times 4^n$. Or, puisque $4 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$.

Ainsi, en faisant la limite du produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. ■

■ **Exemple 27 :** Soit q un réel tel que $-1 < q < 1$.

Pour tout entier naturel n, on note $u_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

D'après ce que l'on sait de l'année de première et du chapitre sur les suites, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Or, puisque $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1-q}$. ■

■ **Exemple 28 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{1 - 4^n}{2 + 3^n}$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = +\infty$.

On se retrouver avec une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$. Or, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{4^n}{3^n} \times \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{\frac{2}{3^n} + 1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{4^n} - 1}{\frac{2}{3^n} + 1}.$$

Or, puisque $\dfrac{4}{3} > 1$, il en vient que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^n = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{4^n} - 1}{\frac{2}{3^n} + 1} = -1$.

Ainsi, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. ■

3 Convergence des suites monotones

3.1 Théorème de convergence

Théorème 10 — Convergence des suites monotones : Soit (u_n) une suite croissante.

- Si la suite (u_n) est majorée par un réel M, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant M$.
- Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors $\lim_{n\to+\infty} = +\infty$.

Démonstration 11 — Second point uniquement : Supposons que la suite (u_n) ne soit pas majorée.

Alors, pour tout réel A, il existe un entier N tel que $u_N \geqslant A$. Or, puisque la suite est croissante, ceci implique que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$, c'est-à-dire $u_n \geqslant A$.
On a montré qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suites sont supérieurs à A, pour n'importe quel réel A. On a donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. □

Attention à ne pas dire, dans le cas où la suite est croissante est majorée par L, que la limite vaut L !
Ce raisonnement peut être mis en défaut assez simplement : si une suite est majorée par L, alors elle l'est aussi par $L+1$, ce qui signifierait qu'elle tendrait aussi vers $L+1$? Le calcul de la limite demandera au moins une étape supplémentaire.

■ **Exemple 29 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4$.
On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout entier n, $u_n \leqslant 5$. On admettra ces deux points pour la suite de l'exemple

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée. D'après le théorème précédent, cette suite est donc convergente. On note alors $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Rappelons que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 4$. Puisque la suite (u_n) est convergente, on peut passer à la limite dans cette égalité. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}u_n + 4\right)$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, par opérations sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{5}u_n + 4\right) = \dfrac{1}{5}\ell + 4$.

Ainsi, ℓ est solution de l'équation $\ell = \dfrac{1}{5}\ell + 4$. On a donc $\ell = 5$. ■

Il est important de montrer que la suite converge avant de passer à la limite.

En effet, prenons la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier n, $v_{n+1} = 2v_n + 3$. D'après le même raisonnement, si (v_n) admet pour limite ℓ, alors $\ell = 2\ell + 3$, soit $\ell = -3$... ce qui est absurde : on voit facilement que pour tout entier n, $v_n > 0$. On a même $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$!

Théorème 12 — Convergence des suites monotones : Soit (u_n) une suite décroissante.

- Si la suite (u_n) est minorée par un réel m, alors la suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant m$.
- Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors $\lim_{n\to+\infty} = -\infty$.

Démonstration 13 : Il suffit de remarquer que si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors la suite $(-u_n)$ est croissante et majorée. On se retrouve alors dans le cas précédent. □

3.2 Algorithme de seuil

Lorsqu'une suite est strictement monotone, il est courant de rechercher la valeur à partir de laquelle elle dépassera un certain seuil. Il est possible de résoudre un tel problème à l'aide d'une résolution d'équation ou d'un algorithme.

■ **Exemple 30 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 9$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$.

On peut montrer, par exemple par récurrence, que cette suite est strictement décroissante et que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$. La suite (u_n) étant décroissante et minorée, on en déduit qu'elle est convergente. Un autre calcul permettra de montrer que $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

D'après la définition de la limite, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, on a $u_n \in]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$. La suite (u_n) étant ici décroissante, il suffit de trouver le premier rang n pour lequel $u_n \leqslant 2+\varepsilon$: les termes suivants seront forcément compris entre 2, qui est la limite, et $2+\varepsilon$.

- On commence au rang $n = 0$ et on prend comme valeur initiale de la suite celle de u_0.
- Tant que la valeur actuelle u_n de la suite est supérieure à $2+\varepsilon$ on calcule la valeur suivante de la suite et on incrémente le rang de 1.
- Si la valeur actuelle de u_n est inférieure à $2+\varepsilon$, alors on s'arrête ici et on renvoie la valeur du rang n.

Pseudo-algorithme

Variable d'entrée : ε
$U = 9$
$N = 0$
Tant que $U > 2+\varepsilon$
   $U \leftarrow U/2+1$
   $N \leftarrow N+1$
Fin Tant que
Renvoyer N

La valeur de n est stockée dans la variable N et celle de u_n est stockée dans la variable U. A chaque étape, le terme suivant de la suite est calculé : N est augmenté de 1 et on applique la relation de récurrence de la suite (u_n) pour mettre à jour la valeur de U. Le programme renvoie alors la première valeur de n telle que u_n n'est pas strictement supérieur à $2+\varepsilon$. On peut alors construire une fonction en Python qui prend en paramètres un réel E positif ou nul et qui renvoie cet entier n.

```python
def seuil(E):
  U = 9
  N = 0
  while U > 2 + E:
    U = U/2 + 1
    N = N + 1
  return N
```

Dans notre cas, l'exécution de l'instruction **seuil(0.001)** renvoie la valeur 13. Cela signifie que u_{13} est le premier terme de la suite inférieur ou égal à 2.001. ■

Cet algorithme peut varier sur certains aspects : on peut par exemple avoir une suite croissante, auquel cas on souhaitera le premier terme supérieur à une valeur donnée. On peut également donner en entrée la valeur à franchir plutôt que la différence entre la limite et les valeurs des termes de la suite. Cependant, la construction d'un tel algorithme est toujours la même.

8. Exercices

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

▶ Exercice 44

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = ((-1)^n - 4)n^2$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant -3n^2$.
2. En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

▶ Exercice 45

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n^2+1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$.
2. En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

▶ Exercice 46

À l'aide d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = n + 3 \times (-1)^n$

b. $u_n = n(\sin(n) - 3)$

c. $u_n = n + \dfrac{\cos(n)}{n}$ pour $n > 0$

d. $u_n = \sin(3n^2+1) - n^3$

▶ Exercice 47

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + n + 2}{2}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

▶ Exercice 48

À l'aide d'un encadrement par deux suites convergentes, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{3 + \sin(n)}{n^3}$ pour $n > 0$

b. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n > 0$

▶ Exercice 49

À l'aide d'un encadrement, d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{2 + \cos(2n) + 4\sin(n)}{n}$

b. $u_n = \dfrac{18n^3}{2\sin(n) + 3\cos(2n) - 9}$

c. $u_n = n^2 - 2\cos(n) + 3\sin(5n+1)$

d. $u_n = \dfrac{n^2 + 2\cos(n) - 5\sin(n)}{3n^2}$

► Exercice 50

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{6n+2\times(-1)^n}{3n+4\times(-1)^{n+1}}$. Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

► Exercice 51 — Métropole 2024

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 1 : La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, on a alors $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

► Exercice 52 — Métropole 2021

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

► Exercice 53 — Métropole 2021

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}.$$

Dans tout l'exercice, on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont **strictement positives**.

1. (a) Calculer u_1 et v_1.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 1$.
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n+1$.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On pose pour tout entier naturel n, $r_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. On admet que $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{-1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (r_n^2) puis celle de la suite (r_n).

Suites géométriques

► Exercice 54

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n puis déterminer, si elle existe, sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1.01$ et de premier terme $u_0 = 10^{-54}$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = -\sqrt{2}$ et de premier terme $u_n = 42$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \pi - 3$ et de premier terme $u_0 = -1235$.

► Exercice 55

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ **b.** $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **c.** $u_n = -2 \times 4^n$

d. $u_n = 3 + 40 \times \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n$ **e.** $u_n = 3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ **f.** $u_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

g.$u_n = 2^n 6^{-n}$ **h.** $u_n = 3^n - 2^n$ **i.** $u_n = 2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}$

j. $u_n = 2 + 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ **k.** $u_n = \dfrac{1-2^n}{1-\dfrac{1}{3^n}}$ **l.** $u_n = \dfrac{n^n}{18^n}$

► Exercice 56

Soit n un entier naturel. On rappelle que pour tout réel q différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

A l'aide de cette égalité, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$
3. $u_n = 8 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{8}{4^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{4^k}$

► Exercice 57 — Asie 2024

L'affirmation suivant est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$. Alors, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

► Exercice 58

Soit a et b deux réels positifs. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n - b^n$. On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

Convergence des suites monotones

► Exercice 59

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$.
2. Montrer que la suite (w_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

► Exercice 60

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $\sqrt{\ell + 2} = \ell$. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

► Exercice 61 — Métropole 2022

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

► Exercice 62

Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]\sqrt{a}; +\infty[$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in [\sqrt{a}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$.
2. Que vaut $f(\sqrt{a})$?
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
5. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Cette méthode servant à estimer la racine carrée d'un nombre strictement positif se nomme la "Méthode de Héron" et est notamment utilisée dans les calculatrices.

Exercices de synthèse

► Exercice 63 — Suite arithmético-géométrique : découverte guidée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 10.$$

Partie A : Première approche

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. A l'aide d'un tableur, d'un algorithme ou d'une calculatrice, calculer les premiers termes de cette suite. Quelle semble être sa limite ?
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 40$.

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie B : Déterminer la limite

1. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 40$. Soit donc n un entier naturel.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}.
   (b) Rappeler la relation qui lie u_{n+1} et u_n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   (d) En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que $v_{n+1} = 0.75v_n$.
2. (v_n) est donc une suite géométrique. Quelle est sa raison ? Que vaut v_0 ?
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
4. En rappelant la relation qui lie v_n et u_n, montrer alors que pour tout entier naturel n, $u_n = 40 + 60 \times 0.75^n$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

► Exercice 64 — Suite arithmético-géométrique : moins guidé...

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 6$$

Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = u_n - 3.6$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? On précisera sa raison et son premier terme v_0.
3. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

► Exercice 65 — Métropole 2021

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés. Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 25°C.

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur. Ainsi, $T_0 = -19$. On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

Pour tout entier naturel n, $\quad T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$.
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant 25$. En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variations de la suite (T_n).
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   (a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   (c) En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. (a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
   (b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10°C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

(c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$. Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

```
def seuil():
  n = 0
  T = ...
  while T ... :
    T = ...
    n = n + 1
  return ...
```

► Exercice 66 — Antilles-Guyane 2018

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0{,}05(u_n - 1520)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
4. On désigne par (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Recopier et compléter la fonction suivante, écrite en Python, pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
def seuil():
  U = 3000
  N = 0
  while ... :
    N = ...
    U = ...
  return ...
```

6. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

► Exercice 67 — Polynésie 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, de raison 3.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

► Exercice 68 — Réunion 2023

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{6u_n+2}{u_n+5}$.

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par
$$f(x) = \frac{6x+2}{x+5}.$$
   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}.$$
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par
$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}.$$
   (a) Calculer v_0.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.
   (c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n). En déduire la limite de (u_n).
5. On considère la fonction Python seuil ci-dessous, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2. Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```python
def seuil(A):
  n = 0
  u = 8
  while u > A :
    u = (6*u + 2)/(u+5)
    n = n + 1
  return n
```

9. Corrigés

► Correction 44

Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Ainsi, $-1-4 \leqslant (-1)^n - 4 \leqslant 1-4$, et donc $-5 \leqslant (-1)^n - 4 \leqslant -3$.

En multipliant par n^2 qui est positif, on a $-5n^2 \leqslant u_n \leqslant -3n^2$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (-3n^2) = -\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

► Correction 45

Pour tout entier naturel n, on a $n^2+1 \geqslant n^2$. En appliquant la fonction Racine carrée qui est croissante sur $[0;+\infty[$, on a alors $\sqrt{n^2+1} \geqslant \sqrt{n^2}$, c'est-à-dire $u_n \geqslant n$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 46

a. Pour tout entier naturel n, $u_n = n + 3 \times (-1)^n$.
Or, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, on a donc $u_n \geqslant n-3$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-3) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et donc $-4 \leqslant \sin(n) - 3 \leqslant -2$ et finalement $-4n \leqslant u_n \leqslant -2n$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (-2n) = -\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

c. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et finalement $n - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant n + \dfrac{1}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

d. Pour tout entier naturel n, $u_n = \sin(3n^2+1) - n^3$. Or, $\sin(3n^2+1) \leqslant 1$. Ainsi, $u_n \leqslant 1 - n^3$.
Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1-n^3) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

► Correction 47

On a $u_1 = \dfrac{u_0+0+2}{2} = \dfrac{2+0+2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $u_2 = \dfrac{u_1+1+2}{2} = \dfrac{2+1+2}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 1 \geqslant 0$. $P(0)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n \geqslant n$ et donc $u_n + n + 2 \geqslant 2n+2$ soit $u_n + n + 2 \geqslant 2(n+1)$. Finalement, on obtient $\dfrac{u_n+n+2}{2} \geqslant \dfrac{2(n+1)}{2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant n+1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 48

a. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{3+\sin(n)}{n^3}$.

Or, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ d'où $\dfrac{2}{n^3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{n^3}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^3} = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Or, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ d'où $2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

► Correction 49

a. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{2+\cos(2n)+4\sin(n)}{n}$. On a donc $-\dfrac{3}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{7}{n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{n}\right) = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{18n^3}{2\sin(n)+3\cos(2n)-9}$, on a donc $u_n \leqslant \dfrac{18n^3}{-4} = -\dfrac{9}{2}n^3$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{9}{2}n^3\right) = -\infty$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c. Puisque pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, et $-1 \leqslant \sin(5n+1) \leqslant 1$, on a alors $n^2 - 5 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 5$. En particulier, le fait que $u_n \geqslant n^2 - 5$ nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. Puisque pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{3n^2}$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

► Correction 50

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = \dfrac{6 + 2 \times \dfrac{(-1)^n}{n}}{3 + 4 \times \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{6}{3} = 2$.

► Correction 51

L'affirmation 1 est fausse. En effet, si l'on pose pour tout entier naturel n, $u_n = -1$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1$, alors les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) respectent les conditions de l'énoncé. En revanche, la suite (v_n) ne converge pas (celle-ci vaut successivement -1 puis 1 et n'admet donc pas de limite).

L'affirmation 2 est vraie. En effet, puisque la suite (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant u_1 \geqslant u_0$ et donc, en particulier, $u_n \geqslant u_0$. De la même manière, on peut montrer que, puisque la suite (w_n) est décroissante, on a, pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant w_0$.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$ et donc, en particulier, $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

▶ Correction 52

1. On a $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4}\times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 0 + 1 = \frac{7}{4}$ et
$u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}\times 1 + 1 = \frac{3}{4}\times\frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ ».
   - **Initialisation** : On a $u_0 = 1$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
   En multipliant par $\frac{3}{4}$, on obtient $\frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$.
   On ajoute alors $\frac{1}{4}n+1$ et on obtient $\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$,
   c'est-à-dire, $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$. Et puisque $\frac{7}{4} \leqslant 2$, on obtient bien $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1}$ et donc, en particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante. Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.
D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on a $n \leqslant u_n \leqslant n+1$. On peut alors diviser cette inégalité par n, et on obtient $\frac{n}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$, c'est-à-dire $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}$ existe et vaut 1.

▶ Correction 53

1. (a) On a $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2u_0 + v_0 = 2\times 1 + 1 = 3$.
   (b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n$ Or, d'après l'énoncé, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. La suite (v_n) est donc strictement croissante. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0$ et donc $v_n \geqslant 1$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant n+1$ ».
   - **Initialisation** : On sait que $u_0 = 1$. On a bien $u_0 \geqslant 0+1$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant n+1$. Mais d'après la question précédente, on a aussi que $v_n \geqslant 1$. Ainsi, en sommant ces deux inégalités, on obtient que $u_n + v_n \geqslant n+1+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant (n+1)+1$.$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (d) On sait que $\lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Or, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n+1$. D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. (a) $(-1)^{n+1}$ vaut -1 ou 1, selon la parité de l'entier n. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
   En divisant par u_n^2, qui est strictement positif, on obtient que $\frac{-1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}$.
   (b) Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il en vient que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{u_n^2} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ existe et vaut 0.
   (c) Par somme de limite, on obtient que $\lim_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$. Or, la suite (r_n) est strictement positive, puisque

chaque terme est le quotient de deux réels strictement positifs. Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{r_n^2} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2} = \sqrt{2}$.

► Correction 54

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^{-54} \times 1{,}01^n$. Or, $1{,}01 > 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}01^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = 42 \times (-\sqrt{2})^n$. Puisque $-\sqrt{2} < -1$, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1235 \times (\pi - 3)^n$. Or, $-1 < \pi - 3 < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\pi-3)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

► Correction 55

a. Puisque $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.

b. Puisque $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

c. Puisque $4 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

d. Puisque $-1 < -\dfrac{62}{63} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

e. Puisque $-1 < \dfrac{7}{8} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n\right) = 3$.

f. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Puisque $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

g. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n 6^{-n} = \dfrac{2^n}{6^n} = \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

h. Pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2^n = 3^n \times \left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right) = 3^n \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

i. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}\right) = +\infty$.

j. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 2$.

k. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 2^n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

l. Pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\dfrac{n}{18}\right)^n$. Or, pour $n \geqslant 19$, on a $u_n \geqslant \left(\dfrac{19}{18}\right)^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{19}{18}\right)^n = +\infty$. Par comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 56

1. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or, puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}^{n+1}\right)\right)$$

Or, puisque $-1<\frac{1}{3}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 8\times\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right) = 8\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{32}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

Or, puisque $-1<\frac{1}{4}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{32}{3}$.

► Correction 57

Pour tout entier naturel n, on a $\frac{-9^n+3^n}{7^n} = -\frac{9^n}{7^n}+\frac{3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n+\left(\frac{3}{7}\right)^n$.

Or, puisque $\frac{9}{7}>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{7}\right)^n=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{9}{7}\right)^n\right)=-\infty$.

Par ailleurs, puisque $-1<\frac{3}{7}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n=0$.

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-9^n+3^n}{7^n}=-\infty$ et, d'après le théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. L'affirmation est vraie.

► Correction 58

Traitons chacun des cas possibles.

- Si $a=b$, tous les termes de la suites valent 0, la suite converge donc vers 0.
- Si $a>b$ (en particulier, $a\neq 0$), pour tout entier naturel n, $u_n = a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$. Or, puisque $a>b\geqslant 0$, cela signifie que $0\leqslant\frac{b}{a}\leqslant 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)=1$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- Si $a<b$ (en particulier, $b\neq 0$), pour tout entier naturel n, $u_n = b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-1\right)$. Or, puisque $0\leqslant a<b$, cela signifie que $0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-1\right)=-1$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

► Correction 59

1. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $w_n \leqslant \frac{3}{2}$ ».
   - $w_0 = 1 \leqslant \frac{3}{2}$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
   - Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
     Alors, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$. ainsi, $\frac{1}{3}w_n \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}u_n + 1 \leqslant \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $w_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{3}w_n + 1 - w_n = -\frac{2}{3}w_n + 1$.
   Or, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$ d'où $-\frac{2}{3}w_n \geqslant -1$ et $-\frac{2}{3}w_n + 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ ou encore $w_{n+1} \geqslant w_n$. La suite (w_n) est donc croissante. On aurait également pu procéder par récurrence.
3. La suite (w_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$: elle est donc convergente. De plus, puisque pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$, la limite l de la suite (w_n) doit vérifier $l = \frac{1}{3}l + 1$, c'est-à-dire $l = \frac{3}{2}$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \frac{3}{2}$.

► Correction 60

1. On a $u_1 = \sqrt{14+2} = \sqrt{16} = 4$.
2. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 2$ ».
   - **Initialisation :** $u_0 = 16$, $u_1 = 4$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant 2$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
     On a $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 2$ et donc $u_n + 2 \geqslant u_{n+1} + 2 \geqslant 4$.
     La fonction Racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\sqrt{u_n+2} \geqslant \sqrt{u_{n+1}+2} \geqslant \sqrt{4}$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant 2$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion :** Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
4. Si $\sqrt{\ell+2} = \ell$, on a $\ell + 2 = \ell^2$ c'est-à-dire $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont 2 et -1. Or, puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$, la seule possibilité de limite est 2.

► Correction 61

Puisque pour tout entier naturel non nul n, on a $\frac{1}{n} \leqslant 1$, alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Elle est donc convergente.

► Correction 62

1. f est dérivable sur $[\sqrt{a};+\infty[$ et, pour tout réel x dans cet intervalle, $f'x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$.
   Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x^2 > a$. a étant positif et puisque $x \in [\sqrt{a};+\infty[$, on a bien $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est croissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$.
2. Par ailleurs, $f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \sqrt{a}$.
3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
   - Par hypothèse, $u_0 \in [\sqrt{a};+\infty[$. en particulier, $u_0 \geqslant \sqrt{a}$.
   - Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie. $u_n \geqslant \sqrt{a}$. La fonction f étant croissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$, on a alors $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{a})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- La proposition $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{u_n} - u_n\right)$.
Pour tout réel $x \geqslant \sqrt{a}$, on pose alors $g(x) = \dfrac{a}{x} - x$. g est décroissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$. De plus, $g(\sqrt{a}) = \dfrac{a}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} = \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [\sqrt{a};+\infty[$, $g(x) \leqslant 0$. Or, on a vu que pour tout entier naturel n, $u_n \in [\sqrt{a};+\infty[$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante. Puisqu'elle est minorée, la suite (u_n) est donc convergente.
5. On admet que la limite ℓ le la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. On a donc $\ell = \dfrac{\ell}{2} + \dfrac{a}{2\ell}$ soit $\ell^2 = a$. ℓ étant forcément positive, on a alors $\ell = \sqrt{a}$.

► Correction 63

Partie A : Première approche

1. On a $u_0 = 100$, $u_1 = \dfrac{3}{4} \times 100 + 10 = 85$ et $u_2 = \dfrac{3}{4} \times 85 + 10 = 73{,}75$. En particulier, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, la suite (u_n) n'est donc pas arithmétique. De plus $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$. La suite (u_n) n'est donc pas géométrique.
2. Il semblerait que la suite (u_n) soit convergente, de limite 40.
3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant 40$ ».
   - $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 100 \geqslant 40$.
   - Soit un entier n tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Ainsi, $u_n \geqslant 40$, donc $\dfrac{3}{4}u_n \geqslant 30$ et $\dfrac{3}{4}u_n + 10 \geqslant 40$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 40$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n}{4} + 10$. Or, $u_n \geqslant 40$ donc $-\dfrac{u_n}{4} + 10 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 40. Elle est donc convergente.

Partie B : Déterminer la limite

1. (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 40$.
   (b) On rappelle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 10$.
   (c) Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 40$.
   (d) Pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = \frac{3}{4}u_n + 10 - 40 = \frac{3}{4}u_n - 30 = \frac{3}{4}(v_n + 40) - 30 = \frac{3}{4}v_n.$$
2. (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$. De plus, $v_0 = u_0 - 40 = 60$. Pour tout entier naturel n, on a donc $v_n = 60 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 60 \times 0.75^n$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 40$, on a alors que $u_n = 40 + 60 \times 0{,}75^n$.
3. Puisque $-1 < 0{,}75 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40$.

► Correction 64

1. Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3{,}6 = -\frac{2}{3}u_n + 6 - 3{,}6 = -\frac{2}{3}u_n + 2{,}4 = -\frac{2}{3}(v_n + 3{,}6) + 2{,}4 = -\frac{2}{3}v_n - 2{,}4 + 2{,}4 = -\frac{2}{3}v_n.$$

2. La suite (v_n) est géométrique. Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 3{,}6 = 16{,}4$ et sa raison vaut $q = -\frac{2}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n, $v_n = 16{,}4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $u_n = 3{,}6 + 16{,}4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.
4. Puisque $-1 < -\frac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} = 3{,}6$.

► **Correction 65**

1. Pour tout entier naturel n,$T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25) = -0{,}06T_n + 0{,}06 \times 25 = 0{,}06T_n + 1{,}5$.
   En ajoutant T_n aux deux membres de l'égalité, on trouve $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$.
2. $T_1 = 0{,}94T_0 + 1{,}5 = 0{,}94 \times (-19) + 1{,}5 = -16{,}36 \simeq -16{,}4$.
   $T_2 = 0{,}94T_1 + 1{,}5 = 0{,}94 \times (-16{,}36) + 1{,}5 = -13{,}8784 \simeq -13{,}9$.
   Attention à bien arrondir au dixième comme le demande la consigne !
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $T_n \leqslant 25$ ».
   - **Initialisation** : $T_0 = -19$. On a bien $T_0 \leqslant 25$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $T_n \leqslant 25$. En multipliant par 0,94, on a $0{,}94T_n \leqslant 0{,}94 \times 25$. On ajoute alors 1,5, ce qui donne $0{,}94T_n + 1{,}5 \leqslant 0{,}94 \times 25 + 1{,}5$, c'est-à-dire $T_{n+1} \leqslant 25$. $P(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   Ce résultat est prévisible : la température ambiante est de 25 degrés, le gâteau qui est au départ plus froid ne peut pas dépasser cette température en sortant du congélateur.
4. Pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$. Puisque pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant 25$, on a donc $T_n - 25 \leqslant 0$ et donc $-0{,}06 \times (T_n - 25) \geqslant 0$, ce qui conduit à $T_{n+1} - T_n \geqslant 0$ et finalement $T_{n+1} \geqslant T_n$.
   La suite (T_n) est donc croissante.
5. Puisque la suite (T_n) est croissante et majorée, elle est convergente.
6. (a) Pour tout entier naturel n

   $$U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0{,}94T_n + 1{,}5 - 25 = 0{,}94T_n - 23{,}5.$$

   Or, puisque $U_n = T_n - 25$, on a $T_n = U_n + 25$. Ainsi,

   $$U_{n+1} = 0{,}94(U_n + 25) - 23{,}5 = 0{,}94U_n + 23{,}5 - 23{,}5 = 0{,}94U_n.$$

   La suite (U_n) est donc géométrique, de raison 0,94. Son premier terme vaut

   $$U_0 = T_0 - 25 = -19 - 25 = -44.$$

   (b) La suite (U_n) est géométrique : pour tout entier naturel n, $U_n = -44 \times 0{,}94^n$. Par ailleurs, $T_n = U_n + 25$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   (c) Puisque $-1 < 0{,}94 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}94^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} = 25$. A terme, les gâteaux auront une températures de 25 degrés Celsius.
7. (a) $T_{30} = -44 \times 0{,}94^{30} + 25 \simeq 18$. Après une demi-heure à température ambiante, les gâteaux auront une température d'environ 18°C.
   (b) On a $T_{17} = -44 \times 0{,}94^{17} + 25 \simeq 9{,}63$ et $T_{18} = -44 \times 0{,}94^{18} + 25 \simeq 10{,}55$. Cécile doit déguster son gâteau entre 17 et 18 minutes après la sortie du congélateur.

(c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil():
  n = 0
  T = -19
  while T < 10 :
    T = 0.94 T +1.5
    n = n + 1
  return n
```

► Correction 66

1. Au 31 octobre, il y a 3080 cétacés. Leur nombre diminue alors de 5%. $\left(1-\dfrac{5}{100}\right)\times 3080 = 2926$. On a bien $u_1 = 2926$.
2. Chaque année, le nombre de cétacés augmente de 80 puis diminue de 5%. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95(u_n+80) = 0{,}95u_n+76$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant 1520$ ».
   - $u_0 = 3000$. On a bien $u_0 \geqslant 1520$, $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant 1520$. Ainsi, $0.95u_n \geqslant 0.95\times 1520$ et $0.95u_n+76 \geqslant 0.95\times 1520+76$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 1520$. $P(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) Pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} - u_n 0.95u_n + 76 - u_n = -0.05u_n + 76 = -0.05\left(u_n + \frac{76}{-0.05}\right) = -0{,}05(u_n - 1520).$$
   (c) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$, on a $-0.05(u_n-1520) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
4. (a) Pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0.95u_n + 76 - 1520 = 0.95(a_n+1520)+76-1520 = 0.95a_n.$$
   La suite (a_n) est donc géométrique de raison 0.95 et de premier terme $a_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

   (b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = 1480\times 0.95^n$ et $u_n = a_n + 1520 = 1480\times 0{,}95^n + 1520$.

   (c) Puisque $-1 < 0.95 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.95^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.
5.
```
def seuil():
  U = 3000
  N = 0
  while U > 2000 :
    N = N + 1
    U = 0.95 * U + 76
  return N
```
6. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$, et que la suite (u_n) est décroissante, il arrivera forcément un rang à partir duquel la suite sera sous 2000. Cela arrive au rang 22 : la réserve fermera donc en 2039.

► Correction 67

1. (a) On a $u_1 = \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$ et $u_1 = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{9}{10}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < u_n$ ».
   - **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$. On a bien $0 < u_0$. $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors u_{n+1} est le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc lui-même strictement positif. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. (a) Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{1+2u_n}$. Or, puisque $u_n < 1$, on a donc $1+2u_n < 3$ et donc $1 < \dfrac{3}{1+2u_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Les termes de cette suite étant strictement positifs, cela signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.
   (b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.
3. (a) Pour tout entier naturel n,
$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1-2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1-2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n.$$
   La suite (v_n) est géométrique de raison 3.
   (b) On a par ailleurs $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 1\times 3^n = 3^n$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on a $v_n(1-u_n) = u_n$ et donc $v_n = u_n + u_n v_n$, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$.
   Finalement, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n} \times \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^n}}$. Or, puisque $3>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.
   Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

► **Correction 68** 1. On a $u_1 = \dfrac{6\times 8+2}{8+5} = \dfrac{50}{13}$.
2. (a) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,
$$f'(x) = \frac{6(x+5)-1(6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2} > 0$$
   La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors, pour l $x > 2$, on a $f(x) > f(2)$. Or, $f(2) = \dfrac{6\times 2+2}{2+5} = \dfrac{14}{7} = 2$. Ainsi, pour tout réel $x > 2$, $f(x) > 2$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > 2$ ».
   - **Initialisation** : $u_0 = 8 > 2$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Puisque f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, on a alors $f(u_n) > f(2)$, soit $u_{n+1} > 2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion :** Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. (a) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n > 2$, alors $u_n+1 > 0$, $u_n+5 > 0$ et $2-u_n < 0$. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
   (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, elle est donc convergente.
4. (a) On a $v_0 = \dfrac{u_0-2}{u_0+1} = \dfrac{8-2}{8+1} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

(b) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}-2}{\dfrac{6u_n+2}{u_n+5}+1} = \frac{\dfrac{6u_n+2-2u_n-10}{u_n+5}}{\dfrac{6u_n+2+u_n+5}{u_n+5}} = \frac{4u_n-8}{7u_n+7} = \frac{4(u_n-2)}{7(u_n+1)} = \frac{4}{7}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

(c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7}\right)^n$.

Or, puisque $-1 < \frac{4}{7} < 1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (qui existe bien d'après les questions précédentes).

On a alors $0 = \frac{\ell-2}{\ell+1}$. Ainsi, $\ell - 2 = 0$ et donc $\ell = 2$.

5. Le programme renvoie le premier rang n à partir duquel on a $u_n \leqslant 2.001$. Ce rang vaut 14.

IV

Compléments sur la dérivation

10. Cours : Compléments sur la dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I la fonction

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{cases}$$

■ **Exemple 31 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers $2x$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$. ■

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$mx+p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(ax+b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\exp(ax+b)$

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 14 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est également dérivable sur I. On a alors

$$(ku)' = ku' \qquad (u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

■ **Exemple 32 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2-3x+1)\exp(3x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2-3x+1$ et $v(x) = \exp(3x+1)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x-3$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 3\exp(3x+1)$.

On a $f = uv$. Ainsi, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a $f' = u'v+uv'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) = (2x-3)\times\exp(3x+1)+(x^2-3x+1)\times 3\exp(3x+1) = (3x^2-7x)\exp(3x+1).$$

■

1.4 Tangente à la courbe

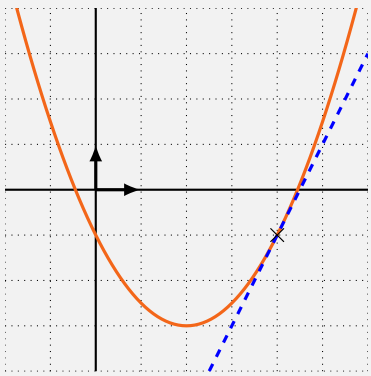
Définition 9 — Tangente à la courbe : Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a;f(a))$.

Propriété 12 : Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)\times(x-a)+f(a).$$

■ **Exemple 33 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \frac{x^2}{2}-2x-1$.



f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = x-2$.
Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4

- $f'(4) = 4-2 = 2$
- $f(4) = \frac{4^2}{2}-2\times4-1 = -1$

Cette tangente a pour équation $y = f'(4)\times(x-4)+f(4)$ soit $y = 2(x-4)-1$ et donc $y = 2x-9$.

■

1.5 Variations d'une fonction

Propriété 13 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

■ **Exemple 34 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\exp(3x+1)$ étudiée précédemment. On a vu que pour tout réel x, on a $f'(x) = (3x^2 - 7x)\exp(3x+1) = x(3x-7)\exp(3x+1)$.

$f'(x)$ étant écrite sous forme factorisée, on peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\exp(3x+1)$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\frac{5\mathrm{e}^8}{9}$	$\nearrow$	

■

2 Dérivée seconde

Définition 10 — Dérivée seconde : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).

On appelle fonction *dérivée seconde* de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

Pour tout $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$.

■ **Exemple 35 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x-2}$. Posons, pour tout réel x, $u_1(x) = 2x+1$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x-2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = 2$.
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-2}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = u_1'(x) \times v_1(x) + u_1(x) \times v_1'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{3x-2} + (2x+1) \times 3\mathrm{e}^{3x-2} = (6x+5)\mathrm{e}^{3x-2}.$$

Posons alors, pour tout réel x, $u_2(x) = 6x+5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$.

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_2'(x) = 6$.
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_2'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = u_2'(x) \times v_2(x) + u_2(x) \times v_2'(x) = 6 \times e^{3x-2} + (6x+5) \times 3e^{3x-2} = (24x+21)e^{3x-2}.$$

■

3 Composition de fonctions

Définition 11 — Fonction composée : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x)).$$

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g : x \overset{g}{\longmapsto} g(x) \overset{f}{\longmapsto} f[g(x)]$$

■ **Exemple 36 :** Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x+3)^2$.
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) + 3 = x^2 + 3$.

■

Attention ! En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 14 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x).$$

■ **Exemple 37 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2+3x-2$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2x+3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}.$$

■

Propriété 15 — Cas particuliers : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

■ **Exemple 38 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x+1)^9$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 4x+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, $f = u^9$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 9 \times u' \times u^8$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 9 \times 4 \times (4x+1)^{9-1} = 36 \times (4x+1)^8.$$

■

■ **Exemple 39 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Or, $f = \dfrac{1}{u}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

■

■ **Exemple 40 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Bien que la fonction f soit définie sur l'intervalle fermé $[-2;2]$, elle n'est en revanche dérivable que sur l'intervalle ouvert $]-2;2[$. Pour tout réel $x \in]-2;2[$, on a

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

■

11. Exercices

Rappels sur la dérivation

► Exercice 69

Dériver les fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition et de dérivation.

$f_1 : x \mapsto 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$f_2 : x \mapsto 8x^7 + \dfrac{4}{x^2}$

$f_3 : x \mapsto 2x^4 + \mathrm{e}^{3x-1}$

$f_4 : x \mapsto (5x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x$

$f_5 : x \mapsto (1 - 6x^2)\mathrm{e}^{3x+2}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 5}$

$f_8 : x \mapsto \dfrac{x + \mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^x}$

► Exercice 70

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 45x + 21$.

1. f est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $f'(x)$?
2. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

► Exercice 71

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{10x + 4}{5x^2 + 1}$

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

► Exercice 72

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$ et que pour tout réel x dans ces intervalles
$$f'(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{(1 + x)^2}.$$
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f.

► Exercice 73

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto (-x^2 + x + 1)\mathrm{e}^{1-3x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 74 — Centres étrangers 2024

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n\mathrm{e}^{-u_n}$

1. Déterminer le sens de variations de la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; 1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

► Exercice 75

A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$

Dérivée seconde

► Exercice 76

Pour chacune des fonctions suivantes, deux fois dérivables sur l'intervalle mentionné, donner une expression de la dérivée seconde.

$f_1 : x \mapsto 6x^2 + 2x - 1$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto 3x^2 + 2x - \dfrac{3}{x}$, sur $]-\infty;0[$

$f_3 : x \mapsto x^2 e^{3x+1}$, sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3x^2-1}{x}$, sur $]-\infty;0[$

$f_5 : x \mapsto (1-6x^2)e^{3x+2}$, sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{e^x}{x}$, sur $]0;+\infty[$

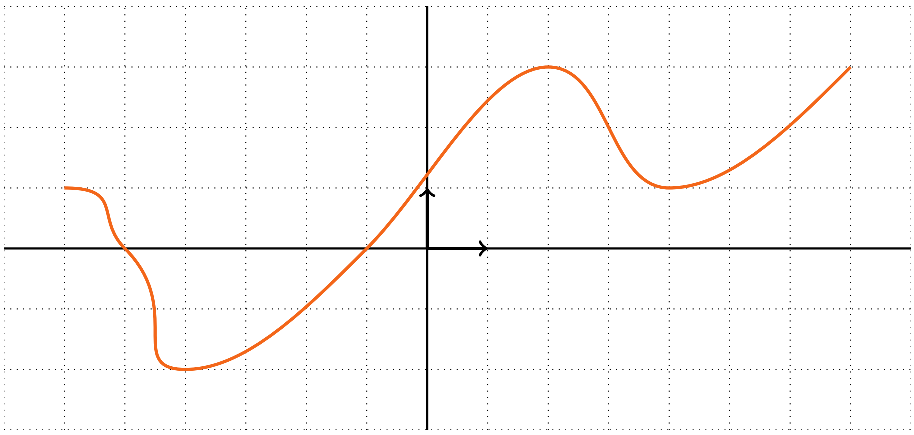
► Exercice 77

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 66x^2 - 360x + 120$.

1. Soit x un réel. Que vaut $f'(x)$?
2. On note f'' la dérivée de f'. Que vaut $f''(x)$?
3. Construire la tableau de signes de f''.
4. En déduire le tableau de variations de f'.
5. On indique de plus que $f'(-5) = f'(3) = f'(-2) = 0$. Construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

► Exercice 78

On considère une fonction f deux fois dérivable. On a représenté ci-dessous la courbe de f' dans un repère orthonormé.



On sait par ailleurs que $f(-6) = -1$, $f(-5{,}5) = 0$ et $f(-1) = 2$. Construire le tableau de signes de f'' et f sur l'intervalle $[-6;7]$.

► Exercice 79

Soit f et g deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I. Justifier que (fg) est deux fois dérivable sur I et exprimer $(fg)''$ en fonction de f, g et de leurs dérivées.

► Exercice 80

Soit a et b deux réels. Pour tout réel x, on pose $f(x) = (ax+b)e^x$.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis donner une expression de $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. Montrer que pour tout réel x, $f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$.

► Exercice 81

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et n un entier naturel. Lorsqu'il est possible de dériver n fois la fonction f sur I, on dit que f est n fois dérivable et on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois. On a alors $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$...

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, f est n fois dérivable et pour tout réel x, $f^{(n)}(x)=(x+n)\mathrm{e}^x$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, g est n fois dérivable et pour tout réel x, $g^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)\mathrm{e}^x$.

Composition de fonctions

► Exercice 82

Pour tout réel x, on pose $f(x)=x^2+1$, $g(x)=3x+2$ et $h(x)=2-x$.
Donner une expression de $(f\circ g)(x)$, $(g\circ f)(x)$, $(h\circ g)(x)$ et $(f\circ g\circ h)(x)$.

► Exercice 83

Exprimer chacune des fonctions suivantes comme la composition de deux fonctions « usuelles ». On ne se souciera pas des domaines de définition.

$f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{1+x^2}$ $\quad$ $f_2 : x \mapsto (3x+8)^7$ $\quad$ $f_3 : x \mapsto \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$

► Exercice 84

Soit f une fonction définie sur un ensemble E. On dit que f est une involution de E si pour tout $x\in E$, $(f\circ f)(x)=x$.

1. Montrer que la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution de $\mathbb{R}^*$.
2. Soit a un réel. Montrer que la fonction $x\mapsto a-x$ est une involution de $\mathbb{R}$.
3. Soit a et b deux réels, avec $b\neq 0$. Montrer que la fonction $x\mapsto \dfrac{b}{x-a}+a$ est une involution de $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

► Exercice 85

Dériver les fonctions suivantes, dérivables sur l'intervalle donné.

$f_1 : x\mapsto (3x+2)^2$, sur $\mathbb{R}$ $\quad$ $f_2 : x\mapsto (6x^2+3x+4)^3$, sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x\mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, sur $]0;+\infty[$ $\quad$ $f_4 : x\mapsto \sqrt{2x^2-5x+7}$,sur $\mathbb{R}$

$f_5 : x\mapsto \dfrac{1}{(3x+6)^2}$, sur $]-2;+\infty[$ $\quad$ $f_6 : x\mapsto \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}$, sur $]-\infty;0[$

► Exercice 86

On considère la fonction $f : x\mapsto \mathrm{e}^{3x^2+2x-1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Construire le tableau de variations de f.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1.

► Exercice 87

Construire le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+5}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

► Exercice 88

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. On note D le domaine de définition de f et D' son domaine de dérivabilité.

1. Déterminer D et D'.
2. Donner une expression de $f'(x)$ pour tout $x \in D'$.
3. Pour tout réel $x \in D$, on pose $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}$.
   (a) Justifier que g est dérivable sur D' et calculer $g'(x)$ pour tout x dans D'.
   (b) En déduire le sens de variations de g puis tracer l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

► Exercice 89

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2+2x-5}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Construire le tableau de variation de f.
2. Déterminer une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► Exercice 90

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \left(\dfrac{x^2-2x-3}{2}\right)^2$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $f''(x)$ pour tout réel x.

► Exercice 91

Donner une expression de la dérivée seconde de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{1/x}$ sur $]0;+\infty[$.

► Exercice 92

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$, définie sur $]0;+\infty[$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}$.
2. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

On considère désormais la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

On peut remarquer que pour tout réel x, $g(x) = f(x^2+x+1)$.

3. Justifier que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Indication : ne pas utiliser la dérivée d'un quotient vous épargnera de longs et pénibles calculs.

4. Construire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

12. Corrigés

► Correction 69

a. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 3 = 15x^2 + 4x - 3$.

b. Pour tout réel non nul x, $f_2'(x) = 8 \times 7x^6 + 4 \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right) = 56x^6 - \dfrac{8}{x^3}$.

Remarque : en mettant au même dénominateur, on a $f_2'(x) = \dfrac{56x^9 - 8}{x^3}$.

c. Pour tout réel x, $f_3'(x) = 2 \times 4x^3 + 3e^{3x-1} = 8x^3 + 3\mathrm{e}^{3x-1}$.

d. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^2 + 2x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 10x + 2$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Ainsi, puisque $f_4 = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_4'(x) = (10x+2)\mathrm{e}^x + (5x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^x = (5x^2 + 12x + 1)\mathrm{e}^x.$$

e. Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1 - 6x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -12x$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}x$.

Ainsi, puisque $f_5 = uv$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_5'(x) = -12x\mathrm{e}^{3x+2} + (1 - 6x^2) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = [-12x + (1 - 6x^2) \times 3]\mathrm{e}^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

f. Pour tout réel non nul x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$.

- u est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x, $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, et pour tout réel non nul x, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f_6 = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et $f_6' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel non nul x, on a donc

$$f_6'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}.$$

g. Pour tout réel $x \neq 5$, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = x - 5$.

- u est dérivable sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $u'(x) = 2x + 3$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$, et pour tout réel $x \neq 5$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty; 5[$ et $]5; +\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq 5$, on a donc

$$f_7'(x) = \frac{(2x+3)(x-5) - (x^2+3x+1)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x + 3x - 15 - x^2 - 3x - 1}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x - 16}{(x-5)^2}.$$

h. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x + \mathrm{e}^3$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 1$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_8'(x) = \frac{1 \times e^x - (x+e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{(-x+1-e^3)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x+1-e^3}{e^x}.$$

► Correction 70

Pour tout réel x, on a $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$.

Notons Δ le discriminant du polynôme $3x^2 + 6x - 45$. On a $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-45) = 576 > 0$.

Le polynôme $3x^2 + 6x - 45$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{576}}{2 \times 3} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{576}}{2 \times 3} = 3.$$

Par ailleurs, le signe d'un polynôme est celui de son coefficient dominant (ici, 3) à l'extérieur des racines. Il est du signe opposé entre les racines. On peut alors dresser le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	196	$\searrow$	-60	$\nearrow$	

► Correction 71

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 10x + 4$ et $v(x) = 5x^2 + 1$

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $u'(x) = 10$
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $v'(x) = 10x$

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = \frac{10 \times (5x^2+1) - (10x+4) \times 10x}{(5x^2+1)^2} = \frac{-50x^2 - 40x + 10}{(5x^2+1)^2}$$

Pour tout réel x, $(5x^2+1)^2 > 0$. Il ne reste qu'à étudier le signe de $-50x^2 - 40x + 10$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-40)^2 - 4 \times 10 \times (-50) = 3600 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-(-40) + \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-40) - \sqrt{3600}}{2 \times (-50)} = \frac{1}{5} = 0.2$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		0.2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\searrow$	

► Correction 72

Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1 + x$.

- u est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$.
- v est dérivable et ne s'annule pas sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$, et pour tout réel $x \neq -1$, $v'(x) = 1$.

Ainsi, puisque $f = \dfrac{u}{v}$, f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Pour tout réel $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (1+x) - \mathrm{e}^x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel $x \neq -1$, $(1+x)^2 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de x (hormis en -1, valeur interdite).

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

► Correction 73

Pour tout réel x, on pose $u(x) = -x^2 + x + 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = -2x + 1$
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi, puisque $f = uv$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'v + uv'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f'(x) = (-2x+1)\mathrm{e}^x + (-x^2+x+1)\mathrm{e}^x = (-x^2-x+2)\mathrm{e}^x.$$

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$. Il ne reste donc qu'à étudier le signe de $-x^2 - x + 2$. Il s'agit d'un polynôme du second degré. Son discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$. Le polynôme $-x^2 - x + 2$ admet donc deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = -2.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	$3e^{-2}$	$\nearrow$	e	$\searrow$	

► Correction 74
La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $[0;1]$

De plus, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a

$$f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x} + 2x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (2-2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Or, pour tout $x \in [0;1]$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Par ailleurs, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 \geqslant -2x \geqslant -2$ et donc $2 \geqslant 2-2x \geqslant 0$. En particulier, pour tout $x \in [0;1]$, $2-2x \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel positif $x \in [0;1]$, $f'(x) \geqslant 0$. f est donc croissante sur $[0;1]$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a $u_0 = 0{,}1$ et $u_1 = 2 \times 0{,}1 \times \mathrm{e}^{-0{,}1} \simeq 0{,}18$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.La fonction f étant croissante sur $[0;1]$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

  $$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1).$$

  Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = \dfrac{2}{e} \leqslant 1$. Il en vient que

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{2}{e} \leqslant 1.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie. $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 75
Pour tout réel x, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. On sait par ailleurs que $e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On a en effet $f(0) = \mathrm{e}^0 - 0 - 1 = 0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$, soit $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$ ou $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente en 0.

► Correction 76
Pour tout réel x, $f_1'(x) = 12x + 2$ et $f_1''(x) = 12$.

Pour tout réel $x < 0$, $f_2'(x) = 6x + \dfrac{3}{x^2}$ et $f_2''(x) = 6 - \dfrac{6}{x^3}$.

Pour tout réel x, on pose $u_1(x) = x^2$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$. u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u_1'v_1 + u_1v_1'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f_3'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{3x+1} + x^2 \times 3\mathrm{e}^{3x+1} = (3x^2+2x)\mathrm{e}^{3x+1}.$$

Pour tout réel x, on pose $u_2(x) = 3x^2 + 2x$ et $v_2(x) = \mathrm{e}^{3x+1}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f_3' l'est donc également et $f_3'' = u_2'v_2 + u_2v_2'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f_3''(x) = (6x+2)\mathrm{e}^{3x+1} + (3x^2+2x) \times 3\mathrm{e}^{3x+1} = (3x^2+12x+2)\mathrm{e}^{3x+1}.$$

On peut remarquer que pour tout réel $x < 0$, $f_4(x) = \dfrac{3x^2}{x} - \dfrac{1}{x} = 3x - \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, pour tout réel $x < 0$, $f_4'(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2}$ et $f_4''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$.

Pour tout réel x, on pose $u_1(x) = 1 - 6x^2$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = -12x$.
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x+2}x$.

Ainsi, puisque $f_5 = u_1v_1$, f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_5' = u_1'v_1 + u_1v_1'$. Pour tout réel x, on a donc

$$f_5'(x) = -12x\mathrm{e}^{3x+2} + (1-6x^2) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = [-12x + (1-6x^2) \times 3]\mathrm{e}^{3x+2} = (-18x^2 - 12x + 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

Pour tout réel x, on pose alors $u_2(x) = -18x^2 - 12x + 3$ et $v_2(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$. u_2 et v_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$, f_5' l'est donc également. Pour tout réel x,

$$f_5''(x) = (-36x - 12)\mathrm{e}^{3x+2} + (-18x^2 - 12x + 3) \times 3\mathrm{e}^{3x+2} = (-54x^2 - 72x - 3)\mathrm{e}^{3x+2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u_1(x) = \mathrm{e}^x$ et $v_1(x) = x$. u_1 et v_1 sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f_6 est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x,

$$f_6'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

Posons alors, pour tout réel $x > 0$, $u_2(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ et $v_2(x) = x^2$. v_2 est dérivable et ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, u_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$ car c'est un produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$

$$u_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x-1)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$$

Ainsi, pour tout réel $x > 0$

$$f_6''(x) = \frac{x\mathrm{e}^x \times x^2 - (x-1)\mathrm{e}^x \times 2x}{x^4} = \frac{(x^3 - 2x^2 + 2x)\mathrm{e}^x}{x^4} = \frac{(x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x}{x^3}$$

► Correction 77

Pour tout réel x, $f'(x) = 12x^3 + 48x^2 - 132x - 360$ et $f''(x) = 36x^2 + 96x - 132$.

f'' est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant vaut $96^2 - 4 \times 36 \times (-132) = 28224 > 0$. L'équation $f''(x) = 0$ admet donc deux corrs réelles

$$x_1 = \frac{-96 - \sqrt{28224}}{2 \times 36} = -\frac{11}{3} \quad \text{et} x_2 = \frac{-96 + \sqrt{28224}}{2 \times 36} = 1.$$

On peut alors construire le tableau de signes de f''. Par ailleurs, f'' étant la dérivée de f', on en déduit le tableau de variations de f'.

x	$-\infty$		$-11/3$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f'		↗		↘		↗	

Puisque f' est croissante sur $]-\infty; 5]$ et que $f'(5) = 0$, on en déduit que pour tout réel $x \leqslant 5$, $f'(x) \leqslant 0$. En raisonnant de même sur les autres intervalles, on en déduit le tableau de signes de f' et donc le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-5		$-11/3$		-2		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$			
f'		↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f		↘		↗		↗		↘		↘		↗	

► Correction 78

f'' est la dérivée de f'. Les variations de f' nous donnent donc le signe de f''.

x	-6		-4		2		4		7
f'	1	↘	-2	↗	3	↘	1	↗	3
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par ailleurs, à l'aide du signe de f', on peut construire le tableau de variations de f. Les informations sur les valeurs extrêmes de f nous permettent de construire son tableau de signes.

x	-6		-5.5		-5		-1		7
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+-$	0
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\geqslant 0$	$\searrow$	2	$\nearrow$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$ $+$	

► Correction 79

Si f et g sont dérivables, alors fg l'est également et $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus f' et g' sont dérivables, alors $f'g$ et fg' le sont également et

- $(f'g)' = f''g + f'g'$;
- $(fg')' = f'g' + fg''$.

Ainsi, $(fg)'$ est dérivable et $(fg)'' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

► Correction 80

Les fonctions $x \mapsto ax + b$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Leur produit est donc deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f'(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x = (ax+a+b)e^x$ et $f''(x) = a\mathrm{e}^x + (ax+a+b)\mathrm{e}^x = (ax+2a+b)\mathrm{e}^x$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax+2a+b)\mathrm{e}^x - 2(ax+a+b)\mathrm{e}^x + (ax+b)\mathrm{e}^x$$

et donc

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (ax+2a+b-2ax-2a-2b+ax+b)\mathrm{e}^x = 0$$

► Correction 81

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$ ».

- **Initialisation** : f est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x, $f^{(0)}(x) = f(x) = (x+0)\mathrm{e}^x$.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = (x+n)\mathrm{e}^x$. $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

  $$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = \mathrm{e}^x + (x+n)\mathrm{e}^x = (x+n+1)\mathrm{e}^x.$$

  $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$ ».

- **Initialisation** : g est bien dérivable 0 fois et pour tout réel x, $g^{(0)}(x) = g(x) = (-1)^0(x-0)\mathrm{e}^{-x}$. $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ est vraie. Alors g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)\mathrm{e}^{-x}$. $g^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. g est donc $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,
$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)})'(x) &= (-1)^n \times (\mathrm{e}^{-x} + (x-n) \times (-\mathrm{e}^{-x})) \\ &= (-1)^n(1-x+n)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1)^n \times (-(x-n-1))\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-1)^{n+1}(x-(n+1))\mathrm{e}^{-x.} \end{aligned}$$
$P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 82

Pour tout réel x,

- $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = g(x)^2+1 = (3x+2)^2+1 = 9x^2+12x+5$.
- $(g\circ f)(x) = 3f(x)+2 = 3(x^2+1)+2 = 3x^2+5$.
- $(h\circ g)(x) = 2-g(x) = 2-(3x+2) = -3x$.
- $(f\circ g\circ h)(x) = (f\circ g)(h(x)) = (3h(x)+2)^2+1 = (8-3x)^2+1 = 9x^2-48x+65$.

► Correction 83

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1+x^2$. On a alors $f_1 = u\circ v$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^7$ et $v(x) = 3x+8$. On a alors $f_2 = u\circ v$.

Pour tout réel positif x positif, on pose $u(x) = \sqrt{(}x)$. Pour tout réel x, on pose $v(x) = 1+\mathrm{e}^x$. On a alors $f_3 = u\circ v$.

► Correction 84

Pour tout réel $x\neq 0$, $f(f(x)) = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x$. f est bien une involution de $\mathbb{R}^*$.

Pour tout réel x, $f(f(x)) = a-(a-x) = x$. f est une involution de $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $x\neq a$,

$$f(f(x)) = \frac{b}{\left(\frac{b}{x-a}+a\right)-a}+a = \frac{b}{\dfrac{b}{x-a}}+a = x-a+a = x.$$

f est une involution de $\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

► Correction 85

a. Pour tout réel x, $f_1'(x) = 3\times 2(3x+2) = 18x+12$.

b. Pour tout réel x, $f_2'(x) = (12x+3)\times 3(6x^2+3x+4)^2 = (36x+9)(6x^2+3x+4)^2$.

c. Pour tout réel $x>0$, $f_3'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

d. Pour tout réel x, $f_4'(x) = \dfrac{4x-5}{2\sqrt{2x^2-5x+7}}$.

e. Pour tout réel $x>2$, $f_5'(x) = 3\times\left(-\dfrac{2}{(3x+6)^3}\right) = -\dfrac{6}{(3x+6)^3}$.

f. Pour tout réel $x \neq 0$, $f_6'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$.

► Correction 86

Pour tout réel x, $f(x) = e^{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 2x - 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, f l'est donc aussi et $f' = u'e^u$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) = (6x+2)e^{3x^2+2x-1}.$$

Pour tout réel x, $e^{3x^2+2x-1} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $6x+2$.

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

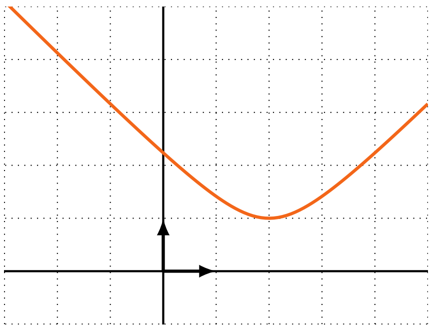
La tangente à la courbe de f à l'abscisse -1 a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ soit $y = -4(x+1) + 1$ ou encore $y = -4x - 3$.

► Correction 87

Pour tout réel x, $x^2 - 4x + 5 > 0$. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif. De plus, $f(x) = \sqrt{u(x)}$. Ainsi, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}}$. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2-4x+5} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x - 4$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	



► **Correction 88** 1. $\sqrt{1-x^2}$ existe si et seulement si $1-x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 \leqslant 1$ et donc $x \in [-1;1]$. Par ailleurs, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro. Ainsi, f n'est pas dérivable en -1 et 1, qui sont les corrs de l'équation $1-x^2=0$. On a donc $D' =]-1;1[$.

2. Pour tout $x \in D'$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

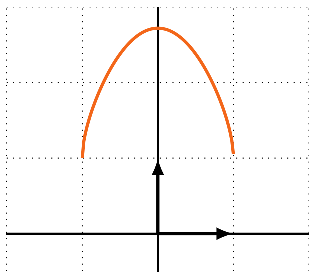
3. (a) On a $g = \mathrm{e}^f$. Or, f est dérivable sur D', g l'est donc également et pour tout réel x de D',

$$g'(x) = f'(x) \times \mathrm{e}^{f(x)} = -\frac{x\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) Puisque pour tout réel $x \in D$, $\sqrt{1-x^2} > 0$ et $e^{-\sqrt{1-x^2}} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-x$.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	e	$\searrow$	1

(c) On trace l'allure de la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.



► **Correction 89**

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-5}$ qui est du signe de $2x+2$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	e^{-6}	$\nearrow$	

En utilisant la dérivée d'un produit, pour tout réel x, on a

$$f''(x) = 2 \times \mathrm{e}^{x^2+2x-5} + (2x+2) \times (2x+2)\mathrm{e}^{x^2+2x-5} = (4x^2+8x+6)\mathrm{e}^{x^2+2x-5}.$$

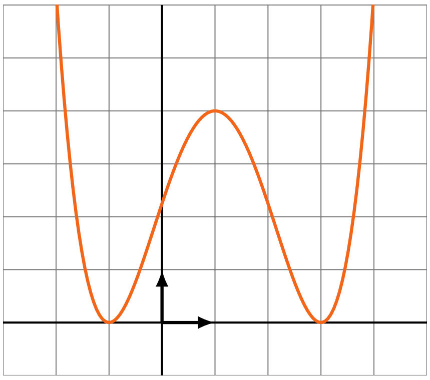
► **Correction 90**

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{2}$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f = u^2$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 2u'u$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = 2 \times (x-1) \times \frac{x^2-2x-3}{2} = (x-1)(x^2-2x-3).$$

Le polynôme x^2-2x-3 s'annule en -1 et en 3. Ainsi, pour tout réel x, $f'(x)=(x-1)(x+1)(x-3)$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	



f' est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f''(x)=1\times(x^2-2x-3)+(x-1)\times(2x-2)=3x^2-6x-1.$$

► Correction 91

Pour tout réel $x>0$, on pose $u(x)=\dfrac{1}{x}$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f=\mathrm{e}^u$. f est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'=u'\mathrm{e}^u$. Ainsi, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$.

f' est également dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$. Par ailleurs, pour tout réel $x>0$,

$$f''(x)=-\left(\frac{-\frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\times x^2-\mathrm{e}^{1/x}\times 2x}{(x^2)^2}\right)=\frac{(2x+1)\mathrm{e}^{1/x}}{x^4}.$$

► Correction 92

1. Les fonctions $x\mapsto \mathrm{e}^x$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$. De plus, la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, on a

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x\times\sqrt{x}-\mathrm{e}^x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=\frac{1}{x}\times\frac{\mathrm{e}^x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}-\mathrm{e}^x}{2\sqrt{x}}=\frac{(2x-1)\mathrm{e}^x}{2x\sqrt{x}}.$$

2. Pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $(2x-1)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\sqrt{2e}$	$\nearrow$	

3. La fonction $u : x \mapsto x^2+x+1$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x, $x^2+x+1>0$ (on calcule le discriminant du polynôme x^2+x+1, celui-ci est strictement négatif). Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = (2x+1) \times \frac{(2(x^2+x+1)-1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

et donc

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)e^{x^2+x+1}}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

4. $g'(x)$ est du signe de $(2x+1)$ (on vérifie que pour tout réel x, $2x^2+2x+1>0$ à l'aide du discriminant par exemple).

x	0		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$g\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

V

Limites de fonctions

13. Cours : Limites de fonction

Dans tout ce chapitre, D désigne une partie de $\mathbb{R}$ et f est une fonction définie sur D.

1 Limite en l'infini

1.1 Limite infinie en l'infini

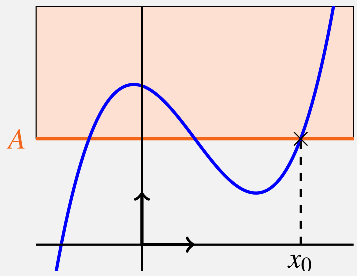
Définition 12 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a;+\infty[\subset D$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \leqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Cette définition est très similaire à celle rencontrée pour les limites de suites : pour n'importe quel réel A, aussi grand soit-il, à partir d'une certaine valeur du réel x, $f(x)$ est plus grand que ce réel A.

■ **Exemple 41 :** On représente ici la courbe d'une fonction f dans un repère.

Pour n'importe quel réel A, aussi grand que l'on veut, on peut trouver un x_0 à partir duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = A$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



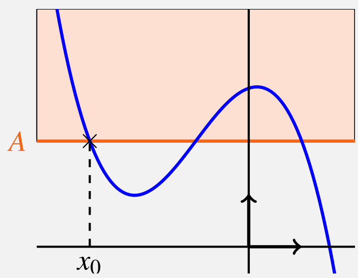
■

Définition 13 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $]-\infty;a] \subset D$.

- On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \geqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si, pour tout réel A, il existe un réel $x_0 \in D$ tel que, pour tout $x \in D$, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \leqslant A$. On notera $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

■ **Exemple 42 :** On représente ici une fonction f dans un repère.

Pour n'importe quel A, aussi grand que l'on veut, on peut trouver un x_0 en-dessous duquel la courbe est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = A$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.



■

Il s'agit de la principale différence avec les suites : pour les suites, l'indice n ne pouvait que tendre vers $+\infty$.

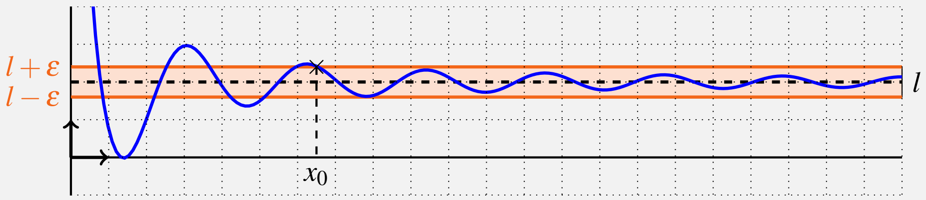
Dans le cas des fonctions, le réel x peut aller vers $+\infty$ mais aussi $-\infty$ et d'autres valeurs réelles entre les deux, comme nous le verrons plus tard dans ce chapitre...

1.2 Limite finie en l'infini

Définition 14 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a;+\infty[\subset D$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

- On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$.
Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \leqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon;\ell+\varepsilon[$.
Si une telle limite existe, elle est unique. On note alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

■ **Exemple 43 :** Une fonction f est représentée ci-dessous. Pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un réel x_0 à partir duquel on a toujours $f(x) \in]2-\varepsilon;2+\varepsilon[$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.



■

Définition 15 : On se place dans un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$ orthonormé.

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$
- Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$

■ **Exemple 44 :** Dans le cas précédent, la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. ■

Comme dans le cas des suites, il est parfois utile de préciser le comportement d'une fonction qui admet une limite finie en $+\infty$.

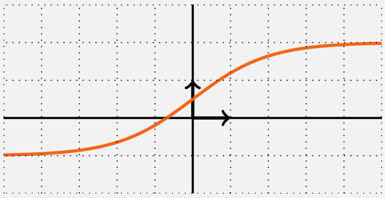
Définition 16 : On suppose qu'il existe un réel a tel que $[a;+\infty[\subset D$. Soit $l \in \mathbb{R}$.

- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs supérieures lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell;\ell+\varepsilon[$. Autrement dit, la limite de f en $+\infty$ vaut ℓ et $f(x)$ reste supérieur à ℓ à partir d'un certain réel. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$.
- On dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs inférieures lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel x_0 tel que, si $x \geqslant x_0$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon;\ell[$. Autrement dit, la limite de f en $+\infty$ vaut ℓ et $f(x)$ reste inférieur à ℓ à partir d'un certain réel. On note alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^-$.

Attention, ce n'est pas parce que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ qu'on a forcément $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^-$. Les valeurs de $f(x)$ peuvent osciller autour de ℓ, lui étant parfois supérieures, parfois inférieures.

Les mêmes définitions s'étendent naturellement pour les limites en $-\infty$.

■ **Exemple 45 :** On a représenté la courbe d'une fonction f dans un repère.



Il semblerait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2^-$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = (-1)^+$
La droite d'équation $y = 2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$. ■

1.3 Limites usuelles

Propriété 16 : Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si n est pair,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^+$$

Si n est impair,

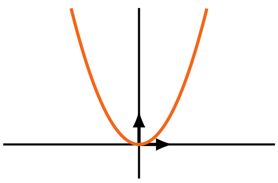
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0^-$$

Enfin,

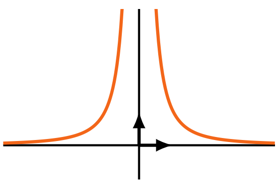
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Il est important de visualiser les courbes représentatives de ces fonctions. Celles-ci vous permettront de bien garder ces limites usuelles en tête.

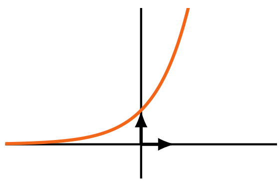
$x \mapsto x^n$, **n pair**



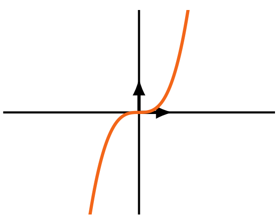
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, **n pair**



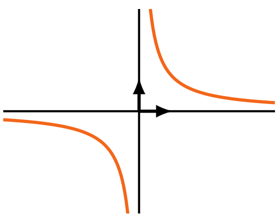
$x \mapsto e^x$



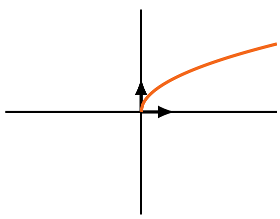
$x \mapsto x^n$, **n impair**



$x \mapsto \frac{1}{x^n}$, **n impair**



$x \mapsto \sqrt{x}$



2 Limite en un point

2.1 Limite finie en un point

Définition 17 : Soit $a \in D$ et l un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a+\delta[$, alors $f(x) \in]\ell-\varepsilon : \ell+\varepsilon[$.

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en ℓ contient toutes les valeurs de x lorsque x est suffisamment proche de a.

Si elle existe, une telle limite est unique. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

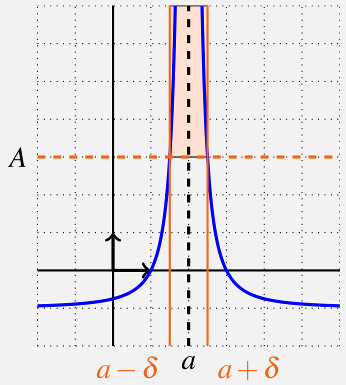
Certaines fonctions admettent une limite finie différente si l'on se rapproche de a par valeurs supérieurs ou par valeurs inférieures. Nous aurons l'occasion d'en discuter plus amplement dans le chapitre suivant.

2.2 Limite infinie en un point

Définition 18 : Soit $a \in D$ ou sur un bord de D.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a+\delta[\cap D$, alors $f(x) > A$. Autrement dit, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a+\delta[\cap D$, alors $f(x) < A$. On note alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

■ **Exemple 46 :** On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f.



Pour n'importe quelle valeur du réel A, on peut trouver un intervalle centré sur a tel que toute valeur de $f(x)$ est supérieur à A pour n'importe quel x pris dans cet intervalle. Ce raisonnement vaut peu importe la valeur du réel A : on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$. ■

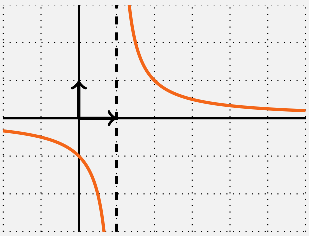
Tout comme précédemment, le comportement de la fonction f peut varier selon si l'on approche du réel a par valeurs inférieures ou supérieures. Il nous faut donc distinguer ces deux cas.

Définition 19 : Soit $a \in D$ ou sur un bord de D.

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs inférieures si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta; a[\cap D$, alors $f(x) > A$. Autrement dit, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a tout en lui étant inférieur. On note alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a par valeurs supérieures si, pour tout réel A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a; a+\delta[\cap D$, alors $f(x) > A$. Autrement dit, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a tout en lui étant supérieur. On note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Là encore, ces définitions peuvent s'étendre pour une limite valant $-\infty$.

■ **Exemple 47 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, dont on a tracé ci-dessous la courbe dans un repère.



Il semblerait que, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs supérieures, la limite soit $+\infty$, ce que l'on notera $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

En revanche, lorsque l'on s'approche de 1 par valeurs inférieures, la limite semble être $-\infty$, ce que l'on note $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. ■

Définition 20 : Lorsque la limite d'une fonction f est infinie en un point a, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

■ **Exemple 48 :** Dans l'exemple précédent, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe de f. ■

3 Opérations sur les limites

Les opérations sur les limites sont similaires à celles connues sur les suites. Dans cette partie, f et g sont deux fonctions définies au voisinages de a, a pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$. l_1 et l_2 sont deux réels.

3.1 Limite de la somme

Propriété 17 — Limite de la somme : On a :

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} (f(x)+g(x))$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

3.2 Limite du produit

Propriété 18 — Limite du produit : .

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\,g(x))$	$l_1\,l_2$	∞ (r.s.)	∞ (r.s)	**FI**

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 49 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x non nul par $f(x) = x^2 - x + \dfrac{1}{x}$.

D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Toutefois, si l'on étudie la limite en $+\infty$, nous aboutissons à une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Il est alors possible d'utiliser les techniques de calcul déjà employées lors du chapitre sur l'étude des limites de suite, en particulier la factorisation par le terme de plus haut degré.

Ainsi, pour tout réel non nul x, $f(x) = x^2 \times \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right) = 1$. Ainsi, par produits, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

3.3 Limite du quotient

Propriété 19 — Limite du quotient : Dans cette partie, on suppose $l_2 \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l_1	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l_2	∞	0^+ ou 0^-	l_2, 0^+ ou 0^-	0	∞
$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l_1}{l_2}$	0	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	**FI**	**FI**

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 50 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1-2x^4}{1+x^2}$. L'étude des limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f aboutit à une forme indéterminée. Or, pour tout réel non nul x,

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2} \times \frac{\frac{1}{x^4} - 2}{\frac{1}{x^2} + 1} = x^2 \times \frac{\frac{1}{x^4} - 2}{\frac{1}{x^2} + 1}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^4} - 2\right) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} + 1\right) = 1$. Ainsi, en appliquant les règles de calcul sur les produits et quotients de limite, on aboutit à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. ■

■ **Exemple 51 :** On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x-4}$.

Pour tout réel $x \neq 2$ et $x \neq 0$, on a alors $f(x) = \dfrac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{1}{x}}{2-\dfrac{4}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4}{x}\right) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$. De la même manière, on montre que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$ ■

■ **Exemple 52 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{1-x}$, définie sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$.

Pour calculer la limite en 1^+ :

- $\lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to1} (1-x) = 1-1 = 0$. Par ailleurs, si $x \geqslant 1$, alors $1-x \leqslant 0$ et donc $\lim\limits_{x\to1^+} (1-x) = 0^-$.

  Ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$.
- Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$.

Pour calculer la limite en 1^- :

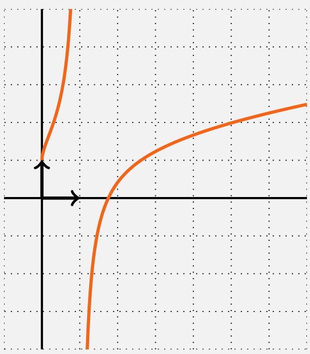
- $\lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$.
- $\lim\limits_{x\to1} (x-1) = 1-1 = 0$. Par ailleurs, si $x \leqslant 1$, alors $1-x \geqslant 0$ et donc $\lim\limits_{x\to1^-} (1-x) = 0^+$.

  Ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$.
- Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$.

Pour calculer la limite en $+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$, ainsi, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0$.
- Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Représenter la courbe de la fonction f dans un graphique (par exemple, dans un logiciel de géométrie ou sur une calculatrice) permet de confirmer ou d'infirmer les calculs.



■

3.4 Composition de limites

Propriété 20 : Soit a, b et c des réels ou $\pm\infty$. Soit f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X) = c$. Alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

■ **Exemple 53 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x^2-3x-5}$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2-3x-5) = -\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$.

Ainsi, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-2x^2-3x-5} = 0$. ■

4 Comparaison de limites

Théorème 15 — Théorème de comparaison : Soit a un réel ou $\pm\infty$. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I dont a est un élément ou un bord.

- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
- Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

■ **Exemple 54 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2+\cos(x))\mathrm{e}^x$.

Pour tout réel x, $\cos(x) \geqslant -1$, ce qui implique que $2+\cos(x) \geqslant 1$ d'où $f(x) \geqslant \mathrm{e}^x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

■ **Exemple 55 :** On souhaite montrer que, justement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Ainsi, $f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$. On construit alors le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

On s'aperçoit alors que, pour tout réel x, $f(x) \geqslant 1$, et donc que $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. ■

Théorème 16 — Théorème d'encadrement : Soit a un réel. Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I dont a est un élément ou un bord.

Si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant$ et si f et h admettent une même limite **finie** l en a, alors g admet également une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = l$.

■ **Exemple 56 :** Pour tout réel non nul x, on pose $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$. On a alors, pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ■

■ **Exemple 57 :** Pour tout réel non nul x, on pose $g(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$ et donc $-x \leqslant f(x) \leqslant x$. Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. ■

5 Croissances comparées

Propriété 21 — Croissances comparées – fonction exponentielle : Soit n un entier naturel.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$$

■ **Exemple 58 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - x}{\mathrm{e}^x}$. On a alors $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

Or, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. ■

Cette proposition peut être vue comme la limite de nouvelles fonctions, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$ et $x \mapsto x^n \mathrm{e}^x$. Il est alors possible d'utiliser tous les résultats précédents, en particuliers ceux sur la composition. Par exemple, si l'on considère une fonction u telle que $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$, alors on aura $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\mathrm{e}^{u(x)}}{u(x)} = +\infty$.

Il est important de bien avoir la même expression dans l'exponentielle et au dénominateur !

■ **Exemple 59 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2x+4}}{3x^3}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Pour cela, il semble naturel de faire intervenir une croissance comparée. Seulement, les expressions dans l'exponentielle et au dénominateur sont différentes, il faut donc transformer légèrement cette écriture pour se ramener aux fonctions mentionnées dans la propriété.

Pour tout réel non nul x,

$$\frac{e^{-2x+4}}{3x^3} = \frac{e^{-2x} \times e^4}{3 \times x^3} = \frac{e^4}{3} \times \frac{e^{-2x}}{x^3} = \frac{e^4}{3} \times \frac{(-2)^3 \times e^{-2x}}{(-2)^3 \times x^3} = \frac{-8e^4}{3} \times \frac{e^{-2x}}{(-2x)^3}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x) = +\infty$, et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$.

Ainsi, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-2x}}{(-2x)^3} = +\infty$. Enfin, par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$. ■

6 Approfondissement : Asymptotes obliques

Définition 21 : Soit a un réel et f une fonction définie sur $]a;+\infty[$. Soit m et p des réels.

On dit que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + p)) = 0.$$

■ **Exemple 60 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+3x-3}{2x-2}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pour tout $x \neq 1$,

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x+2\right) = \frac{x^2+3x-3}{2x-2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x+2\right)(2x-2)}{2x-2} = \frac{x^2+3x-3-x^2-4x+x+4}{2x-2} = \frac{1}{2x-2}.$$

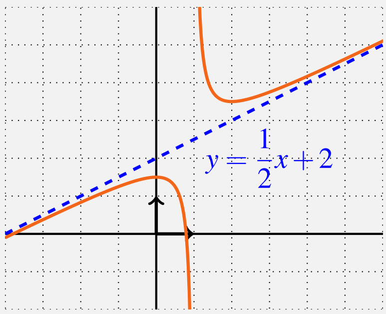
Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x+2\right)\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x+2\right)\right) = 0$.

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Il est également possible, en étudiant le signe de $f(x) - \left(\frac{1}{2}x+2\right)$, de déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote. Ainsi,

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x+2\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2x-2} \leqslant 0 \Leftrightarrow 2x-2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 1.$$

La courbe de f est en-dessous de son asymptote en $-\infty$ et est au-dessus en $+\infty$.



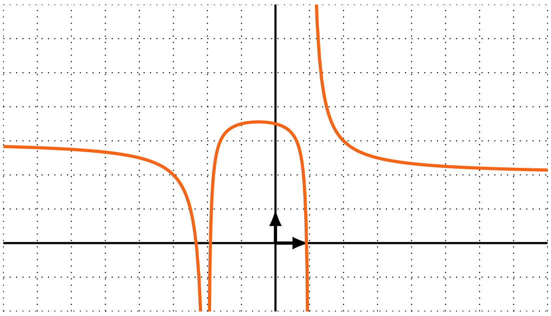
■

14. Exercices

Notion de limite

► Exercice 93

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.

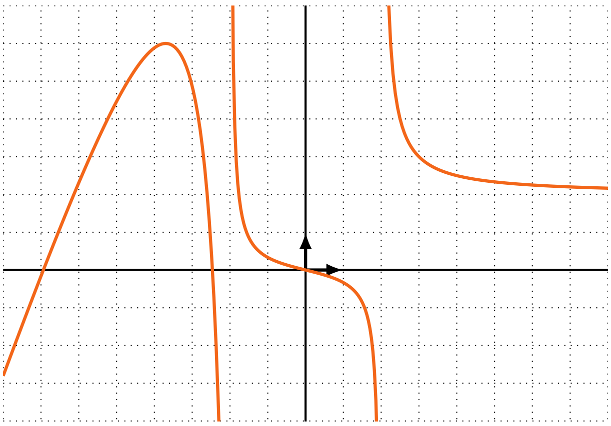


A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

► Exercice 94

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$?

► Exercice 95

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donnée ci-dessous. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		-4		2		5		7		$+\infty$
f	2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	-3	↗	1

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à $\mathscr{C}_f$?
3. Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

Opérations sur les limites

▶ Exercice 96
Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x-3)$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x-3)$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x^2-3)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$ **e.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$ **h.** $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$ **i.** $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$ **k.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$ **l.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty} ((1-2x)\mathrm{e}^x)$ **n.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-3x+1\right)$ **o.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-3x+1\right)$

p. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2+7x-3}\right)$ **q.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$ **r.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

▶ Exercice 97
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-12}{2x^2+x-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $-\dfrac{3}{2}^+$, $-\dfrac{3}{2}^-$, 1^-, 1^+ et $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur D et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x de D.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur D.
5. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

▶ Exercice 98
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$, $+\infty$, -1^+ et -1^-.

▶ Exercice 99
Une autre forme indéterminée...

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $2x^3+6x^2-9x+1 = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}$.

▶ Exercice 100
On rappelle qu'une fonction f est dérivable en x si le taux de variation $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

1. Écrire le taux de variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et h.
2. Que vaut $f'(0)$? En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

Comparaison de limites

► Exercice 101

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x+\sin(x))$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\dfrac{3}{x}\right)$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((\cos(4x)-3)x^3\right)$ **e.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((\cos(4x)-3)x^3\right)$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right)$ **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}$ **k.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sin(x)+3}$ **l.** $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2-3x+\sin(4x)$

► Exercice 102

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$ **e.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$ **i.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^x-3x^2+5x-1)$ **k.** $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-3x^2+5x-1)$ **l.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

m. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$ **n.** $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$ **o.** $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

p. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2+\cos(x))\mathrm{e}^x}{x}$ **q.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2+\cos(x))\mathrm{e}^x}{x}$ **r.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\mathrm{e}^{-x}-x)$

► Exercice 103

La fonction tangente hyperbolique est la fonction notée th et définie pour tout réel x par

$$th(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}th(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}th(x)$.
2. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
$$th'(x)=\frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$
3. En déduire le tableau de variations de th.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th à l'abscisse 0.
5. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe th ainsi que sa tangente à l'abscisse . 0.

► Exercice 104

On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$. Étudier la fonction f (domaine de définition, variation, signe et limites). Esquisser sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Approfondissement et synthèse

► Exercice 105
On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3x-4}{2x+2}.$$

1. Étudier la fonction f : variations, signe, limites.
2. Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout réel $x \neq 2$, $g(x) = -\frac{6}{2x+2}$.
   (b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$. On dit que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f.
3. Dans un même repère orthonormé, tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+1$ et la courbe représentative de la fonction f.

► Exercice 106
On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$,
$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}.$$
2. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on déterminera l'équation.

► Exercice 107
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$.

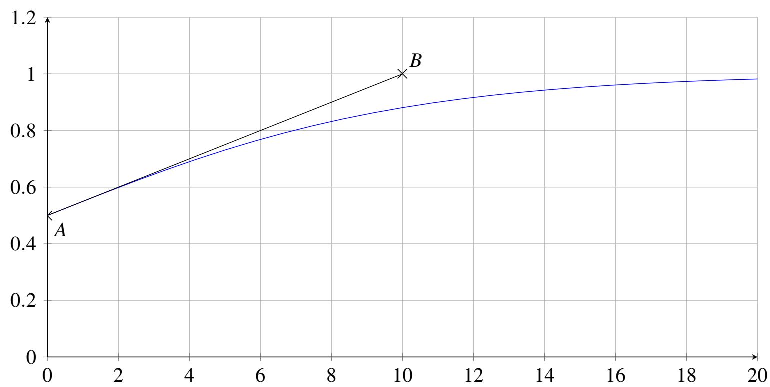
1. Donner le domaine de définition D de f.
2. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
3. Étudier les variations de f sur D.
4. Écrire le polynôme x^2-3x+2 sous forme canonique.
5. En déduire que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et que la droite d'équation $y = \frac{3}{2} - x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
6. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

▶ Exercice 108 — Antilles - Guyane 2019

Soit a et b deux réels. On considère une fonction f définie pour tout réel x sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe passe par le point $A(0;0{,}5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10;1)$.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Justifier que $a = 1$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}.$$

4. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1er janvier 2020.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2020, $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2023.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier. 2030 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. (a) Déterminer le sens de variations de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $p(x) < 1$. En revenant au contexte étudié, ce résultat vous semble-t-il cohérent ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$ Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

▸ Exercice 109 — Amérique du Sud 2018

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours. Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

On admet que les fonctions u et f sont dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et on note u' et f' leurs fonctions dérivées respectives.

1. (a) Vérifier que pour tout réel x positif, on a
$$u'(x) = -\frac{1}{10}u(x).$$
   (b) En déduire que pour tout réel positif x, on a
$$f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$
   (c) Quel est le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$?

2. (a) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que, pour tout réel x positif :
$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}(1+u(x)).$$
   (a) Déterminer les variations de f' sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

15. Corrigés

► **Correction 93**

D'après cette représentation graphique, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

De plus,

- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

► **Correction 94**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

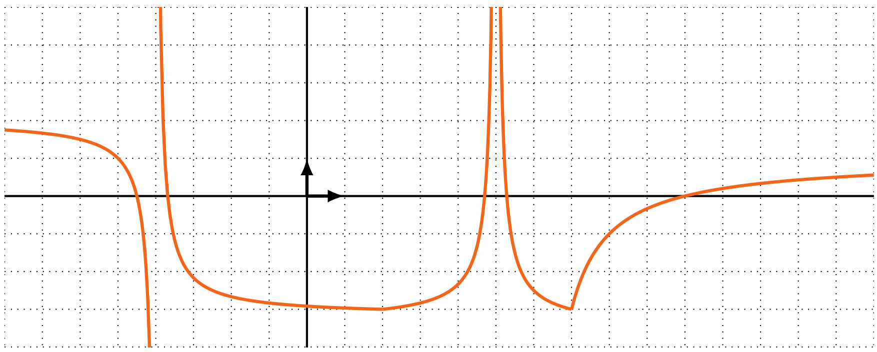
Par ailleurs,

- La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

► **Correction 95**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Les droites d'équation $x = -4$ et $x = 5$ sont asymptotes verticales à la courbe de f. La droite d'équation $y = 2$ en est une asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ l'est en $+\infty$.



► **Correction 96**

a. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x-3) = +\infty$.

b. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x-3) = -\infty$.

c. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3+x^2-3) = +\infty$.

d. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 1$.

e. On a que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$.

f. On a que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$.

g. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0+} \sqrt{x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to0+} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right) = +\infty$.

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right) = +\infty$.

i. $\lim\limits_{x\to1^+} (1-x) = 0^-$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -\infty$.

j. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to1^-} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = +\infty$.

k. Pour tout réel $x \neq 1$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2}{\frac{1}{x}-1}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$.

l. Le même raisonnement permet d'établir que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$.

m. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-2x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

n. Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-3x+1\right) = +\infty$.

o. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-3x+1\right) = +\infty$.

p. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2+7x-3) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2+7x-3}\right) = 0$.

q. Pour tout réel non nul x,

$$\frac{1-x^4}{2+x+x^3} = \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}-1\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+1\right)} = x \times \frac{\frac{1}{x^4}-1}{\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+1}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} = +\infty$.
Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$. Finalement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right) = +\infty$.

r. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} - +\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right) = 0$.

▶ Correction 97

1. Les racines du polynôme $2x^2+x-3$ sont 1 et $-\dfrac{3}{2}$; Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2};1\right\}$.

2. Pour tout réel x différent de 0, 1 ou $-\dfrac{3}{2}$, on a $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2}\times\dfrac{1-\dfrac{4}{x}-\dfrac{12}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{1-\dfrac{4}{x}-\dfrac{12}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$.

   On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{1}{2}$. Par ailleurs, le tableau de signes de $2x^2+x-3$ est le suivant .

x	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

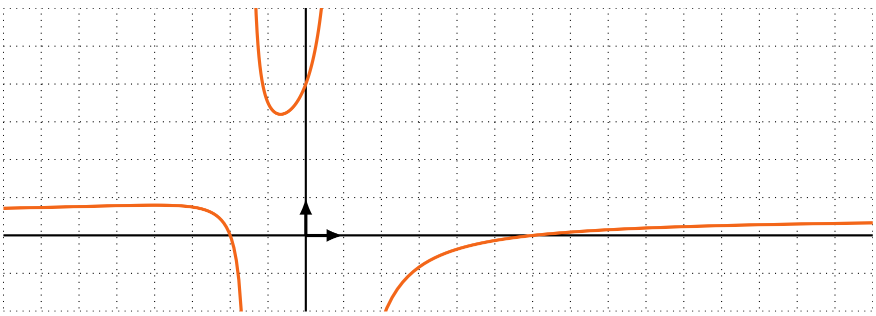
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}(2x^2+x-3)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}(x^2-4x-12)=-\dfrac{15}{4}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}f(x)=-\infty$.
   Puis $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(2x^2+x-3)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(x^2-4x-12)=-\dfrac{15}{4}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}f(x)=+\infty$.
   Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to(1)^-}(2x^2+x-3)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to(1)^-}(x^2-4x-12)=-15$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(1)^-}f(x)=+\infty$.
   Enfin, $\lim\limits_{x\to(1)^+}(2x^2+x-3)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to(1)^+}(x^2-4x-12)=-15$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(1)^+}f(x)=-\infty$.

3. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur chaque intervalle de D, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. f est donc dérivable sur chaque intervalle de D. Pour tout réel $x\in D$, on a alors

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(2x^2+x-3)-(x^2-4x-12)(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2}=\frac{9x^2+42x+24}{(2x^2+x-3)^2}.$$

4. Pour tout $x\in D$, $(2x^2+x-3)^2>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $9x^2+42x+24$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -4 et $-\dfrac{2}{3}$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		-4		$-3/2$		$-2/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{4}{5}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{16}{5}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$



► Correction 98
$\sqrt{x^2-3x+2}$ existe si et seulement si $x^2-3x+2 \geqslant 0$. Or, x^2-3x+2 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\sqrt{x^2-3x+2}$ existe pour $x \in]-\infty;1] \cup [2;+\infty[$. Par ailleurs, -1 est une valeur interdite puisqu'elle annule le dénominateur de f. Ainsi, le domaine de définition de f est $(]-\infty;1] \cup [2;+\infty[) \setminus \{-1\}$.

Pour tout réel $x>2$, $\sqrt{x^2}=x$ et donc $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$.

Ainsi, pour tout $x>2$, $f(x)=\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Il en vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Par ailleurs, pour tout réel $x<-1$, $\sqrt{x^2}=-x$! Il faut bien faire attention au signe ici.

Ainsi, pour tout réel $x<-1$, $f(x)=\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Il en vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

Puis, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2-3x+2)=\sqrt{6}>0$. De plus, si $x<-1$, alors $1+x<0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(1+x)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-3x+2)=\sqrt{6}>0$. De plus, si $x>-1$, alors $1+x>0$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(1+x)=0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$.

► Correction 99
On développe l'expression de droite. Pour tout réel x,

$$(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$

On identifie alors les coefficients de $2x^3+6x^2-9x+1$ et $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Il suffit de trouver a, b et c tel que $a=2$, $b-a=6$, $c-b=-9$ et $-c=1$. On a donc $a=2$, $c=-1$ puis $b-a=6$ et $c-b=-9$.

En prenant $a=2$, $b=8$ et $c=-1$, on a alors $(x-1)(2x^2+8x-1)(x-1)=2x^3+6x^2-9x+1$.

Les racines du polynôme $3x^2-x-2$ sont 1 et $-\dfrac{2}{3}$. Ainsi, pour tout réel x, $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$.

Alors, pour tout réel x différent de 1 et $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}=\dfrac{(x-1)(2x^2+8x-1)}{3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{2x^2+8x-1}{3x+2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}=\dfrac{2\times1^2+8\times1-1}{3\times1+2}=\dfrac{9}{5}$.

► Correction 100

Ce taux vaut $\dfrac{e^h - e^0}{h-0}$ soit $\dfrac{e^h-1}{h}$.

$f'(0) = e^0 = 1$. Ainsi, par définition de la dérivée, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

► Correction 101

a. Pour tout réel x, $e^x + \sin(x) \geqslant e^x - 1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-1) = +\infty$.
Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + \sin(x)) = +\infty$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $x^2 + \dfrac{3}{x} \geqslant x^2$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$. Il est évidemment possible de faire une simple somme de limites.

c. Pour tout réel $x > 0$, $x^2+1 \geqslant x^2$, d'où $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant x$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.

d. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(4x) \leqslant 1$. Ainsi, $-4 \leqslant \cos(4x) - 3 \leqslant -2$. En particulier, pour $x > 0$, $f(x) \leqslant -2x^3$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right) = -\infty$.

e. Par ailleurs, pour $x < 0$, on a $\left((\cos(4x)-3)x^3\right) \geqslant -4x^3$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3) = +\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right) = +\infty$.

f. Pour tout réel $x > 0$, $-3 \leqslant 3\sin(x) \leqslant 3$ et $-2 \leqslant 2\cos(x) \leqslant 2$.
Ainsi, pour tout réel x, $-5 \leqslant 3\sin(x) + 2\cos(x) \leqslant 5$ et donc $-\dfrac{5}{x^3} \leqslant \dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3} \leqslant \dfrac{5}{x^3}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{5}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{x^3}\right) = 0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}\right) = 0$.

g. Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = 1$.

h. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + 2\dfrac{\sin(x)}{x}$. Or, pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et donc
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right) = 1$.

i. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + 2\dfrac{\sin(x)}{x}$.
Or, pour tout $x < 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ (x est négatif, attention à bien changer le sens de l'inégalité !). Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right) = 1$.

j. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}=\dfrac{x}{x}\times\dfrac{1+\dfrac{\cos(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}=\dfrac{1+\dfrac{\cos(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}$.

Or, pour tout réel $x>0$, $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\cos(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$ et $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\sin(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}\right)=1$.

k.Pour tout réel $x>0$, $x+\sin(x)+3\geqslant x+2$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, il en vient que $\sqrt{x+\sin(x)+3}\geqslant\sqrt{x+2}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$.

Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sin(x)+3}=+\infty$.

l. Pour tout réel $x>0$, $2x^2-3x+\sin(4x)\geqslant 2x^2-3x-1$.

Or, pour tout réel $x>0$, $2x^2-3x-1=x^2\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x-1)=+\infty$.

Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x+\sin(4x))=+\infty$.

► Correction 102

a. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}=0$.

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}=-\infty$.

c. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}=16\times\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{(4x)^2}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}4x=+\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X^2}=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}=+\infty$.

d. Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=\dfrac{\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=1$.

e. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+x)=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=0$.

f. Pour tout réel non nul x,

$$\frac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=\frac{x\mathrm{e}^x\left(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^2x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}=3$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=0$.

g. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x)=-\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=-\infty$.

h. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{e^{3x}}{28x}=\dfrac{3}{28}\times\dfrac{e^{3x}}{3x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{3x}=+\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{28x}=+\infty$.

i. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}28x=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{3x}}{28x}=0$.

j. Pour tout réel x, $e^x-3x^2+5x-1=e^x\left(1-3\dfrac{x^2}{e^x}+5\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3x^2}{e^x}+5\dfrac{x}{e^x}-\dfrac{1}{e^x}\right)=1$ par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-3x^2+5x-1)=+\infty$.

k. Par ailleurs, en faisant simplement la règle de somme de limites, on obtient, $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-3x^2+5x-1)=-\infty$.

l. Pour tout réel $x>0$, $e^{-x}>0$. Ainsi, $e^x+e^{-x}>e^x$ et $\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}>\dfrac{e^x}{x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}=+\infty$.

m. Pour tout réel $x<0$, $e^x>0$. Ainsi, $e^x+e^{-x}>e^{-x}$. En divisant par $-x$ qui est positif, on a alors $-\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}>\dfrac{e^{-x}}{-x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{-x}=+\infty$.
Par comparaison, on a donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}\right)=-\infty$.

n. Puisque $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x})=e^0+e^0=2$, on a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}=+\infty$.

o. Puisque $\lim\limits_{x\to0}(e^x+e^{-x})=e^0+e^0=2$, on a $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x}=-\infty$.

p. Pour tout réel x, $e^x\leqslant(2+\cos(x))e^x\leqslant3e^x$.
Pour tout réel $x>0$, on a donc $\dfrac{e^x}{x}\leqslant\dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.
Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}=+\infty$.

q. Par ailleurs, pour tout réel $x<0$, on a $\dfrac{e^x}{x}\geqslant\dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}\geqslant\dfrac{3e^x}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3e^x}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$.
Par encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$ existe et vaut 0.

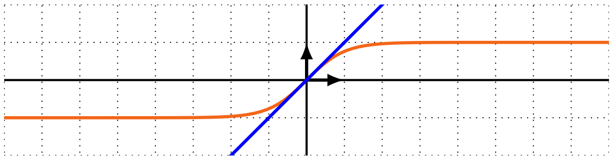
r. Remarquons que pour tout réel x, $x^2e^{-x}-x=\dfrac{x^2}{e^x}-x$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{e^x}-x\right)=-\infty$.

► Correction 103

1. Pour tout réel $x>0$, $th(x)=\dfrac{e^x}{e^x}\times\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}th(x)=1$.
   Par ailleurs, pour tout réel $x<0$, $th(x)=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}}\times\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}=0$ Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}th(x)=-1$.

2. th est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$th'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-(e^{2x}-2-e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.$$

3. th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction th en 0 est $y = th'(0)(x-0)+th(0)$.
Or, $th'(0) = \dfrac{4}{(e^0+e^0)^2} = 1$ et $th(0) = \dfrac{e^0-e^0}{e^0+e^0} = 0$. Ainsi, l'équation de cette tangente est $y = x$.
5. 

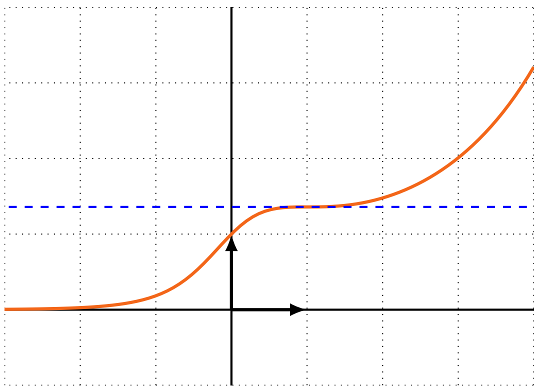
► Correction 104

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, son dénominateur n'étant jamais nul. De plus, on a, pour tout réel x, $f(x) > 0$. f est de plus dérivable et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{e^x\times(x^2+1)-e^x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2e^x}{(x^2+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs. La courbe de f a une tangente horizontale en 1 puisque $f'(1) = 0$. Par ailleurs, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$. Or, par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0$. f a donc les mêmes limites.

La courbe de la fonction f est la suivante. La tangente horizontale en 1 est également tracée.



► Correction 105

f est définie pour tout réel $x \neq -1$.

Etude du signe de f

$2x+2$ s'annule en $x = -1$. x^2+3x-4 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et -4. On construit alors le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Étude des limites

Pour tout réel x différent de 0 et -1

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \times \frac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}} = x \times \frac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(2x+2) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2+3x-4) = (-1)^2+3\times(-1)-4 = -6$. En appliquant la règle des signes, on a alors $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. De la même manière, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$.

Étude des variations

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2+3x-4$ et $v(x) = 2x+2$. u et v sont dérivables sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur ces intervalles. f est donc dérivable sur ces intervalles et pour tout réel $x \neq -1$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+2)-(x^2+3x-4)\times 2}{(2x+2)^2} = \frac{x^2+2x+7}{(2x+2)^2}.$$

Puisque pour tout réel $x \neq -1$, $(2x+2)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de x^2+2x+7. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 2^2-4\times 7\times 1 = -24 > 0$. Ainsi, pour tout réel $x \neq 2$, $f'(x) > 0$.

Résumé dans un tableau

On met toutes ces informations dans un tableau et on en profite pour vérifier si le tout est cohérent.

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		$\Vert$		$+$		
f	$-\infty$		$\nearrow$	$+\infty$	$\Vert$ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

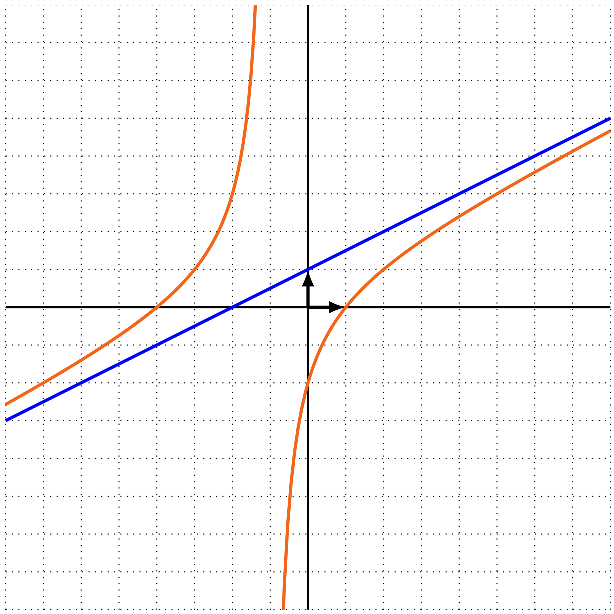
Pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{x^2+3x-4-\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2)}{2x+2}.$$

Ainsi,

$$g(x) = \frac{x^2+3x-4-x^2-x-2x-2}{2x+2} = -\frac{6}{2x+2}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right) = 0$.



► Correction 106

Pour tout réel x,

$$ax+b+\frac{c}{x-1} = \frac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}.$$

On cherche donc a, b et c tels que $a=1$, $b-a=0$ et $c-b=0$: on trouve $a=b=1$.

Ainsi, pour tout réel x, $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1} = 0$, et de même en $-\infty$. La droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et $+\infty$.

► Correction 107

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2-3x+2 \geqslant 0$. Or, x^2-3x+2 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2. Ainsi, f est définie sur $]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$.
2. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+2 = +\infty$. Par ailleurs, pour tout $x>2$, $x^2-3x+2 = x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+2 = +\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
3. f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $]2;+\infty[$. Pour tout réel x dans l'un de ces intervalles, $f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ qui est du signe de $2x-3$.

x	$-\infty$		1		$3/2$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$						$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout réel x, $x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.
5. Pour tout réel $x>2$,

$$f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}.$$

Or, si $x>2$, alors $x-\dfrac{3}{2}>0$ et donc $\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}=x-\dfrac{3}{2}$. Ainsi, pour tout $x>2$,

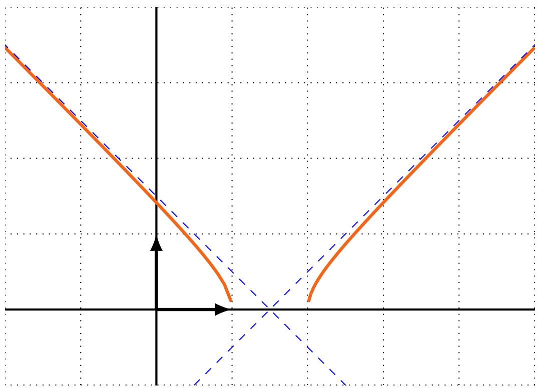
$$f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}-1.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right)=0$. La droite d'équation $y=x-\dfrac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Par ailleurs, pour tout $x<1$, $x-\dfrac{3}{2}<0$ et donc $\sqrt{\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{2}-x$. Ainsi, pour tout $x<1$,

$$f(x)-\left(\frac{3}{2}-x\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}-1.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(\dfrac{3}{2}-x\right)\right)=0$. La droite d'équation $y=\dfrac{3}{2}-x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

6. 

► **Correction 108**

Partie A

1. Puisque la courbe de f passe par le point de coordonnées $(0;0{,}5)$, on a donc $f(0)=0{,}5$. Par ailleurs, $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 0. Cette tangente est la droite (AB), dont le coefficient directeur vaut
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-0{,}5}{10-0}=\frac{0{,}5}{10}=0{,}05.$$
On a donc $f'(0)=0{,}05$.
2. D'après la lecture graphique, $f(0)=0{,}5$. Or, d'après l'expression de $f(x)$, on a
$$f(0)=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}}=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{0}}=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}.$$
Ainsi, $\frac{a}{2}=0{,}5$, et donc $a=2\times 0{,}5=1$.
3. Pour tout réel x, on pose $u(x)=1+\mathrm{e}^{-bx}$. u est dérivable et pour tout réel x, $u'(x)=-b\mathrm{e}^{-bx}$. Or, $f=\frac{1}{u}$.
Ainsi, $f'=-\frac{u'}{u^2}$ et donc, pour tout réel x,
$$f'(x)=-\frac{-b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}=\frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}$$
Attention, aux deux signes "-" !.
4. D'après la lecture graphique, $f'(0)=0{,}05$. Or, d'après l'expression de f',
$$f'(0)=\frac{b\mathrm{e}^{-b\times 0}}{(1+\mathrm{e}^{-b\times 0})^2}=\frac{b\mathrm{e}^{0}}{(1+\mathrm{e}^{0})^2}=\frac{b}{(1+1)^2}=\frac{b}{4}$$
Ainsi, $\frac{b}{4}=0{,}05$ et donc $b=0{,}05\times 4=0{,}2$.

Partie B

1. $p(10)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2\times 10}}\simeq 0{,}88$. La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 est d'environ 0,88 (soit 88% de la population totale).
2. (a) D'après la partie A, p est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $p'(x)=\frac{0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2x}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}2x})^2}$. Or, une exponentielle étant toujours strictement positive, on a, pour tout réel x, $p'(x)>0$. La fonction p est donc strictement croissante.
   (b) Pour tout réel $x\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}2x}>0$ et donc $1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}>1$. En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient alors $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}<1$. Ce résultat est cohérent : une proportion ne peut dépasser 1.
   (c) Puisque $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-0.2x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}p(x)=1$. A terme, tous les individus possèderont l'équipement étudié ici.

► Correction 109

1. (a) On a $u=\exp(v)$ où $v:x\mapsto 2-\frac{x}{10}$. Pour tout réel x positif, on a
$$u'(x)=v'(x)\times\exp(v(x))=-\frac{1}{10}\exp(v(x))=-\frac{1}{10}u(x).$$
   (b) Pour tout réel positif x, on a
$$f'(x)=10u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}=10\times\left(-\frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}\right)=-u(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

(c) Pour tout réel x, $e^{u(x)} > 0$ et $-u(x) = \exp\left(2 - \frac{x}{10}\right) > 0$. f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. (a) $f(20) = \frac{10}{e} \simeq 3.7$. Après 20 jours de repousse, la queue du lézard mesure environ 3.7 cm.
   (b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{x}{10}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$.*Ainsi*, $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10e^0 = 10$.
   (c) La fonction f est croissante et sa limite en $+\infty$ vaut 10. Elle ne peut donc atteindre 11. La queue du lézard ne peut pas atteindre 11cm selon cette modélisation.
3. (a) Pour tout réel x, $e^{u(x)} > 0$ et $\frac{1}{10}u(x) < 0$. f'' est donc du signe opposé à celui de $(1 + u(x))$. Or

$$1 + u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \exp\left(2 - \frac{x}{10}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant \exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

   et donc

$$1 + u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2 - \frac{x}{10} \Leftrightarrow 20 \geqslant x.$$

   Ainsi, $f''(x)$ est positive sur $[0; 20]$ et négative sur $[20; +\infty[$. f' est donc croissante sur $[0; 20]$ et décroissante sur $[20; +\infty[$.
   (b) La vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.

VI

Continuité

16. Cours : Continuité

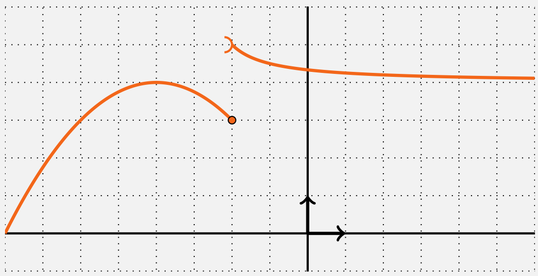
1 Continuité d'une fonction réelle

Définition 22 — Continuité : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

- On dit que f est *continue* en a si f admet une limite en a, par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, et que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout réel de I.

■ **Exemple 61 :** Jusqu'ici, les fonction de référence rencontrées étaient continues sur leur domaine de définition : fonctions polynômes ou quotients de polynômes, exponentielle, racine carrée, sinus, cosinus, valeur absolue... ■

■ **Exemple 62 :** On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



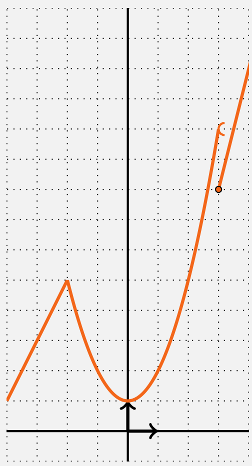
On remarque que

- $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = 3$;
- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = 5$.

Ces deux valeurs sont différentes, la fonction f n'est pas continue en 2.
Graphiquement, on voit que la courbe de la fonction fait un "saut" en $x = -2$. ■

■ **Exemple 63 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x+9 & \text{si } x < -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 \leqslant x < 3 \\ 4x-4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]-\infty;-2[$, $]-2;3[$ et $]3;+\infty[$.
Il faut étudier la continuité aux bords de chaque intervalle.



Continuité en -2

- $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$;
- $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = 2\times(-2)+9 = 5$;
- $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = (-2)^2+1 = 5$.

Ainsi, f est continue en -2.

Continuité en 3

- $f(3) = 4\times 3 - 4 = 8$;
- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 3^2+1 = 10$.

On a $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3)$. Ainsi, f est n'est pas continue en 3. ■

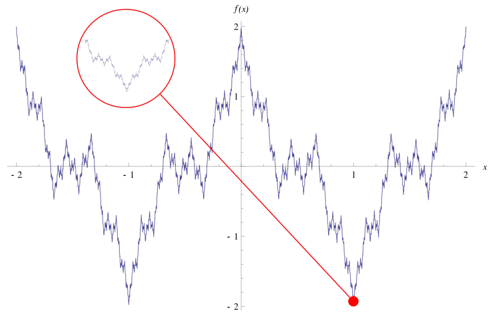
Propriété 22 : La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continus sur I.

■ **Exemple 64 :** La fonction $x \mapsto \cos(x)(x^2+3\sqrt{x}) - \sin(x)e^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. ■

Théorème 17 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, alors f est également continue sur I.

La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Il existe par ailleurs des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables nulle part !
Les exemples les plus connus sont sans doute les fonctions de Weierstrass. Ce sont des courbes fractales : peu importe le niveau de zoom que l'on peut avoir sur la courbe, on verra toujours de nouveaux détails apparaître.



2 Suites et fonction continue

Propriété 23 — Image d'une suite convergente : Soit I un intervalle et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. Soit g une fonction définie sur l'intervalle I.

Si la suite (u_n) est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in I$ et si g est **continue** en ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$

En d'autres termes, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$.

■ **Exemple 65 :** Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \sqrt{9+\dfrac{1}{n}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(9+\dfrac{1}{n}\right) = 9$.

Or, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 9. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{9} = 3$. ■

L'hypothèse de continuité est primordiale ! Pour tout réel x, notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier qui soit plus petit que x. Par exemple, $\lfloor 1{,}3 \rfloor = 1$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$. On a ainsi $u_0 = 0$, $u_1 = 0{,}9$, $u_2 = 0{,}999$, $u_3 = 0{,}9999$ etc.

- Pour tout entier naturel non nul, $\lfloor u_n \rfloor = 0$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = 0$;
- La suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ainsi, $\lfloor \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$;
- On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor \neq \lfloor \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rfloor$.
  On montre en fait que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.

Théorème 18 — Théorème du point fixe : Soit I un intervalle, g une fonction définie et continue sur I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

On suppose que la suite (u_n) est convergente, de limite $\ell \in I$. Alors $g(\ell) = \ell$.

Démonstration 19 : Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = g(u_n)$. La suite (u_n) étant convergente, il est possible de passer à la limite dans cette égalité.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, la fonction g étant continue sur I, on a d'après la propriété précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = g(\ell)$. Ainsi, $g(\ell) = \ell$. □

■ **Exemple 66 :** On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

Montrons que la suite (u_n) est croissante et que pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 2$, $u_1 = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10}$. On a bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Or, la fonction $x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est croissante sur $[2;4]$. Ainsi,

  $$\sqrt{3 \times 2 + 4} \leqslant \sqrt{3 \times u_n + 4} \leqslant \sqrt{3 \times u_{n+1} + 4} \leqslant \sqrt{3 \times 4 + 4},$$

  c'est-à-dire,

  $$\sqrt{10} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4.$$

  Puisque $2 \leqslant \sqrt{10}$, on a donc bien

  $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée, la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite.

Puisque la fonction $g : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est continue sur $\left]-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ et que $l \in [2;4]$, on a alors $g(\ell) = \ell$.

Ainsi, $\sqrt{3\ell+4} = \ell$. En élevant cette inégalité au carré, on a $3\ell + 4 = \ell^2$, soit $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 4. Or, il n'est pas possible que la suite tende vers -1 puisque celle-ci est supérieure à 2. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

■

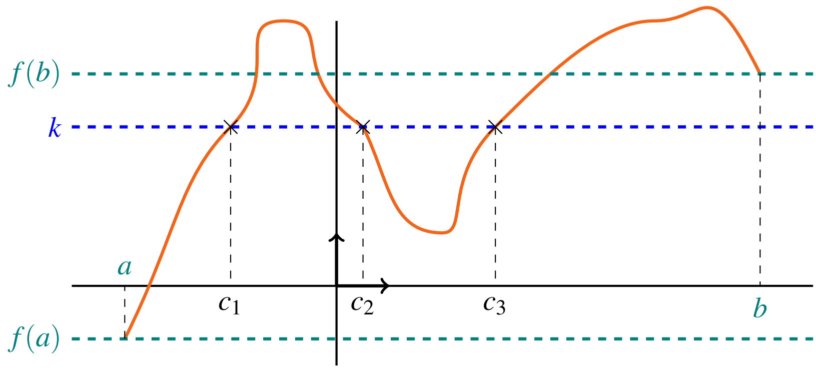
3 Théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Cas général

Théorème 20 — Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Illustration : On représente une fonction f ci-dessous.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, k possède au moins un antécédent par f. Dans cet exemple, il y en a trois. Le nom de ce théorème se justifie ainsi : une fonction continue qui passe d'une valeur $f(a)$ à une valeur $f(b)$ passe forcément au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires.

■ **Exemple 67 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x - 1$, définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est une fonction polynômiale, elle est donc continue. De plus, $f(-2) = -1$ et $f(2) = 3$.

Or, $0 \in [-1;3]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel $c \in [-2;2]$ tel que $f(c) = 0$. ■

Ce théorème ne nous donne aucune indication sur le nombre de ces solutions (en réalité, il y en a 3 sur cet intervalle). Nous verrons dans très peu de temps comment pallier ce problème.

Il est également possible d'utiliser les limites dans le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 21 — Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a;b[$ telle que $\lim\limits_{x \to a^+}$ et $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ existent. Soit k un réel strictement compris entre ces deux limites.

Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $]a;b[$ tel que $f(c) = k$.

■ **Exemple 68 :** Soit a, b, c et d quatre réels avec $a > 0$. On considère la fonction $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel non nul, $f(x) = x^3\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{d}{x^3}\right)$. Or, $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{d}{x^3}\right) = a > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. De même, on montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Or, $0 \in]-\infty;+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x tel que $f(x) = 0$. Le même raisonnement vaut pour $a < 0$: nous venons de démontrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle. ■

3.2 Fonctions strictement monotones

Théorème 22 : Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$. Soit k un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou les limites en a et b de f). Alors il existe un **unique** réel $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = k$.

Là encore, il est possible d'utiliser les limites de f en a et en b si elles existent.

■ **Exemple 69 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-1}}{x}$, définie sur $I =]0;+\infty[$. Montrons que l'équation $f(x) = 2$ possède exactement deux solutions sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

D'une part, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x} = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{e^x}{x}$.

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to0^+} e^{x-1} = e^{-1} > 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur I et son dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est également dérivable sur I et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{e^{x-1} \times x - e^{x-1} \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}.$$

Or, pour tout réel $x > 0$, $e^{x-1} > 0$ et $x^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $x-1$. Ceci nous permet d'établir le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On raisonne alors selon les intervalles sur lesquels f est strictement monotone.

La fonction f est continue sur $]0;1]$. Or, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 1$. Ainsi, $2 \in]1;+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c_1 \in]0;1[$ tel que $f(c_1) = 2$. De plus, la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $]0;1]$: la solution à cette équation est donc unique.

De même, il existe un unique réel $c_2 \in]1;+\infty[$ tel que $f(c_2) = 2$. Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$.

■

3.3 Algorithme de dichotomie

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence de solutions à une certaine équation. En revanche, il ne nous indique en rien la valeur de cette solution. Plusieurs algorithmes nous permettent néanmoins d'obtenir au moins une valeur approchée d'une solution de l'équation qui nous intéresse.

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Dans cet exemple, on supposera par exemple que $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'un réel c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = k$. L'idée, pour obtenir une valeur approchée d'un tel réel, est d'évaluer la valeur prise par la fonction au milieu de l'intervalle $[a;b]$

- Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < k$, on a alors $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant k \leqslant f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors de l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$;
- Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > k$, on a alors $f(a) \leqslant k \leqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors de l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Dans les deux cas, nous avons trouvé un intervalle deux fois plus petit que l'intervalle $[a;b]$ dans lequel l'équation $f(x) = k$ possède une solution.

■ **Exemple 70 :** On considère la fonction $f : x \mapsto 3x - e^x$. f est continue, $f(0) = -1$ et $f(1) = 3 - e > 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = 0$.

On calcule alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$: on a $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0.15 < 0$. Ainsi, il existe un réel $c \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $f(c) = 0$ ■

En réitérant le même procédé sur le nouvel intervalle obtenu, on obtiendra alors un intervalle 4 fois plus petit que celui de l'intervalle de départ, puis 8 fois plus petit, 16 fois, 32 fois et ainsi de suite.

On définit en réalité deux suites (a_n) et (b_n) de la manière suivante

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$;
- Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, on pose alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;
- Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, il existe une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_n;b_n]$.

De plus, puisque $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, la longueur de l'intervalle $[a_n;b_n]$ tend vers zéro : il est donc possible d'avoir une valeur approchée aussi précise que l'on veut à l'aide de cet algorithme. Cet algorithme peut alors être implémenté en Python

```python
def dichotomie(a, b, k, f, p) :
  # f est une fonction continue sur [a;b]
  # k est un reel tel que f(a) <= k <= f(b)
  # p designe la precision voulue pour l estimation de la solution
  while b - a >= p :
    m = (a + b) / 2
    if f(m) <= k :
      a = m
    else :
      b = m
  return a
```

Dans le cas où $f(a) \geqslant k \geqslant f(b)$, il suffit de changer le sens des inégalités.

17. Exercices

Continuité d'une fonction

▶ Exercice 110

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$. f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

▶ Exercice 111

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

▶ Exercice 112

Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 113

On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x, $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 114

On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x, $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Suites et fonction continue

▶ Exercice 115

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4n^2+1}{n^2+3n+2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$, en énonçant bien les propriétés utilisées.

▶ Exercice 116

On considère la fonction f définie par $f(0) = 1$ et pour tout réel non nul x, $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

1. Que vaut $f(u_n)$ pour tout entier naturel n ?
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$. La fonction f est-elle continue en 0 ?

▶ Exercice 117

On considère la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{3}{u_n + 1} + 3$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et que la suite (u_n) est croissante.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la limite de la suite (u_n).

▶ Exercice 118

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Supposons que (u_n) converge : quelle peut-être sa limite ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ et que la suite u_n est croissante.
3. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?

▶ Exercice 119 — topic=cont02, Amérique du Nord 2021

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par par

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0{,}75 u_n (1 - 0.15 u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 0{,}75x(1 - 0.15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0{,}1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Déterminer la limite l de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   (a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   (b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() ci-dessous.

```python
def menace():
  U = 0.6
  N = 0
  while U > 0.02 :
    U = 0.75 * U * (1 - 0.15 * U)
    N = N + 1
  return N
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace(). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Théorème des valeurs intermédiaires

► Exercice 120

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une corr sur l'intervalle $[1;2]$.

► Exercice 121 — topic=cont03, Amérique du Nord 2023

On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2;4]$ telle que $h(-1) = 0$, $h(1) = 4$ et $h(3) = -1$. Parmi les affirmations suivantes, quelle est l'unique affirmation correcte ?

- La fonction h est croissante sur $[-1;1]$;
- la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1;1]$;
- il existe au moins un nombre réel α dans l'intervalle $[1;2]$ tel que $h(\alpha) = 1$;
- l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux corrs sur l'intervalle $[-2;4]$.

► Exercice 122

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1;0]$?
3. Que vaut $f(0)$? Quel est le signe de $f(-1)$?
4. En déduire que l'équation $e^x + x = 0$ admet exactement une corr sur $[-1;1]$.

► Exercice 123

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 60x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. En déduire la nombre de corrs de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 124

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$ admet exactement trois corrs réelles.

► Exercice 125 — topic=cont03, Métropole 2021

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
2. Construire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$. On précisera les limites en 0 et en $+\infty$.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de corrs de l'équation $f(x) = m$ en fonction de la valeur de m.

► Exercice 126 — topic=cont03, Centres étrangers 2023

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0.5t^2+t+2}$. où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous. Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

► Exercice 127

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{T}$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ à l'abscisse 1.
2. Montrer qu'il existe une unique autre tangente à $\mathscr{C}_f$ qui soit parallèle à $\mathscr{T}$.

► Exercice 128

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^5 - 2x - 4$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$ possède au moins une corr sur $[1;2]$.
3. Écrire les 3 premières étapes de l'algorithme de dichotomie et donner un intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ qui contient une corr de l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$.
4. Donner une corr de cette équation au centième près.

► Exercice 129

Soit f et g les fonction définies pour tout réel x par $f(x) = (1-x)e^x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

1. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique corr sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur à 10^{-2} près. On note α ce réel.
3. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.
4. Construire le tableau de variations de g.

► Exercice 130 — topic=cont03, Centres étrangers 2023

Soit deux réels a et b avec $a < b$. On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$ et qui s'annule en un réel α. Parmi les propositions suivantes, quelle est la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0.001 près ?

```python
#Algorithme A

def racine(a,b) :
  while abs(b-a) >= 0.001 :
    m = (a+b)/2
    if f(m) < 0 :
      b = m
    else :
      a = m
    return m
```

```python
#Algorithme B

def racine(a,b) :
  m = (a+b) / 2
  while abs(b-a) >= 0.001 :
    if f(m) < 0 :
      a = m
    else :
      b = m
    return m
```

```python
#Algorithme C

def racine(a,b) :
  m = (a+b)/2
  while abs(b-a) <= 0.001 :
    if f(m) < 0 :
      a = m
    else :
      b = m
    return m
```

```python
#Algorithme D

def racine(a,b) :
  while abs(b-a) >= 0.001 :
    m = (a+b)/2
    if f(m) < 0 :
      a = m
    else :
      b = m
    return m
```

► Exercice 131

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une corr sur $[0;1]$.

► Exercice 132 — Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires... Mais pour commencer, nous avons besoin de résultats supplémentaires sur les suites.

Partie A

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.

L'objectif de cette première partie est de démontrer que deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $c_n = b_n - a_n$.
   (a) Montrer que la suite (c_n) est décroissante.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $c_n \geqslant 0$ et en déduire que $a_n \leqslant b_n$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_0$ et $b_n \geqslant a_0$.
   Que peut-on en déduire sur les suites (a_n) et (b_n) ?
3. Montrer que (a_n) et (b_n) ont même limite.

Partie B

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On suppose que $f(a) < k < f(b)$. On considère alors les suites (a_n) et (b_n) définies par

- $a_0 = a$ et, pour tout entier naturel $n, a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$
- $b_0 = b$ et, pour tout entier naturel $n, b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k \\ b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k \end{cases}$

Le but est évidemment de montrer que ces suites sont adjacentes. Dans l'ensemble des questions suivantes, il faudra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$.
2. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n)$. Que peut-on en conclure sur les suites (a_n) et (b_n) ?
5. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$.
6. On note ℓ la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a,b]$.
   Montrer que $f(\ell) = k$.

18. Corrigés

► Correction 110

Continuité en -1 ? : D'une part, $f(-1) = 6 \times (-1) + 8 = 2$. D'autre part, $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -3 \times (-1) + 7 = 10$.

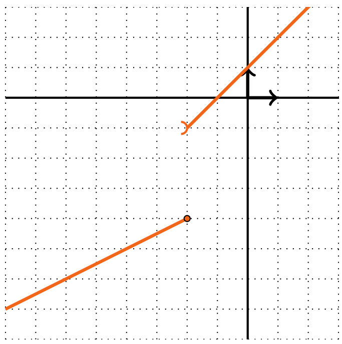
Ainsi, f n'est pas continue en -1.

Continuité en 2 ? : D'une part, $f(2) = 2 - 1 = 1$. D'autre part, $\lim_{x \to 2^-} = -3 \times 2 + 7 = 1$. Enfin, $\lim_{x \to 2^+} = 2 - 1 = 1$

La fonction f est continue en 2.

► Correction 111

$f(-2) = \frac{1}{2} \times (-2) - 3 = -4$. Or, $\lim_{x \to (-2)^+} = -2 + 1 = -1$. La fonction f n'est pas continue en -2.



► Correction 112

f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Il reste à déterminer si elle est continue en 1.

- $f(1) = 1^2 + a \times 1 + b = 1 + a + b$;
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = a \times 1^2 + b \times 1 + 1 = a + b + 1$;
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 + a + b$.

Ainsi, f est continue en 1. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

► Correction 113

La fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

On sait que $\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$. Or, $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$. Ainsi, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$. De la même manière, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$. f est donc continue en 0.

► Correction 114

La fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) 1$ et donc $-x \leqslant x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x$. Or, $\lim_{x \to 0^+} (-x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

De même, on montre que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$. Ainsi, la fonction f est aussi continue en 0.

► Correction 115
Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{4n^2+1}{n^2+3n+2}=\frac{n^2}{n^2}\times\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=4$. De plus, la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue en 4.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\sqrt{4}=2$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. De plus, la fonction exponentielle est continue en 0.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\right)=e^0=1$.

► Correction 116
Pour tout entier naturel n, $f(u_n=\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right)=\sin(2n\pi)=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=0$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$ et $f(0)=1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)\neq f(\lim\limits_{n\to+\infty}u_n)$. La fonction f n'est donc pas continue en 0.

► Correction 117
Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$.

- $u_0=1$, $u_1=\frac{3}{2}$ et on a bien $1\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 2$, $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Ainsi, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 2$, d'où $2\leqslant u_n+1\leqslant u_{n+1}+1\leqslant 3$.
  La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors, $\frac{1}{2}\geqslant\frac{1}{u_n+1}\geqslant\frac{1}{u_{n+1}+1}\geqslant\frac{1}{3}$, puis, en multipliant par -3 qui est négatif, $\frac{-3}{2}\leqslant-\frac{3}{u_n+1}\leqslant-\frac{3}{u_{n+1}+1}\leqslant-1$.
  Finalement, on a $\frac{3}{2}\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 2$. En particulier, puisque $\frac{3}{2}>1$, on a $1\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 2$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie P est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

La fonction $f:x\mapsto-\frac{3}{x+1}+3$ est continue sur $]-1;+\infty[$ et, pour tout entier naturel n, on a bien $u_n\in]-1;+\infty[$.

Ainsi, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell)=\ell$, c'est-à-dire $\ell=-\frac{3}{\ell+1}+3$.

Ainsi, on trouve $\frac{\ell(2-\ell)}{\ell+1}=0$ et donc $l=0$ ou $l=2$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n\geqslant 1$, le cas $\ell=0$ est impossible. On a donc $\ell=2$.

► Correction 118
Si (u_n) converge vers un réel ℓ, puisque la fonction $x\mapsto\sqrt{6+x}$ est continue sur $[-6;+\infty[$, ce réel ℓ vérifie $\ell=\sqrt{6+\ell}$. Ainsi, $\ell^2=6+\ell$ ou encore $\ell^2-\ell-6=0$. On trouve alors deux corrs qui sont $\ell=-2$ et $\ell=3$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 3$.

- $u_1 = \sqrt{6+0} = \sqrt{6}$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel tel que $\mathscr{P}(\backslash)$ soit vraie. Ainsi, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
  Alors, $6 \leqslant 6+u_n \leqslant 6+u_{n+1} \leqslant 9$. Par ailleurs, la fonction Racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{6} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+3} \leqslant 3$. Or, puisque $\sqrt{6} \geqslant 0$, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. De plus, elle n'a que deux limites possibles qui sont -2 et 3. -2 est impossible puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

▶ Correction 119

1. On a $u_1 = 0.75\times 0.6\times(1-0.75\times 0.6) = 0.4095$ et $u_2 = 0.75\times 0.4095\times(1-0.75\times 0.4095) \simeq 0.2882$. Ainsi, il y aura environ 410 individus en 2021 et 288 en 2022.
2. f est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout réel $x\in[0;1]$, $f'(x) = 0.75\times(1-0.15x)+0.75x\times(-0.15) = 0.75-0.225x$.
   Or, si $0\leqslant x\leqslant 1$, alors $0\leqslant 0.225x\leqslant 0.225$ d'où $0\geqslant -0.225x\geqslant -0.225$ et $0.75\geqslant 0.75-0.225x\geqslant 0.525$. En particulier, pour tout $x\in[0;1]$, $f'(x)>0$: f est strictement croissante sur $[0;1]$.

x	0 1
$f'(x)$	$+$
f	$0 \longrightarrow 0.6375$

3. Soit $x\in[0;1]$. $f(x)=x$ si et seulement si $0.75x(1-0.15x)=x$ soit $0.75x(1-0.15x)-x=0$. En factorisant par x, ceci est équivalent à $x(0.75(1-0.15x)-1)=0$, c'est-à-dire $x(-0.25-0.1125x)=0$. Ainsi, $f(x)=x$ si et seulement si $x=0$ ou $-0.25-0.1125x=0$, soit $x=0$ ou $x=-\dfrac{0.25}{0.1125}$. Or, $-\dfrac{0.25}{0.1125}<0$. L'unique corr de l'équation $f(x)=x$ sur $[0;1]$ est donc $x=0$.
4. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$ ».
   - On a $u_0=0.6$ et $u_1=0.4095$. On a donc bien $0\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 1$. $P(1)$ est vraie.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$. En appliquant la fonction f qui est strictement croissante sur $[0;1]$, on a alors $f(0)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(1)$, soit $0\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 0.6375$. Puisque $0.6375<1$, on a bien $0\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente vers un réel ℓ.

   (c) La fonction f étant continue sur $[0;1]$, on a $f(\ell)=\ell$. Or, l'unique corr de cette équation sur $[0;1]$ est 0. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. (a) D'après les questions précédentes, le nombre d'individus en milliers dans la population étudiée décroît et tend vers 0 : il arrivera donc un moment où cette population sera inférieure à 20 individus.

   (b) L'algorithme renvoie la valeur 11 : l'espace sera menacée d'extinction en 2031.

▶ Correction 120

On a $f(1)\simeq 1.7$ et $f(2)\simeq 6.9$.

De plus, f est continue sur $[1;2]$. Or, $2\in[f(1);f(2)]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ possède au moins une corr sur l'intervalle $[1;2]$.

▶ Correction 121

L'affirmation correcte est l'affirmation 3 : il s'agit d'une simple application du théorème des valeurs intermédiaires.

Les images de -1 et de 1 par h ne nous donnent aucune information sur le comportement de h entre -1 et 1 : on pourrait très bien avoir $h(0)=-5$ par exemple, ce qui contredirait les affirmations 1 et 2. L'affirmation 4 est fausse : on pourrait avoir $h(0)=h(2)=h(4)=1$. En revanche, si la fonction h était strictement monotone sur les intervalles $[-1;1]$ et $[1;3]$, on aurait alors en effet exactement deux corrs à l'équation $h(x)=1$.

► Correction 122

f est dérivable comme somme de fonctions dérivables (et est donc continue). Pour tout réel x, $f'(x)=e^x+1$. Puisque pour tout réel x, $e^x>0$, il en vient que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (et en particulier sur $[-1;0]$). La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1;2]$. Par ailleurs, $f(0)=1$ et $f(-1)=e^{-1}-1<0$.

Reprenons les informations des questions précédentes : La fonction f est continue sur $[-1;0]$. On a $f(-1)<0$ et $f(0)>0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une corr sur $[-1;0]$. De plus, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, une telle corr est unique.

► Correction 123

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x)=6x^2+18x-60=6(x^2+3x-10)$. Ainsi, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=-5$. On a par ailleurs $f(2)=-65$ et $f(-5)=278$. En outre, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. Le tableau de variations de f est le suivant.

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	278	$\searrow$	-65	$\nearrow$	$+\infty$

On peut en déduire le nombre de corrs de l'équation $f(x)=0$. Par exemple, sur $]-\infty;-5[$:

- La fonction f est continue et strictement monotone ;
- $f(-5)>0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;
- Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x)=0$ possède une unique corr sur l'intervalle $]-\infty;-5[$.

De la même manière, l'équation $f(x)=0$ admet une unique corr sur $]-5;2[$ puis une unique corr sur $]2;+\infty[$. Ainsi, l'équation $f(x)=0$ possède exactement 3 corrs sur $\mathbb{R}$.

► Correction 124

f est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x)=3x^2-10x+3=3(x-3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$. Les racines peuvent aussi se calculer à l'aide de la méthode du discriminant. On peut alors dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones sur chacun des intervalles $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3};3\right]$ et $[3;+\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ possède exactement 3 corrs.

► Correction 125

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$.

Puisque pour tout $x>0$, $e^x>0$ et $x^2>0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$. Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Enfin, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi,

- si $m<e$, l'équation $f(x)=m$ ne possède aucune corr sur $]0;+\infty[$.
- si $m=e$, l'équation $f(x)=m$ possède une unique corr sur $]0;+\infty[$: il s'agit de $x=1$.
- si $m>e$, l'équation $f(x)=m$ possède deux corrs sur $]0;+\infty[$: l'une sur l'intervalle $]0;1[$, l'autre sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

► Correction 126

- **Faux** : f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et, pour tout réel $t>0$,

$$f'(t)=-(-t+1)e^{-0.5t^2+t+2}=(t-1)e^{-0.5t^2+t+2}$$

  $f'(t)$ est du signe de $t-1$. On peut alors construire le tableau de variations de f.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	e^3-e^2	$\searrow$	$e^3-e^{2.5}$	$\nearrow$	e^3

  En particulier, $f(1)<f(0)$. La population ne fait pas qu'augmenter en permanence.
- **Faux :** On a $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=e^3\simeq 20.08$. Par ailleurs, la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$. Ainsi, pour tout $t>1$, $f(t)\leqslant 20.08$. En particulier, la population ne dépasse 21000 bactéries.
- **Vrai :** La fonction f est continue sur $[0;1]$. Par ailleurs, $f(0)=e^3-e^2>10$ et $f(1)=e^3-e^{2.5}<10$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t\in]0;1[$ tel que $f(t)=10$. La fonction f étant strictement décroissante sur cet intervalle, une telle corr est unique. De même, il existe un unique réel $t_2\in[1;+\infty[$ tel que $f(t_2)=10$. Finalement, 10 possède exactement deux antécédents par la fonction f : la population de bactéries aura donc un effectif de 10000 à deux reprises.

► Correction 127

Pour tout réel x, $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 2$. Ainsi, $f'(1) = -5$. Par ailleurs, $f(1) = 1$. Ainsi, l'équation réduite de $\mathscr{T}$ est $y = -5(x-1)+1$ soit $y = -5x+6$.

La deuxième question revient à montrer que l'équation $f'(x) = -5$ possède exactement deux corrs sur $\mathbb{R}$ (l'une de ces corrs étant $x = 1$). Pour tout réel x, $f''(x) = 20x^3 - 36x^2 = x^2(20x-36)$. Ainsi, pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe de $20x - 36$. Par ailleurs, par opérations sur les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = x^4\left(5 - \dfrac{12}{x} + \dfrac{2}{x^4}\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ceci nous permet de dresser le tableau de variations de f'.

x	$-\infty$		$9/5$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1937}{125}$	$\nearrow$	$+\infty$

Or, f' est continue sur $\left[\dfrac{9}{5};+\infty\right[$. Par ailleurs, $-5 \in \left[f\left(\dfrac{9}{5}\right);+\infty\right[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = -5$ possède une unique corr sur l'intervalle $\left[\dfrac{9}{5};+\infty\right[$. Si l'on note α cette corr, ceci signifie que la tangente à $\mathscr{C}_f$ à l'abscisse α est parallèle à $\mathscr{T}$. L'équation $f'(x) = -5$ admet également une unique corr sur $\left]-\infty;\dfrac{9}{5}\right]$, mais cette corr n'est autre que $x = 1$.

► Correction 128

On a $f(1) = -5 < 0$ et $f(2) = 24 > 0$. La fonction f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [1;2]$ tel que $f(c) = 0$.

- Calculons alors $f(1.5)$: On a $f(1.5) \simeq 0.59$. Ainsi, il existe un réel $c \in [1;1.5]$ tel que $f(c) = 0$.
- Calculons alors $f(1.25)$: On a $f(1.25) \simeq -3.45 < 0$. Ainsi, il existe un réel $c \in [1.25;1.5]$ tel que $f(c) = 0$.
- Calculons alors $f(1.375)$: On a $f(1.375) \simeq -1.84 < 0$. Ainsi, il existe un réel $c \in [1.375;1.5]$ tel que $f(c) = 0$.

En poursuivant ainsi, on trouve que $c \simeq 1.47$

► Correction 129

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = e^x - xe^x + 1$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} = 1$.
   f est par ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (-1)\times e^x + (1-x)e^x = -xe^x$, qui est donc du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2. Pour tout réel $x < 0$, $f'(x) > 1$ et en particulier, $f'(x) > 0$. Par ailleurs, f est continue sur $[0;+\infty[$ et $0 \in]-\infty;2]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[0;+\infty[$, un tel réel est unique. En utilisant la calculatrice, on trouve $x \simeq 1.28$.
3. Pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{1\times(e^x+1) - x\times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.
4. Puisque pour tout réel x, $(1+e^x)^2 > 0$, $g'(x)$ est du signe de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

► Correction 130

Puisque f est strictement croissante sur $[a,b]$, on en déduit que $f(a) < 0$ et que $f(b) > 0$.

Dans les algorithmes B et C, la valeur de m n'est pas mise à jour à l'intérieur de la boucle while. Ils ne peuvent donc pas être les bons algorithmes.

Si $f(m) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(m)$ sont du même signe, il faut donc remplacer la valeur de a par celle de m. Le bon algorithme est l'algorithme D.

► Correction 131

Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0;1]$. De plus, $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque $f(1) \in [0;1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) - c = 0$ ou encore $f(c) = c$.

► Correction 132

Partie A

1. (a) Pour tout entier naturel n, $c_{n+1} - c_n = b_{n+1} - a_{n+1} - (b_n - a_n) = b_{n+1} - b_n - (a_{n+1} - a_n)$. Or, (b_n) est décroissante et donc $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$. (a_n) est croissante et donc $-(a_{n+1} - a_n) \leqslant 0$.
   Ainsi, $c_{n+1} - c_n \leqslant 0$. La suite (c_n) est décroissante.
   (b) La suite (c_n) est décroissante et de limite 0. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geqslant 0$ et donc $a_n \leqslant b_n$.
2. Pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$. Or, (b_n) est décroissante et donc, pour tout entier naturel n, $b_n \leqslant b_0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_0$. Un raisonnement similaire permet de conclure que, pour tout entier naturel n, $b_n \geqslant a_0$. La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b_0, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0. Ces deux suites sont donc convergentes.
3. Notons l_1 la limite de (a_n) et l_2 la limite de (b_n). On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$.
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l_1 - l_2$. Ainsi, $l_1 - l_2 = 0$ et donc $l_1 = l_2$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $a_n \leqslant b_n$ » .
   - Pour $n=0$, on a $a_0 = a$, $b_0 = b$, et on a bien $a_0 \leqslant b_0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $a_n \leqslant b_n$.
     - En ajoutant a_n et en divisant par 2, on obtient que $a_n \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2}$.
       Dans le cas où $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, on a donc encore $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$
     - En ajoutant b_n et en divisant par 2, on obtient que $\dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$.
       Dans le cas où $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, on a donc encore $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$

     Dans tous les cas, on a donc $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. Soit n un entier naturel.
   Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$ alors $a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \dfrac{b_n+a_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n-b_n}{2} \leqslant 0$.
   Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n+a_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \geqslant 0$ et $b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0$.
   Dans tous les cas, on a $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$ et $b_{n+1} - b_n \leqslant 0$. (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
3. Soit n un entier naturel.
   - Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n+a_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2}$
   - Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{b_n+a_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$

   Dans tous les cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$
4. Ainsi, la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$. Pour tout entier naturel n, $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. d'après la partie 1, elles sont donc convergentes et de même limite.
5. D'après la définition des suites (a_n) et (b_n), on a que pour tout entier naturel n, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$.
6. On note l la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient que $f(l) \leqslant k \leqslant f(l)$ et donc que $f(l) = k$.

VII

Logarithme népérien

19. Cours : Logarithme népérien

1 Logarithme népérien

Définition 23 : Soit a un réel strictement positif. On appelle *logarithme népérien* de a, noté $\ln(a)$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration 23 : Derrière cette définition se cache une démonstration : une telle solution existe-t-elle ? Si elle existe, cette solution est-elle unique ?

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par définition de l'exponentielle. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a \in]0;+\infty[$, il existe un réel x tel que $e^x = a$.

La fonction exponentielle étant par ailleurs strictement monotone sur $\mathbb{R}$, cette solution est unique. □

■ **Exemple 71 :** $\ln(1) = 0$. En effet, l'unique solution de l'équation $e^x = 1$ est $x = 0$. ■

■ **Exemple 72 :** $\ln(e) = 1$, $\ln(e^2) = 2$. ■

Propriété 24 : Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.

Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

Démonstration 24 : Soit a un réel strictement positif. $\ln(a)$ est, par définition, solution de l'équation $e^x = a$. On a donc $e^{\ln(a)} = a$.

Par ailleurs, pour tout réel a, $e^a > 0$. Par définition du logarithme népérien, $\ln(e^a)$ est l'unique solution de l'équation $e^x = e^a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, $x = a$ est une solution de cette équation. On a donc $\ln(e^a) = a$. □

■ **Exemple 73 :** On cherche à résoudre l'équation $3e^x - 6 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Or, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$3e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 3e^x = 6 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2).$$

■

Attention : il n'existe pas de logarithme népérien de réels négatifs !

■ **Exemple 74 :** On cherche à résoudre l'équation $\ln(x+2)+3 = 0$. $\ln(x+2)$ n'existe que si $x+2 > 0$, c'est-à-dire $x > -2$. Soit donc $x > -2$.

$$\ln(x+2)+3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = -3 \Leftrightarrow x+2 = e^{-3} \Leftrightarrow x = e^{-3} - 2.$$

Puisque $e^{-3} > 0$, on a alors $e^{-3} - 2 > -2$. L'unique solution de l'équation est donc $e^{-3} - 2$. ■

2 Propriétés algébriques

Propriété 25 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 25 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}.$$

En appliquant ln à cette égalité, on a donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. □

■ **Exemple 75 :** On a $\ln(2) + \ln(3) + \ln(4) = \ln(2 \times 3 \times 4) = \ln(24)$. ■

■ **Exemple 76 :** Soit x un réel. Alors,

$$\ln(1+e^{-x}) + x = \ln(1+e^{-x}) + \ln(e^x) = \ln((1+e^{-x})e^x) = \ln(e^x+1).$$

■

Propriété 26 : Soit a et b des réels strictement positifs. Alors,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 26 : Puisque $\ln(1) = 0$, on a $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = 0$, et donc, d'après la propriété précédente, $\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$. Ainsi, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.

Par ailleurs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$. □

■ **Exemple 77 :** On a $\ln(21) - \ln(7) = \ln\left(\frac{21}{7}\right) = \ln(3)$. ■

Propriété 27 : Soit a un réel strictement positif. Alors,

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

Démonstration 27 : Puisque pour tout réel $a > 0$, $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, on a

$$\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$$

et donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$. □

Propriété 28 : Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier **relatif** n

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

Démonstration 28 : Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

- **Initialisation** : $\ln(a^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(a) = 0$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Alors $\ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a) = \ln(a^n) + \ln(a) = n\ln(a) + \ln(a) = (n+1)\ln(a)$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie : $\mathscr{P}$ est héréditaire.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $a^n \times a^{-n} = a^0 = 1$. Ainsi, $\ln(a^n \times a^{-n}) = \ln(a^n) + \ln(a^{-n}) = 0$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -\ln(a^n)$. Or, $\ln(a^n) = n\ln(a)$. On a donc $\ln(a^{-n}) = -n\ln(a)$. □

■ **Exemple 78 :** On souhaite simplifier $\ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6)$.

$$\begin{aligned}
\ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6) &= \ln(12 \times 3) - 2\ln(6) \\
&= \ln(36) - 2\ln(6) \\
&= \ln(6^2) - 2\ln(6) \\
&= 2\ln(6) - 2\ln(6) = 0.
\end{aligned}$$ ■

■ **Exemple 79 :** On a $\dfrac{\ln(10000)}{\ln(0.001)} = \dfrac{\ln(10^4)}{\ln(10^{-3}} = \dfrac{4ln(10)}{-3\ln(10)} = -\dfrac{4}{3}$. ■

3 Fonction logarithme népérien

Définition 24 : On appelle *fonction logarithme népérien* la fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie pour tout réel x strictement positif.

Cette fonction est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle.

3.1 Limites

Propriété 29 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

De plus, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

La puissance de x l'emporte sur le logarithme en cas d'indéterminée : ce sont les croissances comparées au logarithme.

Démonstration 29 — Au programme : $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x)$ **:** Pour $x > 0$, posons $X = \ln(x)$.

Ainsi, $x\ln(x) = e^X \times X$. Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^X = 0$. Par composition de limite, $\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$. □

3.2 Dérivabilité

Propriété 30 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

La fonction ln est donc également continue sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 30 — Au programme : On admet que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=e^{\ln(x)}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

- D'une part, on sait que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=1$.
- D'autre part, en utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée, on sait que

$$f'(x)=\ln'(x)\times e^{\ln(x)}=\ln'(x)\times x.$$

Ainsi, pour tout $x>0$, $\ln'(x)\times x=1$ et donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$. □

■ **Exemple 80 :** Pour tour réel $x>0$, on pose $f(x)=e^x\ln(x)$.

- Pour tout réel x, on pose $u(x)=e^x$. u est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $u'(x)=e^x$.
- Pour tout réel x, on pose $v(x)=\ln(x)$. v est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $v'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. De plus, pour tout réel $x>0$

$$f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)=e^x\times\ln(x)+e^x\times\frac{1}{x}=\frac{e^x(x\ln(x)+1)}{x}.$$

■

On en déduit naturellement la propriété suivante.

Propriété 31 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$.

Alors $\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$

■ **Exemple 81 :** Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2-2x+5$ et $f(x)=\ln(u(x))=\ln(x^2-2x+5)$.

Il faut avant tout vérifier que pour tout réel x, $u(x)>0$! Sans quoi, la fonction f ne serait pas définie sur $\mathbb{R}$.

Or, u une fonction polynôme du second degré dont le discriminant Δ vaut $(-2)^2-4\times1\times5=-16>0$. Ainsi, pour tout réel x, $u(x)$ est du signe du coefficient dominant, 1, c'est-à-dire $u(x)>0$.

Par ailleurs, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x)=2x-2$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x-2}{x^2-2x+5}.$$

■

Puisque $\ln(u)$ n'est définie que lorsque u est strictement positive, on en déduit que u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations.

3.3 Étude de la fonction ln

Propriété 32 : La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 31 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif. ln est donc strictement croissante. □

La stricte croissance du logarithme nous est notamment utile pour déterminer le signe d'une expression mettant en jeu des logarithmes, et en particulier...

Propriété 33 : Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors $\ln(x)\geqslant\ln(y)$ si et seulement si $x\geqslant y$. En particulier, $\ln(x)\geqslant 0$ si et seulement si $x\geqslant 1$.

■ **Exemple 82 :** On souhaite déterminer l'entier n à partir duquel $3-12\times 0.9^n\geqslant 2.9$.

En soustrayant trois aux deux membres de cette inégalité, on obtient $-12\times 0.9^n\geqslant -0.1$. En divisant alors par -12 qui est négatif, on a alors $0.9^n\leqslant\dfrac{1}{120}$.

L'inconnu que nous cherchons est en exposant et les deux quantités dans cette inégalité sont strictement positives, nous allons donc pouvoir utiliser le logarithme népérien.

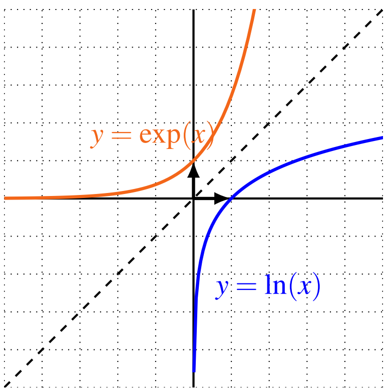
Puisque la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, $0.9^n\leqslant\dfrac{1}{120}$ si et seulement si $\ln(0.9^n)\leqslant\ln\left(\dfrac{1}{120}\right)$, soit $n\ln(0.9)\leqslant -\ln(120)$.

Puisque $0.9<1$, on a $\ln(0.9)<0$. En divisant l'inégalité par $\ln(0.9)$, **il faudra donc changer son sens !**

Ainsi, $n\ln(0.9)\leqslant -\ln(120)$ si et seulement si $n\geqslant -\dfrac{\ln(120)}{\ln(0.9)}$.

Or, $-\dfrac{\ln(120)}{\ln(0.9)}\simeq 45.4$. Le premier entier n tel que $3-12\times 0.9^n\geqslant 2.9$ est donc $n=46$. ■

Propriété 34 : La courbe de la fonction ln est symétrique à la courbe de la fonction exp par rapport à la droite d'équation $y=x$.



Cette propriété est vraie pour toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre. Par exemple, vous pouvez observer le même phénomène en regardant les courbes des fonctions $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$. Autre exemple, la fonction inverse, qui est sa propre réciproque. La courbe de cette fonction est elle-même symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$.

20. Exercices

Logarithme népérien

▶ Exercice 133
Résoudre les équations suivantes en précisant leur domaine de récorr.

a. $2\ln(x)+1=3$ **b.** $\ln(3x-4)=0$ **c.** $e^{3x+2}=4$

d. $2+3\ln(3x-2)=-1$ **e.** $\ln(e^{3x+4})=5$ **g.** $e^{2x-3}=3-\pi$

h. $(e^{2x}-3)(e^x+5)=0$ **i.** $(\ln(x))^2-\ln(x)=0$ **j.** $(e^x-1)\ln(x-e)=0$

▶ Exercice 134
En utilisant un changement de variable, résoudre l'équation $3e^{2x}+9e^x-30=0$ sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 135
Résoudre les inéquations suivantes. On précisera bien les domaines de récorr.

a. $\ln(5x-3)\geqslant 0$ **b.** $\ln(9x-2)<0$ **c.** $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$

▶ Exercice 136
Pour tout réel x, on pose $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$. Cette quantité est appelée sinus hyperbolique de x.

1. Justifier que sh est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $sh''(x)=sh(x)$.
2. Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. Montrer que pour tout réel x, $(sh\circ f)(x)=x$ et $(f\circ sh)(x)=x$.

▶ Exercice 137
Soit f la fonction $x\mapsto\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout réel $y\in]-1;1[$, il existe un unique réel x tel que $y=f(x)$.
2. Soit $y\in]-1;1[$ et $x\in\mathbb{R}$ tel que $y=f(x)$. Exprimer x en fonction de y.

Propriétés algébriques

▶ Exercice 138
Simplifier les écritures suivantes.

$\ln(3)+\ln(4)-\ln(6)$ $\dfrac{\ln(9)}{\ln(3)}-\ln(1)$

$4\ln(3)-\ln(9)+2\ln(27)$ $\ln(3x^2)-\ln(3)$ avec $x>0$

▶ Exercice 139
Résoudre l'équation $\ln(4x^2)+6\ln(x)-3=0$, d'inconnue $x>0$.

► Exercice 140
Montrer que pour tout réel $x > 1$, $\ln(x^2-1)-\ln(x^2+2x+1)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

► Exercice 141
Que vaut $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)+\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)+\ln\left(\dfrac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\dfrac{49}{50}\right)$?

► Exercice 142
Montrer que pour tout réel x, $\ln(1+e^{-x})=\ln(1+e^x)-x$.

► Exercice 143
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=e^3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=e\sqrt{u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $e^2 \leqslant u_n$.
2. En déduire que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n=\ln(u_n)-2$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de a_n pour tout entier naturel n.
   (b) Montrer que la suite (a_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=\exp\left(2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
   (d) Retrouver la limite de la suite (u_n) à l'aide de cette expression.

► Exercice 144 — Logarithme décimal et applications
Soit a un réel strictement positif et x un réel.

On appelle exponentielle de x en base a le réel noté a^x et qui vaut $e^{x\ln(a)}$.

1. Soit b un réel strictement positif. Montrer que l'unique corr de l'équation $a^x=b$ est $x=\dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}$. Ce nombre est appelé le logarithme de b en base a.

Un cas particulier : le logarithme en base 10 est alors noté log. Ainsi, pour tout réel a strictement positif, $\log(a)=\dfrac{\ln(a)}{\ln(10)}$ et $\log(a)$ est l'unique corr de l'équation $10^x=a$.

2. En chimie, le pH d'une corr vaut $-\log(C)$ où C est la concentration de cette corr en ions hydronium H_3O^+, exprimée en mol.L^{-1}.
   (a) Quel est le pH d'une corr ayant une concentration en ions hydronium de 10^{-4} mol.L^{-1} ?
   (b) Si le pH baisse de 1, par combien a été multipliée la concentration en ion hydronium ?
   (c) Le cola a un pH de 2.5. Quelle est sa concentration en ions hydronium ?
   (d) On dit qu'une corr est basique si son pH est strictement supérieur à 7. A quelles concentrations cette situation correspond-elle ?
3. Le niveau de bruit d'une source sonore se mesure en décibels.
   La formule qui donne le niveau de bruit N en fonction de l'intensité I de la source, exprimée en W.m^{-2} est $N=10\log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0=10^{-12}$ W.m^{-2}.
   (a) Quelle est l'intensité sonore d'une avion qui décolle avec un niveau de bruit de 120 dB ?
   (b) De combien de dB le niveau sonore augmente-t-il lorsque l'intensité sonore double ?
   (c) Une cri possède un niveau sonore de 80 dB. On admet que quand plusieurs personnes crient, les intensités s'ajoutent. Combien doit-on réunir de personnes pour que leurs cris réunis aient une intensité sonore de 120 dB ?

Fonction logarithme népérien

► Exercice 145

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$ **c.** $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2\ln(x))$ **e.** $\lim\limits_{x\to0^+} (2x^2\ln(x))$ **f.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\ln(x))$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x-x)$ **h.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x-x)$ **i.** $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x-\ln(x))$

► Exercice 146

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
4. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
6. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}$ possède une unique corr sur $[1;+\infty[$. Donner une valeur approchée de cette corr à 10^{-2} près.
7. Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m, le nombre de corrs de l'équation $f(x)=m$.

► Exercice 147

Pour tout réel $x>0$, on pose $f(x)=(\ln(x))^2$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal. Attention, $(\ln(x))^2\neq\ln(x^2)$!

1. Résoudre l'équation $f(x)=1$ sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
3. Construire le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.
5. Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer, selon la valeur du réel m, le nombre de corrs de l'équation $f(x)=m$.

► Exercice 148

Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.

► Exercice 149

A l'aide du logarithme, déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant les conditions suivantes.

a. $2^n\geqslant 40000$ **b.** $1.01^n\geqslant 2$ **c.** $0.7^n\leqslant 10^{-3}$

d. $121\times 0{,}97^{2n+1}\leqslant 1$ **e.** $3\times 1{,}1^n-150\geqslant 365$ **f.** $10^{12}\times 2^{-n}\leqslant 0{,}1$

► Exercice 150

Résoudre l'inéquation $(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)<0$ sur $\mathbb{R}$. On précisera le domaine de définition de cette expression.

► Exercice 151

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n par $u_n=\dfrac{7}{8}u_n+1$. Pour tout entier naturel n, on pose alors $a_n=u_n-8$.

1. Montrer que la suite (a_n) est géométrique de raison $\dfrac{7}{8}$ et déterminer son premier terme.
2. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n=8-3\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?
3. Déterminer le plus petit entier n à partir duquel $u_n\geqslant 7{,}999$.

► Exercice 152

La population d'une ville augmente de 3% chaque année. Après combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

► Exercice 153

Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(1+e^x)$. Cette fonction, utilisée en intelligence artificielle, est appelée fonction SoftPlus.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée f'.
3. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction f.
4. Pour tout réel x, on pose $g(x)=f(x)-x$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, $g(x)=\ln(1+e^{-x})$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.
5. (a) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$ en incluant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) En déduire que pour tout réel x, $f(x)\geqslant x$.
6. Construire l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

► Exercice 154

On considère la fonction f définie pour tout réel $x>0$ par $f(x)=\sqrt{x}+\ln(x)$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$. Montrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}$.
3. Quel est le sens de variations de la fonction f ?
4. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha>0$ tel que $\sqrt{\alpha}=-\ln(\alpha)$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

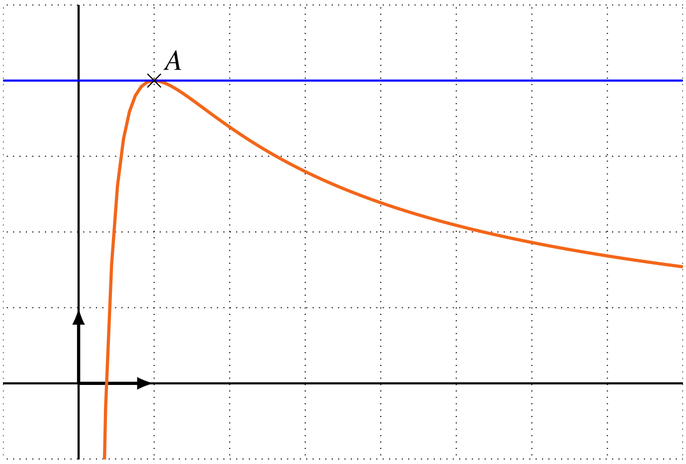
► Exercice 155

Faire l'étude complète de la fonction $x\mapsto\ln(e^x-x)$ sur $\mathbb{R}$ puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal.

Exercices de synthèse

▶ Exercice 156 — Amérique du Nord 2021

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1;4)$.



1. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a+b\ln(x)}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des réels fixés.}$$

2. Démontrer que pour tout réel x strictement positif, on a

$$f'(x) = \frac{b-a-b\ln(x)}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs de a et de b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{4+4\ln(x)}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f''(x) = \frac{-4+8\ln(x)}{x^3}.$$

7. Construire le tableau de signes de f''. Nous verrons dans un prochain chapitre que le signe de f'' nous permet de déterminer la convexité de la fonction f.

► Exercice 157 — Métropole 2022

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - x\ln(x)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -\ln(x)$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite $(un_)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ u_{n+1} = u_n - u_n\ln(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur $[0,5;1]$.
   Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) converge.
   (b) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0;+\infty[$ par $f_k(x) = kx - x\ln(x)$.

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel k, $x_k = y_x$.

► Exercice 158 — Centres étrangers 2021

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de 0,05.

On possède un test de dépistage de cette maladie. On considère un échantillon de n personnes ($n > 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Justifier que X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Justifier que $\mathbb{P}(X_n = 1) = 0.95^n$.
3. Que représente l'espérance de X_n dans ce cadre ? Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0{,}95^n$.
4. On considère la fonction f définie sur $[20;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0{,}95)$.
   (a) Montrer que f est décroissante sur $[20;+\infty[$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique corr a sur $[20;+\infty[$. Donner un encadrement à 0,1 près de cette corr.
   (c) En déduire le signe de f sur $[20;+\infty[$.
5. On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans cet exercice, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus. La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$. En utilisant les questions précédentes, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

21. Corrigés

▶ Correction 133

a. Soit $x > 0$, $2\ln(x)+1=3 \Leftrightarrow 2\ln(x)=2 \Leftrightarrow \ln(x)=1 \Leftarrow x=e$. $S=\{e\}$.

b. Soit $x > \dfrac{4}{3}$, $\ln(3x-4)=0 \Leftrightarrow 3x-4=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$. $S=\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{3x+2}=4 \Leftrightarrow 3x+2=\ln(4) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(4)-2}{3}$. $S=\left\{\dfrac{\ln(4)-2}{3}\right\}$.

d. Soit $x > \dfrac{2}{3}$. $2+3\ln(3x-2)=-1 \Leftrightarrow \ln(3x-2)=-1 \Leftrightarrow 3x-2=e^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{e^{-1}+2}{3}$. $S=\left\{\dfrac{e^{-1}+2}{3}\right\}$.

e. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\ln(e^{3x+4})=5 \Leftrightarrow 3x+4=5 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$. $S=\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

f. Puisque $3-\pi<0$, l'équation $e^{2x-3}=3-\pi$ ne possède pas de corr réelle.

g. Soit $x \in \mathbb{R}$. $(e^{2x+1}-3)(e^x+5)=0 \Leftrightarrow e^{2x+1}-3=0$ ou $e^x+5=0$.

- $e^{2x+1}-3=0 \Leftrightarrow e^{2x+1}=3 \Leftrightarrow 2x+1=\ln(3) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(3)-1}{2}$.
- $e^x+5=0$ est impossible puisque $e^x>0$.

Ainsi, $S=\left\{\dfrac{\ln(3)-1}{2}\right\}$.

h. Soit $x>0$. $(\ln(x))^2-\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x)-1)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0$ ou $\ln(x)=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=e$. $S=\{1,e\}$.

i. Soit $x>e, (x-1)\ln(x-e)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $\ln(x-e)=0$. Or,

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. 1 n'est cependant pas une corr car il n'est pas dans l'ensemble de récorr.
- $\ln(x-e)=0 \Leftrightarrow x-e=1 \Leftrightarrow x=1+e$.

L'unique corr de cette équation est donc $1+e$.

▶ Correction 134

Pour tout réel x, on pose $X=e^x$. Ainsi,

$$3e^{2x}+9e^x-30=0 \Leftrightarrow 3X^2+9X-30=0.$$

Cette deuxième équation est une équation du second degré. Le discriminant du polynôme $3X^2+9X-30$ vaut 441 qui est strictement positif. Ce polynôme a donc deux racines qui sont 2 et -5.

On a donc $X=2$ ou $X=-5$, c'est-à-dire $e^x=2$ (et donc $x=\ln(2)$) ou $e^x=-5$ ce qui est impossible.

L'unique corr de l'équation est donc $\ln(2)$.

▶ Correction 135

a. $\ln(5x-3)$ existe si et seulement si $5x-3>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{5}{3}$. Soit donc $x>\dfrac{5}{3}$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(5x-3)\geqslant 0$ si et seulement si $5x-3\geqslant 1$ soit $x\geqslant\dfrac{4}{5}$. $S=\left[\dfrac{4}{5}+\infty\right[$.

b. $\ln(9x-2)$ existe si et seulement si $9x-2>0$, c'est-à-dire $x>\dfrac{2}{9}$. Soit donc $x>\dfrac{2}{9}$. Alors par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(9x-2)<0$ si et seulement si $9x-2<1$ soit $x<\dfrac{1}{3}$. Ainsi, $S=\left]\dfrac{2}{9};\dfrac{1}{3}\right[$.

c. $\ln(3x+1)$ existe si et seulement si $3x+1>0$, c'est-à-dire $x>-\dfrac{1}{3}$. Par ailleurs, $\ln(3-x)$ existe si et seulement si $3-x>0$, c'est-à-dire $x<3$. Les deux expressions existent toutes deux lorsque $-\dfrac{1}{3}<x<3$. Soit donc $x\in\left]-\dfrac{1}{3};3\right[$. Alors, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\ln(3x+1)\geqslant\ln(3-x)$ si et seulement si $3x+1\geqslant 3-x$ soit $x\geqslant\dfrac{1}{2}$. Finalement, $S=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[\cap\left]-\dfrac{1}{3};3\right[$ soit $S=\left[\dfrac{1}{2};3\right[$.

► Correction 136

sh est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$sh'(x)=\frac{e^x-(-e^{-x})}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

et

$$sh''(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=sh(x).$$

Pour tout réel x,

$$sh\circ f(x)=\frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}{2}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2}.$$

Ainsi

$$sh\circ f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}{2(x+\sqrt{x^2+1})}=\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+x^2+1-1}{2(x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x(x+\sqrt{x^2+1})}{2(x+\sqrt{x^2+1})}=x.$$

Par ailleurs, pour tout réel x,

$$f\circ sh(x)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2+1}\right)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}+1}\right).$$

Or,

$$\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}+1=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2.$$

Ainsi,

$$f\circ sh(x)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\right).$$

Or, pour tout réel x, $e^x+e^{-x}\geqslant 0$ et donc $\sqrt{\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. Ainsi,

$$f\circ sh(x)=\ln\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\ln\left(\frac{2e^x}{2}\right)=x.$$

► **Correction 137**
D'une part, puisque $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x}{e^x} \times \frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Ainsi, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Enfin, f est continue sur $]-\infty;+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $y \in]-1;1[$, il existe un réel x tel que $y = f(x)$.

De plus, f est dérivable et pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout réel $y \in]-1;1[$, le réel x tel que $f(x) = y$ est unique.

Soit donc $y \in]-1;1[$ et x le réel tel que $y = f(x)$. On a alors $y = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et donc $y(e^x+1) = e^x - 1$.

Ainsi, $ye^x + y = e^x - 1$. On a alors $ye^x - e^x = -1-y$ soit $e^x(y-1) = -1-y$ et donc $e^x = \frac{-1-y}{y-1} = \frac{1+y}{1-y}$.

Puisque $y \in]-1;1[$, on a bien $\frac{1+y}{1-y} > 0$ puisque c'est le quotient de deux réels strictement positifs.

Finalement, on a $x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

► **Correction 138**

- $\ln(3)+\ln(4)-\ln(6) = \ln\left(\frac{3\times4}{6}\right) = \ln(2)$
- $\frac{\ln(9)}{\ln(3)} - \ln(1) = \frac{\ln(3^2)}{\ln(3)} - 0 = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)} = 2$
- $4\ln(3)-\ln(9)+2\ln(27) = 4\ln(3)-\ln(3^2)+2\ln(3^3) = 4\ln(3)-2\ln(3)+6\ln(3) = 8\ln(3)$.
- $\ln(3x^2)-\ln(3) = \ln(3)+\ln(x^2)-\ln(3) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$ car $x > 0$

► **Correction 139**
Pour tout $x > 0$

$$\ln(4x^2)+6\ln(x)-3 = \ln(4)+\ln(x^2)+6\ln(x)-3 = 8\ln(x)+\ln(4)-3.$$

Ainsi

$$\ln(4x^2)+6\ln(x)-3 = 0 \Leftrightarrow 8\ln(x)+\ln(4)-3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3-\ln(4)}{8} \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{3-\ln(4)}{8}\right).$$

► **Correction 140**
Pour tout réel $x > 1$,

$$\ln(x^2-1)-\ln(x^2+2x+1) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right) = \ln\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

► **Correction 141**
$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{49}{50}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{49}{50}\right)$.

Après simplification, il reste donc

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{49}{50}\right)=\ln\left(\frac{1}{50}\right).$$

► **Correction 142**

Pour tout réel x, en factorisant dans le ln par e^{-x}, on a

$$\ln(1+e^{-x})=\ln\left(e^{-x}\times\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)\right)=\ln(e^{-x})+\ln\left(\frac{1}{e^{-x}}+1\right)=-x+\ln(1+e^{x}).$$

► **Correction 143**

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $e^2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$ ».
   - Initialisation : On a $u_0=e^3$ et $u_1=e\times\sqrt{e^3}=e^{5/2}$. On a bien $e^2\leqslant u_1\leqslant e$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $e^2\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n$. En appliquant la fonction racine carrée, qui est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a alors $e\leqslant\sqrt{u_{n+1}}\leqslant\sqrt{u_n}$. On multiplie alors par e et on obtient $e\times e\leqslant e\sqrt{u_{n+1}}\leqslant e\sqrt{u_n}$ soit $e^2\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers une limite que l'on note l. Par ailleurs, la fonction $x\mapsto e\sqrt{x}$ est continue sur $[e^2;+\infty[$. On a donc $l=e\sqrt{l}$ et donc $l=0$ ou $l=e^2$. L'unique possibilité est alors $l=e^2$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, $a_n=\ln(u_n)-2$ d'où $\ln(u_n)=a_n+2$ et $u_n=e^{a_n+2}$

   (b) Pour tout entier naturel n,

   $$a_{n+1}=\ln(u_{n+1})-2=\ln(e\sqrt{u_n})-2=\ln(e)+\ln(\sqrt{u_n})-2=1+\frac{1}{2}\ln(u_n)-2=\frac{1}{2}(\ln(u_n)-2)=\frac{1}{2}a_n.$$

   (c) La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $a_0=\ln(u_0)-2$
   On a donc $a_0=\ln(e^3)-2=3-2=1$.

   (d) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n=\exp(a_n+2)=\exp\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

   (e) Puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right)=2$. La fonction exponentielle étant continue en 2, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e^2$.

► **Correction 144**

1. On a $a^x=b$ si et seulement si $e^{x\ln(a)}=b$ si et seulement si $x\ln(a)=\ln(b)$ si et seulement si $x=\dfrac{\ln(a)}{\ln(b)}$.
2. (a) Le pH de cette corr vaut $-\log(10^{-4})=-\dfrac{\ln(10^{-4})}{\ln(10)}=-\dfrac{-4\ln(10)}{\ln(10)}=4$.

   (b) Soit pH_1 et pH_2 tel que $pH_1=pH_2-1$. Notons C_1 et C_2 les concentrations en ions hydronium associées. En remarquant que $1=\log(10)$, on a alors $-log(C_1)=-\log(C_2)-\log(10)$ soit $\log(C_1)=\log(C_2)+\log(10)$ et donc $\log(C_1)=\log(10C_2)$ Ainsi, $C_1=10C_2$. Si le pH baisse de 1, c'est que la concentration en ions hydronium a été multipliée par 10.

   (c) Notons C la concentration en ions hydronium du cola. On a $-\log(C)=2.5$, d'où $-\dfrac{\ln(C)}{\ln(10)}=2.5$ et donc $C=e^{-2.5\ln(10)}\simeq 3.2\times10^{-3}$ mol.L-1.

   (d) Notons C la concentration correspondant à un pH supérieur à 7. On a alors $-\log(C)\geqslant 7$ soit $C\leqslant 10^{-7}$ mol.L^{-1}.

3. (a) Notons I l'intensité sonore d'un avion au décollage.
   On a alors $120 = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ soit $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 12$. Ainsi, $\frac{I}{I_0} = 10^{12}$ et donc $I = 10^{12}I_0 = 1$ W.m^{-2}.
   (b) On a $10\log\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10\log(2) + 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. Or, $10\log(2) \simeq 3$. Lorsque l'intensité sonore est multipliée par 2, le niveau sonore augmente de 3 décibels.
   (c) On cherche n tel que $10\log\left(\frac{nI}{I_0}\right) = 120$ sachant que $10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 80$.
   Or, $10\log\left(\frac{nI}{I_0}\right) = 10\log(n) + 10\log\left(\frac{nI}{I_0}\right) = 10\log(n) + 80$.
   Il faut donc que $10\log(n) + 80 = 120$ soit $\log(n) = 4$ et donc $n = 10^4$. Il faut réunir 10000 personnes pour que le niveau sonore cumulé de leur cri atteigne 120 dB.

► **Correction 145**

a. Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(1-x) = +\infty$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x} = \dfrac{x^2}{x^2} \times \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1$. La fonction ln étant continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right) = \ln(1) = 0$.

c. $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-2x+3) = 3$ et $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+x) = 0^+$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+x}\right) = +\infty$.

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2\ln(x)) = +\infty$.

e. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to0^+}(2x^2\ln(x)) = 0$.

f. Pour tout $x > 1$, $x - \ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$. Or, par croissances, comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(x)) = +\infty$.

g. $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x - x) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x-x) = +\infty$.

h. Pour tout $x > 0$, $e^x - x = e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(e^x-x) = +\infty$.

i. Pour tout réel $x > 0$, $e^x - \ln(x) = e^x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{x}{e^x}\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - \ln(x)) = +\infty$.

► **Correction 146**

1. Soit $x > 0$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
2. On a $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\ln(x)) = -\infty$ et donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

Par ailleurs, pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

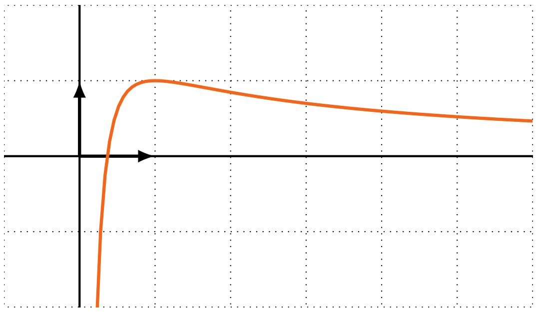
3. Pour tout réel $x>0$, on pose $u(x)=1+\ln(x)$ et $v(x)=x$. u et v sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et v ne s'y annule pas. Ainsi, f est dérivable sur $]0;+\infty$ et pour tout réel $x>0$,

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln(x))\times 1}{x^2}=-\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

4. Pour tout réel $x>0$, on a $x^2>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-\ln(x)$. Or, $-\ln(x)\leqslant 0$ si et seulement si $x\geqslant 1$. On obtient ainsi le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5. On trace l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



6. La fonction f est continue sur $[1;+\infty[$. De plus, $f(1)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c dans $[1;+\infty[$ tel que $f(c)=\dfrac{1}{2}$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, ce réel est unique. A l'aide de la calculatrice, on trouve $x\simeq 5{,}36$.
7. Si $m\leqslant 0$, l'équation $f(x)=m$ possède une unique corr sur $]0;+\infty[$.
Si $0<m<1$, cette équation possède deux corrs. Si $m=1$, il n'y a qu'une corr.
Enfin, si $m>1$, l'équation $f(x)=m$ n'a aucune corr.

► Correction 147

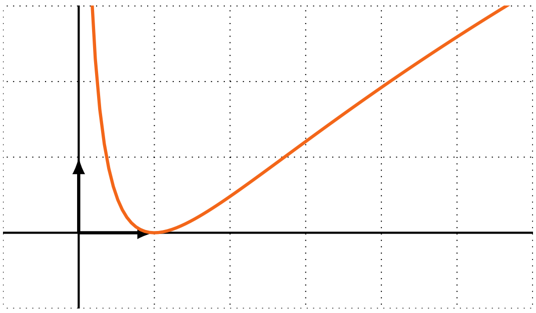
1. Soit $x>0$

$$f(x)=1\Leftrightarrow(\ln(x))^2=1\Leftrightarrow\ln(x)=1 \text{ OU } \ln(x)=-1\Leftrightarrow x=e \text{ OU } x=\frac{1}{e}.$$

2. On a $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.
3. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=2\times\ln(x)\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln(x)}{x}$, qui est du signe de $\ln(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. On trace l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.



5. Si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ n'admet aucune corr sur $]0;+\infty[$.
   Si $m = 0$, cette équation possède une unique corr. Si $m > 0$, il y a deux corrs.

▶ Correction 148

Le discriminant du polynôme $x^2 - 2x + 3$ vaut -8 qui est négatif. Ainsi, pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$. f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + 3$ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+3}$.

Puisque pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x - 2$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

▶ Correction 149

a. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $2^n \geqslant 40000$ si et seulement si $\ln(2^n) \geqslant \ln(40000)$ soit $n\ln(2) \geqslant \ln(40000)$ et, $\ln(2)$ étant positif, $n \geqslant \dfrac{\ln(40000)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 16.

b. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $1.01^n \geqslant 2$ si et seulement si $\ln(1.01^n) \geqslant \ln(2)$ soit $n\ln(1.01) \geqslant \ln(2)$ et, $\ln(1.01)$ étant positif, $n \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(1.01)}$. L'entier recherché est 70.

c. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, $0.7^n \leqslant 10^{-3}$ si et seulement si $\ln(0.7^n) \leqslant \ln(10^{-3})$ soit $n\ln(0.7) \leqslant -3\ln(10)$ et, $\ln(0.7)$ étant négatif, $n \geqslant \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(0.7)}$. L'entier recherché est 20.

d. $121\times 0{,}97^{2n+1}\leqslant 1$ si et seulement si $0{,}97^{2n+1}\leqslant\dfrac{1}{121}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $(2n+1)\ln(0.97)\leqslant -\ln(121)$. En divisant par $\ln(0.97)$ qui est négatif, on obtient $2n+1\geqslant -\dfrac{\ln(121)}{\ln(0.97)}$ et donc $n\geqslant\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{\ln(121)}{\ln(0.97)}-1\right)$. L'entier recherché est 79.

e. $3\times 1{,}1^n-150\geqslant 365$ si et seulement si $1.1^n\geqslant\dfrac{515}{3}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $n\ln(1.1)\geqslant\ln(515)-\ln(3)$ et donc $n\geqslant\dfrac{\ln(515)-\ln(3)}{\ln(1.1)}$. L'entier recherché est 54.

f. $10^{12}\times 2^{-n}\leqslant 0{,}1$ équivaut à $2^{-n}\leqslant 10^{-13}$. Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $-n\ln(2)\leqslant -13\ln(10)$ et donc $n\geqslant\dfrac{13\ln(10)}{\ln(2)}$. L'entier recherché est 44.

► Correction 150

L'expression $(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)$ existe pour tout réel $x>0$. Construisons le tableau de signe de cette expression.

x	0		$\ln(3)/2$		e		$+\infty$
$e^{2x}-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(x)-1$	$\|\|$	$-$		$-$	0	$+$	
$(e^{2x}-3)(\ln(x)-1)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble corr recherché est $S=\left]0;\dfrac{\ln(3)}{2}\right[\cup]e;+\infty[$.

► Correction 151

1. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=u_{n+1}-8=\dfrac{7}{8}u_n+1-8=\dfrac{7}{8}(a_n+8)-7=\dfrac{7}{8}a_n$.
   La suite (a_n) est donc géométrique, de raison $\dfrac{7}{8}$ et de premier terme $a_0=u_0-8=-3$.
2. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n=-3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$ et $u_n=a_n+8=8-3\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$.
3. Soit n un entier naturel. On a $u_n\geqslant 7{,}999$ si et seulement si $8-3\times\left(\dfrac{7}{8}\right)^n\geqslant 7.999$, soit $\left(\dfrac{7}{8}\right)^n\leqslant\dfrac{0.001}{3}$.
   Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, ceci équivaut à $n\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)\leqslant\ln\left(\dfrac{0.001}{3}\right)$ et donc, en divisant par $\ln\left(\dfrac{7}{8}\right)$ qui est négatif, $n\geqslant\dfrac{\ln\left(\frac{0.001}{3}\right)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)}$. L'entier recherché est 60.

► Correction 152

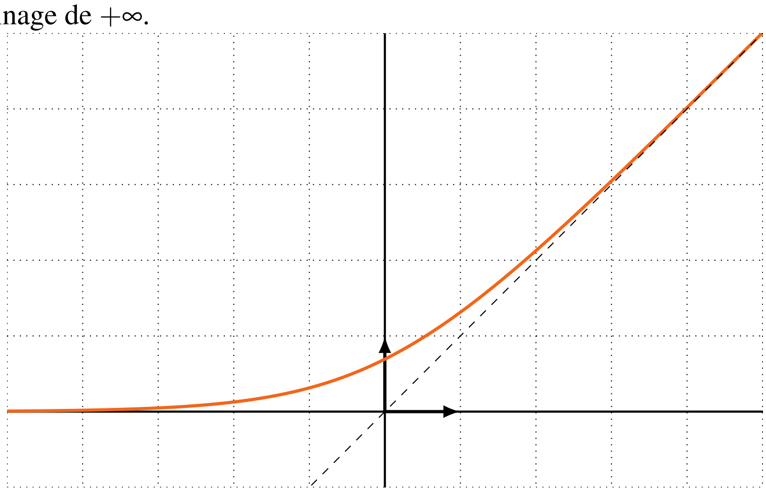
Soit n un entier naturel. Après n années, la population de cette ville a été multipliée par 1.03^n. On cherche donc à résoudre l'équation $1.03^n\geqslant 2$, ce qui équivaut à $n\geqslant\dfrac{\ln(2)}{\ln(1.03)}$. L'entier recherché est 24 : la population aura doublé en 24 ans.

▶ Correction 153

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ et donc $1+e^x > 0$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. f est dérivable comme composition de fonctions dérivables. Pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+e^x) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln(1) = 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$+\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a) Pour tout réel x,
$$g(x) = f(x) - x = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(e^{-x}+1).$$
   (b) Pour tout réel x, $1+e^{-x} > 1$ et donc $\ln(1+e^{-x}) > 0$, par croissance du logarithme népérien sur $[1;+\infty[$. Il en vient que pour tout réel x, $g(x) > 0$, soit $f(x) - x > 0$ et donc $f(x) > x$.
   (c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x}) = 1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. La courbe de f se rapproche de la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

5. 

▶ Correction 154

1. Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{2x} + \dfrac{2}{2x} = \dfrac{\sqrt{x}+2}{2x}$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\sqrt{\alpha} + \ln(\alpha) = 0$ ou encore $\sqrt{\alpha} = -\ln(\alpha)$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 0.49$.

▶ Correction 155

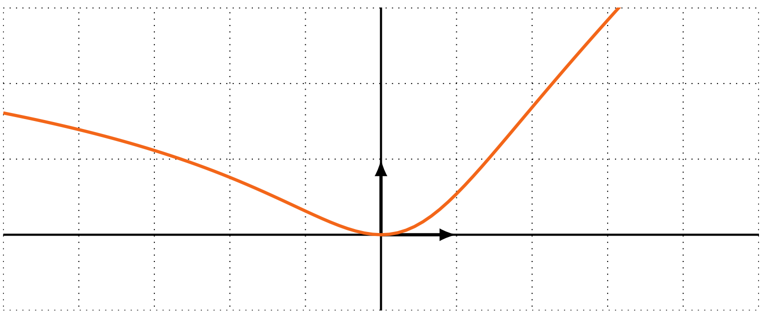
Pour tout réel x, on pose $u(x) = e^x - x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = e^x - 1$. On en déduit le tableau de variations de u.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	0	$+$	
u	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, pour tout réel x, $e^x - x \geqslant 1$ et donc $e^x - x > 0$. f est donc définie sur $\mathbb{R}$. f est également dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. Les variations de f sont les mêmes que les variations de u. On a donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On peut alors tracer l'allure de la courbe de f.



▶ Correction 156

1. D'après le graphique, on a $f(1) = 4$ et $f'(1) = 0$.
2. Pour tout réel x strictement positif,
$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2}.$$
3. D'une part, $f(1) = 4$ d'après le graphique. Or, en utilisant la formule, on a $f(1) = \dfrac{a + b\ln(1)}{1} = a$. Ainsi, $a = 4$. Par ailleurs, $f'(1) = 0$ d'après le graphique, et $f'(1) = \dfrac{b - 4 - b\ln(1)}{1^2} = b - 4$ en utilisant la formule. Il en vient que $b - 4 = 0$ et donc $b = 4$.

4. On a $\lim_{x\to 0^+} (4+4\ln(x)) = -\infty$ et donc $\lim_{x\to 0^+} (f(x)) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4\ln(x)}{x}$. Par croissances comparées et somme de limites, $\lim_{x\to+\infty} (f(x)) = 0$.
5. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-4\ln(x)}{x^2}$ est du signe opposé à celui de $\ln(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

6. Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{-\dfrac{4}{x} \times x^2 - (-4\ln(x)) \times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{x(-4+8\ln(x))}{x^4} = \dfrac{-4+8\ln(x)}{x^3}$.
7. Pour tout $x > 0$, on a $x^3 > 0$ et $-4+8\ln(x) > 0$ si et seulement si $\ln(x) > \dfrac{1}{2}$ soit $x > \sqrt{e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

► **Correction 157**

Partie A

1. Par croissances, comparées, $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
2. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x(1-\ln(x))$. Or, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} (1-\ln(x)) = -\infty$. Par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. (a) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln(x) + 1 = -\ln(x)$.
   (b) On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. On a $f(x) = x$ si et seulement si $x - x\ln(x) = x$ soit $-x\ln(x) = 0$. Puisque $x > 0$, l'unique corr de cette équation est $x = 1$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».

- On a $u_0 = 0.5$ et $u_1 = 0.5 - 0.5\ln(0.5) \simeq 0.84$. On a bien $0.5 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $0.5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0.5;1]$ on a alors $f(0.5) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)$. Or, $f(0.5) \geqslant 0.5$ et $f(1) = 1$. Ainsi, on a $0.5 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. (a) D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.
   (b) Puisque la fonction f est continue sur $[0.5;1]$ et que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0.5;1]$, alors $f(\ell) = \ell$. Or, l'unique corr de cette équation sur cet intervalle est 1. Ainsi, $\ell = 1$.

Partie C

Pour tout réel k, pour tout réel x, f_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f_k'(x) = k - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = k - 1 - \ln(x)$.

Or, $f_k'(x) \leqslant 0$ si et seulement si $k - 1 - \ln(x) \leqslant 0$ si et seulement si $k - 1 \leqslant \ln(x)$ si et seulement si $x \geqslant e^{k-1}$

x	0		e^{k-1}		$+\infty$
$f_k'(x)$		$+$	0	$-$	
f_k		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, f_k admet un maximum en $x_k = e^{k-1}$.

Par ailleurs, $f_k(x_k) = ke^{k-1} - e^{k-1} \times \ln(e^{k-1}) = ke^{k-1} - (k-1)e^{k-1} = e^{k-1}$.

► Correction 158

1. Si le test est négatif on aura fait un test : dans ce cas, on a $X_n = 1$. Sinon, on aura fait un test joint puis n tests individuels : on aura alors $X_n = n+1$.
2. $\mathbb{P}(X_n = 1)$ est la probabilité que l'on ne fasse qu'un test : cela signifie que le test des n personnes est négatif et donc qu'elles ne sont pas malades. La probabilité qu'une personne au hasard soit malade est égale à 0.05. La probabilité qu'une personne au hasard soit saine est donc de 0.95. Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, on suppose ceux-ci indépendants. La probabilité que les n personnes soient saines vaut donc 0.95^n.
3. Puisque X_n ne peut prendre que les valeurs 1 et $n+1$, on a alors $\mathbb{P}(X_n = n+1) = 1 - 0.95^n$.
   Ainsi, $E[X_n] = (n+1) \times \mathbb{P}(X_n = n+1) + 1 \times \mathbb{P}(X_n = 1) = (n+1)(1-0.95^n) + 0.95^n$ et donc $E[X_n] = n + 1 - n \times 0.95^n$.
   Cette espérance représente le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon de n personnes.
4. (a) f est dérivable sur $[20;+\infty[$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(0.95)$.
   Or, $x \geqslant 20$ et donc $\dfrac{1}{x} \leqslant 0.05$ puis $f'(x) \leqslant 0.05 + \ln(0.95) < 0$. f est strictement décroissante sur $[20;+\infty[$.
   Par ailleurs, pour tout réel $x \geqslant 20$, $f(x) = x\left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \ln(0.95)\right)$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x)}{x} + \ln(0.95)\right) = \ln(0.95) < 0$.
   Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(b) La fonction f est continue sur $[20;+\infty[$. On a $f(20) \simeq 1.97$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha \geqslant 20$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur cet intervalle, une telle corr est unique. On trouve $87 < \alpha < 87.1$.

(c) En utilisant les deux questions précédentes, on en déduit que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in [20;\alpha]$ et $f(x) \leqslant 0$ si $x \in [\alpha;+\infty[$.

5. Soit $n \geqslant 20$. On a $E(X_n) < n$ si et seulement si $n+1-n\times 0.95^n < n$ soit $1 < n \times 0.95^n$.
On applique le logarithme, qui est strictement croissant sur $[1;+\infty[$. Ainsi, $E(X_n) < n$ si et seulement si $0 < \ln(n\times 0.95^n)$.
Tester toutes les personnes conduira à moins d'analyses qu'avec la méthode groupée pour des échantillons de 20 à 87 personnes au maximum. Au delà il vaut mieux utiliser la méthode de test groupés.

VIII

Convexité

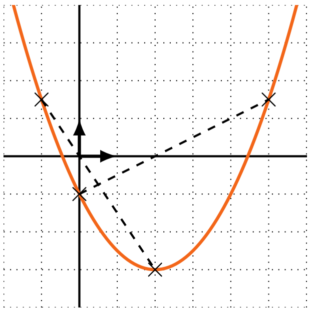
22. Cours : Convexité

1 Convexité, concavité

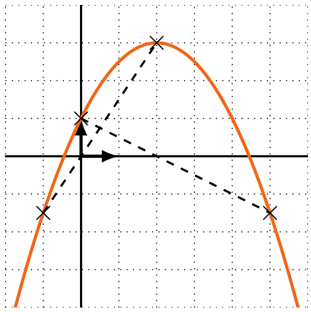
Définition 25 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- On dit que f est *convexe* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.
- On dit que f est *concave* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.

Fonction convexe

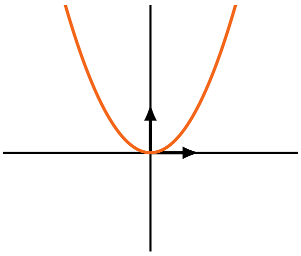


Fonction concave

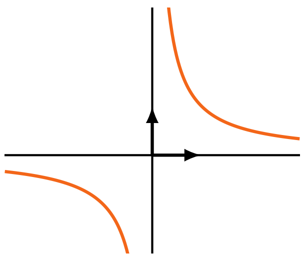


Rappel de certaines courbes représentatives

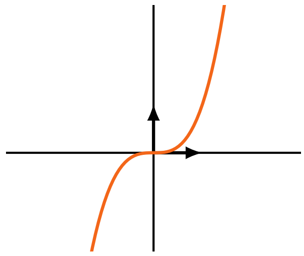
$x \mapsto x^2$



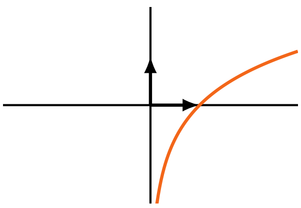
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



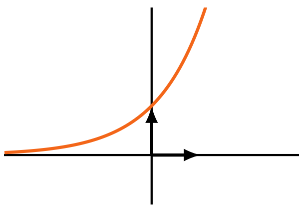
$x \mapsto x^3$



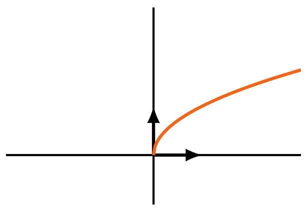
$x \mapsto \ln(x)$



$x \mapsto \mathrm{e}^x$

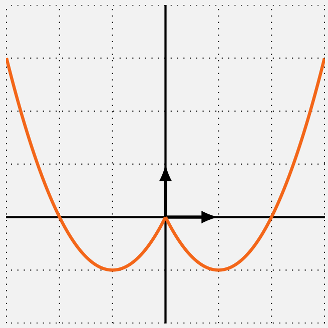


$x \mapsto \sqrt{x}$



■ **Exemple 83 :** Les fonction $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$. ■

■ **Exemple 84 :** Attention : on parle bien de convexité sur un intervalle. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ que f est aussi convexe sur $[a,c]$.



La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[0;3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3,3]$. ■

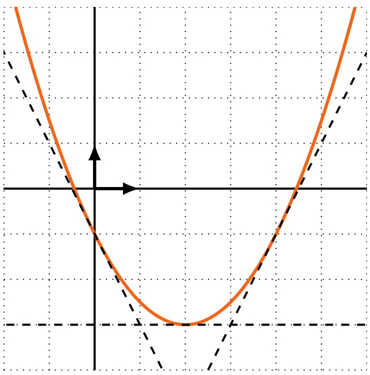
2 Fonctions dérivables

2.1 Caractérisation des fonctions convexes

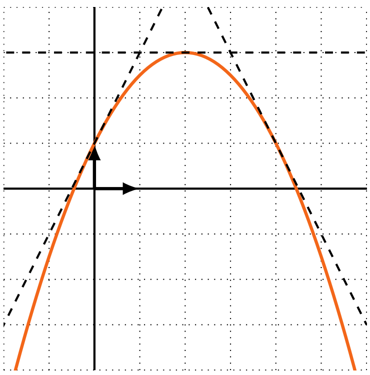
Propriété 35 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- f est convexe sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



■ **Exemple 85 :** Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a un réel.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
- La tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, c'est-à-dire $y = 2ax - 2a^2 + a^2$ ou encore $y = 2ax - a^2$.

- Pour tout réel x,

$$f(x)-(2ax-a^2)=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2\geqslant 0.$$

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de sa tangente à l'abscisse a, et ce, peu importe le réel a choisi. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

■

Propriété 36 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

De cette propriété vient naturellement la suivante...

Propriété 37 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$.
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f''(x)\leqslant 0$.

L'étude de la convexité d'une fonction revient à l'étude de signe de sa dérivée seconde (si celle-ci existe, bien entendu).

Démonstration 32 : **Si $f''\geqslant 0$, alors f est convexe** : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$.

Soit $a\in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Pour tout $x\in I$, posons alors $g(x)=f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))$. g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x\in I$, on $g'(x)=f'(x)-f'(a)$ et $g''(x)=f''(x)$.

Ainsi, puisque pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$, on a aussi $g''(x)\geqslant 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a)=0$. Résumons toutes ces informations dans un tableau.

x		a	
$g''(x)$		$+$	
g'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$
$g(x)$	$+$	0	$+$

Finalement, pour tout $x\in I$, $g(x)\geqslant 0$, ce qui signifie que $f(x)\geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$: la courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a. □

■ **Exemple 86 :** Pour tout entier naturel pair $n \geqslant 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En effet, la dérivée seconde de cette fonction est la fonction $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$.
Or, n étant pair, $n-2$ l'est aussi, et pour tout réel x, on a donc $x^{n-2} \geqslant 0$. ■

■ **Exemple 87 :** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$, qui est positif si et seulement si x l'est aussi. ■

2.2 Point d'inflexion

Définition 26 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

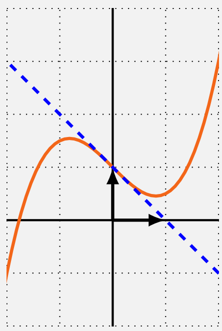
Un *point d'inflexion* est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

Propriété 38 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si f présente un point d'inflexion à l'abscisse a, alors $f''(a) = 0$.
- Réciproquement, si $f''(a) = 0$ et f'' **change de signe** en a, alors f présente un point d'inflexion en a.

Cela rappelle naturellement le cas des extremum locaux. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Cependant, si $f'(a) = 0$, f admet un extremum local en a seulement si f' change de signe en a.

■ **Exemple 88 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - x + 1$.



f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 1$ et $f''(x) = 3x$.

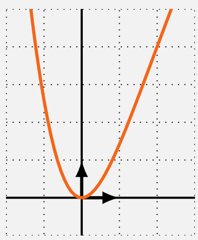
Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.

f est donc concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

La courbe de f présente un point d'inflexion à l'abscisse 0. ■

Attention : l'annulation de la dérivée seconde n'est pas une condition suffisante de présence d'un point d'inflexion !

■ **Exemple 89 :** Pour tout réel x, on pose $g(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2$.



La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$g'(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ et $g''(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
Ainsi, pour tout réel x, $g''(x) \geqslant 0$. g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
Puisqu'il n'y a pas de changement de convexité, g ne présente pas de point d'inflexion, et ce, même si $g''(2) = 0$. ■

3 Inégalités de convexité

3.1 Inégalités de milieux

Propriété 39 : Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

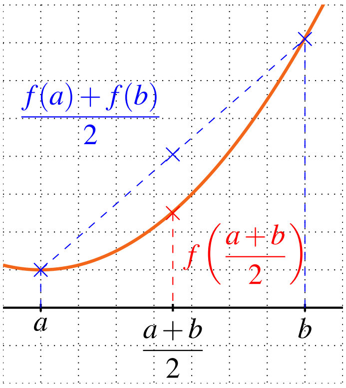
Démonstration 33 : On considère les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.

Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$

Or, la fonction f étant convexe sur I, le segment $[AB]$ se situe au-dessus de la courbe représentative de f. En particulier,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



□

■ **Exemple 90 :** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b, $\exp\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{e^a+e^b}{2}$.
■

Propriété 40 : Soit f une fonction concave sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

■ **Exemple 91 :** La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

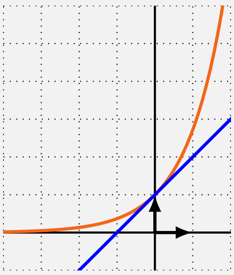
Ainsi, pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. ■

3.2 Inégalités avec les tangentes

La convexité des fonctions dérivables permet d'établir des inégalités en utilisant les équations des tangentes.

■ **Exemple 92 :** Montrons que pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x-0)+\exp(0)$, c'est-à-dire $y = x+1$.
Puisque la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe de la fonction exponentielle est donc au-dessus de toutes ses tangentes et donc, en particulier, la tangente au point d'abscisse 0. On a donc, pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

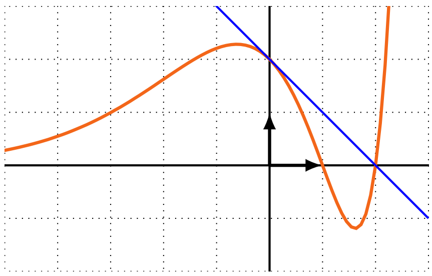


■

23. Exercices

Convexité

► Exercice 159
On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a également tracé la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
2. Donner une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f'(-3)$.
4. La fonction f semble-t-elle convexe ou concave sur $[-5\,;\,-2]$? sur $[-2\,;\,1]$? sur $[1\,;2]$?

► Exercice 160
On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5	0	3
f	-3 ↗	2 ↘	$-\infty$

On sait de plus que f est convexe sur $[-5;-2]$ puis concave sur $[-2;3]$. Tracer une courbe représentative compatible avec ces données.

► Exercice 161
L'objectif de cet exercice est de démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ dans ce repère.

1. **Cas particulier** : On considère les points A et B de coordonnées respectives $(-2;4)$ et $(3;9)$.
   (a) Justifier que ces points appartiennent bien à la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) Vérifier que l'équation réduite de la droite (AB) est $y = x+6$.
   (c) Étudier le signe de $x^2-(x+6)$ sur l'intervalle $[-2;3]$ et conclure.
2. **Cas général** Soit a et b deux réels avec $a<b$, $A(a\,,a^2)$ et $B(b\,,b^2)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}$.
   (a) Montrer que l'équation réduite de la droite (AB) est $y=(a+b)x-ab$.
   (b) Étudier le signe de $x^2-((a+b)x-ab)$ sur $[a;b]$ et conclure.

► Exercice 162
En vous inspirant du cas général de l'exercice précédent, montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]0;+\infty[$.

Convexité des fonctions dérivables

► Exercice 163

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit $a > 0$.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif x,
$$f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) = \frac{(a-x)^2}{a^2x}.$$
2. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?

► Exercice 164 — Polynésie 2022

On considère une fonction f définie et dérivable sur $|-2;2]$. Le tableau de variations de la fonction f', dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2;2]$ est donné par :

x	2		-1		0		2
f'	1	↘	0	↘	-2	↗	-1

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?

a. f est convexe sur $[-2;-1]$.

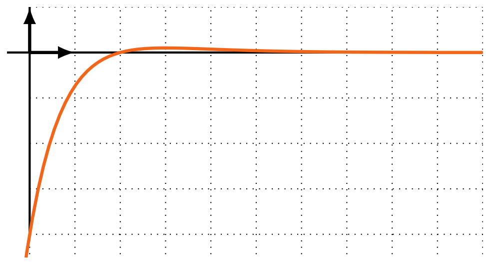
b. f est concave sur $[0;1]$.

c. f est convexe sur $[-1;2]$.

d. f est concave sur $[-2;0]$.

► Exercice 165

On donne la représentation graphique de la **fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

- f est concave sur $]0;+\infty[$.
- f est convexe sur $]0;+\infty[$.
- f est convexe sur $[0;2]$.
- f est convexe sur $[2;+\infty[$.

► Exercice 166

Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 167

Montrer que la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.

► Exercice 168

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$.
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

► Exercice 169

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

► Exercice 170

Soit a, b, c et d des réels avec $a \neq 0$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet un point d'inflexion.

► Exercice 171

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x^2)$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x
$$f''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$
5. Construire le tableau de signes de f'' et en déduire les intervalles lesquels f est convexe/concave.
6. Donner les équations des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et -1.
7. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse 1 et -1.

► Exercice 172

On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. Justifier que pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,
$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^3}.$$
6. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe/concave.

► Exercice 173 — Amérique du Nord 2022

Vrai ou faux ? On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x(1 - x^2)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

► Exercice 174

Soit f une fonction dérivable, convexe et croissante sur un intervalle $[a; +\infty[$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Inégalités de convexité

► Exercice 175
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0; +\infty[$.

1. Pour tout réel $x > 0$, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
2. f est-elle convexe ou concave sur $]0; +\infty[$?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
4. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$. Représenter graphiquement cette inégalité.

► Exercice 176
Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[0; +\infty[$?
2. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.
3. Quelle inégalité a-t-on redémontré ?

► Exercice 177
En utilisant la tangente à la courbe de la fonction ln en 1, montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

► Exercice 178
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2$.

1. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe/concave.
2. En utilisant une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e, montrer que pour tout réel x dans $]0; e]$,

$$(\ln(x))^2 \geqslant \frac{2}{e}x - 1.$$

► Exercice 179
En utilisant l'inégalité des milieux appliqué à la fonction ln, montrer que pour tous réels strictement positif a et b, on a

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité arithmético-géométrique.

► Exercice 180
On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur D.
3. Montrer que la fonction f est concave sur D.
4. En utilisant l'inégalité des points milieux, montrer que pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercices de synthèse

► **Exercice 181**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal sera notée $\mathscr{C}_f$.

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On y inclura les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,

   $$f''(x) = (16x^2 - 32x + 12)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$

3. En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en chacun des points d'inflexion.
5. Montrer que pour tout réel x, $f(2-x) = f(x)$. Comment interpréter cette propriété ?
6. Représenter l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.

► **Exercice 182 — Centres étrangers 2022**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x strictement positif,

   $$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0;+\infty[$ et les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) \in]0;1[$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout réel x strictement positif,

   $$f(x) \geqslant x.$$

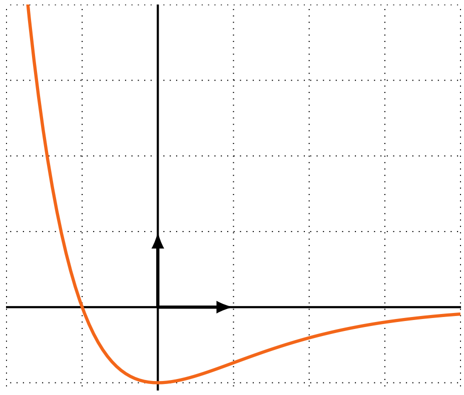
4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$.
   (b) Déduire de la question **3.c.** la croissance de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

▶ Exercice 183 — Métropole 2021
Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



A l'aide de cette courbe, donner, en justifiant

1. Le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$;
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

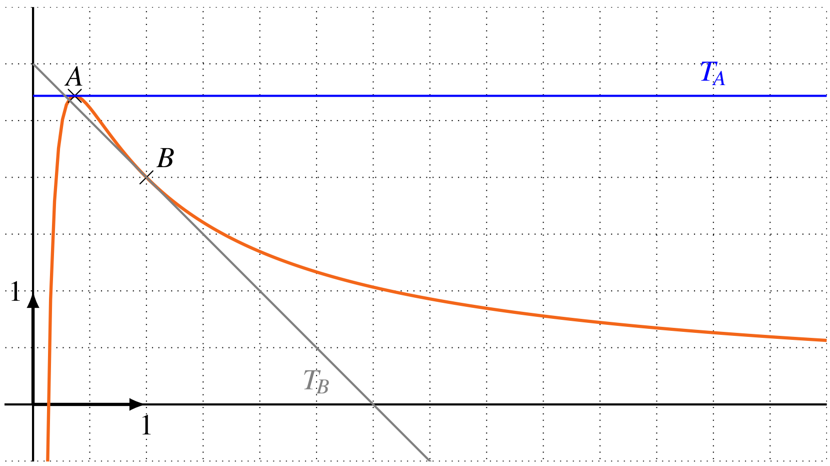
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x}.$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.
   Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
   On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique corr α sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f. Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

▶ Exercice 184 — Sujet zéro 2021
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe C_f au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\,;e\right)$;
- la tangente T_B à la courbe C_f au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;3)$.



Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ et $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie B

On suppose maintenant que la fonction f est définie pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe C_f passe par les points A et B et coupe l'axe des abscisses en un unique point que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$
$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
5. On note f'' la dérivée seconde de f.
   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$,
   $$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$
   (b) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

24. Corrigés

► Correction 159

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0. Ce coefficient directeur vaut -1. Ainsi, $f'(0) = -1$.

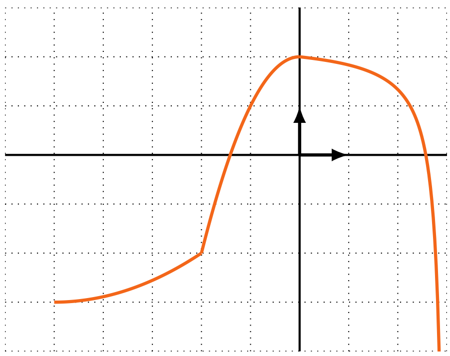
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur -1 et pour ordonnée à l'origine 2. L'équation réduite de cette tangente est donc $y = -x+2$.

f est dérivable et croissante sur $[2;4]$. Ainsi, pour tout réel $x \in [2;4]$, $f'(x) \geqslant 0$. En particulier, $f'(3) \geqslant 0$.

La fonction f semble convexe $[-5\,;-2]$, concave sur $[-2\,;\,1]$ et convexe sur $[1\,;2]$.

► Correction 160

La fonction suivante convient :



► Correction 161

1. (a) Puisque $(-2)^2 = 4$ et que $3^2 = 9$, les points A et B appartiennent bien à la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $\dfrac{9-4}{3-(-2)}$, c'est-à-dire 1. L'équation réduite de la droite (AB) est donc de la forme $y = x+p$. Par ailleurs, le point A appartient à cette droite, ses coordonnées en vérifient donc l'équation. Ainsi, $4 = -2+p$ et donc $p = 6$. L'équation réduite de la droite (AB) est $y = x+6$.
   (c) $x^2-(x+6)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -2 et 3 (ce sont les abscisses des points A et B, qui sont les points d'intersection de la courbe de f et de la droite (AB)). Ainsi, $x^2-(x+6)$ est négatif pour $x \in [-2;3]$, ce qui signifie que sur cet intervalle, $x^2 \leqslant x+6$: la courbe de la fonction f se situe sous la droite (AB).
2. (a) Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $\dfrac{b^2-a^2}{b-a} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a} = a+b$. L'équation réduite de la droite (AB) est donc de la forme $y = (a+b)x+p$. Par ailleurs, le point A appartient à cette droite, ses coordonnées en vérifient donc l'équation. Ainsi, $a^2 = (a+b)a+p$ et donc $p = a^2 - a(a+b) = -ab$. L'équation réduite de la droite (AB) est $y = (a+b)x-ab$.
   (b) $x^2-((a+b)x-ab)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont a et b (ce sont les abscisses des points A et B, qui sont les points d'intersection de la courbe de f et de(AB)).
   Ces racines peuvent par ailleurs se trouver en utilisant les relations entre coefficients et racines. Ainsi, $x^2-((a+b)x-ab)$ est négatif pour $x \in [a;b]$, ce qui signifie que sur cet intervalle, $x^2 \leqslant (a+b)x-ab$: la courbe de la fonction f se situe sous la droite (AB). Ceci valant peu importe les

valeurs de a et b, on trouve bien que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

► Correction 162

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les points $A\left(a;\frac{1}{a}\right)$ et $B\left(b;\frac{1}{b}\right)$. Ces points se trouvent sur la courbe de la fonction inverse.

Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}$, c'est-à-dire $\frac{(a-b)(ab)}{b-a}$ et donc vaut $-\frac{1}{ab}$. L'équation réduite de la droite (AB) est donc de la forme $y=-\frac{1}{ab}x+p$. Par ailleurs, le point A appartient à cette droite, ses coordonnées en vérifient donc l'équation. Ainsi, $\frac{1}{a}=-\frac{a}{ab}+p$ et donc $p=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. L'équation réduite de la droite (AB) est $y=-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Soit donc $x\in[a;b]$. On a

$$\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{ab}{xab}+\frac{x^2}{xab}-\frac{bx}{xab}-\frac{ax}{xab}=\frac{x^2-(a+b)x+ab}{xab}$$

Or, $xab>0$. De plus, $x^2-((a+b)x-ab)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont a et b (ce sont les abscisses des points A et B, qui sont les points d'intersection de la courbe de la fonction inverse et de la droite (AB)). Ces racines peuvent par ailleurs se trouver en utilisant les relations entre coefficients et racines. Ainsi, $x^2-((a+b)x-ab)$ est négatif pour $x\in[a;b]$. On a donc $\frac{1}{x}\leqslant-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$: la courbe de la fonction inverse se situe sous la droite (AB), peu importe les valeurs de a et b. La fonction inverse est donc convexe sur $]0;+\infty[$.

► Correction 163

Pour tout réel strictement positif x,

$$f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))=\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{x}+\frac{x}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$$

d'où

$$f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))=\frac{1}{x}+\frac{x}{a^2}-\frac{2}{a}=\frac{a^2}{xa^2}+\frac{x^2}{xa^2}-\frac{2ax}{xa^2}=\frac{a^2-2ax+x^2}{xa^2}=\frac{(a-x)^2}{xa^2}.$$

Or, puisque $x>0$, cette quantité est positive. Il en vient que pour tout $x>0$, $f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))\geqslant 0$ et donc que $f(x)\geqslant(f'(a)(x-a)+f(a)$. Cela se traduit par le fait que sur $]0;+\infty[$, la courbe de la fonction inverse est au-dessus de toutes ses tangentes : cette fonction est donc convexe sur $]0;+\infty[$.

► Correction 164

Attention à bien remarquer qu'il s'agit des variations de la dérivée ! La fonction f' est décroissante sur $[-2;0]$. f est donc concave sur cet intervalle.

► Correction 165

Attention à bien remarquer qu'il s'agit là de la représentation graphique de la dérivée ! La fonction f' est croissante sur $[0;2]$, f est donc convexe sur cet intervalle.

► Correction 166

La fonction $f:x\mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x)=a\mathrm{e}^{ax+b}$ et $f''(x)=a^2\mathrm{e}^{ax+b}\geqslant 0$. Cette fonction est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

► Correction 167
La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $\ln''(x)=-\dfrac{1}{x^2}\leqslant 0$. Il en vient que la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.

► Correction 168
Pour tout réel x, $f'(x)=9x^2+6x-4$ et $f''(x)=18x+6$.

On a $f''(x)\geqslant 0$ si et seulement si $x\geqslant -\dfrac{1}{3}$. f est donc convexe sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

La convexité de f change à l'abscisse $-\dfrac{1}{3}$. La courbe de f présente donc un point d'inflexion à cette abscisse.

► Correction 169
f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x)=12x^2+4$ qui est strictement positif. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa convexité ne change pas, la courbe de f ne possède donc pas de point d'inflexion.

► Correction 170
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ et $f''(x)=6ax+2b$. Ainsi, f'' change de signe en $-\dfrac{b}{3a}$. f admet donc un point d'inflexion.

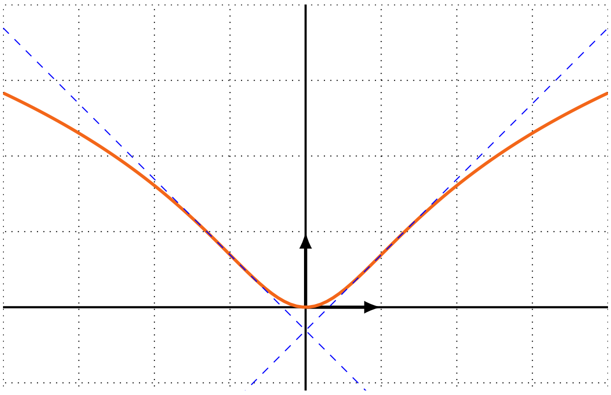
► Correction 171

1. La fonction $u : x\mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or $f=\ln(u)$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=\dfrac{u'}{u}$: pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$.
2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit x un réel,
$$f(x)=1\Leftrightarrow \ln(1+x^2)=1\Leftrightarrow 1+x^2=e\Leftrightarrow x^2=e-1\Leftrightarrow x=\sqrt{e-1}\text{ ou }x=-\sqrt{e-1}.$$
4. f' est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel x,
$$f''(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)2}.$$
Or, $f''(x)\geqslant 0$ si et seulement si $x\in[-1;1]$. f est donc convexe sur $[-1;1]$ et concave sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$.
5. La tangente à la courbe de$f$ à l'abscisse -1 a pour équation réduite
$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=-(x+1)+\ln(2)=-x+\ln(2)-1.$$
La tangente à la courbe de$f$ à l'abscisse 1 a pour équation réduite
$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1+\ln(2).$$

6. On trace la courbe de f dans un repère orthonormé.



► Correction 172

1. D'une part, pour tout réel x, $1+e^{-x}>0$. Il en vient que $f(x)>0$ comme quotient de deux nombres strictement positifs. Par ailleurs, pour tout réel x, $1+e^{-x}>1$, et donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{1+e^{-x}}<1$.
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. En utilisant les règles d'opération sur les limites, on en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=-\dfrac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}=\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}>0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$.
$$f(x)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 3+3e^{-x}=4\Leftrightarrow e^{-x}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow -x=\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\ln\left(\frac{1}{3}\right)=\ln(3).\right.$$
5. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel x, on pose $u(x)=(1+e^{-x})^2$. On a alors, pour tout réel x, $u'(x)=2\times(-e^{-x})\times(1+e^{-x})$. Ainsi, pour tout réel x,
$$f''(x)=\frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2-e^{-x}\times(-2e^{-x}(1+e^{-x}))}{(1+e^{-x})^4}=\frac{e^{-x}(1+e^{-x})(-(1+e^{-x})+2e^{-x})}{(1+e^{-x})^4}$$
et donc
$$f''(x)=\frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}.$$
6. Pour tout réel x, $e^{-x}>0$ et $(1+e^{-x})^3>0$. Ainsi, $f''(x)$ est du signe de $e^{-x}-1$. Or, $e^{-x}-1\geqslant 0$ si et seulement si $e^{-x}\geqslant 1$ soit $-x\geqslant 0$ et donc $x\leqslant 0$. Ainsi, f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[+;+\infty[$.

► Correction 173

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x)=e^x(1-x^2)+e^x(-2x)=e^x(1-2x-x^2)$ puis $h''(x)=e^x(1-2x-x^2)+e^x(-2-2x)=e^x(-1-4x-x^2)=-e^x(x^2+4x+1)$. Pour tout réel x, $e^x>0$. Par ailleurs, x^2+4x+1 est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut 12. Il admet donc deux racines réelles qui correspond aux changements de signes du polynôme x^2+4x+1. En particulier, la courbe de h admet deux points d'inflexion.

▶ Correction 174
Puisque f est dérivable est strictement croissante sur $[a;+\infty[$, il existe donc un réel c dans cet intervalle tel que $f'(c)>0$.

Or, f est convexe sur $[a;+\infty[$, la courbe de f est donc au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier au-dessus de la tangente en c.

Une équation réduite de cette tangente est de la forme $y=f'(c)x-cf'(c)+f(c)$.

Ainsi, pour tout $x\in[a;+\infty[$, on a $f(x)\geqslant f'(c)x-cf'(c)+f(c)$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(c)x-cf'(c)+f(c))=+\infty$, et il en vient que, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

▶ Correction 175
f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Puisque pour tout $x>0$, $f''(x)\leqslant 0$, f est concave sur $]0;+\infty[$.

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{1}{2}(x-1)+1 \quad \text{soit} \quad y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}.$$

Puisque f est concave, elle est sous toutes ses tangentes. Ainsi, pour tout réel $x>0$, $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$.

▶ Correction 176
f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant 0$, $f'(x)=n(1+x)^{n-1}$ et
$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}$. Puisque $x\geqslant 0$, alors $f''(x)\geqslant 0$ et f est donc convexe sur $[0;+\infty[$.

De plus, la tangente à l'abscisse 0 à la courbe de f a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y=1+nx$.

f étant convexe sur $[0;+\infty[$, sa courbe se trouve au-dessus de toutes ses tangente sur cet intervalle. En particulier, pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

On retrouve ici l'inégalité de Bernoulli.

▶ Correction 177
La tangente à la courbe du logarithme népérien à l'abscisse 1 a pour équation

$$y=\ln'(1)(x-1)+\ln(1)=x-1.$$

Le logarithme népérien est concave : sa dérivée seconde est la fonction $x\mapsto-\dfrac{1}{x^2}$ qui est négative sur $]0;+\infty[$. Ainsi, la courbe représentative de la fonction ln se situe sous ses tangentes.

En particulier, pour tout réel x, $\ln(x)\leqslant x-1$.

▶ Correction 178
f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)=\dfrac{2\ln(x)}{x}$ et $f''(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\times x-2\ln(x)\times 1}{x^2}=\dfrac{2-2\ln(x)}{x^2}$.

Or, $x^2 > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $2-2\ln(x)$. Soit donc $x>0$, $2-2\ln(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\ln(x) \leqslant 1$ soit $x \leqslant e$. f est donc convexe sur $]0;e]$ et concave sur $[e;+\infty[$.

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse e a pour équation $y = f'(e)(x-e)+f(e)$.
Or, $f'(e) = \dfrac{2\ln(e)}{e} = \dfrac{2}{e}$ et $f(e) = \ln(e)^2 = 1$.
Ainsi, cette tangente a pour équation $y = \dfrac{2}{e}(x-e)+1$ soit $y = \dfrac{2}{e}x - 2 + 1$ et donc $y = \dfrac{2}{e}x - 1$.

Or, f étant convexe sur $]0;e]$, la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse e.
Ainsi, pour tout $x \in]0;e]$, on a $(\ln(x))^2 \geqslant \dfrac{2}{e}x - 1$.

► Correction 179

La fonction ln étant concave sur $]0;+\infty[$, on a, pour tous réels a et b, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.

En appliquant la fonction exponentielle, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right)$.

Or, $\exp\left(\dfrac{\ln(a)}{2}+\dfrac{\ln(b)}{2}\right) = \exp(\ln(\sqrt{a})+\ln(\sqrt{b})) = \exp(\ln(\sqrt{a})) \times \exp(\ln(\sqrt{b})) = \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Ainsi, pour tous réels strictement positif a et b, on a $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

► Correction 180

f est définie sur l'ensemble des réels x tels que $ln(x) > 0$, c'est-à-dire $]1;+\infty[$.

f est dérivable sur $]1;+\infty[$. De plus, pour tout réel $x>1$, $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui est strictement positif sur l'intervalle étudié. f est donc strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

f' est dérivable sur $]1;+\infty[$. Pour tout réel $x>1$, on pose $u(x) = x\ln(x)$. u est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout réel $x>1$,

$$u'(x) = \ln(x)+1.$$

Ainsi, f' est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout réel $x>1$

$$f''(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{1+ln(x)}{x^2\ln(x)^2}$$

Or, pour $x>1$, $\ln(x)>0$ et donc $f''(x)<0$. f est donc concave sur $]1;+\infty[$.

f étant concave, on a, pour tous réels x et y strictement supérieurs à 1,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

soit

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \frac{\ln(\ln(x))+\ln(\ln(y))}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\ln(x)\times\ln(y)\right) = \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right).$$

En appliquant la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient alors

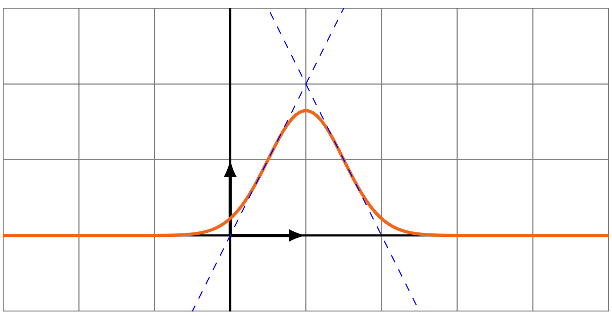
$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

▶ Correction 181

1. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x^2 + 4x - \frac{3}{2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-2x^2 + 4x - \frac{3}{2}\right) = -\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables. Pour tout réel x,
$$f'(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$
Par ailleurs, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-4x+4$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions dérivables. Pour tout réel x,
$$f''(x) = -4 \times \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} + (-4x+4) \times (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} = (16x^2 - 32x + 12)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$
3. $f''(x)$ est du signe de $16x^2 - 32x + 12$. C'est un polynôme du second degré de discriminant $(-32)^2 - 4 \times 12 \times 16 = 256$. Ses racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. f est convexe sur $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. La fonction admet des points d'inflexion aux abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.
4. Les équations des tangentes...
   - A l'abscisse $\frac{1}{2}$: $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $y = 2x$.
   - A l'abscisse $\frac{3}{2}$: $y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$ soit $y = -2x + 4$.
5. Pour tout réel x,
$$f(2-x) = \mathrm{e}^{-2(2-x)^2+4(2-x)-\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{-2(4-4x+x^2)+8-4x-\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{-8+8x-2x^2-4x-\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} = f(x).$$
La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.
6. L'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal est la suivante.



▸ Correction 182

1. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Par ailleurs, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.
   (b) Soit $x > 0$, on a $\ln(x) + 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) La fonction f est strictement décroissante sur $]0;1[$.
   Ainsi, si $0 < x < 1$, alors $1 > f(x) > \dfrac{e-1}{e}$ et en particulier, $f(x) \in]0;1[$.
3. (a) La tangente (T) a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = 1x \times (x-1) + 1$ et donc $y = x$.
   (b) f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}$. En particulier, $f''(x) > 0$. f est donc convexe sur $]0;+\infty[$.
   (c) Puisque f est convexe sur $]0;+\infty[$, la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle. En particulier, elle se trouve au-dessus de la tangente T. Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geqslant x$.
4. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».
      - On a bien $u_0 \in]0;1($. $P(0)$ est donc vraie.
      - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a donc $0 < u_n < 1$. Or, d'après la question **2.c.**, on a $f(u_n) \in]0;1[$ soit $u_{n+1} \in]0;1[$. $P(n+1)$ est donc vraie.
      - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) Pour tout entier naturel n, on a $f(u_n) \geqslant u_n$ d'après la question **3.c.**; Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.
   (c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.

▸ Correction 183
Partie A

1. f' semble positive sur $]-\infty;-1]$ puis négative sur $[-1;+\infty[$. f est donc croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.
2. f' semble décroissante sur $]-\infty;0]$ puis croissante sur $[0;+\infty[$. f est donc concave sur $]-\infty;0]$ puis convexe sur $[0;+\infty($.

Partie B

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
2. (a) Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (-1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $-1-x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

(c) f est continue sur $[-2;-1]$. De plus, $f(-2)=0$ et $f(-1)=e>2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ admet une corr sur l'intervalle $[-2;-1]$. De plus, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, cette corr est unique. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq -1.59$.

3. Pour tout réel x, $f''(x) = -1\mathrm{e}^{-x} + (-1-x)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = x\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, $f''(x)$ est du signe de x. f est donc concave sur $]-\infty;0]$ puis convexe sur $[0;+\infty($. Le point d'abscisse 0 de la courbe $\mathscr{C}$ est un point d'inflexion de la courbe.

► **Correction 184**

Partie A

1. $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\frac{1}{e}$, c'est-à-dire A. On a alors $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$. Par ailleurs, $f'(1)=-1$.
2. La tangente T_B a pour coefficient directeur -1 et pour ordonnée à l'origine 3. Son équation réduite est donc $y=-x+3$.

Partie B

1. On a $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln(\mathrm{e}^{-1})}{\frac{1}{e}} = (2-1)e = e$ et $f(1) = \frac{2+\ln(1)}{1} = 2$. La courbe C_f passe par les points A et B. De plus, pour $x>0$, $f(x)=0$ si et seulement si $2+\ln(x)=0$ soit $x=\mathrm{e}^{-2}$. La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\mathrm{e}^{-2};0)$.
2. En utilisant les règles de calcul sur les limites, on a que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout réel $x>0$, $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et, par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Pour tout $x>0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times 1 - (2+\ln(x))\times 1}{x^2} = \frac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
4. Soit $x>0$. Alors $-1-\ln(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\ln(x) \leqslant -1$ soit $x \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. (a) Pour tout réel $x>0$, $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\times x^2 - (-1-\ln(x))2x}{x^4} = \frac{x(-1+2+2\ln(x))}{x^4} = \frac{1+2\ln(x)}{x^4}$.

(b) Soit $x > 0$. On a $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $1 + 2\ln(x) \geqslant 0$ soit $\ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et $x \geqslant \mathrm{e}^{-1/2}$. f est convexe sur $[\mathrm{e}^{-1/2}; +\infty($.

IX Primitives et équations différentielles

25. Cours : Primitives et équations différentielles

1 Notion d'équation différentielle

Définition 27 — Équation différentielle : Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction notée y et qui fait intervenir les dérivées de cette fonction.

■ **Exemple 93 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{4x-2}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' = 4y$.

En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 4\mathrm{e}^{4x-2}$, c'est-à-dire $f'(x) = 4f(x)$. ■

■ **Exemple 94 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. En effet :

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$u'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$
- Pour tout réel x, on pose $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \times \mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}.$$
Ainsi, pour tout réel x,
$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$
f est donc bien solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. ■

2 Primitive d'une fonction continue

Définition 28 : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une fonction dérivable sur cet intervalle. On dit que F est une *primitive* de f sur I si $F' = f$.

Autrement dit, F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

■ **Exemple 95 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 6x^2 + 4x + 3$ et $F(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 7$. On a bien pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. ■

Théorème 34 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Ce résultat sera démontré (en partie) dans un prochain chapitre. Patience !

Propriété 41 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F_1 et F_2 deux primitives de f sur I.

Alors $F_1 - F_2$ est constante : deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle différent d'une constante.

Démonstration 35 : Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur I. $F_1 - F_2$ est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables sur I. De plus, pour tout réel x dans I

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi, $F_1 - F_2$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I, $F_1 - F_2$ est donc constante sur I. □

Propriété 42 : Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = y_0$.

L'équation différentielle $y' = f$ ayant pour condition initiale $y(x_0) = y_0$ possède une unique solution.

■ **Exemple 96 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ et $F(x) = \ln(x^2+1)$.

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

On cherche alors l'unique primitive F_0 de f qui vaut 5 en 0. Puisque toutes les primitives d'une fonction diffèrent seulement d'une constante, il existe un réel c tel que $F_0 = F + c$ et donc, pour tout réel x,

$$F_0(x) = \ln(x^2+1) + c.$$

Puisque $F_0(0) = 5$, on a alors $\ln(0^2+1) + c = 5$, soit $c = 5$. Pour tout réel x, on a donc

$$F_0(x) = \ln(x^2+1) + 5.$$

■

Propriété 43 : Primitives usuelles

Fonction f	**UNE** Primitive F	Intervalle I
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0;+\infty[$

Le conseil de la leçon : Une fois que vous avez détermine une primitive, dérivez-la ! Vous devez obtenir la fonction de départ. Il est bien plus facile de dériver que de primitiver.

Propriété 44 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, λ, F une primitive de f et G une primitive de g. Alors,

- $F+G$ est une primitive de $f+g$;
- λF est une primitive de λf.

■ **Exemple 97 :** Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x-1} + 5x^2 + \dfrac{3}{x^2}$ sur $I =]0;+\infty[$ est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{x}.$$

■

Propriété 45 : L'essentiel : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telle que pour tout réel $x \in J$, $g(x) \in I$.

$f \circ g$ est une primitive de $g' \times (f' \circ g)$ sur J.

Certaines "formes" de fonction sont à reconnaître pour en calculer les primitives.

- Une primitive d'une fonction de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ où u est une fonction qui ne s'annule pas est $\dfrac{1}{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où u est une fonction strictement positive est $\sqrt{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est une fonction strictement positive est $\ln(u)$.

■ **Exemple 98 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-2}$.

Posons, pour tout réel x, $u(x) = x^2+x-2$. On remarque alors que $f(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{x^2+x-2}$. ■

■ **Exemple 99 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$. Posons, pour tout réel x, $u(x) = 1+\mathrm{e}^{2x}$.

Pour tout réel x, $u(x) > 0$. Par ailleurs, on remarque alors que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(1+\mathrm{e}^{2x})$. ■

Malheureusement, certaines fonctions n'admettent pas de primitive pouvant être exprimées à l'aide de fonctions usuelles : il s'agit là d'un théorème démontré par Liouville dans les années 1830.

L'exemple le plus notable est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, très utilisée en probabilités et dont les applications dans d'autres domaines se comptent par centaines (citons ainsi la balistique, l'évaluation du quotient intellectuel, le traitement du signal, le cours de la bourse...).

3 Equation différentielle du premier ordre

3.1 Equations différentielles homogènes $y' + ay = 0$

Définition 29 : Soit a un réel. L'équation $y' + ay = 0$ ayant pour inconnue une fonction dérivable y sur $\mathbb{R}$ s'appelle "équation différentielle **homogène** du premier ordre, à coefficients constants".

Propriété 46 : Soit a un réel.

Les solutions l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$ où C est un réel quelconque.

De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation différentielle telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration 36 : Soit C un réel. Pour tout réel x, on pose alors $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -a \times C\mathrm{e}^{-ax} = -af(x)$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) + af(x) = -af(x) + af(x) = 0.$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

Réciproquement, soit f une solution de l'équation $y' + ay = 0$. On a alors, pour tout réel x, $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour tout réel x, posons alors $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{ax}$. g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{ax} + af(x)\mathrm{e}^{ax} = \mathrm{e}^{ax}(f'(x) + af(x)) = 0.$$

Ainsi, g est constante : il existe un réel C telle que, pour tout réel x, $g(x) = C$, c'est-à-dire $f(x)\mathrm{e}^{ax} = C$ et donc $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$. □

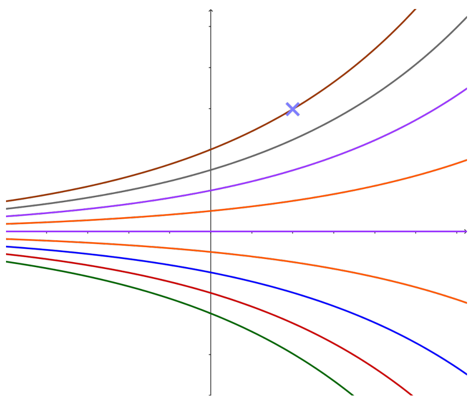
■ **Exemple 100 :** Les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$ où C est un réel.

Cherchons l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(3) = 1$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = C\mathrm{e}^{2x}$.

On a alors $f_0(3) = C\mathrm{e}^6$ d'une part et $f_0(3) = 1$ d'autre part. Ainsi, $C = \dfrac{1}{\mathrm{e}^6} = \mathrm{e}^{-6}$.

Finalement, pour tout réel x, on a $f_0(x) = \mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x-6}$. ■

Ce théorème signifie que si l'on regarde l'ensemble des courbes des fonctions solutions de l'équation $y' = ay$ et que l'on s'intéresse à un point du plan, il existe une unique courbe qui passe par ce point. En particulier, toute fonction solution qui s'annule n'est autre que la fonction nulle.



3.2 Equation différentielle $y'+ay=b$, avec b réel

Définition 30 : Soit a et b deux réels. L'équation $y'+ay=b$ ayant pour inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ s'appelle "équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants et à second membre constant".

Propriété 47 : Soit a et b deux réels.

Les solutions de l'équation différentielle $y'+ay=b$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$ où C est un réel quelconque.

De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(x_0) = y_0$.

Démonstration 37 : Cherchons tout d'abord une solution constante φ à cette équation. Soit k le réel tel que pour tout réel x, $\varphi(x) = k$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\varphi'(x) = 0$.

Puisque φ est solution de l'équation $y'+ay=b$, on a alors $ak=b$ c'est-à-dire $k=\frac{b}{a}$.

Soit maintenant f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est solution de l'équation différentielle $y'+ay=b$ si et seulement si $f'+af=b$. Or, φ étant également une solution de cette équation, on a donc $b=\varphi'+a\varphi$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y'+ay=b$ si et seulement si $f'+af=\varphi+a\varphi'$, ce qui équivaut à $f'-\varphi'+a(f-\varphi)=0$, ou encore $(f-\varphi)'+a(f-\varphi)=0$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y'+ay=b$ si et seulement si $f-\varphi$ est solution de l'équation différentielle homogène $y'+ay=0$.

Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $(f-\varphi)(x) = Ce^{-ax}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = Ce^{-ax}+\varphi(x) = Ce^{-ax}+\frac{b}{a}$.

□

■ **Exemple 101 :** On cherche à résoudre l'équation $y'-5y=-2$.

- On détermine les solutions de l'équation homogène associée $y'-5y=0$.
  Ce sont les fonctions $x \mapsto Ce^{5x}$ où C est un réel.
- On cherche une solution constante (égale à k) à l'équation de départ $y'-5y=-2$.
  La dérivée d'une fonction constante étant nulle, on a alors $-5k=-2$ et donc $k=\frac{2}{5}$.
- Les fonctions solutions de l'équation $y'=5y-2$ sont donc les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = Ce^{-5x}+\frac{2}{5}$ où C est un réel.

On souhaite déterminer l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(7)=12$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = Ce^{-5x}+\frac{2}{5}$.

On a alors $f_0(7) = Ce^{-35}+\frac{2}{5} = 12$ et donc $C=\frac{58}{5}e^{+35}$. Ainsi, pour tout réel x, $f_0(x) = \frac{58}{5}e^{-5x+35}+\frac{2}{5}$. ■

Propriété 48 — Formule magique : Pour résoudre une équation du type $y'+ay=b$...

SOLUTION GÉNÉRALE = SOLUTION HOMOGÈNE + SOLUTION CONSTANTE

3.3 Equation différentielle $y' + ay = g$, où g est une fonction

Définition 31 : Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'équation $y' = ay + g$ s'appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre".

Propriété 49 : Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Soit φ une solution particulière de cette équation. Alors f est solution de l'équation $y' + ay = g$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$.

Autrement dit, toute solution de l'équation $y' + ay = g$ est de la forme $f + \varphi$, où f est solution de l'équation $y' + ay = 0$ et φ est **UNE** solution de l'équation $y' + ay = g$.

Démonstration 38 : La démonstration est en tout point semblable à celle qui a conduit à l'ensemble des fonctions solutions de l'équation $y' + ay = b$. Faisons-la donc à nouveau. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f' + af = b$. Or, φ étant également une solution de cette équation, on a donc $g = \varphi' + a\varphi$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f' + af = \varphi + a\varphi'$, ce qui équivaut à $f' - \varphi' + a(f - \varphi) = 0$, ou encore $(f - \varphi)' + a(f - \varphi) = 0$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$.

Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $(f - \varphi)(x) = Ce^{-ax}$ et donc $f(x) = Ce^{-ax} + \varphi(x)$. □

■ **Exemple 102 :** On considère l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$.

- Les solutions de l'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- La fonction $\varphi : x \mapsto 3x^2 + 3x - 5$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$. En effet, φ est dérivable et pour tout réel x,

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) + 6x^2 - 13 = 6x + 3 - 2(3x^2 + 3x - 5) + 6x^2 - 13 = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = Ce^{2x} + 3x^2 + 3x - 5$, où C est un réel. ■

Propriété 50 — Formule magique : Pour résoudre une équation du type $y' + ay + g$...

SOLUTION GÉNÉRALE = SOLUTION HOMOGÈNE + SOLUTION PARTICULIÈRE

Il existe de nombreux types d'équations différentielles : linéaires, quadratiques, d'ordre divers... Et parmi toutes celles-ci, il en existe peu que l'on sait résoudre.

On compte par exemple les équations de Navier-Stokes qui décrivent les mouvements des fluides newtoniens. Il s'agit d'équation dites "aux dérivées partielles". Les fonctions en jeu utilisent en effet plusieurs variables (de temps et d'espace en l'occurrence) et on dérive alors selon l'une ou l'autre des variables.

Ces équations sont particulières puisque depuis l'an 2000, leur résolution est mise à prix : quiconque permettra une avancée significative dans leur étude recevra, en plus d'un certain prestige auprès de la communauté mathématique, la coquette somme d'un million de dollars.

6 autres problèmes ont été mis à pris par l'Institut Clay cette même année. Depuis, un seul d'entre eux a été résolu.

26. Exercices

Notion d’équation différentielle

► Exercice 185

Montrer que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{3x} + 1$ est corr de l’équation différentielle $y' = 3y - 3$.

► Exercice 186

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est corr de l’équation différentielle $(1+x)y' + y = 0$ sur $]-1;+\infty[$.

► Exercice 187

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ est corr de l’équation différentielle $y' = y(1-y)$.

► Exercice 188

Soit λ et μ des réels. Montrer que $f : x \mapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{x}$ est corr de l’équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

Primitives

► Exercice 189 — Centres étrangers 2023

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s’annule en 0. Quelle propriété est vérifiée par H ?

a. H est positive sur $]-\infty;0]$.
b. H est croissante sur $]-\infty;1]$.
c. H est négative sur $]-\infty;1]$.
d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 190

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $]0;+\infty[$.

► Exercice 191

Montrer que $F : x \mapsto (2x+1)\mathrm{e}^{x^2-1}$ est une primitive de $f : x \mapsto (4x^2+2x+2)\mathrm{e}^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 192

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{4x+3}$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto (8x+14)\mathrm{e}^{4x+3}$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 193

Pour tout réel x, on pose $f(x) = (-3x^2+2x+12)\mathrm{e}^{1-3x}$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{1-3x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 194

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(1) = 3$.

► Exercice 195

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et $F(x) = \ln(1+e^x)$.

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(0) = 0$.

► Exercice 196

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.

$f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.

$f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8e^{4x+2} - \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$

$f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^7}$ sur $]-\infty;0[$

$f_5 : x \mapsto 3e^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto e^{3x} + x^4 - \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{5}{x^4}$ sur $]0;+\infty[$.

$f_8 : x \mapsto \dfrac{2x^5 + 3x^2 + 1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$

► Exercice 197

Dans chacun des cas suivantes, déterminer l'unique primitive de la fonction donnée vérifiant la condition indiquée.

$f_1 : x \mapsto 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F_1(3) = 2$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ avec $F_2(1) = 3$

$f_3 : x \mapsto 2e^{3x-4} + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F_3\left(\dfrac{4}{3}\right) = 5$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3}{x} + x$ sur $]-\infty;0[$ avec $F_4(-1) = 2$

► Exercice 198

Donner une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la primitive d'une fonction composée.

$f_1 : x \mapsto (4x+1)e^{2x^2+x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto -\dfrac{2e^{2x}}{(3+e^{2x})^2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto x^2 e^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$.

$f_5 : x \mapsto \dfrac{4x+10}{x^2+5x+7}$ sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}$ sur $]0;+\infty[$

$f_7 : x \mapsto -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

$f_8 : x \mapsto xe^{x^2-5}$ sur $\mathbb{R}$

$f_9 : x \mapsto 3e^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

$f_{11} : x \mapsto \dfrac{4x^3 - 6x}{x^4 - 3x^2 + 5}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1;+\infty[$

$f_{13} : x \mapsto \dfrac{10x}{(5x^2+7)^2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{14} : x \mapsto \dfrac{-2x-5}{x^4+10x^3+25x^2}$ sur $]0;+\infty[$

▸ Exercice 199
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui respecte la condition initiale indiquée.

$f : x \mapsto x^2 e^{x^3}$ avec $F(0) = 3$

$f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ avec $F(2) = 7$

$f : x \mapsto \dfrac{8x+4}{2x^2+2x+1}$ avec $F(-1) = 3$

$f : x \mapsto \dfrac{-3x}{(x^2+1)^2}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2$

▸ Exercice 200
Pour tout réel x différent de 1 et -3, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

▸ Exercice 201 — Polynésie 2022
Sélectionner la réponse correcte. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par...

a. $K(x) = H(2x)$ **b.** $K(x) = 2H(2x)$ **c.** $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$ **d.** $K(x) = 2H(x)$

Équations différentielles du premier ordre

▸ Exercice 202
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique corr f de l'équation différentielle donnée telle que $f(x_0) = y_0$.

$y' - 8y = 0$ avec $x_0 = -2$ et $y_0 = -7$

$y' - 2y = 0$ avec $x_0 = 2$, $y_0 = 3$

$y' + 4y = 0$ avec $x_0 = -1$, $y_0 = -5$

$y' = -7y$ avec $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

$3y' + 2y = 0$ avec $x_0 = 1$, $y_0 = 3$

$y' - 9y = 0$ avec $x_0 = 47$, $y_0 = 0$

▸ Exercice 203 — Datation au carbone 14
Certaines proportions de protons et neutrons dans le noyau d'un atome ne permettent pas la stabilité du noyau. Le noyau est alors dit radioactif. Les noyaux instables se désintègrent spontanément mais on ne peut prévoir à quel instant. Néanmoins, sur des échantillons comportant de très nombreux noyaux radioactifs, on sait que la variations de noyaux radioactifs est proportionnelle au nombre de noyaux présents au temps t.

On note N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs d'un échantillon et $N(t)$ le nombre de noyaux au temps t. Il existe alors un réel k tel que pour tout réel $t > 0$, $N'(t) + kN(t) = 0$. Cette constante k dépend de l'élément chimique étudiée.

1. En résolvant cette équation différentielle, déterminer l'expression de $N(t)$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps τ nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs se désintègre.
   (a) Exprimer τ en fonction de k.
   (b) La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans. Donner une valeur approchée de la constante k en années^{-1}.
3. Le 19 septembre 1991, des explorateurs trouvent la momie d'un homme piégée dans la glace à 3000 m d'altitude. A l'aide de mesures, on estime que 47% des atomes de carbone 14 de son corps se sont alors désintégrés. Donner une estimation de la période durant laquelle a vécu Otzi.

► Exercice 204
Déterminer l'ensemble des corrs de l'équation différentielle (E) : $y' = 4y + 1$.

1. Déterminer les corrs de l'équation homogène associée $y' = 4y$.
2. Déterminer une corr constante de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des corrs de l'équation (E).
4. Déterminer l'unique corr f_0 de (E) telle que $f_0(3) = 5$.

► Exercice 205
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique corr f de l'équation différentielle donnée telle que $f(x_0) = y_0$.

1. $y' - 3y = 2$ avec $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$
2. $2y' = 5y - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 2$
3. $y' - 4y = 8$ avec $x_0 = 11$ et $y_0 = -2$

► Exercice 206
Donner l'ensemble des corrs de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3 = 0$.

► Exercice 207 — Loi de refroidissement de Newton
La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'environnement.

On place une tasse de thé bouillant dans une pièce où la température est constante, égale à $20°C$. On note $T(t)$ la température du thé après t minutes.

1. D'après la loi de refroidissement de Newton, on a
$$T' = -\frac{\ln(2)}{7}(T - 20).$$
Résoudre cette équation différentielle sachant que $T(0) = 100$.
2. Quelle est la limite de $T(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
3. Au bout de combien de temps la température du thé sera-t-elle inférieure à $25°C$?

► Exercice 208 — Circuit RC
Le condensateur est un composant électronique qui peut stocker des charges électriques sur ses armatures.

On considère un condensateur déchargé de capacité C, monté en série avec un conducteur ohmique de résistance R et une différence de potentiel E. R, C et U sont des réels strictement positifs. On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur au temps t.

1. On admet que u vérifie l'équation différentielle $u + RCu' = E$. On a par ailleurs $u(0) = 0$.
Exprimer $u(t)$ en fonction de t, R, C et E.
2. Quelle est la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de u à l'abscisse 0.
4. Déterminer le point d'intersection de cette tangente avec la droite d'équation $y = E$. L'abscisse de ce point est appelé "constante de temps" et est notée τ.
5. Montrer que $u(\tau) \simeq 0.63E$.

► Exercice 209 — Métropole 2024

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1000 L. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg$\cdot$L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg$\cdot$L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg$\cdot$L^{-1}. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg$\cdot$L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg$\cdot$L^{-1}.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en mg$\cdot$L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
   On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92 v_n + 0{,}3$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction **alerte_chlore** renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
  n = 0
  u = 0.7
  while ... :
    n = ...
    u = ...
  return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction **alerte_chlore(3)** ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg$\cdot$L^{-1}, dans la piscine.

On admet que la fonction f est corr de l'équation différentielle (E) : $y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$ où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. (a) Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   (b) On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg$\cdot$L^{-1}.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg$\cdot$L^{-1}.
   Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

▶ Exercice 210
Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à 225°C. La température ambiante de la boulangerie est quant à elle maintenue à 25°C.

On admet que l'on peut modéliser l'évolution de la température de la baguette à l'aide d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que cette fonction est corr de l'équation différentielle (E) : $y'+6y=150$.

Pour un réel $t \geqslant 0$, $f(t)$ représente alors la température de la baguette après t heures hors du four.

1. D'après le contexte, quelle est la valeur de $f(0)$?
2. Résoudre l'équation différentielle $y'+6y=150$.
3. En utilisant la condition initiale, montrer que pour réel $t \geqslant 0$, on a $f(t)=200\mathrm{e}^{-6t}+25$.
4. Que vaut $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$? Cette valeur vous semble-t-elle cohérente ?
5. Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger doit attendre que leur température soit inférieure ou égale à 40°C. Donner une valeur arrondie à la minute du temps à attendre.

▶ Exercice 211
On considère l'équation différentielle (E) : $y'=4y+3x-1$.

1. Donner l'ensemble des corrs de l'équation homogène associée (H).
2. Soit φ une corr de (E) et f une fonction. Montrer que f est corr de (E) si et seulement si $f-\varphi$ est corr de (H).
3. Montrer que $v : x \mapsto -\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}$ est corr de l'équation différentielle $y'=4y+3x-1$.
4. En déduire l'ensemble des corrs de cette équation différentielle.

▶ Exercice 212
On considère l'équation différentielle (E) : $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée (H) : $y'+y=0$.
2. Soit φ une corr de (E) et f une fonction. Montrer que f est corr de (E) si et seulement si $f-\varphi$ est corr de (H).
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est corr de l'équation (E).
4. En déduire l'ensemble des corrs de l'équation différentielle (E).

▶ Exercice 213
On considère l'équation différentielle (E) : $2y'+y=(x+1)\mathrm{e}^{-x/2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (H) : $2y'+y=0$
2. Soit φ une corr de (E) et f une fonction. Montrer que f est corr de (E) si et seulement si $f-\varphi$ est corr de (H).
3. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $f : x \mapsto (ax^2+bx)\mathrm{e}^{-x/2}$ soit corr de l'équation (E)
4. En déduire l'ensemble des corrs de (E).

▶ Exercice 214
Soit g_1 et g_2 deux fonctions et a un réel non nul. On considère l'équation (E) : $y'=ay+g_1+g_2$.

1. Montrer que si f_1 est corr de l'équation $y'=ay+g_1$ et f_2 est corr de l'équation $y'=ay+g_2$, alors f_1+f_2 est corr de (E). C'est le principe de superposition des corrs.
2. **Application** : on souhaite résoudre l'équation $y'=2y+\mathrm{e}^{3x}+2$.
   (a) Donner une corr de l'équation $y'=2y+2$
   (b) Déterminer un réel a pour que la fonction $x \mapsto a\mathrm{e}^{3x}$ soit corr de $y'=2y+\mathrm{e}^{3x}$.
   (c) En déduire l'ensemble des corrs de (E).

Pour aller plus loin...

► Exercice 215 — Variation de la constante

La méthode de la variation de la constante permet de trouver, dans certains cas, une corr particulière à une équation différentielle. Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée $y' + y = 0$.
2. Soit f une corr de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. On cherche alors une fonction C définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = C(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) On rappelle que f est corr de (E). En déduire que $C'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ pour tout réel x.
   (c) Déterminer une fonction C qui convienne.
   (d) Réciproquement, montrer que la fonction f trouvée est bien corr de (E).
3. En déduire l'ensemble des corrs (E).

► Exercice 216

Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$.

► Exercice 217 — Modèle de Verhulst

Le parc Kruger est un parc animalier situé en Afrique du Sud. Fondé à la fin du XIXe siècle, celui-ci accueillit notamment une population d'éléphants africains, une espèce menacée d'extinction à cause du braconnage intensif. Le parc accueillait ainsi 10 éléphants en 1905. Les scientifiques ont estimé que la population P au temps t, exprimé en années, vérifiait l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad P' = \frac{3}{20}P - \frac{P^2}{50000}.$$

1. Montrer que si à un instant t, la population est en-dessous de 7500, alors celle-ci est croissante.
2. On suppose que la fonction P ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$. On pose alors, pour tout $t \geqslant 0$, $F(t) = \dfrac{1}{P(t)}$.
   (a) Exprimer $F'(t)$ en fonction de $P(t)$ et $P'(t)$.
   (b) Montrer que P est corr de l'équation différentielle (E) si et seulement si F est corr de l'équation différentielle $(E') : y' = -\dfrac{3}{20}y + \dfrac{1}{50000}$.
   (c) Résoudre l'équation (E').
   (d) En déduire que l'unique corr de l'équation (E) ayant pour condition initiale $P(0) = 10$ est $P : t \mapsto \dfrac{7500}{1+749\mathrm{e}^{-0{,}15t}}$.
3. Déterminer la population limite d'éléphants dans le parc.
4. On admet que pour tout $t \geqslant 0$, $P''(t)$ est du signe de $1 - 749\mathrm{e}^{-0.15t}$.
   (a) Déterminer, si elles existent, les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de P.
   (b) Justifier la phrase suivante : la croissance de la population s'accélère jusqu'à ce que cette population atteigne la moitié de sa valeur maximale.

► Exercice 218 — Modèle de Gompertz

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t, exprimé en années à partir de l'origine 2000.

D'après le module d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$ et satisfait l'équation différentielle

$$(E) : y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln(y)).$$

1. Soit f une corr de (E) et $g = \ln(f)$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et exprimer g' en fonction de f' et f.
   (b) Montrer que g est corr de l'équation différentielle $(E') : y' = \frac{1}{20}y - \frac{3}{20}$.
   (c) Résoudre l'équation (E')
   (d) En déduire qu'il existe un réel C tel quel pour tout réel x,
   $$f(x) = \exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right).$$
2. Réciproquement, pour C un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)$. Montrer que f est une corr de l'équation (E).
3. Les conditions initiales conduisent à considérer la fonction f définie pour tout $t > 0$ par
   $$f(t) = \exp\left(3 - 3\,\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Déterminer le sens de variations de f sur $[0;+\infty[$.
   (c) Au bout de combien d'années la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

► Exercice 219

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables telles que, pour tous réels a et b, on a $(E) : f(a+b) = f(a)f(b)$.

1. Déterminer les corrs constantes de ce problème.
2. On suppose désormais que f est une corr de (E) non constante.
   (a) Justifier que $f(0) = 1$.
   (b) Justifier que pour tous réels a et x, on a $f'(a+x) = f(a)f'(x)$. puis $f'(a) = f(a)f'(0)$.
   (c) En déduire toutes les corrs de (E).

27. Corrigés

► Correction 185

Pour tout réel x, $f'(x) = 3e^{3x}$ et $3f(x) - 3 = 3(e^{3x} + 1) - 3 = 3e^{3x} + 3 - 3 = 3e^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 3f(x) - 3$. f est donc corr de l'équation différentielle $y' = 3y - 3$.

► Correction 186

Pour tout réel $x \neq -1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et donc $(1+x)f'(x) + f(x) = (1+x) \times \left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right) = 0$.

f est corr de l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 0$.

► Correction 187

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

De plus, $f(x) \times (1 - f(x)) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} \times \left(1 - \dfrac{1}{1+e^{-x}}\right) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = f'(x)$.

f est bien corr de l'équation différentielle $y' = y(1-y)$.

► Correction 188

Pour tout réel x, $f'(x) = \lambda e^x + (\lambda x + \mu)e^x = (\lambda x + \lambda + \mu)e^x$ et $f''(x) = \lambda e^x + (\lambda x + \lambda + \mu)e^x = (\lambda x + 2\lambda + \mu)e^x$.

Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}
f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= (\lambda x + 2\lambda + \mu)e^x - 2(\lambda x + \lambda + \mu)e^x + (\lambda x + \mu)e^x \\
&= (\lambda x - 2\lambda x + \lambda x + 2\lambda + \mu - 2\lambda - 2\mu + \mu)e^x \\
&= 0
\end{aligned}$$

f est bien corr de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

► Correction 189

h est la dérivée de H. Or, h est négative sur $]-\infty; 0]$: H est donc décroissante sur cet intervalle. Ainsi, pour tout $x < 0$, $H(x) > H(0)$. Or, $H(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x < 0$, $H(x) > 0$: H est positive sur $]-\infty; 0]$.

► Correction 190

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

f est une primitive de ln sur $]0; +\infty[$.

► Correction 191

Pour tout réel x, on pose $F(x) = (2x+1)e^{x^2-1}$ et $f(x) = (4x^2 + 2x + 2)e^{x^2-1}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ revient à montrer que $F' = f$.

La dérivée de $x \mapsto e^{x^2-1}$ est $x \mapsto 2xe^{x^2-1}$ et celle de $x \mapsto (2x+1)$ est $x \mapsto 2$. Ainsi, pour tout réel x,

$$F'(x) = 2 \times e^{x^2-1} + (2x+1) \times 2xe^{x^2-1} = (4x^2+2x+2)e^{x^2-1} = f(x).$$

F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Correction 192

Soit $f : x \mapsto (ax+b)e^{4x+3}$. Pour tout réel x, $f'(x) = ae^{4x+3} + (ax+b) \times 4e^{4x+3} = (4ax+a+4b)e^{4x+3}$. En prenant $a = 2$ et $b = 3$. On obtient $f'(x) = (8x+14)e^{4x+3}$. f est alors bien une primitive de la fonction demandée.

► Correction 193

Notons $g : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{1-3x}$.

Pour tout réel x,

$$g'(x) = (2ax+b)e^{1-3x} + (ax^2+bx+c) \times (-3e^{1-3x}) = (-3ax^2+(2a-3b)x+b-3c)e^{1-3x}.$$

En prenant $a = 1$, $b = 0$ et $c = -4$, on obtient $g'(x) = f(x)$. g est alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Correction 194

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = f(x)$. F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Notons F_0 l'unique primitive de f telle que $F_0(0) = 0$. Puisque toutes les primitives de f ne varient que d'une constante, on sait qu'il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_0(x) = F(x)+C$. Ainsi, $F_0(0) = F(0)+C = 1+C = 0$ et donc $C = -1$. Finalement, pour tout réel x, $F_0(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1$.

► Correction 195

Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = f(x)$. F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_0(x) = F(x)+C = \ln(1+e^x)+C$. Or, $F_0(0) = \ln(2)+C = 0$. On a donc $C = -\ln(2)$.

Finalement, pour tout réel x, $F_0(x) = \ln(1+e^x) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

► Correction 196

- $F_1 : x \mapsto \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - x$ est une primitive de $f_1 : x \mapsto x^5+x^4-x^3+x-1$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $F_2 : x \mapsto 3\ln(x) + \dfrac{2}{x}$ est une primitive de $f_2 : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $I =]0;+\infty[$.
- $F_3 : x \mapsto x^7 + 2e^{4x+2} + \dfrac{1}{2x^2}$ est une primitive de $f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8e^{4x+2} - \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty;0[$.
- $F_4 : x \mapsto \frac{4}{5}x^5 + x^3 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{3x^6}$ est une primitive de $f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^7}$ sur $]-\infty;0[$
- $F_5 : x \mapsto \dfrac{3}{5}e^{5x+2}$ est une primitive de $f_5 : x \mapsto 3e^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$.

- $F_6 : x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ln(x)$ est une primitive de $f_6 : x \mapsto e^{3x} + x^4 - \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
- $F_7 : x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{5}{3x^3}$ est une primitive de $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{5}{x^4}$ sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout réel $x > 0$,

$$f_8(x) = \frac{2x^5+3x^2+1}{x^3} = \frac{2x^5}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} = 2x^2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

$F_8 : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln(x) - \dfrac{1}{2x^2}$ est une primitive de $f_8 : x \mapsto \dfrac{2x^5+3x^2+1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$.

► Correction 197

- La fonction $F : x \mapsto x^2 + x$ est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_1(x) = x^2 + x + C$. Or, $F_1(3) = 2 = 3^2 + 3 + C = 12 + C$ et donc, $C = -10$. La fonction recherchée est la fonction $F_1 : x \mapsto x^2 + x - 10$.
- La fonction $F : x \mapsto 2\ln(x) - \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f_2 sur $]0;+\infty[$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_2(x) = 2\ln(x) - \dfrac{1}{x}$. Or, $F_2(1) = 3 = 2\ln(1) - \dfrac{1}{1} + C = C - 1$ et donc, $C = 4$. La fonction recherchée est la fonction $F_2 : x \mapsto 2\ln(x) - \dfrac{1}{x} + 4$.
- La fonction $F : x \mapsto \dfrac{2}{3}e^{3x-4} + x$ est une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_3(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x-4} + x + C$. Or, $F_3\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{2}{3}e^{3\times(4/3)-4} + \dfrac{4}{3} + C = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} + C = 2 + C = 5$ et donc, $C = 3$. La fonction recherchée est la fonction $F_3 : x \mapsto \dfrac{2}{3}e^{3x-4} + x + 3$.
- Attention au fait que l'intervalle est $]-\infty;0[$! La fonction $F : x \mapsto 3\ln(-x) + \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de f_4 sur $]-\infty;0[$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_4(x) = 3\ln(-x) + \dfrac{x^2}{2} + C$. Or, $F_4(-1) = 3\ln(1) + \dfrac{(-1)^2}{2} + C = \dfrac{1}{2} + C = 2$ et donc, $C = \dfrac{3}{2}$. La fonction recherchée est la fonction $F_4 : x \mapsto 3\ln(-x) + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$.

► Correction 198

- On reconnait une fonction de la forme $u'e^u$ avec pour tout réel non nul x, $u(x) = 2x^2 + x + 3$. Une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction

$$F_1 : x \mapsto e^{2x^2+x+3}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 3$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ (c'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif et dont le coefficient dominant est positif). Par ailleurs, pour tout réel x, $f_2(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f_2 est donc $\ln(u)$, soit la fonction

$$F_2 : x \mapsto \ln(x^2 + 3x + 3).$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 3 + e^{2x}$. Pour tout réel x, $u(x) \neq 0$ et $f_3(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$. Une primitive de f_3 est donc $\dfrac{1}{u}$, soit la fonction

  $$F_3 : x \mapsto \frac{1}{3+e^{2x}}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^3$. Pour tout réel x, $f_4(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 e^{x^3} = \dfrac{1}{3} \times u'(x) \times e^{u(x)}$. Une primitive de f_4 est donc $\dfrac{1}{3}e^{u(x)}$, soit la fonction

  $$F_3 : x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2 + 5x + 7$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ (c'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif et dont le coefficient dominant est positif). Par ailleurs, pour tout réel x, $f_5(x) = \dfrac{2u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f_5 est donc $2\ln(u)$, soit la fonction

  $$F_2 : x \mapsto 2\ln(x^2 + 5x + 7).$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^3 + 3x$.
  Pour tout réel $x > 0$, $f_6(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} = \frac{2}{3} \times \dfrac{3x^2+3}{2\sqrt{x^3+3x}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Une primitive de f_6 est donc $\dfrac{2}{3}\sqrt{u}$, soit la fonction

  $$F_6 : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x}.$$

- Pour tout réel x strictement positif, $f_7(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times e^{1/x}$. On reconnait une fonction de la forme $u'e^u$ avec pour tout réel non nul x, $u(x) = \dfrac{1}{x}$. Une primitive de f_7 sur $]0;+\infty[$ est donc la fonction

  $$F_7 : x \mapsto e^{1/x}.$$

- Pour tout réel x, $f_8(x) = \dfrac{1}{2} \times (2xe^{x^2-5})$. On reconnait une fonction de la forme $\dfrac{1}{2}u'e^u$ avec $u : x \mapsto x^2 - 5$. Une primitive est donc $\dfrac{1}{2}e^u$. Une primitive de f_8 sur I est fonc la fonction

  $$F_8 : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2-5}.$$

- Pour tout réel $x > 0$, on a $f_9(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$. On reconnaît une fonction de la forme $u' \times e^u$ avec $u : x \mapsto \sqrt{x}$. Une primitive de cette fonction est e^u. Ainsi, une primitive de g sur $]0;+\infty[$ est

  $$F_9 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sqrt{x}$. Pour tout réel $x > 0$, $f_{10}(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = 2u'(x) \times e^{u(x)}$. Une primitive de f_{10} est donc $2e^u$, soit la fonction

  $$F_{10} : x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}.$$

- On reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^4 - 3x^2 + 5$. Une primitive de cette fonction est $\ln(u)$, à condition que u soit strictement positive. Or, pour tout réel x, $u(x) = x^4 - 3x^2 + 5 = X^2 - 3X + 5$ en posant $X = x^2$. Le polynôme $X^2 - 3X + 5$ a pour discriminant -11 qui est strictement négatif. On en conclut que pour tout réel x, $u(x) > 0$. Ainsi, une primitive de f_{11} sur $\mathbb{R}$ est

$$F_{11} : x \mapsto \ln(x^4 - 3x^2 + 5).$$

- Pour tout réel$x > 1$, $f_{12}(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$. On reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto \ln(x)$. Par ailleurs, pour $x \in]1; +\infty[$, $u(x) > 0$. Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est donc $\ln(u)$. Une primitive de f_{12} sur I est donc la fonction

$$F_{12} : x \mapsto \ln(\ln(x)).$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^2 + 7$. Pour tout réel $x > 0$, $f_{13}(x) = \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\left(-\dfrac{u(x)}{(u(x))^2}\right)$. Une primitive de f_{13} est donc $-\dfrac{1}{u}$, soit la fonction

$$F_{13} : x \mapsto -\frac{1}{5x^2 + 7}.$$

- Pour tout réel $x > 0$, $f_{14}(x) = \dfrac{-(2x+5)}{(x^2+5x)^2}$. On reconnaît une fonction de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 5x$. Une primitive de cette fonction est $\dfrac{1}{u}$. Ainsi, une primitive de f_{14} sur $]0; +\infty[$ est

$$F_{14} : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 5x}.$$

► **Correction 199**

- Les primitives de $f : x \mapsto x^2 e^{x^3}$ sont les fonctions $F : x \mapsto \dfrac{1}{3} e^{x^3} + C$, pour C réel (voir exercice précédent). Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{1}{3} e^{x^3} + C$. On a alors $F(0) = \dfrac{1}{3} + C = 3$ et donc $C = \dfrac{8}{3}$. La primitive recherchée est $F : x \mapsto \dfrac{1}{3} e^{x^3} + \dfrac{8}{3}$.
- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1 + x^2$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ et $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f est donc $ln(u)$. Les primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto \ln(1 + x^2) + C$. Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $F(x) = \ln(1 + x^2) + C$. On a alors $F(2) = \ln(5) + C = 7$ et donc $C = 7 - \ln(5)$. Ainsi, pour tout réel x, $F(x) = \ln(1 + x^2) + 7 - \ln(5) = \ln\left(\dfrac{1 + x^2}{5}\right) + 7$.
- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x^2 + 2x + 1$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ (c'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif et le coefficient dominant est positif) et $f(x) = \dfrac{2u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f est donc $2ln(u)$. Les primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto 2\ln(2x^2 + 2x + 1) + C$. Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $F(x) = \ln(2x^2 + 2x + 1) + C$. On a alors $F(-1) = \ln(1) + C = C = 3$. Ainsi, pour tout réel x, $F(x) = \ln(2x^2 + 2x + 1) + 3$.

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2 + 1$.
  Pour tout réel x, $u(x) > 0$ et $f(x) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}\right)$.
  Une primitive de f est donc $\frac{3}{2u}$. Les primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto \frac{3}{2(x^2+1)} + C$.
  Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $F(x) = \frac{3}{2(x^2+1)} + C$. On a alors $\lim_{x\to+\infty} F(x) = C = 2$. Ainsi, pour tout réel x, $F(x) = \frac{3}{2(x^2+1)} + 2$.

► Correction 200

1. On considère deux réels a et b ,

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3)+b(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(a+b)x+3a-b}{(x-1)(x+3)}.$$

   Ainsi, pour avoir, pour tout réel x, $(a+b)x+3a-b = 1$, il suffit que $a+b = 0$ et $3a-b = 1$ soit $a = \frac{1}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$. On a donc, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)}.$$

2. Pour tout $x > 1$, $x+3 > 0$ et $x-1 > 0$.

   Une primitive de f sur $]1;+\infty[$ est donc $F : x \mapsto \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+3) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$.

► Correction 201
Dérivons chacune des fonctions proposées. Pour tout réel x...

- $K'(x) = 2H'(2x) = 2h(2x) = 2k(x)$;
- $K'(x) = 2 \times 2H'(2x) = 2h(2x) = 2k(x)$;
- $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2H'(2x) = h(2x) = k(x)$;
- $K'(x) = 2H'(x) = 2h(x) = 2k\left(\frac{x}{2}\right)$.

La réponse correcte est la réponse **c.**.

► Correction 202

- Les fonction corrs de l'équation différentielle $y' - 8y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{8x}$, C étant un réel. On cherche donc le réel C tel que $Ce^{-16} = 7$. On a donc $C = 7e^{16}$. Ainsi, l'unique corr de l'équation différentielle $y' = 8y$ telle que $y(-2) = 7$ est la fonction $x \mapsto 7e^{8x+16}$.
- Les corrs générales sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$. Pour avoir $f(2) = 3$, il faut que $C = 3e^{-4}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 3e^{2x-4}$.
- Les corrs générales sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-4x}$. Pour avoir $f(-1) = -5$, il faut que $C = -5e^{-4}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -5e^{-4x-4}$.
- On a alors $y' + 7y = 0$. Les corrs générales sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-7x}$. Pour avoir $f(0) = 2$, il faut que $C = 2$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{-7x}$.

- On a alors $y' + \frac{2}{3} = 0y$. Les corrs générales sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x/3}$. Pour avoir $f(1) = 3$, il faut que $C = 3\mathrm{e}^{2/3}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x/3+2/3}$.
- La fonction nulle $f : x \mapsto 0$ est corr de cette équation. La corr étant unique, il s'agit de la fonction recherchée.

► Correction 203

1. Les corrs de l'équation $y' + ky = 0$ sont les fonctions $f : t \mapsto C\mathrm{e}^{-kt}$, pour C réel. Par ailleurs, on cherche l'unique corr N vérifiant $N(0) = N_0 = C\mathrm{e}^0 = C$. Ainsi, pour tout réel t, $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$.
2. (a) On a $N(\tau) = \frac{N_0}{2}$ par définition. Or, $N(\tau) = N_0\mathrm{e}^{-k\tau}$. Ainsi, $\frac{N_0}{2} = N_0\mathrm{e}^{-k\tau}$ et donc $\mathrm{e}^{-k\tau} = \frac{1}{2}$. En appliquant le logarithme népérien, on obtient $-k\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et donc $\tau = \frac{\ln(2)}{k}$.
   (b) On a $5730 = \frac{\ln(2)}{k}$ d'où $k = \frac{\ln(2)}{5730} \simeq 1.21 \times 10^{-4}$ années^{-1}.
3. Notons t le temps écoulé depuis la période où a vécu Otzi et N_0 le nombre initial d'atomes de carbone 14 dans son corps. On a alors $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$ d'une part et $N(t) = 0.53N_0$ d'autre part.
   Il en vient que $N_0\mathrm{e}^{-kt} = 0.53N_0$ et donc $t = -\frac{ln(0.53)}{k} \simeq 5248$. Otzi a vécu il y a environ 53 siècles.

► Correction 204

1. Les corrs de l'équation $y' = 4y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{4x}$, pour C réel.
2. Soit φ une corr constante de (E). On a alors $0 = 4\varphi + 1$ et donc $\varphi = \frac{-1}{4}$. Réciproquement, la fonction constante égale à $-\frac{1}{4}$ est bien corr de l'équation (E).
3. L'ensemble des corrs de (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{4}$, pour C dans $\mathbb{R}$.
4. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = C\mathrm{e}^{4x} - \frac{1}{4}$. On a alors $f_0(3) = C\mathrm{e}^{12} - \frac{1}{4} = 5$ et donc $C = \frac{21}{4}\mathrm{e}^{-12}$. Ainsi, pour tout réel x, $f_0(x) = \frac{21}{4}\mathrm{e}^{4x-12} - \frac{1}{4}$.

► Correction 205

1. Les corrs générales sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3}$. Pour avoir $f(3) = 1$, il faut que $C = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{-9}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{3x-9} - \frac{2}{3}$.
2. On a alors $y' = \frac{5}{2}y - \frac{1}{2}$. Les corrs générales sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{5x/2} + \frac{1}{5}$. Pour avoir $f(0) = 2$, il faut que $C = \frac{9}{5}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \frac{9}{5}\mathrm{e}^{5x/2} + \frac{1}{5}$.
3. La fonction constante égale à -2 convient. Par unicité de la corr, c'est la corr recherchée.

► Correction 206

Notons $z = y'$. Alors y est corr de (E) si et seulement si z est corr de l'équation $z' + 2z - 3 = 0$ ou encore $z' + 2z = 3$.

Les corrs de cette équation sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{3}{2}$.

Ainsi, y est corr de (E) si et seulement si il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $y'(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$ et donc si et seulement s'il existe deux réels C et k tels que, pour tout réel x, $y(x) = \frac{C}{-2}e^{-2x} + \frac{3}{2}x + k$ (ou simplement $y(x) = C'e^{-2x} + \frac{3}{2}x + k$, en posant $C' = \frac{C}{-2}$).

► **Correction 207**

1. Les corrs de l'équation différentielle $y' = -\frac{\ln(2)}{7}y + \frac{20\ln(2)}{7}$ sont $t \mapsto Ce^{-\ln(2)t/7} + 20$.
   Soit donc C un réel tel que, pour tout réel positif t, $T(t) = Ce^{-\ln(2)t/7} + 20$.
   On a alors $T(0) = C + 20 = 100$ et donc $C = 80$. Ainsi, pour tout réel t, $T(t) = 80e^{-\ln(2)t/7} + 20$.
2. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = 20$.
3. On a $T(t) \leqslant 25$ si et seulement si $80e^{-\ln(2)t/7} + 20 \leqslant 25$ soit $e^{-\ln(2)t/7} \leqslant \frac{1}{14}$. En appliquant le logarithme népérien, qui est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$, cela équivaut donc à $-\frac{\ln(2)t}{7} \leqslant -\ln(14)$ et donc $t \geqslant \frac{7\ln(14)}{\ln(2)}$. Or, $\frac{7\ln(14)}{\ln(2)} \simeq 26.65$. Il faut donc attendre environ 27 minutes pour que la température du thé soit inférieur à 25 degrés.

► **Correction 208**

1. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $y + RCy' = E$ si et seulement si $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{RC}$. Les corrs de cette équation sont les fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{t}{RC}} + E$.
   Soit dont k le réel tel que, pour tout réel t, $u(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + E$. Puisque le condensateur est initialement déchargé, on a $u(0) = 0$ et donc $ke^{-\frac{0}{RC}} + E = 0$ soit $k + E = 0$ et finalement, $k = -E$. Ainsi, pour tout réel $t > 0$, $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.
2. Puisque R et C sont positifs, on a $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{RC}} = 0$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = E$.
3. Pour tout réel $t > 0$, $u'(t) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$. Ainsi, la tangente à la courbe de u à l'abscisse 0 a pour équation $y = u'(0)(x - 0) + u(0)$ soit $y = \frac{E}{RC}t$.
4. On a $\frac{E}{RC}t = E$ si et seulement si $t = RC$. Ainsi, $\tau = RC$.
5. On a $u(\tau) = E(1 - e^{-\frac{RC}{RC}}) = E(1 - e^{-1}) \simeq 0.63E$.

► **Correction 209**

Partie A : étude d'un modèle discret.

1. On ajoute 15 g de chlore, soit 15000 mg, dans une piscine de 50 m^3 d'eau, soit 50000 L. La concentration en chlore augmente alors de $\frac{15000}{50000}$ soit 0,3 mg·L^{-1}.
2. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$ ».
   - **Initialisation** : On a $u_0 = 0{,}7$ et $u_1 = 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}944$. On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité** : Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$. Ainsi, on a $0{,}92v_n \leqslant 0{,}92v_{n+1} \leqslant 0{,}92 \times 4$ et donc $0{,}92v_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leqslant 0{,}92 \times 4 + 0{,}3$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3{,}98$. Puisque $3{,}98 \leqslant 4$, on a en particulier $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   - **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est

vraie pour tout entier naturel n.

(b) D'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. Puisque pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}92v_n + 0{,}3)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ et, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}92v_n + 0{,}3) = 0{,}92\ell + 0{,}3$. Ainsi, on a $\ell = 0{,}92\ell + 0{,}3$ soit $0{,}08\ell = 0{,}3$ et donc $\ell = \dfrac{0{,}3}{0{,}08} = 3{,}75$.

3. À long terme, le taux de chlore dans la piscine sera proche de 3,75 mg$\cdot$L^{-1}, ce qui est bien supérieur au taux recommandé.
4. On complète le programme Python ainsi :

```python
def alerte_chlore(s) :
  n = 0
  u = 0.7
  while u < s :
    n = n + 1
    u = 0.92 * u + 0.3
  return n
```

5. L'instruction alerte_chlore(3) renvoie la valeur 17. Cela signifie qu'en appliquant la méthode d'Alain, le taux de chlore dans la piscine sera supérieur à 3 mg$\cdot$L^{-1}.

Partie B : étude d'un modèle continu.

1. Les corrs des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a et b sont des constantes sont des fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$. Ici, $a = -0{,}08$ et $b = \dfrac{q}{50}$. Les corrs sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}08x} - \dfrac{\frac{q}{50}}{-0{,}08}$ soit $x \mapsto C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$.
2. (a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (-0{,}08x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08x} = 0$ et donc $\lim\limits_{c\to+\infty} f(x) = \dfrac{q}{4}$.

   (b) Puisque que la taux de chlore se stabilise autour de 2 mg$\cdot$L^{-1}, cela signifie que $\dfrac{q}{4} = 2$ et donc $q = 8$. Par ailleurs, on a $f(0) = 0{,}7 = C\mathrm{e}^{-0{,}08\times 0} + \dfrac{8}{4} = C + 2$. On a donc $C = -1{,}3$.

► Correction 210

1. D'après le contexte, $f(0) = 225$.
2. Les corrs de l'équation homogène associée $y' + 6y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{-6t}$, $C \in \mathbb{R}$. Cherchons une corr constante φ à cette équation.
   On a alors $\varphi' = 0$ et donc $6\varphi = 150$ soit $\varphi = \dfrac{150}{6} = 25$
   Les corrs de l'équation $y' + 6y = 150$ sont donc les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{-6t} + 25$, $C \in \mathbb{R}$.
3. Soit C le réel tel que, pour tout réel t, $f(t) = C\mathrm{e}^{-6t} + 25$. Puisque $f(0) = 225$, on a alors $C + 25 = 225$ et donc $C = 200$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$.
4. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6t} = 0$, il en vient que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$. Cette valeur est cohérente, elle correspond à la température de la boulangerie.
5. Soit $t \geqslant 0$. On a $f(t) \leqslant 40$ si et seulement si $200\mathrm{e}^{-6t} + 25 \leqslant 40$, soit $\mathrm{e}^{-6t} \leqslant \dfrac{3}{40}$. En appliquant la fonction ln, qui est croissante sur $]0;+\infty[$, on a alors $-6t \leqslant \ln\left(\dfrac{3}{40}\right)$ et donc $t \geqslant -\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{3}{40}\right)$.

Ce temps est exprimé en heures. Il faut donc attendre $-\frac{1}{6}\ln\left(\frac{3}{40}\right)\times 60$ soit $-10\ln\left(\frac{3}{40}\right)$ minutes (environ 26 minutes) pour que la température des baguettes passe en-dessous de 40°C.

▶ **Correction 211**

1. Les corrs de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{4x}$ où C est un réel.
2. On considère la fonction $v : x\mapsto -\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}$. Pour tout réel x, $v'(x)=-\frac{3}{4}$.
   Ainsi, $v'(x)-4v(x)=-\frac{3}{4}-4\times\left(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\right)=3x-1$.
   v est corr de l'équation différentielle $y'=4y+3x-1$.
3. f est corr de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $f'(x)=4f(x)+3x-1$. En retirant $\varphi'(x)$ aux deux membres de cette équation, on obtient que f est corr de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x)=4f(x)+3x-1-\varphi'(x)$. Or, φ est corr de l'équation (E), et donc, pour tout réel x, $\varphi'(x)=4\varphi(x)+3x-1$. On a donc que f est corr de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x)=4f(x)+3x-1-(4\varphi(x)+3x-1)$ soit $(f-\varphi)'(x)=4(f-\varphi(x))$, c'est-à-dire $f-\varphi$ est corr de (H).
4. Ainsi, f est corr de l'équation $y'=4y+3x-1$ si et seulement si $f-v$ est corr de l'équation homogène $y'=4y$, c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x)-v(x)=C\mathrm{e}^{4x}$ ou encore $f(x)=C\mathrm{e}^{4x}+v(x)=C\mathrm{e}^{4x}-\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}$.

▶ **Correction 212**

1. L'équation homogène associée $y'+y=0$ ou $y'=-y$ a pour corrs les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où C est un réel.
2. f est corr de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.
   En retirant $\varphi'(x)$ aux deux membres de cette équation, on obtient que f est corr de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{-x}-\varphi'(x)$ ce qui équivaut à $f'(x)-\varphi'(x)=-f(x)+\mathrm{e}^{-x}-\varphi'(x)$. Or, φ est corr de l'équation (E), et donc, pour tout réel x, $\varphi'(x)=-\varphi(x)+\mathrm{e}^{-x}$.
   On a donc que f est corr de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x)=-f(x)+\mathrm{e}^{-x}+\varphi(x)-\mathrm{e}^{-x}$ soit $(f-\varphi)'(x)=-(f-\varphi(x))$, c'est-à-dire $f-\varphi$ est corr de (H).
3. On considère la fonction $\varphi : x\mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ Pour tout réel x, $\varphi'(x)=1\times\mathrm{e}^{-x}+x\times(-\mathrm{e}^{-x})=(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Ainsi, pour tout réel x, $\varphi'(x)+f(x)=(1-x)\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}$. φ est bien corr de l'équation (E).
4. Les corrs de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{x}$ où C est un réel.

▶ **Correction 213**

1. L'équation différentielle homogène est $2y'+y=0$ ou $y'+\frac{1}{2}y=0$. Les corrs de cette équation sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x/2}$ où C est un réel.
2. Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x\mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(ax^2+bx)$. Pour tout réel x, on a alors

$$f'(x)=(2ax+b)\times\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+(ax^2+bx)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\left(-\frac{1}{2}ax^2+\left(2a-\frac{b}{2}\right)x+b\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

   Ainsi, f est corr de (E) si et seulement si pour tout réel x, $2f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$, c'est-à-dire

$$2\times\left(-\frac{1}{2}ax^2+\left(2a-\frac{b}{2}\right)x+b\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+(ax^2+bx)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=(x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Les coefficients de x^2 dans le premier membre s'annulent, on doit donc avoir $(4a+b)x+2b=x+1$. On a alors $4a=1$ et $b=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $a=\dfrac{1}{4}$ et $b=\dfrac{1}{2}$.
La fonction $x\mapsto\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est corr de l'équation (E).

3. Les corrs de l'équation (E) sont les fonction $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x/2}+\left(\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ où C est un réel.

▶ Correction 214

1. On a $(f_1+f_2)'=f_1'+f_2'=af_1+g_1+af_2+g_2=a(f_1+f_2)+g_1+g_2$. f_1+f_2 est corr de (E).
2. (a) Une corr de l'équation $y'=2y+2$ est la fonction constante égale à -1.
   (b) Soit : $f:x\mapsto a\mathrm{e}^{3x}$. Pour tout réel x, $f'(x)=3a\mathrm{e}^{3x}$ et donc $f'(x)-2f(x)=2a\mathrm{e}^{3x}$. Ainsi, en prenant $a=\dfrac{1}{2}$, on a bien $f'=2f+\mathrm{e}^{3x}$.
   (c) Les corrs de l'équation homogène $y'=2y$ sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, pour C réel.
   Les corrs de (E) sont donc les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{2x}-1+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$.

▶ Correction 215

1. Les corrs de l'équation $y'+y=0$ sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où C est un réel quelconque.
2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=C'(x)\mathrm{e}^{-x}-C(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Puisque f est corr de (E), on a, pour tout réel x, $f'(x)+f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.
   Ainsi, pour tout réel x, $C'(x)\mathrm{e}^{-x}-C(x)\mathrm{e}^{-x}+C(x)\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et donc $C'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
   (c) On reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u:x\mapsto 1+\mathrm{e}^x$, qui est une fonction strictement positive. Une primitive de cette fonction est $\ln(u)$. La fonction $x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$ convient donc.
   (d) Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$.
      - On considère $u:x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
      - Pour tout réel x, on pose $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

   Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x
   $$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\times\mathrm{e}^{-x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\times(-\mathrm{e}^{-x})=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}-\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}.$$
   Ainsi, pour tout réel x,
   $$f'(x)+f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}-\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$
   f est donc bien corr de l'équation différentielle $y'+y=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.
3. Les corrs de (E) sont donc les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$ où C est un réel quelconque.

▶ Correction 216

Si f est une corr de ce problème, c'est une corr d'une équation de la forme $y'+y=c$, où c est une constante. C'est donc une fonction de la forme $f:x\mapsto C\mathrm{e}^{-x}+D$ où C et D sont des constantes.

Pour tout réel x, on a alors $f'(x)=-C\mathrm{e}^{-x}$ et donc $f'(x)+f(x)=D$. Or, pour tout réel x, $f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)=C+D+C\mathrm{e}^{-1}+D$. Ainsi, $D=2D+C(1+\mathrm{e}^{-1})$ et donc $D=-C(1+\mathrm{e}^{-1})$.

Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $f(x) = Ce^{-x} - C(1+e^{-1}) = C(e^{-x} - 1 - e^{-1})$.
Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions conviennent.

► Correction 217

1. (a) Pour tout réel t, $F'(t) = \dfrac{-P'(t)}{P^2(t)}$.

   (b) P est corr de l'équation différentielle (E) si et seulement si $P' = \dfrac{3}{20}P - \dfrac{P^2}{50000}$.
   En divisant par P^2, on obtient $\dfrac{P'}{P^2} = \dfrac{3}{20P} - \dfrac{1}{50000}$, c'est-à-dire $-F' = \dfrac{3}{20}F - \dfrac{1}{50000}$ ou encore $F' = -\dfrac{3}{20}F + \dfrac{1}{50000}$. F est corr de l'équation différentielle (E') : $y' = -\dfrac{3}{20}y + \dfrac{1}{50000}$.

   (c) Les corrs générales de (E') sont les fonctions $t \mapsto Ce^{at} - \dfrac{b}{a}$ où C est un réel.
   Ainsi, les corrs de (E') sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-0.15t} + \dfrac{1}{7500}$.

   (d) On rappelle que $F = \dfrac{1}{P}$ et donc $P = \dfrac{1}{F}$.
   Ainsi, les corrs de (E) sont les $P_C : t \mapsto \dfrac{1}{Ce^{-0.15t} + \dfrac{1}{7500}}$ pour C réel.
   En multipliant numérateur et dénominateur par 7500, on obtient $P_C(t) = \dfrac{7500}{1+7500Ce^{-0.15t}}$.
   Par ailleurs, $P(0) = 10$. Or, $P_C(0) = \dfrac{7500}{1+7500C}$. Ainsi, pour déterminer l'unique corr de l'équation (E) vérifiant $P(0) = 10$, il faut résoudre l'équation $\dfrac{7500}{1+7500C} = 10$.
   On trouve alors $C = \dfrac{7490}{75000} = \dfrac{749}{7500}$. Ainsi, l'unique corr de (E) qui vaut 10 en 10 est la fonction $P : t \mapsto \dfrac{7500}{1+749e^{-0.15t}}$.

2. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} 749e^{-0.15t} = 0$, il en vient que $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 7500$.

► Correction 218

1. Soit f une corr de (E) et $g = \ln(f)$.

   (a) Puisque f est dérivable et strictement positive, $\ln(f)$ est dérivable et $(\ln(f))' = \dfrac{f'}{f}$.

   (b) Puisque f est corr de (E), on a alors $f' = -\dfrac{1}{20}f(3-\ln(f))$. En divisant par f qui est strictement positive, on a $\dfrac{f'}{f} = -\dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{20}\ln(f)$ c'est-à-dire $g' = \dfrac{1}{20}g - \dfrac{3}{20}$.
   g est corr de l'équation différentielle (E') : $y' = \dfrac{1}{20}y - \dfrac{3}{20}$.

   (c) Les corrs de l'équation (E') sont les fonctions $x \mapsto Ce^{x/20} + 3$ où C est un réel.

   (d) Ainsi, il existe un réel C tel quel pour tout réel x, $g(x) = \ln(f(x)) = Ce^{x/20} + 3$ et donc
   $$f(x) = \exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right).$$

2. Réciproquement, pour C un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(3 + C\,\exp\left(\dfrac{x}{20}\right)\right)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)=\frac{C}{20}\exp\left(\frac{x}{20}\right)\times\exp\left(3+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)=\frac{C}{20}\exp\left(3+\frac{x}{20}+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right).$$

Par ailleurs, pour tout réel x,

$$-\frac{1}{20}f(x)(3-\ln(f(x))=-\frac{1}{20}\exp\left(3+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\left[3-\ln\left(\exp\left(3+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\right)\right].$$

Ainsi,

$$-\frac{1}{20}f(x)(3-\ln(f(x))=-\frac{1}{20}\exp\left(3+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\left[3-\left(3+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\right].$$

Et donc,

$$-\frac{1}{20}f(x)(3-\ln(f(x))=-\frac{1}{20}\exp\left(3+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\left[-C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right]=\frac{C}{20}\exp\left(3+\frac{x}{20}+C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)=f'(x).$$

f est donc corr de l'équation (E).

3. (a) On a $\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$.
   (b) Puisque pour tout réel x, $f'(x)=-\frac{3}{20}\exp\left(3-+\frac{3}{20}\,\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)<0$, f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
   (c) On cherche à résoudre l'équation $f(t)\leqslant 0.02$, c'est-à-dire $\exp\left(3-3\,\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)\leqslant 0.02$.
   On a alors $-3\,\exp\left(\frac{t}{20}\right)\leqslant\ln(0.02)-3$ puis $\exp\left(\frac{t}{20}\right)\geqslant\frac{\ln(0.02)-3}{-3}$.
   Enfin, on trouve $t\geqslant 20\ln\left(\frac{\ln(0.02)-3}{-3}\right)$.
   Or, $20\ln\left(\frac{\ln(0.02)-3}{-3}\right)\simeq 16.69$. La taille de l'échantillon sera inférieure à 20 individus après 17 ans.

► Correction 219

1. Si f est une constante λ, on a alors $\lambda^2=\lambda$ et donc $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.
2. (a) En prenant $a=b=0$, on a $f(0+0)=f(0)f(0)$ soit $f(0)=f(0)^2$ et donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$. Or, si $f(0)=0$, on a, pour tout réel x, $f(0+x)=f(0)f(x)=0$, ce qui est impossible puisqu'on suppose f non constante. Ainsi, $f(0)=1$.
   (b) Fixons $a\in\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto f(a+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto f'(a+x)$. La fonction $x\mapsto f(a)f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto f(a)f'(x)$. Ainsi, pour tout réel x, on a $f'(a+x)=f(a)f'(x)$. En particulier, en prenant $x=0$, on a $f'(a)=f(a)f'(0)$.
   (c) f est corr d'une équation de la forme $y'=\alpha y$. Ainsi f est de la forme $x\mapsto C\mathrm{e}^{\alpha x}$, où C est une constante. Or, puisque $f(0)=1$, on a forcément $C=1$. On a donc forcément $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$ pour tout réel x. Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions conviennent.

X

Calcul intégral

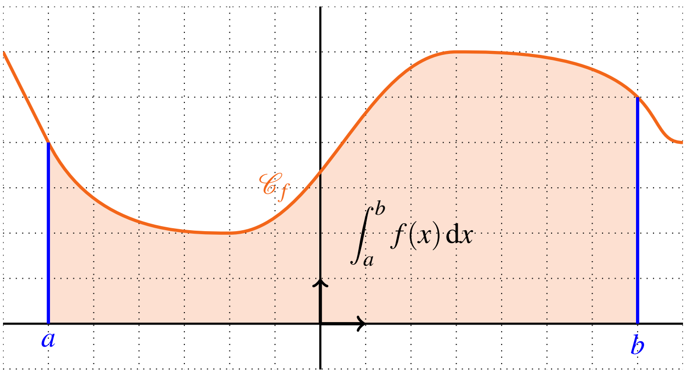
28. Cours : Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 32 : On considère un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $I(1;0)$, $K(1;1)$ et $J(0;1)$.
On appelle unité d'aire du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'aire du rectangle $OIKJ$.

Dans tout ce chapitre, on se place désormais dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

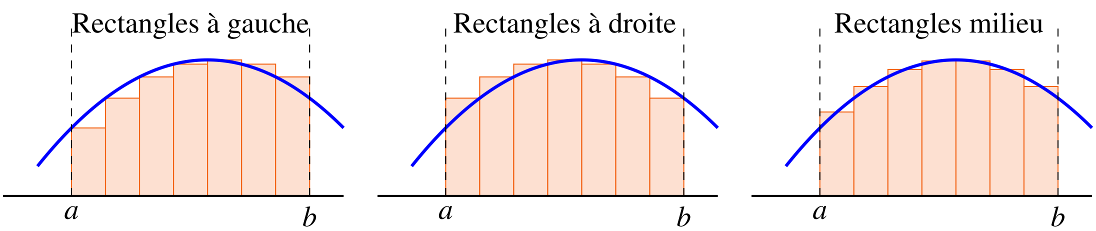
Définition 33 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, par l'axe des abscisses et par les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aires se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et s'appelle l'intégrale de $f(x)$ pour x allant de a à b.



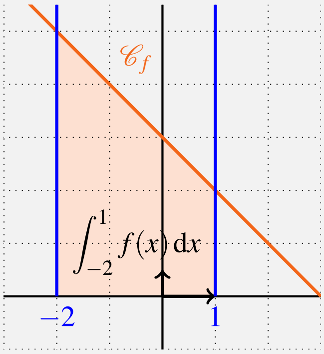
■ **Exemple 103 :** Il est possible d'encadrer l'aire sous la courbe en utilisant le quadrillage.
Ici, l'aire sous la courbe est composée de 44 carreaux entiers, l'intégrale est donc supérieur ou égale à 44. Par ailleurs, si on ajoute les 17 carreaux que traverse la courbe, on a alors que l'intégrale est inférieure à 61.

On a alors $44 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 61$. ■

La notation de l'intégrale est due à Leibniz : pour calculer l'aire sous une courbe, Leibniz l'approchait par des rectangles de largeur de plus en plus petite. La hauteur des rectangles en x était $f(x)$ et leur largeur, notée $\mathrm{d}x$, se rapprochait de 0 : on faisait donc la somme des $f(x)\,\mathrm{d}x$ entre a et b. Le symbole $\int$ de l'intégrale n'est autre qu'un S allongé qui signifie justement "somme".



■ **Exemple 104 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 6-2x$. On cherche la valeur de $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$.



Pour tout réel $x \in [-2;1]$, on a bien $f(x) \geqslant 0$.

Le polygone délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=1$ est un trapèze.

L'aire d'un trapèze dont les côtés parallèles ont pour longueur b et B et dont la hauteur vaut h est de $\dfrac{(B+b)h}{2}$.

Ici, on a $B = f(-2) = 10$, $b = f(1) = 4$ et $h = 1-(-2) = 3$.

Ainsi,

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \frac{(10+4)\times 3}{2} = 21.$$

■

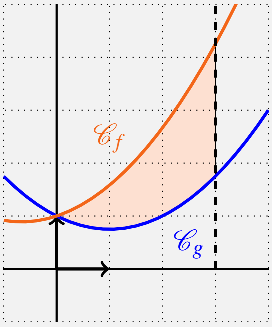
Propriété 51 : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.

On suppose que pour tout réel $x \in [a,b]$, on a $f(x) \geqslant g(x)$.

L'aire délimitée par les courbes de f et de g ainsi les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ vaut $\int_a^b (f-g)(x)\,dx$.

Il est alors possible de déterminer l'aire entre deux courbes sans même savoir l'aire sous chacune de ces deux courbes.

■ **Exemple 105 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{3} + 1$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{2} + 1$.
On souhaite déterminer l'aire entre les courbes de f et g entre les abscisses 0 et 3.



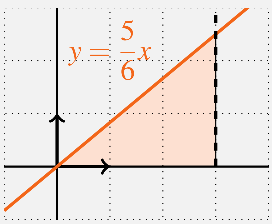
Pour tout réel $x \in [0;3]$, on a

$$f(x)-g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + 1 - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1\right) = \frac{5x}{6}.$$

Cette quantité est positive sur $[0;3]$, L'aire entre la courbe de f et celle de g entre les abscisses 0 et 3 vaut donc $\int_0^3 \frac{5}{6}x\,dx$.

Or, cette intégrale correspond à l'aire d'un triangle dont la base a pour longueur 3 et la hauteur associée vaut $\dfrac{5}{6} \times 3$ soit $\dfrac{5}{2}$.

Cette aire vaut $\dfrac{1}{2} \times 3 \times \dfrac{5}{2}$, soit $\dfrac{15}{4}$.



Ainsi, l'aire entre les courbes de f et de g entre les abscisses 0 et 3 vaut $\dfrac{15}{4}$ unités d'aire.

■

2 Intégrale et primitives

2.1 Théorème fondamental

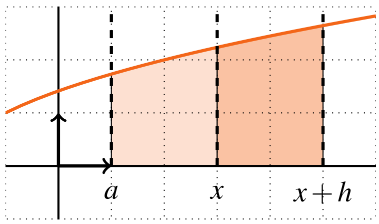
Théorème 39 : f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

En particulier, toute fonction continue positive admet une primitive.

Démonstration 40 : On se contente de démontrer le cas où f est strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$.

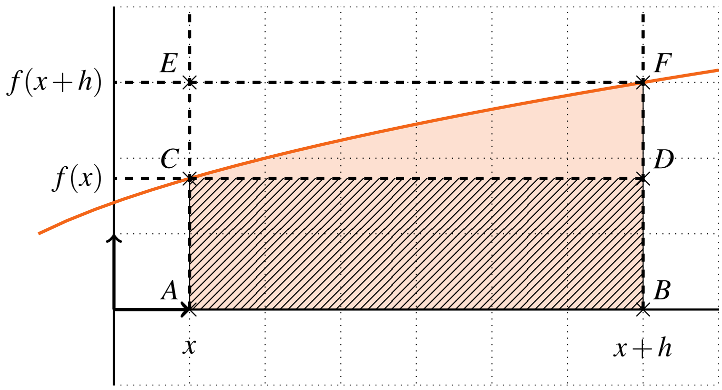
Soit $x \in [a,b[$ et h un réel strictement positif tel que $x+h \in [a,b]$.



$F_a(x+h) - F_a(x)$ représente l'aire sous la courbe de f entre a et $x+h$ à laquelle on retire l'aire sous la courbe de f entre a et x. C'est donc l'aire sous la courbe de f entre x et $x+h$.

Ainsi, $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$.

On considère les points $A(x,0)$, $B(x+h,0)$, $C(x,f(x))$, $D(x+h,f(x))$, $E(x,f(x+h))$ et $F(x+h,f(x+h))$.



La fonction f étant strictement croissante, l'aire $\int_x^{x+h} f(t)dt$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABDC$, qui vaut $h \times f(x)$ et l'aire du rectangle $ABFE$ qui vaut $h \times f(x+h)$.

Ainsi, $hf(x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant hf(x+h)$. En divisant par h strictement positif, on a alors

$$f(x) \leqslant \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leqslant f(x+h).$$

Or, f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

On raisonne de la même manière pour $x \in]a;b]$ et $h < 0$. On a donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

La fonction F_a est dérivable en x et $F_a'(x) = f(x)$. Ce raisonnement vaut pour tout $x \in [a,b]$: F_a est une primitive de f sur $[a,b]$.

Par ailleurs, $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. □

Définition 34 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

On note également $[F(x)]_a^b$.

Démonstration 41 : On considère la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. On rappelle que cette fonction est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Soit F une autre primitive de f sur $[a,b]$. Les primitives de f sur $[a,b]$ ne variant que par une constante, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $F_a(x) = F(x) + k$.

Or, on sait que $F_a(a) = 0$. Il en vient que $F(a) + k = 0$ et donc $k = -F(a)$. Ainsi, pour tout réel $x \in [a;b]$,

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

En particulier, $F_a(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. □

Cette quantité ne dépend donc pas de la primitive choisie !

■ **Exemple 106 :** On cherche à calculer $\int_1^5 x^2\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[1;5]$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^3}{3}$. Ainsi,

$$\int_1^5 x^2) \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}.$$

■

2.2 Généralisation aux fonctions de signe quelconque

Définition 35 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

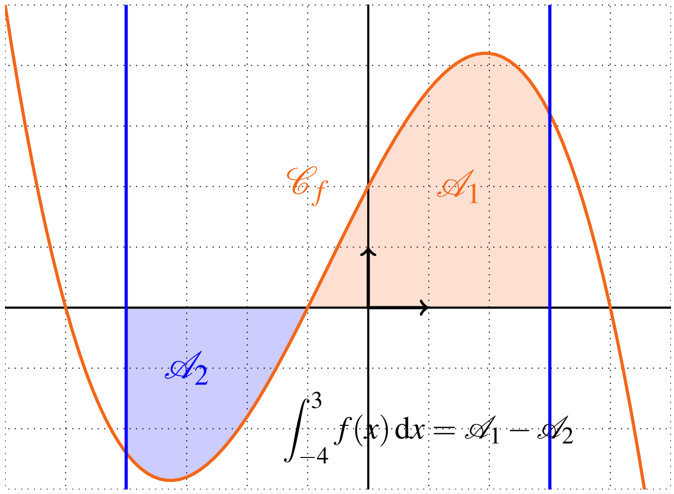
■ **Exemple 107 :** On cherche à calculer $\int_{-2}^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $[-2;1]$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{4}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^1 x^3) \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

■

La quantité ici est négative, il n'est pas possible de l'interpréter directement comme une aire. Il s'agit en réalité de la différence de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses lorsque la courbe est au-dessus de cet axe et de cette même aire lorsque la courbe est cette fois en-dessous de l'axe des abscisses.



2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 52 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et c un réel de l'intervalle $[a,b]$. Soit λ réel.

- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;
- $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$;
- **(Relation de Chasles)** $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

La relation de Chasles permet notamment de calculer la valeur d'intégrales de fonctions définies par morceaux.

■ **Exemple 108 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{, si } x<0 \\ x^3+1 & \text{, si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

La fonction f est continue sur $[-2;3]$. En effet, le seul souci en éventuel se situe en 0.

Or, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^2+1 = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^3+1 = 1$ et $f(0)=1$. Ainsi,

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (x^3+1)dt.$$

Or, une primitive de $x \mapsto x^2+1$ sur $[-2,0]$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}+x$ et une primitive de $x \mapsto x^3+1$ sur $[0;3]$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4}+x$. Finalement,

$$\int_{-2}^{3} f(t)dt = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{0}^{3} = \frac{14}{3}+\frac{93}{4} = \frac{335}{12}.$$

■

Propriété 53 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si pour tout réel x dans $[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Cette propriété est souvent utilisée dans le sens contraposé : si f est une fonction continue et positive d'intégrale nulle, alors f est la fonction nulle.

Propriété 54 : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout réel x, $f(x) \leqslant g(x)$.

On a alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration 42 : La fonction $g-f$ est continue et positive sur $[a,b]$.

Ainsi, d'après la propriété précédente, $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Or, $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. On a donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

■ **Exemple 109 :** Soit f une fonction continue sur $[-2,5]$ telle que pour tout $x \in [-2;5]$, $x \leqslant f(x) \leqslant 7$.

Ainsi, $\int_{-2}^5 x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, $\int_{-2}^5 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^5 = \frac{21}{2}$ et $\int_{-2}^5 7\,\mathrm{d}x = [7x]_{-2}^5 = 49$. Ainsi, $\frac{21}{2} \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 49$. ■

2.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 36 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel

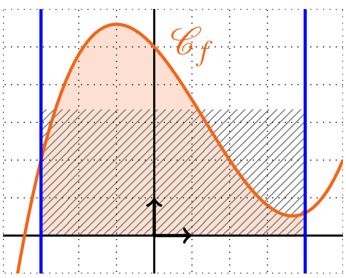
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■ **Exemple 110 :** La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2+1$ sur $[1;4]$ vaut

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3}+4-\frac{1^3}{3}-1\right) = 24.$$

■

Pourquoi le nom de valeur moyenne ? Si l'on note M la valeur moyenne de la fonction f, alors l'aire sous la courbe de f entre a et b correspond à l'aire du rectangle ayant pour longueur $b-a$ et pour hauteur M.
Dans le cas ci-contre, le rectangle hachuré (qui a pour hauteur la valeur moyenne de la fonction représentée) et le domaine rempli en rouge ont la même aire.



3 Intégration par parties

Propriété 55 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a{,}b]$ dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Alors

$$\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration 43 : uv est dérivable sur $[a{,}b]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire $uv' = (uv)' - u'v$. En intégrant cette égalité entre a et b, on obtient le résultat voulu. □

■ **Exemple 111 :** On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = x$. On a alors $u'(x) = 1$;
- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ de sorte que $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

On cherche alors à calculer $\displaystyle\int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

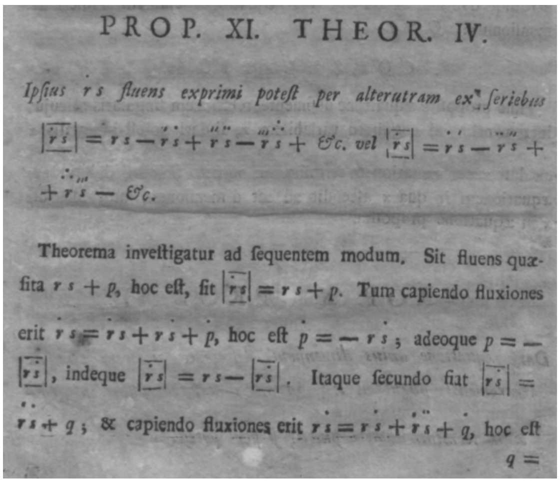
$$\int_0^1 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^1 - \int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = \left[x \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\left[x \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ et $\int_0^1 1 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} - \dfrac{1}{4}$. Ainsi,

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

■

L'intégration par parties est pour la première fois abordée par Brook Taylor en 1715, dans son livre *Methodus Incrementorum directa et inversa*. Dans cet ouvrage, Taylor utilise la notation de Newton : les dérivées sont symbolisées par un point et les intégrales par un rectangle qui entoure la fonction.


PROP. XI. THEOR. IV.

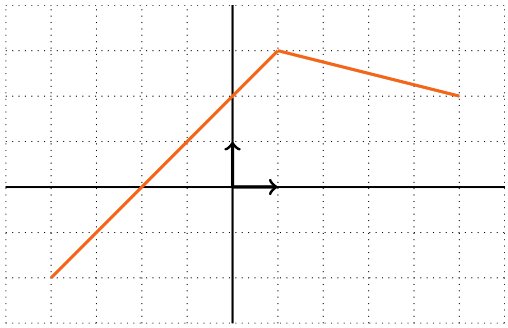
Ipsius $\dot{r}s$ fluens exprimi potest per alterutram ex seriebus $\boxed{\dot{r}s} = rs - \dot{r}s + \ddot{r}s - \dddot{r}s +$ &c. vel $\boxed{\dot{r}s} = \dot{r}s - \ddot{r}s +$ $+ \dddot{r}s -$ &c.

Theorema investigatur ad sequentem modum. Sit fluens quæsita $rs + p$, hoc est, sit $\boxed{\dot{r}s} = rs + p$. Tum capiendo fluxiones erit $\dot{r}s = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$, hoc est $\dot{p} = - r\dot{s}$; adeoque $p = - \boxed{r\dot{s}}$, indeque $\boxed{\dot{r}s} = rs - \boxed{r\dot{s}}$. Itaque secundo fiat $\boxed{r\dot{s}} = \dot{r}s + q$; & capiendo fluxiones erit $r\dot{s} = r\dot{s} + \dot{r}\ddot{s} + \dot{q}$, hoc est $q =$

29. Exercices

Intégrale d'une fonction continue positive

► **Exercice 220**
On considère une fonction f dont la courbe représentative est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

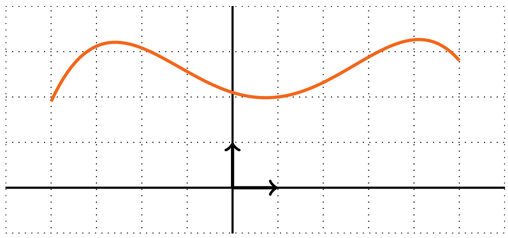


Déterminer les valeurs de

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

► **Exercice 221**



On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-contre dans un repère orthonormé.
Donner un encadrement de $\displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

► **Exercice 222**
Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x+8$. Calculer $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

► **Exercice 223**
On rappelle que pour tout réel x, $|x| = \max(x, -x)$. Déterminer $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|\,\mathrm{d}x$.

► **Exercice 224**
Soit x un réel supérieur ou égal à 4. Exprimer $\displaystyle\int_{4}^{x} (2t+3)dt$ en fonction de x.

► **Exercice 225**
Soit f une fonction affine que l'on suppose positive sur $[-3;5]$, telle que $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 24$ et $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = 14$.
Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x.

► **Exercice 226**
Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Après avoir déterminé la nature de la courbe représentative de f, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Intégrale et primitives

► Exercice 227

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{-5}^{7} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{3}^{14} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{-2}^{4} (x^2+3x+4)\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_{0}^{10} \mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x$ **e.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4-x^2+x-1)\,\mathrm{d}x$ **f.** $\displaystyle\int_{-2}^{2} (8x^5+5x^3+2x)\,\mathrm{d}x$

g. $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ **h.** $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{3}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **i.** $\displaystyle\int_{0}^{2} ((x+1)(x+2))\,\mathrm{d}x$

j. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ **k.** $\displaystyle\int_{3}^{7} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ **l.** $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

► Exercice 228

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_{-2}^{4} 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ **b.** $\displaystyle\int_{2}^{e} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ **c.** $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ **e.** $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,\mathrm{d}x$ **f.** $\displaystyle\int_{-3}^{2} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$

► Exercice 229

Pour tout réel $x > -1$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-1;+\infty[$.
3. Calculer alors $\displaystyle\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 230

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue.

On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en secondes et $v(t)$ en mètres par seconde.

On suppose de plus que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

Partie A : Récorr d'une équation différentielle

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v est corr de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(E) \quad : \quad 10y' + y = 30$$

1. Résoudre l'équation homogène associée (H) : $10y' + y = 0$.
2. Déterminer une corr constante de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des corrs de l'équation (E).
4. On suppose que, lorsque le cycliste s'élance, sa vitesse initiale est nulle. On a donc $v(0) = 0$. Déterminer une expression de $v(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.

Partie B : Étude de la fonction v

On considère la fonction $v : t \mapsto 30 - 30\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$.

1. Montrer que la fonction v est croissante et concave sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction v en $+\infty$.
3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à 0,1 m.s^{-2}.
   (a) Compléter le programme suivant, écrit en Python, qui permet de renvoyer la plus petite valeur de t, à la seconde près, à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée. On rappelle que la commande **from math import exp** permet d'utiliser la fonction exponentielle qui s'écrit **exp** en Python.

```
from math import exp

def v_prime(x) :
  return ...

def seuil() :
  t = 0
  while v_prime(t) ... :
    t = ...
  return t
```

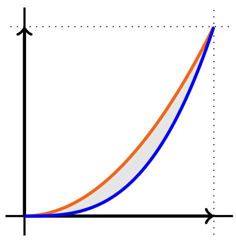
   (b) A l'aide d'une récorr d'inéquation, déterminer la valeur de t recherchée.
4. La distance d parcourue par ce cycliste entre les instants t_1, et t_2 est donnée par $d = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la distance parcourue par ce cycliste pendant les 35 premières secondes, arrondie au mètre près.

▶ Exercice 231

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{, si } x < -1 \\ 2x^3-x+1 & \text{, si } x \geqslant -1 \end{cases}$.

Justifier que f est continue sur $[-4;1]$ puis calculer $\displaystyle\int_{-4}^{1} f(t)dt$.

▶ Exercice 232



On a tracé ci-contre, dans un repère orthonormé, les courbes des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0;1]$.

1. Justifier que, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
2. Calculer l'aire de la surface grisée.

▶ Exercice 233

Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ en utilisant celle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice 234

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $-x^2 \leqslant -2x+1$ et que $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \dfrac{e}{2}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

▶ Exercice 235

Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$.

► **Exercice 236**
Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 4x$ sur $[0;4]$.

► **Exercice 237**
Un bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à :

$$f(x) = \frac{5\ln(x)}{x} + 3.$$

1. Montrer que $F : x \mapsto \dfrac{5\ln(x)^2}{2} + 3x$ est une primitive de f sur $[2;4]$.
2. Calculer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2000 à 4000 pièces.

► **Exercice 238**
Soit f une fonction affine. Montrer que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$ vaut $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Intégration par parties

► **Exercice 239**
A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^4 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = x$.

► **Exercice 240 — Un extrait d'exercice que j'ai eu au bac...**
On note $I = \displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_1^e (\ln(x))^2\,\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur cet intervalle.
2. En déduire la valeur de I.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de J.

► **Exercice 241**
Soit t un réel strictement supérieur à 1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x$. On pourra poser $v = \ln$ et déterminer une fonction u tel que pour tout réel x, $u'(x) = 1$.

► **Exercice 242**
Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par

$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer la valeur exacte de I_0.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs de I_1 et I_2.

► **Exercice 243**
En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Exercices de synthèse

► Exercice 244

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$.

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On précisera les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel $x \in [0;4]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. Chercher trois réels a, b et c tels que la fonction $x \mapsto (ax^2 + bx + x)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de f et en déduire la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.
5. Retrouver cette valeur à l'aide de deux intégrations par parties successives.

► Exercice 245 — Sujet zéro 2024

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan. On désigne par I_n la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

1. (a) On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par $F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$.
   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.
   (b) Calculer I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$
3. Calculer I_2.
4. On considère la fonction **mystere** écrite dans le langage Python.

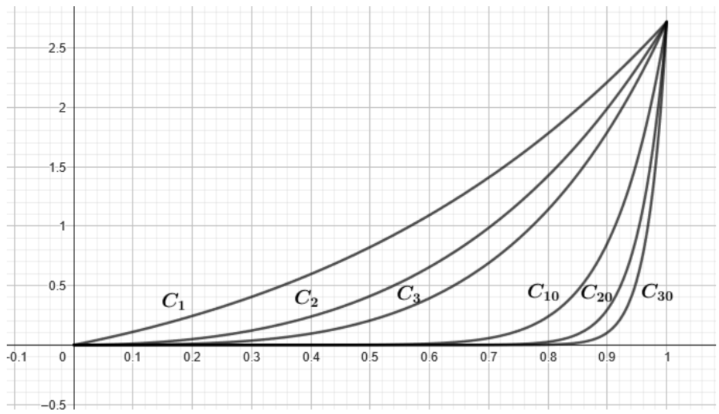
```python
from math import e #la constante d'Euler e

def mystere(n):
  a = 1
  L = [a]
  for i in range(1,n):
    a = e - (i + 1) * a
    L.append(a)
  return L
```

   À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel **mystere(5)**.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30}.



   (a) Donner une interprétation graphique de I_n.
   (b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?
2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

► Exercice 246 — Métropole 2024

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{2}\ln(x)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivables sur $]0;+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Montrer que pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.
   (c) Étudier le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.
   (d) Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une corr unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1;2]$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.
   (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0;1]$ par $g(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln(x)$. On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;1]$ et on note g' sa fonctione dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. (a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.
   (b) On admet le tableau de signes suivant :

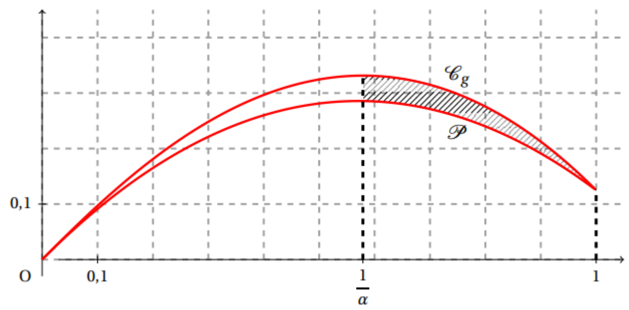
x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$f\left(\frac{1}{x}\right)$	‖	$+$	0	$-$	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0;1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire

On a représenté sur le graphique ci-dessous

- La courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{P}$ et les droites d'équation $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

1. (a) Justifier la position relative des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{P}$ sur l'intervalle $]0;1]$.
   (b) Démontrer l'égalité
   $$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$
2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathscr{A}$.

► Exercice 247

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante. Que peut-on en déduire ?
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n et tout $x \in [0;1]$, $x^n \ln(1+x) \leqslant x^n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
4. (a) En effectuant une intégration par partie, montrer que pour tout entier naturel n, on a
   $$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$
   (b) Étudier la convergence de la suite (nI_n).

30. Corrigés

► Correction 220

$\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire d'un triangle et vaut $\dfrac{2\times 2}{2} = 2$.

$\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de deux trapèzes.

Le premier a une aire de $\dfrac{(2+3)\times 1}{2}$ et le deuxième une aire de $\dfrac{(3+2)\times 4}{2}$. L'aire total vaut donc 12,5.

$\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de deux trapèzes.

Le premier a une aire de $\dfrac{(1+3)\times 2}{2}$ et le deuxième a une aire de $\dfrac{(3+2.5)\times 2}{2}$. L'aire totale vaut donc 9,5.

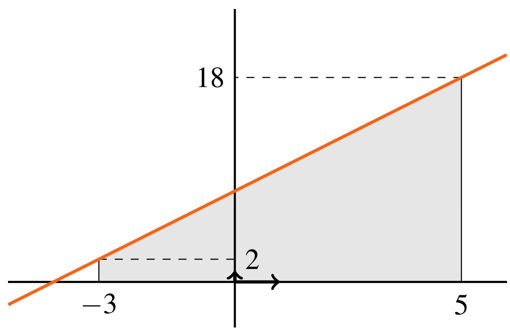
Pour calculer l'aire $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$, il suffit d'ajouter les aires $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$. L'aire recherchée vaut donc 14,5.

► Correction 221

Il est possible d'encadrer l'intégrale en comptant le nombre de carreaux sous la courbe pour avoir un minorant. On ajoute les carreaux que la courbe traverse pour obtenir un majorant. On a donc $19 \leqslant \displaystyle\int_{-4}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 30$. Cet encadrement peut largement être amélioré (en ne considérant que des demi-carreaux par exemple).

► Correction 222

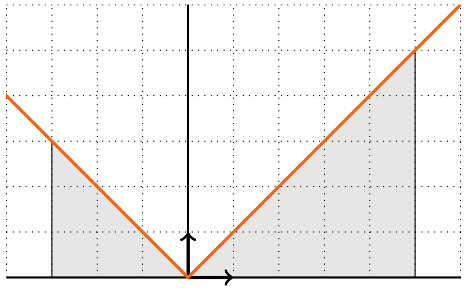
Pour tout réel x, on pose $f(x) = 2x+8$. $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne l'aire ci-dessous.



Il s'agit de l'aire d'un trapèze dont les bases ont pour longueur 2 et 18 et la hauteur a pour longueur 8. Cette aire vaut donc $\dfrac{(2+18)\times 8}{2}$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{2+18}{2}\times 8 = 80$.

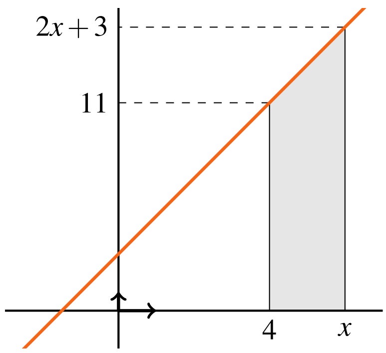
► Correction 223

L'intégrale $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|\,\mathrm{d}x$ est représentée par l'aire ci-dessous.



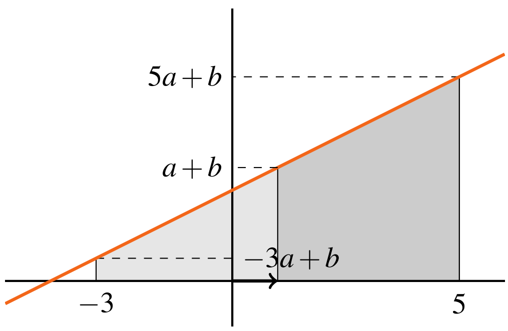
Il s'agit de l'aire de deux triangles. Le premier a une aire de $\dfrac{3\times 3}{2}$ et le deuxième une aire de $\dfrac{5\times 3}{2}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_{-3}^{5} |x|\,\mathrm{d}x = 17$.

► Correction 224
L'intégrale $\displaystyle\int_4^x (2t+3)dt$ représente l'aire de la surface grisée ci-dessous.



Il s'agit de l'aire d'un trapèze dont les bases ont pour longueur 11 et $2x+3$ et la hauteur a pour longueur $x-4$.
Cette aire vaut donc $\dfrac{(2x+3+11)\times(x-4)}{2}$ soit $x^2+3x-28$. Ainsi, $\displaystyle\int_4^x (2t+3)dt = x^2+3x-28$.

► Correction 225
Soit a et b deux réels tels que, pour tous réels x, $f(x) = ax+b$. Représentons la situation.



L'aire $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire jointe des deux trapèzes.
Celle-ci vaut $\dfrac{-3a+b+5a+b}{2}\times(5-(-3)) = 8(a+b)$.

L'aire $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire du trapèze foncé. Celle-ci vaut $\dfrac{a+b+5a+b}{2} \times (5-1) = 2(6a+2b)$.

Ainsi, on a $\int_{-3}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 24$ et $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 14$ si et seulement si $\begin{cases} 8(a+b) = 24 \\ 2(6a+2b) = 14 \end{cases}$.

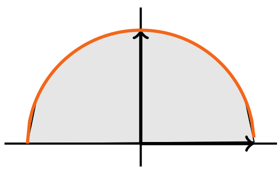
Ce système est équivalent à $\begin{cases} a+b = 3 \\ 6a+2b = 7 \end{cases}$.

En soustrayant deux fois la première ligne à la deuxième ligne, on obtient $\begin{cases} a+b = 3 \\ 4a = 1 \end{cases}$.

Finalement, $\begin{cases} b = \frac{11}{4} \\ a = \frac{1}{4} \end{cases}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{11}{4}$.

► **Correction 226**

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1;1]$ est le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon 1. L'aire du demi-disque vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$.



► **Correction 227**

a. $\int_{-5}^7 \sqrt{2}\,\mathrm{d}x = [\sqrt{2}x]_{-5}^7 = \sqrt{2}(7-(-5)) = 12\sqrt{2}$. Il est aussi possible de procéder à un calcul d'aire.

b. $\int_3^{14} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_3^{14} = \ln(14) - \ln(3) = \ln\left(\dfrac{14}{3}\right)$.

c. $\int_{-2}^4 (x^2+3x+4)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^4 = \dfrac{4^3}{3} + \dfrac{3}{2} \times 4^2 + 4 \times 4 - \left(\dfrac{(-2)^3}{3} + \dfrac{3}{2} \times (-2)^2 + 4 \times (-2)\right) = 66$.

d. $\int_0^{10} \mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{-5}\right]_0^{10} = -\dfrac{\mathrm{e}^{-50}}{5} + \dfrac{1}{5}$. Attention à d'éventuelles erreurs de signe ici !

e. $\int_{-1}^1 (x^4 - x^2 + x - 1)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^1 = -\dfrac{34}{15}$.

f. $\int_{-2}^2 (8x^5 + 5x^3 + 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{4}{3}x^6 + \dfrac{5}{4}x^4 + x^2\right]_{-2}^2 = 0$. On aurait également pu tout simplement remarquer que la fonction intégrée était impaire et l'intervalle d'intégration symétrique par rapport à 0.

g. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}.$

h. $\displaystyle\int_1^9 \frac{3}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[3\sqrt{x}\right]_1^9 = 6.$

i. $\displaystyle\int_0^2 ((x+1)(x+2))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2+3x+2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^2 = \frac{38}{3}.$

j. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$

k. $\displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_3^7 = \frac{4}{21}.$

l. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2 = \frac{7}{8}.$

► Correction 228

a. Pour tout réel $x \in [-2;4]$, on pose $u(x) = x^2$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $2x\mathrm{e}^{x^2} = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$. Une primitive de $x \mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2}$ sur $[-2;4]$ est donc la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^4 2x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-2}^4 = \mathrm{e}^{16} - \mathrm{e}^4.$$

b. Pour tout réel $x \in [2;e]$, on pose $u(x) = \ln(x)$ (qui est alors strictement positif). On a alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $[2;e]$ est donc la fonction $x \mapsto \ln(\ln(x))$. Ainsi,

$$\int_2^e \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln\ln(x)]_2^e = -\ln(\ln(2)).$$

c. Pour tout réel $x \in [1;3]$, on pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$. On a alors $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2} = -\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{1/x} = -u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$ sur $[1;3]$ est donc la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{1/x}$. Ainsi,

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1/x}\right]_1^3 = e - \mathrm{e}^{1/3}.$$

d. Pour tout réel $x \in [0;4]$, on pose $u(x) = 1+x^2$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ sur $[0;4]$ est donc la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$. Ainsi,

$$\int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^4 = \ln(17).$$

e. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, on pose $u(x) = 9+x^2$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $\dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}} = \dfrac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{9+x^2}}$ sur $[-1;4]$ est donc la fonction $x \mapsto \sqrt{9+x^2}$. Ainsi,

$$\int_{-1}^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,\mathrm{d}x = \left[\sqrt{9+x^2}\right]_{-1}^4 = 5 - \sqrt{10}.$$

f. Pour tout réel $x \in [-3;2]$, on pose $u(x) = 1+\mathrm{e}^x$. On a alors $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$ sur $[-3;2]$ est donc la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. Ainsi,

$$\int_{-3}^{2} \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\right]_{-3}^{2} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{2}}.$$

► Correction 229

Pour tout réel $x > -1$,

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} = f(x).$$

Une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est donc $F : x \mapsto \ln(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right]_1^3 = \ln(4) + \frac{1}{4} - \ln(2) - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{4}$.

► Correction 230

Partie A : Récorr d'une équation différentielle

1. On a $10y' + y = 0$ si et seulement si $y' + \dfrac{1}{10}y = 0$. Les corrs de cette équation sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-t/10}$, pour C réel.
2. La corr constante de l'équation (E) est $y = 30$.
3. L'ensemble des corrs de (E) est donc l'ensemble des fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-t/10} + 30$, pour C réel.
4. On cherche C tel que $v(0) = 0$. On a alors $C + 30 = 0$ et donc $C = -30$. Ainsi, pour tout réel t, on a $v(t) = -30\mathrm{e}^{-t/10} + 30 = 30(1-\mathrm{e}^{-t/10})$.

Partie B : Étude de la fonction v

1. Pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $v'(t) = 3\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$ et $v''(t) = -\dfrac{3}{10}\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right)$. En particulier, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $v'(t) \geqslant 0$ et $v''(t) \leqslant 0$. La fonction v est donc croissante et concave sur $]0;+\infty[$.
2. On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{10}\right) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to-\infty}\exp(T) = 0$. Ainsi, par composition $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\exp\left(-\frac{t}{10}\right) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t) = 30$.
3. (a) On complète le programme Python ci-dessous.

```
from math import exp

def v_prime(x) :
  return 3 * exp(-x/10)

def seuil() :
  t = 0
  while v_prime(t) > 0.1 :
    t = t + 1
  return t
```

   (b) on cherche la plus petite valeur entière de t pour laquelle $v'(t) \leqslant 0.1$. Or, $v'(t) \leqslant 0{,}1$ si et seulement si $3\exp\left(-\dfrac{t}{10}\right) \leqslant 0{,}1$ soit $\left(-\dfrac{t}{10}\right) \leqslant \dfrac{1}{30}$. Par croissance de la fonction logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, cela équivaut à $-\dfrac{t}{10} \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{30}\right)$ soit $t \geqslant 10\ln(30)$. Or, $10\ln(30) \simeq 34{,}01$. La valeur recherchée est donc 35 secondes.

4. Une primitive de v sur $[0;+\infty[$ est $V : t \mapsto 30t + 300\exp\left(-\frac{t}{10}\right)$. Ainsi, $\int_0^{35} v(t) = [V(t)]_0^{35} \simeq 759$.

► Correction 231
Le seul problème éventuel se situe en -1. On a $\lim_{x\to -1^1} f(x) = (-1)^2 + (-1) = 0$ et
$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2\times(-1)^3 - (-1) + 1 = 0$. Ainsi, f est continue sur $[-4;1]$.
D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-4}^{1} f(t)dt = \int_{-4}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-4}^{-1}(t^2+t)dt + \int_{-1}^{1}(2t^3-t+1)dt.$$

Or, $\int_{-4}^{-1}(t^2+t)dt = \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right]_{-4}^{-1} = \frac{27}{2}$ et $\int_{-1}^{1}(2t^3-t+1)d = \left[\frac{t^4}{2}-\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{1} = 2$.

Ainsi, $\int_{-4}^{1} f(t)dt = \frac{31}{2}$.

► Correction 232
On a

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x}\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Par ailleurs, si on pose pour tout $x \in [0,1]$, $u(x) = 1+e^x$, on a $\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{u'(x)}{1+u(x)}$. u étant strictement positive, une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ sur $[0;1]$ est la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$. Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Finalement,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,dx = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln(e) - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right).$$

► Correction 233
Soit $x \in [0;1]$. On a alors $0 \leqslant x \leqslant 1$ puis, en multipliant cette inégalité par x^2, $0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$, et donc $g(x) \leqslant f(x)$.
L'aire de la surface grisée vaut

$$\int_0^1 (f-g)(x)\,dx = \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

► Correction 234

1. Pour tout entier naturel n
$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2\,\mathrm{d}x}-\int_0^{n}\mathrm{e}^{-x^2\,\mathrm{d}x}=\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Puisque pour tout réel x entre n et $n+1$, $\mathrm{e}^{-x^2}>0$, il en vient que $\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\geqslant 0$ et donc $u_{n+1}\geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.
2. Soit $x\geqslant 0$. Alors $(x-1)^2\geqslant 0$, c'est-à-dire, $x^2-2x+1\geqslant 0$ et donc $-x^2\leqslant -2x+1$. La fonction exponentielle étant croissante, on a alors $\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant \mathrm{e}^{-2x+1}$.
3. Ainsi, pour tout entier naturel n,
$$u_n=\int_0^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^n \mathrm{e}^{-2x+1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{-2}\right]_0^n=-\frac{\mathrm{e}^{2n+1}}{2}+\frac{e}{2}\leqslant\frac{e}{2}.$$
4. La suite (u_n) est croissante et majorée : cette suite est donc convergente.

► Correction 235

La valeur moyenne de la fonction $f:x\mapsto 3x+2$ sur $[-2;3]$ vaut
$$\frac{1}{3-(-2)}\int_{-2}^{3}(3x+2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left[\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{3}=\frac{7}{2}.$$

► Correction 236

La valeur moyenne de la fonction $f:x\mapsto -x^2+4x$ sur $[0;4]$ vaut
$$\frac{1}{4-(0)}\int_0^4(-x^2+4x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=-\frac{64}{3}+32=\frac{1}{4}\times\frac{32}{3}=\frac{8}{3}.$$

► Correction 237

On rappelle que si u est dérivable sur un intervalle I, alors u^2 l'est également et $(u^2)'=2u'u$. Pour tout réel $x\in[2;4]$,
$$F'(x)=\frac{5}{2}\times 2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)+3=f(x).$$
F est donc une primitive de f sur $[2;4]$.

La valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie de 2000 à 4000 pièces vaut
$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[F(x)\right]_2^4=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5\ln(4)^2}{2}+3\times 4-\frac{5\ln(2)^2}{2}-3\times 2\right).$$
En utilisant le fait que $\ln(4)=2\ln(2)$, on obtient
$$\frac{1}{4-2}\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=3+\frac{15\ln(2)^2}{4}.$$

► Correction 238

Soit m et p les réels tels que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p$. La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ vaut

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{mx^2}{2}+px\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\times\left(\frac{mb^2-ma^2}{2}+p(b-a)\right)$$

puis

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\times(b-a)\times\left(\frac{m(b+a)+2p}{2}\right)$$

et donc

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+p)\,\mathrm{d}x = \frac{mb+ma+2p}{2} = \frac{ma+p+mb+p}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

► Correction 239

Pour tout réel $x \in [1;4]$, on pose...

- $v(x) = \ln(x)$. On a alors $v'(x) = \frac{1}{x}$;
- $u(x) = \frac{x^2}{2}$ de sorte que $u'(x) = \frac{x^2}{2}$.

On souhaite alors calculer $\int_1^4 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_1^4 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_1^4 - \int_1^4 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 8\ln(4) - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^4 = 8\ln(4) - \frac{15}{4}.$$

► Correction 240

F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $F'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$. F est donc bien une primitive de ln sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, $I = \int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_1^e = e\ln(e) - e - (1\ln(1) - 1) = 1$.

Pour tout réel $x \in [1;e]$, on pose...

- $v(x) = \ln(x)$. On a alors $v'(x) = \frac{1}{x}$;
- $u(x) = x\ln(x) - x$ de sorte que $u'(x) = \ln(x)$.

On souhaite alors calculer $J = \int_1^e (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J = [(x\ln(x) - x)\ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x\ln(x) - x}{x}\,\mathrm{d}x = 0 - \int_1^e (\ln(x) - 1).$$

Ainsi,

$$J = -\left(\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^e 1\,\mathrm{d}x\right) = -I + (e-1) = e-2.$$

► Correction 241

Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v(x) = \ln(x)$ et $u(x) = x$. Ainsi, par intégration par parties,

$$\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^t u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_1^t - \int_1^t u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il en vient que

$$\int_1^t \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^t - \int_1^t 1\,\mathrm{d}x = t\ln(t) - t - 1.$$

En particulier, la fonction $t \mapsto t\ln(t) - t$ est une primitive de ln sur $[1;+\infty[$ (et sur $]0;+\infty[$ en réalité !).

► Correction 242

1. On a $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 = e-1$.
2. Soit n un entier naturel.
   - Pour tout réel $x \in [0,1]$, on pose $v(x) = x^{n+1}$. On a alors $v'(x) = (n+1)x^n$.
   - Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$ de sorte que $u'(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.

   Ainsi,

   $$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

   D'après la formule d'intégrations par parties,

   $$I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times (-\mathrm{e}^{1-x})\,\mathrm{d}x = -1 + (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = -1 + (n+1)I_n.$$
3. Ainsi,
   - $I_1 = -1 + 1 \times I_0 = -1 + e - 1 = e - 2$.
   - $I_2 = -1 + 2 \times I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e - 5$.

► Correction 243

On souhaite calculer $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose...

- $v(x) = x^2$. On a alors $v'(x) = 2x$;
- $u(x) = \mathrm{e}^x$ de sorte que $u'(x) = \mathrm{e}^x$.

On souhaite alors calculer $\displaystyle\int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^1 - \int_0^1 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e - 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

On souhaite maintenant calculer $\displaystyle\int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v_2(x) = x$. On a alors $v_2'(x) = 1$;
- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u_2(x) = \mathrm{e}^x$ de sorte que $u_2'(x) = \mathrm{e}^x$.

On cherche alors à calculer $\displaystyle\int_0^1 (u_2'v_2)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_0^1 (u_2'v_2)(x)\,\mathrm{d}x = [u_2v_2]_0^1 - \int_0^1 (u_2v_2')(x)\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e - [\mathrm{e}^x]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

Finalement,

$$\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e - 2.$$

► **Correction 244**

1. D'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}$. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} + x^2 \times (-\mathrm{e}^{-x}) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}.$$
On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-4}$	$\searrow$	0

2. D'après la question précédente, pour tout réel $x \in [0;4]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 4\mathrm{e}^{-4}$.
3. On en déduit que $\displaystyle\int_0^4 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^4 4\mathrm{e}^{-4}\,\mathrm{d}x$ soit $0 \leqslant \displaystyle\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 16\mathrm{e}^{-4}$.
4. Soit $g : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$g'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x} = (-ax^2+(2a-b)x+b-c)\mathrm{e}^{-x}.$$
Il suffit alors de prendre a, b et c de telle sorte que $-a = 1$, $2a-b = 0$ et $b-c = 0$. Ainsi, $a = -1$, $b = -2$ et $c = -2$ conviennent. Une primitive de f est donc $g : x \mapsto -(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$. De fait,
$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = 2-26\mathrm{e}^{-4}.$$
5. Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. On a alors $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$. D'après la formule d'intégration par parties, on a
$$\int_0^4 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^4 - \int_0^4 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$
Ainsi,
$$\int_0^4 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 2x\times(-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -16\mathrm{e}^{-4} + 2\int_0^4 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
Pour tout réel x, on pose alors $w(x) = x$. D'après la formule d'intégration par parties, on a
$$\int_0^4 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 (wv')(x)\,\mathrm{d}x = [wv]_0^4 - \int_0^4 (w'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

et donc

$$\int_0^4 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 - \int_0^4 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -4\mathrm{e}^{-4} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = 1-5\mathrm{e}^{-4}.$$

Ainsi,

$$\int_0^4 x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -16\mathrm{e}^{-4} + 2(1-5\mathrm{e}^{-4}) = 2-26\mathrm{e}^{-4}.$$

► Correction 245

Partie I

1. (a) Pour tout réel $x\in[0;1]$, $F_1'(x) = 1\times\mathrm{e}^x + (x-1)\times\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$. F_1 est bien une primitive de f_1 sur $[0;1]$.
   (b) On a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = [F_1(x)]_0^1 = F_1(1)-F_1(0) = 0-(-1) = 1$.
2. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. Pour tout réel $x\in[0;1]$, on pose $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
   On a alors $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,
   $$I_{n+1} = \int_0^1 uv'(x)\,\mathrm{d}x = [uv(x)]_0^1 - \int_0^1 u'v(x)\,\mathrm{d}x = [x^{n+1}\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = e-(n+1)I_n.$$
3. On a $I_2 = I_{1+1} = e-(1+1)I_1 = e-2$.
4. L'appel **mystere(5)** renvoie la liste des 5 premières valeurs de la suite (I_n).

Partie II

1. (a) (I_n) représente l'aire délimité par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
   (b) Il semblerait que l'aire sous la courbe se rapproche de 0, soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
2. D'une part, pour tout réel $x\in[0;1]$, on a $f_n(x)\geqslant 0$. Par ailleurs, la fonction exponentielle étant croissante, alors pour tout $x\in[0;1]$, $\mathrm{e}^x\leqslant\mathrm{e}^1$ et donc $f_n(x)\leqslant \mathrm{e}x^n$. En intégrant, on a donc bien $0\leqslant I_n\leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
3. On a $\mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\times\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{n+1}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$. Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Or, on a vu que pour tout entier naturel non nul n, on a $0\leqslant I_n\leqslant \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

► Correction 246

Partie A : étude de la fonction f

1. (a) On a $\displaystyle\lim_{x\to0}(x-2) = -2$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\ln(x) = -\infty$. Par somme, $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$.
   Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty$. Par somme, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (b) Pour tout $x>0$, on a $f'(x) = 1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{2x}+\dfrac{1}{2x} = \dfrac{2x+1}{x}$.
   (c) Puisque pour tout $x>0$, on a $2x+1>0$, la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. (on aurait également pu dire que la somme de deux fonctions croissantes est croissante...).
   (d) Pour tout réel $x>0$, $f''(x) = \dfrac{2\times2x-(2x+1)\times2}{(2x)^2} = -\dfrac{2}{(2x)^2} < 0$.
   La fonction f est concave sur $]0;+\infty[$.
2. (a) La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une corr sur l'intervalle $]0;+\infty[$. De plus, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, cette corr est unique.

En outre, on a $f(1) = -1$ et $f(2) = \dfrac{1}{2}\ln(2) > 0$. On peut donc affirmer que $\alpha \in [1;2]$.

(b) On a le tableau de signes suivant.

x	0		α		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

3. On sait que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$. Ainsi, $\dfrac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha$ et donc $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

1. Pour tout réel $x \in]0;1]$, on a

$$g'(x) = -\frac{7}{8} \times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x \times \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x).$$

Ainsi,

$$g'(x) = x\left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2}\ln(x)\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. (a) Soit $x \in \left]0; \dfrac{1}{\alpha}\right[$, on a alors $0 < x < \dfrac{1}{\alpha}$ et donc $\dfrac{1}{x} > \alpha$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on a alors $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > f(\alpha)$. Or, $f(\alpha) = 0$. Ainsi, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

(b) On sait que pour tout $x \in]0;1]$, $g'(x)$ est du signe de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. On en déduit le tableau de variations de g.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C : un calcul d'aire

1. (a) Pour tout réel $x \in]0;1]$, on note $h(x) = -\dfrac{7}{8}x^2 + x$. On a alors

$$g(x) - h(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x).$$

Or, pour tout $x \in]0;1]$, $x^2 > 0$. De plus, la fonction logarithme népérien étant croissante sur $]0;1]$, on a alors $\ln(x) \leqslant \ln(1)$ soit $\ln(x) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in]0;1]$, $g(x) - h(x) \geqslant 0$. La courbe $\mathscr{C}_g$ est donc au-dessus de $\mathscr{P}$.

(b) On souhaite calculer $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout réel $x\in\left[\frac{1}{\alpha};1\right]$, on pose $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=\frac{x^3}{3}$. On a alors $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=x^2$. D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=0-\frac{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{3\alpha^3}-\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}=\frac{\ln(\alpha)}{3\alpha^3}-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9\alpha^3}\right).$$

On a utilisé le fait que $\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\ln(\alpha)$. On rappelle alors que $\ln(\alpha)=2(2-\alpha)$. Ainsi,

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2(2-\alpha)}{3\alpha^3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9\alpha^3}=\frac{12-6\alpha}{9\alpha^3}-\frac{\alpha^3}{9\alpha^3}+\frac{1}{9\alpha^3}=\frac{-\alpha^3+6\alpha+13}{9\alpha^3}.$$

2. L'aire hachurée vaut

$$\mathscr{A}=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}(g(x)-h(x))\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\left(-\frac{1}{4}x^2\ln(x)\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\times\frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}.$$

► Correction 247

1. On a $I_0=\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. On procède à une intégration par parties, en posant, pour tout réel x entre 0 et 1, $u(x)=x$ (et donc $u'(x)=1$) et $v(x)=\ln(1+x)$. Ainsi,

$$\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=[x\ln(1+x)]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

D'une part, $[x\ln(1+x)]_0^1=\ln(2)$. Par ailleurs, pour tout réel $x\in[0;1]$, $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$. Ainsi,

$$\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\ln(2)-[x-\ln(1+x)]_0^1=\ln(2)-(1-\ln(2))=2\ln(2)-1.$$

2. Pour tout entier naturel n, pour tout réel $x\in[0;1]$ on a $0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n$. Par ailleurs, pour tout réel $x\in[0;1]$, $1+x\geqslant 1$ et donc, en appliquant la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $[1;+\infty[$, on a donc que $\ln(1+x)\geqslant 0$. Finalement, pour tout entier naturel n, pour tout réel $x\in[0;1]$, $0\leqslant x^{n+1}\ln(1+x)\leqslant x^n\ln(1+x)$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on a donc que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n$. La suite (I_n) est positive et décroissante, elle est donc convergente.
3. (a) Pour tout $x\in[0,1]$, $1\leqslant 1+x\leqslant 2$ et donc $0\leqslant\ln(1+x)\leqslant\ln(2)$, qui est lui-même inférieur à 1. Ainsi, pour tout entier naturel n et tout $x\in[0;1]$, $x^n\ln(1+x)\leqslant x^n$.

   (b) En intégrant cette dernière inégalité entre 0 et 1, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$. Or,

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, $I_n\leqslant\frac{1}{n+1}$.

   (c) On sait que pour tout entier naturel n, $0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n+1}$. Or, $\lim_{n\to+\infty}0=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$. D'après le théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge (ce que l'on avait déjà démontré) et $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$.

4. (a) Soit n un entier naturel. Pour tout $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = \ln(1+x)$ et $v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (on a alors $v'(x) = x^n$). Par intégration par parties, on a alors

$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}\ln(1+x)}{n+1}\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Pour tout entier naturel n,

$$nI_n = \frac{n\ln(2)}{n+1} - \frac{n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ (on peut factoriser par n ou écrire $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$). Par ailleurs, pour tout réel $x \in [0;1]$, $\dfrac{x^n}{2} \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^n$ et donc, en intégrant entre 0 et 1,

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, en utilisant le théorème d'encadrement, on trouve que cette intégrale converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$$

Finalement, la suite (nI_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \ln(2)$.

XI Fonctions trigonométriques

31. Cours : Fonctions trigonométriques

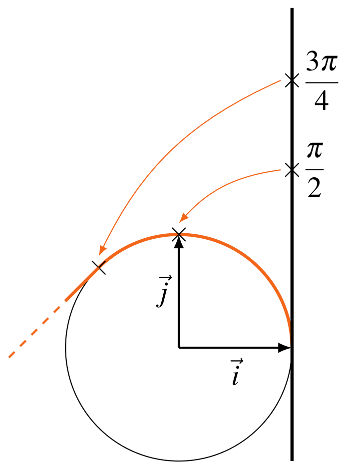
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

1 Rappels

1.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 37 : On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens trigonométrique.

On trace la droite des réels à droite de ce cercle trigonométrique, parallèlement à l'axe des ordonnées, puis on l'enroule autour d'une cercle trigonométrique. A chaque point x sur cette droite des réels, on associe ainsi un unique point $M(x)$ sur le cercle.

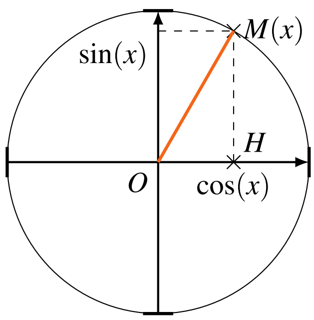


Propriété 56 : Deux réels dont la différence est le produit de 2π et d'un nombre entier ont la même image par M.

1.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 38 : Soit x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :

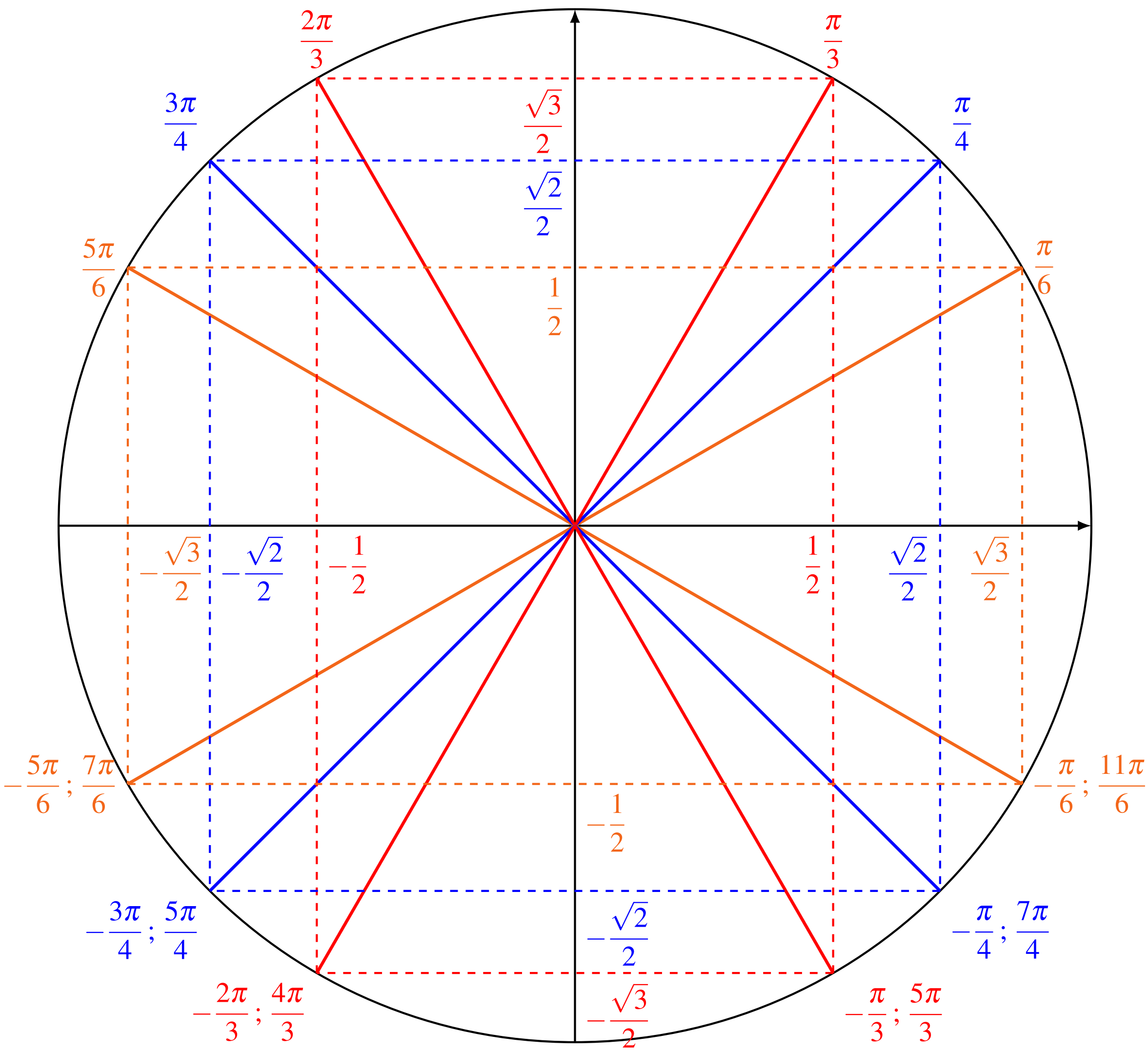
- Cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$;
- Sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$.



■ **Exemple 112 :** On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes.

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■



Propriété 57 : Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \qquad \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

■ **Exemple 113 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{2+\sin(x)}$.

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \geqslant \sin(x) \geqslant -1$, alors $3 \geqslant 2+\sin(x) \geqslant 1 > 0$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2+\sin(x)} \leqslant 1$ et donc, en multipliant par $1+x$ qui est strictement positif sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1+x}{3} \leqslant f(x)$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1+x}{3}\right) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. ■

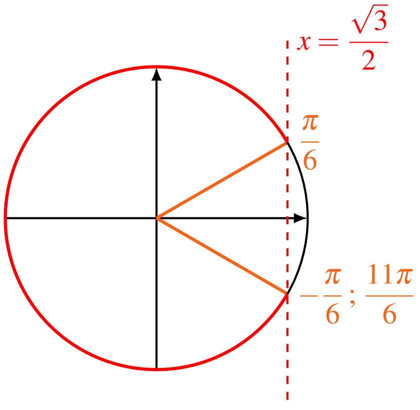
1.3 Résolution d'équation et d'inéquation

■ **Exemple 114 :** Les solutions de l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$ sont $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$. ■

■ **Exemple 115 :** Le solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sur $[0;2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. ■

■ **Exemple 116 :** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;2\pi]$ est l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$.

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$. ■

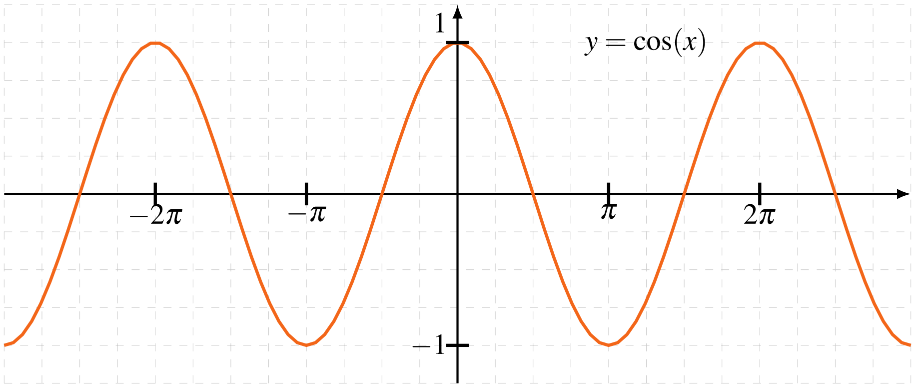


Il faut donc faire attention à l'intervalle de résolution.. Dans tous les cas, le cercle trigonométrique sera votre plus précieux allié.

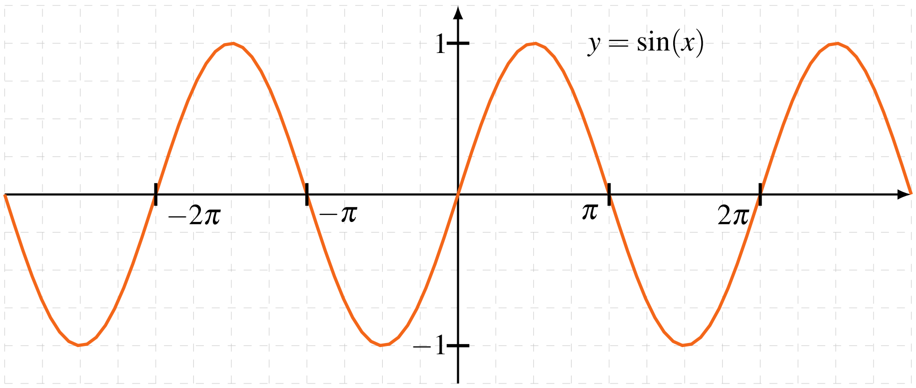
2 Fonctions trigonométriques

2.1 Définition et variations

Définition 39 : La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\cos(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\sin(x)$	0		$-$		0		$+$		0

Propriété 58 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(-x) = \cos(x)$, la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$; la fonction sinus est impaire.

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors que la courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

■ **Exemple 117 :** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Propriété 59 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$;
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

■ **Exemple 118 :** $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. ■

2.2 Dérivée des fonctions trigonométriques

Propriété 60 : Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

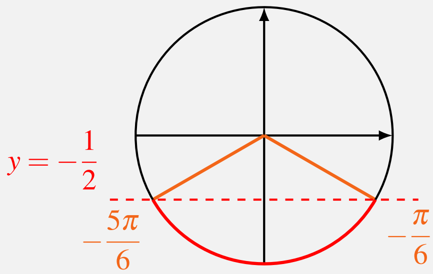
$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

■ **Exemple 119 :** On considère la fonction $g : x \mapsto 2\cos(x) - x$ définie sur $I = [-\pi; \pi]$. g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = -2\sin(x) - 1$.

Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.

Pour résoudre cette inéquation on peut utiliser le cercle trigonométrique.

Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.
Pour résoudre cette inéquation on peut utiliser le cercle trigonométrique.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ est $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$. On peut alors construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$



x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$\pi - 2$	↘	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$-2 - \pi$

■

Il est également possible de dérivée des fonctions composées avec le cosinus ou le sinus.

Propriété 61 : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont également dérivables sur cet intervalle I et on a

$$(\sin(u))' = u' \times \cos(u) \qquad \text{et} \qquad (\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$$

■ **Exemple 120 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sin(3x^2 - 4x + 5)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (6x - 4)\sin(3x^2 - 4x + 5)$. ■

Propriété 62 : Soit a un réel non nul.

- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos(ax)}{a}$.

Démonstration 44 : Il suffit de dériver. Attention au signe ! □

■ **Exemple 121 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(9x)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2x) + \dfrac{5}{9}\cos(9x)$. ■

■ **Exemple 122 :** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \cos(x)\sin(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \sin'(x) \times \sin(x)$.
Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie pour tout réel x par $G(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$. ■

■ **Exemple 123 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $I = \displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

D'une part, pour tout réel x,

$$f(x) = \sin(x) \times \sin^2(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x).$$

Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi (-\sin(x)\cos^2(x))\,\mathrm{d}x$. D'une part,

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2.$$

D'autre part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on a $-\sin(x)\cos^2(x) = \cos'(x) \times \cos^2(x)$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto -\sin(x)\cos^2(x)$ sur $[0;\pi]$ est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos^3(x)}{3}$. Ainsi,

$$\int_0^\pi (-\sin(x)\cos^2(x))\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^\pi = \frac{\cos^3(\pi)}{3} - \frac{\cos^3(0)}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

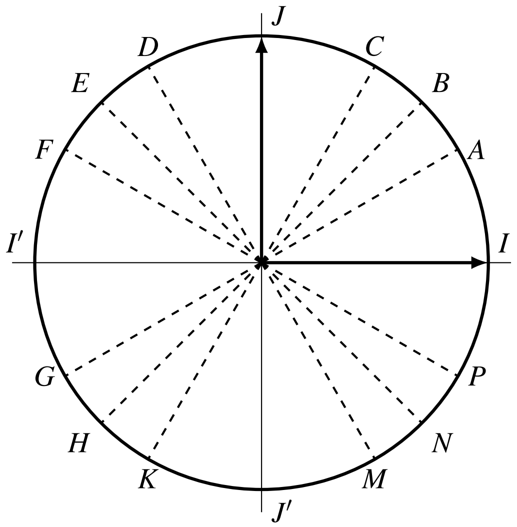
Finalement, $I = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$. ■

32. Exercices

Rappels

► **Exercice 248**

On se place sur le cercle trigonométrique tracé ci-dessus et sur lequel sont placés certains points.



Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants.

π	2π	-3π	18π
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{17\pi}{2}$	$\frac{-7\pi}{2}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-5\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$
$\frac{-7\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{3}$	$\frac{-37\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{4}$

► **Exercice 249**

En utilisant le cercle trigonométrique, déterminer les valeurs suivantes.

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

► **Exercice 250**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in]-\pi;\pi]$.

$\cos(x)=\frac{1}{2}$	$\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(x)=0$	$\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

► **Exercice 251**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [0;2\pi[$.

$\sin(x)=\frac{1}{2}$	$\cos(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(x)=0$	$\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

► **Exercice 252**

Résoudre l'équation $\cos(x)^2-\frac{1}{2}=0$ sur $[0;2\pi]$.

► **Exercice 253**
Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$.

$\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) \geqslant 0$ $\qquad$ $\cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

► **Exercice 254**
Résoudre les inéquations suivantes sur $[-\pi;\pi]$.

$2\cos(x)+1 > 2$ $\qquad$ $-\dfrac{1}{2} \leqslant \cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $1-\sqrt{3} \leqslant -2\cos(x)+1 \leqslant 0$

► **Exercice 255**
Soit x un réel. Que vaut $(\cos(x)+\sin(x))^2 + (\cos(x)-\sin(x))^2$?

Fonctions trigonométriques

► **Exercice 256**
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et $f(-\pi)$.
3. Trouver deux réels m et M tels que pour tout réel x, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

► **Exercice 257**
On admet que les fonctions suivantes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de leur dérivée.

$f_1 : x \mapsto \cos(3x)+x$ $\qquad$ $f_2 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$
$f_3 : x \mapsto \cos(e^x)$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto (\sin(x))^3$
$f_5 : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto \ln(1+\cos(x)^2)$

► **Exercice 258**
Le but de cet exercice est de prouver d'une nouvelle manière que pour tout réel x, on a $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$. Pour tout réel x, on pose $f(x) = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$.

1. Que vaut $f(0)$?
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Conclure.

► **Exercice 259**
Pour tout réel x, on pose $f(x) = x + \cos(x)$.

1. Construire le tableau de variations de f en incluant les éventuelles limites en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0.

► **Exercice 260**
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$, définie sur $[0;2\pi]$.

1. Justifier que f est dérivable sur $[0;2\pi]$ et que pour tout réel $x \in [0;2\pi]$, $f'(x) = \dfrac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}$.
2. Construire le tableau de variations de f sur $[0;2\pi]$.

► Exercice 261
Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $x \geqslant \sin(x)$.

► Exercice 262
Pour tout réel x, on pose $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$.

1. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que calculer sa dérivée.
3. Montrer que pour tout réel x, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.
4. En déduire que pour tout réel x, $\sin(\mathrm{e}^{-x^2}) \geqslant 0$.
5. En déduire le tableau de variations de f.

► Exercice 263
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x - \sin(x)$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. En déduire que l'équation $\sin(x) = x$ possède une unique corr dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Quelle est-elle ?

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ et que la suite (u_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

► Exercice 264
Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$ et $g(x) = \sin(\ln x)$. Montrer que f est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

► Exercice 265
On admet que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}$. Donner une primitive de ces fonctions.

$f_1 : x \mapsto \cos(3x) - 2\sin(5x)$
$f_2 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$
$f_3 : x \mapsto 2x\cos(x^2)$
$f_4 : x \mapsto \sin(x)\cos(x)$

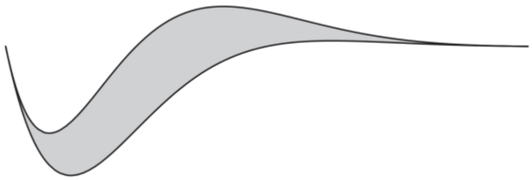
► Exercice 266
Calculer les intégrales suivantes

a. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$
b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(x)\,\mathrm{d}x$
c. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$
d. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\sin(x)^3\,\mathrm{d}x$
e. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(2x^2)$
f. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x$

► Exercice 267
À l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 268
A l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice 269 — Guyane 2018
Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos(x) + \sin(x) + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos(x).$$

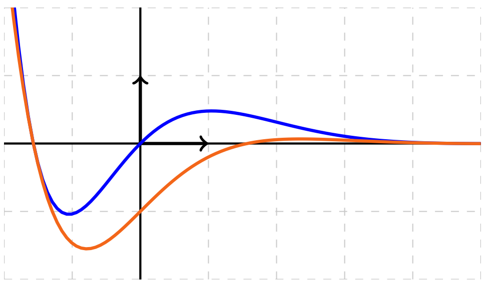
On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}.$$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout réel x,
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos(x) - 1).$$
4. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ et en déduire les variations de f sur cet intervalle.

Partie B : Aire du logo

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le logo correspond au domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la courbe $\mathscr{C}_g$ ainsi que les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$.



1. Calculer $f(x) - g(x)$ pour tout réel x.
2. En déduire que la courbe de f est toujours au dessus de la courbe de g.
3. Soit H la fonction définie pour tout réel x par $H(x) = \left(-\dfrac{\cos(x)}{2} - \dfrac{\sin(x)}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin(x) + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire l'aire du logo en unité d'aires.

▶ Exercice 270 — Centres étrangers 2024

On considère les équations différentielles $(E)\ :\ y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ et $(E_0)\ :\ y' = y$.

1. Déterminer toutes les corrs de l'équation (E_0).
2. On considère la fonction $h : x \mapsto 2\cos(x) + \sin(x)$, que l'on admet définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que h est corr de l'équation différentielle (E).
3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est corr de (E) si et seulement si $f - h$ est corr de (E_0).
4. En déduire toutes les corrs de l'équation différentielle (E).
5. Déterminer l'unique corr g de (E) telle que $g(0) = 0$.

▶ Exercice 271 — Amérique du Nord 2024

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \qquad J_n = \int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0
2. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.
3. (a) Justifier que pour tout entier naturel n, on a $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :
   $$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$
   (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n).
4. (a) Rappeler la formule d'intégration par parties.
   (b) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différents, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
   $$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2 + 1}$
5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```python
from math import *
def seuil():
    n = 0
    I = 2
    ...
        n = n + 1
        I = (1 + exp(-n * pi))/(n*n + 1)
    return n
```

Pour aller plus loin...

► Exercice 272 — Fonction tangente

Pour x tel que $\cos(x) \neq 0$, on appelle tangente de x, noté $\tan(x)$, le réel :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Partie A : Quelques valeurs

1. Que valent $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$?
2. On considère un réel $x \in \left]-\pi; \frac{-\pi}{2}\right[$ tel que $\sin(x) = -\frac{11}{61}$.
   (a) Que vaut $\cos(x)$?
   (b) Que vaut $\tan(x)$?
3. Résoudre l'inéquation $\tan(x) \leqslant 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Partie B : Un peu d'étude de la tangente

On considère la fonction $x \mapsto \tan(x)$, définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que la fonction tan est impaire.
2. Montrer que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $1 + (\tan(x))^2 = \frac{1}{(\cos(x))^2}$.
3. Justifier que tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et que tan est corr de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ sur cet intervalle.
4. En déduire le sens de variation de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
5. Justifier que tan est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer les intervalles de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur lesquels cette fonction est convexe.
6. Tracer la courbe représentative de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthogonal.
7. Déterminer l'unique primitive de tan sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ qui vaut 0 en 0.

► Exercice 273 — Tension efficace

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b]. On appelle valeur efficace de la fonction f est égale à la racine carrée de la valeur moyenne de f^2 sur l'intervalle $[a,b]$.

En électricité, la valeur efficace d'un courant ou d'une tension variables au cours du temps correspond à la valeur d'un courant continu ou d'une tension continue qui produirait un échauffement identique dans une résistance.

Dans le cas d'un régime sinusoïdal, l'intensité du courant est donnée par une fonction $i : t \mapsto I_{max}\sin(\omega t)$, où I_{max} est un réel positif et ω désigne la pulsation du signal. L'intervalle considérée est l'intervalle $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$;

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{I_{max}^2}{2}\left(x - \frac{\sin(\omega x)\cos(\omega x)}{\omega}\right)$ est une primitive de i^2 sur $[0; 2\pi]$.
2. En déduire que l'intensité efficace d'un tel courant vaut $\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$.

► Exercice 274 — Fonction arcsinus

L'objectif de l'exercice est de présenter la réciproque de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Soit $x \in [-1;1]$. Justifier que l'équation $\sin(a) = x$, d'inconnue réelle a, possède exactement une corr sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Cette corr sera notée $\arcsin(x)$. On définit alors la fonction arcsin comme étant la fonction qui à un réel $x \in [-1;1]$ associe l'unique de l'équation $\sin(a) = x$ d'inconnue a **sur l'intervalle** $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit $x \in [-1;1]$. Que vaut $\sin(\arcsin(x))$? Que vaut $\arcsin(\sin(\pi))$?
3. Montrer que pour tout $x \in [-1;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
4. On admet que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que pour tout $x \in]-1;1[$
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
5. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $\int_0^{1/2} \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$.

► Exercice 275 — Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Convergence de la suite (W_n)

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $W_n > 0$.
3. Montrer que la suite (W_n) est décroissante.
4. Que peut-on en déduire sur la suite (W_n) ?

Partie B : Calcul du terme général

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.
   On pourra utiliser une intégration par parties en utilisant la fonction $u : x \mapsto \sin^{n+1}(x)$ et en déterminant une fonction v telle que pour tout réel $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $v'(x) = \sin(x)$.
2. En déduire que pour tout entier naturel p, on a
$$W_{2p} = \frac{\pi}{2}\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Partie C : Étude asymptotique

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

1. En s'aidant de la question **B1**, montrer que la suite (J_n) est constante. Quelle est sa valeur ?
2. En s'aidant des questions **B1** et **A3**, montrer que pour tout entier naturel n, on a
$$\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$
3. Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi}nW_n^2 = 1$.

33. Corrigés

► **Correction 248**

$\pi : I'$

$2\pi : I$

$-3\pi : I'$

$18\pi : I$

$\dfrac{\pi}{2} : J$

$\dfrac{3\pi}{2} : J'$

$\dfrac{17\pi}{2} : J$

$\dfrac{-7\pi}{2} : J$

$\dfrac{\pi}{6} : A$

$\dfrac{3\pi}{4} : E$

$\dfrac{-5\pi}{3} : C$

$\dfrac{8\pi}{3} : E$

$\dfrac{-7\pi}{4} : B$

$\dfrac{19\pi}{3} : C$

$\dfrac{-37\pi}{6} : A$

$\dfrac{23\pi}{4} : N$

► **Correction 249**

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ $\quad \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ $\quad \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

► **Correction 250**

Sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$....

$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}$

$\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$

$\cos(x) = 0$ ssi $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{2}$

$\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $x = -\dfrac{2\pi}{3}$

► **Correction 251**

Sur l'intervalle $[0;2\pi[$...

$\sin(x) = \dfrac{1}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

$\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

$\cos(x) = 0$ ssi $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3}$

► **Correction 252**

Soit $x \in [0;2\pi]$, $\cos(x)^2 - \dfrac{1}{2} = 0$ ssi $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Les corrs sont $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{7\pi}{4}$.

► **Correction 253**

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$...

$\cos(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ssi $x \in \left[-\pi;-\dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$

$\cos(x) \geqslant 0$ ssi $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

$\cos(x) \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x \in \left[-\pi;-\dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$

$\cos(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $x \in \left[-\pi;-\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4};\pi\right]$

► Correction 254
Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$...

- $2\cos(x)+1>2$ ssi $\cos(x)>\dfrac{1}{2}$ ssi $x\in\left]-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right[$.
- $-\dfrac{1}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $x\in\left[-\dfrac{2\pi}{3};-\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]$
- $1-\sqrt{3}\leqslant-2\cos(x)+1\leqslant 0$ ssi $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\geqslant\cos(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$ ssi $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3};-\dfrac{\pi}{6}\right]\cup\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$

► Correction 255
Soit x un réel.

$$(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2=\cos(x)^2+2\cos(x)\sin(x)+\sin(x)^2+\cos(x)^2+2\sin(x)\cos(x)+\sin(x)^2$$

Ainsi, $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2=2(\cos(x)^2+\sin(x)^2)=2$.

► Correction 256
Pour tout réel x, $\cos(x)\leqslant-1$ et donc $2+\cos(x)\leqslant 1$. En particulier, $2+\cos(x)\neq 0$. f est définie sur $\mathbb{R}$.
$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{5}{2}}=\dfrac{2}{5}$ et $f(-\pi)=\dfrac{1}{2+\cos(-\pi)}=\dfrac{1}{2-1}=1$.

Par ailleurs, pour tout réel x, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ donc $1\leqslant 2+\cos(x)\leqslant 3$ et finalement $1\geqslant\dfrac{1}{2+\cos(x)}\geqslant\dfrac{1}{3}$.

► Correction 257
Pour tout réel x...

- $f_1'(x)=-3\sin(3x)+1$.
- $f_2'(x)=\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\times(-\sin(x))=\cos(x)^2-\sin(x)^2$.
- $f_3'(x)=-\mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x)$.
- $f_4'(x)=3\cos(x)\sin(x)^2$.
- $f_5'(x)=\dfrac{\cos(x)(2+\cos(x))-\sin(x)\times(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2}=\dfrac{2\cos(x)+\cos(x)^2+\sin(x)^2}{(2+\cos(x))^2}=\dfrac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}$.
- $f_6'(x)=\dfrac{-2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)^2}$.

► Correction 258
On a $f(0)=\cos(0)^2+\sin(0)^2=1^2+0^2=1$.

Par ailleurs, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=-2\sin(x)\cos(x)+2\cos(x)\sin(x)=0$.

f est donc constante : pour tout réel x, on a $f(x)=f(0)=1$.

► Correction 259

Pour tout réel x, $x-1 \leqslant f(x) \leqslant x+1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 1-\sin(x)$. Or, puisque pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant 1$, on en déduit que pour tout réel x, $f'(x) \geqslant 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

La tangente à la courbe de f à l'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y = x+1$.

► Correction 260

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$, définie sur $[0;2\pi]$.

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet, pour tout réel x, $2+\cos(x) \geqslant 1 > 0$). De plus, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(2+\cos(x))-\sin(x)\times(-\sin(x))}{(2+\cos(x))^2} = \frac{2\cos(x)+\cos(x)^2+\sin(x)^2}{(2+\cos(x))^2} = \frac{1+2\cos(x)}{(2+\cos(x))^2}.$$

$f'(x)$ est donc du signe de $1+2\cos(x)$.
Or, sur $[0;2\pi]$, $1+2\cos(x) \geqslant 0$ ssi $\cos(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ soit $x \in \left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{3};2\pi\right]$.

x	0		$2\pi/3$		$4\pi/3$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0

► Correction 261

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = x-\sin(x)$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = 1-\cos(x) \geqslant 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$, soit $x-\sin(x) \geqslant 0$ et donc $x \geqslant \sin(x)$.

► Correction 262

1. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$, $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ et $\lim\limits_{Y\to 0}\cos(x) = 1$. Par composition de limite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.
2. f est la composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(\mathrm{e}^{-x^2})$.
3. D'une part, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x^2} \geqslant 0$. Par ailleurs, pour tout réel x, $-x^2 \leqslant 0$ et, par croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^0$ soit $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.
4. Pour tout réel x, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$. Or, la fonction sin est croissante sur $[0;1]$. Ainsi, pour tout réel x, $\sin(0) \leqslant \sin(\mathrm{e}^{-x^2}) \leqslant \sin(1)$ et en particulier, $\sin(\mathrm{e}^{-x^2}) \geqslant 0$.
5. Pour tout réel x, $f'(x)$ est donc du signe de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\sin(1)$	$\nearrow$	1

► Correction 263

1. f est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout réel x de cet intervalle, $f'(x) = 1-\cos(x) \geqslant 0$ car $\cos(x) \leqslant 1$. Par ailleurs, f' s'annule uniquement en 0. f est donc strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
2. On a $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}+1 \leqslant 0$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}-1 \geqslant 0$. Par ailleurs, f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède une corr sur cet intervalle.
   De plus, la fonction f étant strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, cette corr est unique.
   Or, $f(0) = 0$. 0 est donc l'unique corr sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $x-\sin(x) = 0$, soit $\sin(x) = x$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ ».
   - On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \sin(1) \geqslant 1$. On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. En appliquant la fonction sinus qui est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a alors $\sin(0) \leqslant \sin(u_{n+1}) \leqslant \sin(u_n) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Or, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$. On a donc bien $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente, de limite $\ell \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. La fonction sinus étant continue sur cet intervalle, on a alors $\sin(\ell) = \ell$ et donc $\ell = 0$ d'après la question 2.

► Correction 264

Pour tout réel $x > 0$, posons $u(x) = \sin(\ln(x))$ et $v(x) = \cos(\ln(x))$. u et v sont dérivables et pour tout réel $x > 0$, $u'(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$ et $v'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))}{x}$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)) + \frac{x}{2}\left(\frac{\cos(\ln(x))}{x} - \left(-\frac{\sin(\ln(x))}{x}\right)\right) = \sin(\ln(x)).$$

f est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

► Correction 265

Une primitive de $f_1 : x \mapsto \cos(3x)-2\sin(5x)$ est $F_1 : x \mapsto \frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{2}{5}\sin(5x)$.

Une primitive de $f_2 : x \mapsto \cos(x)-\sin(x)$ est $F_2 : x \mapsto \sin(x)+\cos(x)$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2$. On a alors $f_3 = u'\cos(u)$, une primitive de f_3 est donc $\sin(u)$ soit $x \mapsto \sin(x^2)$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sin(x)$. On a alors $f_4 = u'u = \frac{1}{2}(2u'u)$.

Une primitive de f_4 est donc $\frac{u^2}{2}$ soit $x \mapsto \frac{\sin(x)^2}{2}$.

► Correction 266

Calculer les intégrales suivantes

a. $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x=[\sin(x)]_0^{\pi}=\sin(\pi)-\sin(0)=0-0=0.$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sin(x)\,\mathrm{d}x=[-\cos(x)]_0^{\pi/4}=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-(-\cos(0))=-\frac{\sqrt{2}}{2}+1=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$

c. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\sin(2x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi/6}=-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}-\left(-\frac{\cos(0)}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

d. Pour tout réel x, on pose $u(x)=\sin(x)$. On a alors $\cos(x)\sin(x)^3=u'(x)\times u(x)^3=\dfrac{1}{4}\times 4u'(x)u(x)^3$. Une primitive de $x\mapsto\cos(x)\sin(x)^3$ est donc $x\mapsto\dfrac{\sin(x)^4}{4}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(x)^3\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\sin(x)^4}{4}\right]_0^{\pi}=0-0=0.$

e. Pour tout réel x, on pose $u(x)=2x^2$. On a alors $x\cos(2x^2)=\dfrac{1}{4}u'(x)\cos(u(x))$.

Une primitive de $x\mapsto x\cos(2x^2)$ est donc $x\mapsto\dfrac{\sin(2x^2)}{4}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}x\cos(2x^2)=\left[\frac{\sin(2x^2)}{4}\right]_0^{\sqrt{\pi}}=\frac{\sin(2\pi)}{4}-\frac{\sin(0)}{4}=0-0=0.$

f. Pour tout réel $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)^2}=-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$ en posant $u(x)=\cos(x)$.

Une primitive de $x\mapsto\dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ est donc $x\mapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\sin(x)}{1-\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{\cos(x)}\right])0^{\pi/4}=\frac{1}{\cos(\pi/4)}-\frac{1}{\cos(0)}=\sqrt{2}-1.$

► Correction 267

Pour tout réel x, on pose $u(x)=x$ on cherche v tel que $v'(x)=\cos(x)$: on prend donc $v:x\mapsto\sin(x)$. D'après la formule d'intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}uv'(x)\,\mathrm{d}x=[uv]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}u'v(x)\,\mathrm{d}x$.Ainsi,

$$\int_0^{\pi/2}x\cos(x)\,\mathrm{d}x=[x\sin(x)]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-0-[-\cos(x)]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-(-0-(-1))=\frac{\pi}{2}-1.$$

► Correction 268

Notons $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x, on pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ on cherche v tel que $v'(x)=\cos(x)$: on prend donc $v:x\mapsto\sin(x)$. D'après la formule d'intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}uv'(x)\,\mathrm{d}x=[uv]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}u'v(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^x\sin(x)]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$

Cherchons alors à calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^x\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour tout réel x, on pose $u(x)=\mathrm{e}^x$ on cherche v tel que $v'(x)=\sin(x)$: on prend donc $v:x\mapsto-\cos(x)$.

D'après la formule d'intégrations par parties, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} uv'(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^x\cos(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\mathrm{e}^x\cos(x))\,\mathrm{d}x = 1+I$.

Ainsi, en reprenant la première IPP, on a $I = \mathrm{e}^{\pi/2} - (1+I)$ et donc $2I = \mathrm{e}^{\pi/2} - 1$ et finalement, $I = \dfrac{\mathrm{e}^{\pi/2}-1}{2}$.

► Correction 269

Partie A : Étude de la fonction f

1. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant$ et $-1 \leqslant -\cos(x) \leqslant 1$. En ajoutant ces inégalités puis en ajoutant 1 à chauqe membre, on a que pour tout réel x, $-1 \leqslant -\cos(x)+\sin(x)+1 \leqslant 3$, puis, en multipliant par e^{-x} qui est positif, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0.
3. Pour tout réel x, $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(-\cos(x)+\sin(x)+1)+\mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+\cos(x)) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos(x)-1)$.
4. Sur $[-\pi;\pi]$, f' est du signe de $2\cos(x)-1$.
   Or, sur cet intervalle, $2\cos(x)-1 \geqslant 0$ ssi $\cos(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie B : Aire du logo

1. Pour tout réel x, $f(x)-g(x) = \mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+1)$.
2. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $\sin(x)+1 \geqslant 0$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)-g(x) \geqslant 0$: la courbe de f est toujours au dessus de la courbe de g.
3. Pour tout réel x,

$$H'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right) \times (-\mathrm{e}^{-x}).$$

   Ainsi,

$$H'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2} - \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1\right)\right) = (\sin(x)+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

   H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin(x)+1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

4. L'aire du logo en unité d'aires vaut $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (f(x)-g(x))$.
   Or, pour tout réel x, $f(x)-g(x) = (\sin(x)+1)\mathrm{e}^{-x}$. Une primitive de $f-g$ est H.
   Ainsi, $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (f(x)-g(x)) = [H(x)]_{-\pi/2}^{3\pi/2} \simeq 2{,}4$. L'aire du logo est d'environ 2,4 unités d'aire.

► Correction 270

1. Les corrs de (E_0) sont les fonctions $x \mapsto Ce^x$, pour C réel.
2. Pour tout réel x, on a $f'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$ et

$$h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = -2\sin(x) + \cos(x) = h'(x).$$

   Ainsi, h est bien corr de (E).
3. Puisque h est corr de (E), on a $h' = h - \cos(x) - 3\sin(x)$ et donc $-\cos(x) - 3\sin(x) = h - h'$.
   On a f corr de (E) si et seulement si $f' = f - \cos(x) - 3\sin(x) = f - (h - h')$ si et seulement si $f' - h' = f - h$ si et seulement si $(f - h)' = f - h$.
   Ainsi, f est corr de (E) si et seulement si $f - h$ est corr de (E_0).
4. Les corrs de (E) sont les fonctions $x \mapsto Ce^x + 2\cos(x) + \sin(x)$, pour C réel.
5. On cherche C tel que $Ce^0 + 2\cos(0) + \sin(0) = 0$. On a donc $C + 2 = 0$ et donc $C = -2$.
   Ainsi, pour tout réel x, $g(x) = -2e^x + 2\cos(x) + \sin(x)$.

► Correction 271

1. On a $I_0 = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x$.
   Une primitive de sin étant $-\cos$, on a $I_0 = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$.
2. (a) Pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $e^{-nx} > 0$ et $\sin(x) > 0$.
   Ainsi, $e^{-nx}\sin(x) > 0$ et donc $I_n \geqslant 0$.

   (b) Pour tout entier naturel n et pour tout réel x, $e^{-(n+1)x}\sin(x) - e^{-nx}\sin(x) = e^{-nx}\sin(x) \times (e^{-x} - 1)$.
   Or, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $e^{-x} \leqslant 1$ et donc $e^{-x} - 1 \leqslant 0$.
   Ainsi, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $e^{-(n+1)x}\sin(x) - e^{-nx}\sin(x) \leqslant 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^\pi (e^{-(n+1)x}\sin(x) - e^{-nx}\sin(x))\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ soit $\displaystyle\int_0^\pi e^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
   Finalement, $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

   (c) D'après la question 2a, la suite (I_n) est minorée.
   D'après la question 2b, la suite (I_n) est décroissante.
   Ainsi, la suite (I_n) converge.
3. (a) Pour tout réel x, $\sin(x) \leqslant 1$.
   Ainsi, pour tout entier naturel n et pour tout réel $x \in [0;\pi]$, $e^{-nx}\sin(x) \leqslant e^{-nx}$.
   En intégrant cette inégalité, on a donc $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^\pi e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

   (b) Une primitive de $x \mapsto e^{-nx}$ est $x \mapsto -\dfrac{e^{-nx}}{n}$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^\pi e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{e^{-nx}}{x}\right]_0^\pi = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$.

   (c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1 - e^{-n\pi}}{n}$. Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - e^{-n\pi}}{n} = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.
   D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
4. (a) On rappelle que $I_n = \displaystyle\int_0^\pi e^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.

   D'une part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on pose $\begin{cases} u(x) = e^{-nx} & u'(x) = -ne^{-nx} \\ v(x) = -\cos(x) & v'(x) = \sin(x) \end{cases}$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_n = \left[-\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-n\mathrm{e}^{-nx})\times(-\cos(x))\,\mathrm{d}x = 1+\mathrm{e}^{-n\pi} - n\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}-nJ_n.$$

D'autre part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on pose $\begin{cases} w(x) = \sin(x) & w'(x) = \cos(x) \\ p(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} & p'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{cases}$

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I_n = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0-0+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-nx}\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}J_n.$$

(b) On a donc $I_n = \dfrac{1}{n}J_n$ donc $J_n = nI_n$. Or, $I_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}-nJ_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}-n^2I_n$.

Ainsi, $(n^2+1)I_n = 1+\mathrm{e}^{-n\pi}$ et finalement $I_n = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{1+n^2}$.

5.
```python
from math import *
def seuil():
  n = 0
  I = 2
  while I >= 0.1:
    n = n+1
    I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
  return n
```

► Correction 272

Partie A : Quelques valeurs

1. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$

   $\tan\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)} = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

2. Puisque $x \in \left]-\pi;\dfrac{-\pi}{2}\right[$, alors $\cos(x) \leqslant 0$. De plus, $\cos(x)^2+\sin(x)^2 = 1$.

   Ainsi, $\cos(x)^2 = 1-\dfrac{121}{3721} = \dfrac{3600}{3721}$ et donc $\cos(x) = -\sqrt{\dfrac{3600}{3721}} = -\dfrac{60}{61}$ Ainsi, $\tan(x) = \dfrac{-\frac{11}{61}}{-\frac{60}{61}} = \dfrac{11}{60}$.

3. Soit $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors $\cos(x) > 0$, $\tan(x)$ est donc du signe de $\sin(x)$.

   Ainsi, $\tan(x) \leqslant 0$ si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right]$.

Partie B : Un peu d'étude de la tangente

1. L'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ est centré en 0.

   De plus, pour tout réel x de cet intervalle, $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

   La fonction tan est impaire.

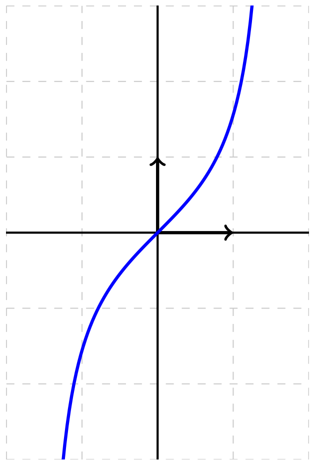
2. Pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $1+(\tan(x))^2 = 1+\dfrac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \dfrac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{(\cos(x))^2} = \dfrac{1}{\cos(x)^2}$.

3. tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1+\tan(x)^2$$

   tan est corr de l'équation différentielle $y' = 1+y^2$ sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

4. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) \geqslant 0$. tan est donc croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
5. La fonction $\tan' : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^2}$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel x de cet intervalle, on a $\tan''(x) = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)^4} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$. $\tan''$ est donc du signe de sin. Or, la fonction sinus est négative sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ et positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. tan est donc concave sur $\left]-\frac{\pi}{2};0\right]$ et convexe sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.
6. On trace la courbe représentative de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ dans un repère orthogonal.



7. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$. De plus, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$.
   Les primitives de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sont donc les fonctions $x \mapsto -\ln(\cos(x))+C$, où C est un réel.
   Or, $-\ln(\cos(0)) = -\ln(1) = 0$. L'unique primitive de tan sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ qui vaut 0 en 0 est donc la fonction $x \mapsto -\ln(\cos(x))$.

► Correction 273

On considère la fonction $F : x \mapsto \frac{I_{max}^2}{2}\left(x - \frac{\sin(\omega x)\cos(\omega x)}{\omega}\right)$. f est dérivable et pour tout réel x,

$$F'(x) = \frac{I_{max}^2}{2}\left(1 - \frac{\omega\cos(\omega x)\cos(\omega x) - \omega\sin(\omega x)\sin(\omega x)}{\omega}\right) = \frac{I_{max}^2}{2}\left(1-\cos^2(\omega x)+\sin^2(\omega x)\right).$$

En rappelant que pour tout réel X, $\cos^2(X)+\sin^2(X) = 1$, on obtient alors

$$F'(x) = \frac{I_{max}^2}{2}(\sin^2(\omega x)+\sin^2(\omega x)) = I_{max}^2\sin^2(\omega x) = i^2(x).$$

F est une primitive de i^2 sur $[0;2\pi]$. L'intensité efficace d'un tel courant vaut

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}-0}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} i^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{F\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)-F(0)}.$$

Or, $F\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = \dfrac{\pi I_{max}^2}{\omega}$ et $F(0)=0$. Ainsi, l'intensité efficace vaut $\dfrac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{\dfrac{\pi I_{max}^2}{\omega}} = \dfrac{I_{max}}{\sqrt{2}}$.

► **Correction 274**

1. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
   Par ailleurs, $\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $\sin(a)=x$ admet une unique corr sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ pour tout réel x dans l'intervalle $[-1;1]$.
2. Soit $x\in[-1;1]$. Par définition, $\sin(\arcsin(x))=x$.
   En revanche $\arcsin(\sin(\pi))=\arcsin(0)=0$.
   En particulier, on n'a pas $\arcsin(\sin(x))=x$ pour tout réel x : cette égalité n'est vraie que sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Pour tout $x\in[-1;1]$, $\cos^2(\arcsin(x))+\sin^2(\arcsin(x))=1$ d'où $\cos^2(\arcsin(x))+x^2=1$ et donc $\cos^2(\arcsin(x))=1-x^2$. Par ailleurs, puisque $\arcsin(x)\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(\arcsin(x))\geqslant 0$.
   On en déduit que $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$.
4. On admet que la fonction $x\mapsto\arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$.
   Pour tout $x\in]-1,1[$, on a $\sin(\arcsin(x))=x$. En dérivant, on en déduit que pour tout $x\in]-1;1[$, $\arcsin'(x)\times\cos(\arcsin(x))=1$, soit $\arcsin'(x)=\dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
5. Pour tout réel $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$, on pose $u(x)=\arcsin(x)$ et $v(x)=x$. On a alors $u'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v'(x)=1$.
   Par intégration par parties,
   $$\int_0^{1/2}\arcsin(x)\,\mathrm{d}x=[x\arcsin(x)]_0^{1/2}-\int_0^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$
   D'une part, $[x\arcsin(x)]_0^{1/2}=\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)-0=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{12}$.
   Par ailleurs, si l'on pose, pour tout réel x, $w(x)=1-x^2$, alors $w'(x)=-2x$.
   On a alors $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}}$.
   Ainsi, une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ est la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$. Il en vient
   $$-\int_0^{1/2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=[\sqrt{1-x^2}]_0^{1/2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{1-0^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$
   Finalement,
   $$\int_0^{1/2}\arcsin(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$
   Oui, il faut parfois s'attendre à ce genre de résultat pas franchement sexy.

► **Correction 275**

Partie A : Convergence de la suite (W_n)

1. On a $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$ et $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^1(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 0-(-1) = 1$.
2. Pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant 0$. Il en vient que, pour tout entier naturel n, $W_n \geqslant 0$. De plus, pour tout $x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et donc
$$W_n \geqslant \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0.$$
3. Pour tout entier naturel n,
$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)(\sin(x)-1)\,\mathrm{d}x.$$
Or, pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n(x) \geqslant 1$ et $\sin(x)-1 \leqslant 0$. Il en vient que $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$. La suite (W_n) est donc décroissante.
4. La suite (W_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

Partie B : Calcul du terme général

1. Soit n un entier naturel.
On considère la fonction $u : x \mapsto \sin^{n+1}(x)$ et $v : x \mapsto -\cos(x)$, définies sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Pour tout réel x de cet intervalle, on a alors $u'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$.
Par intégration par parties, on obtient alors
$$W_{n+2} \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) \times \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$
D'une part, $\left[-\sin^{n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = 0$. Par ailleurs, pour tout réel x, $\cos^2(x) = 1-\sin^2(x)$. Ainsi,
$$W_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^{\pi/2} (\sin^n(x) - \sin^{n+2}(x))\,\mathrm{d}x = (n+1)(W_n - W_{n+2}).$$
On a donc $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$ et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
Finalement, on retrouve bien $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
2. Pour tout entier naturel p, on a alors
$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}W_{2p-4} = \cdots = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}W_0.$$
Or, en factorisant chaque terme par 2, on a
$$2p(2p-2)(2p-4)\ldots \times 4 \times 2 = 2^p \times p(p-1)(p-2)\ldots \times 1 = 2^p p!.$$
On retrouve au numérateur le produit de tous les nombres impairs de 1 à $2p-1$ et au dénominateur le produit de tous les nombres pairs de 2 à $2p-2$. En multipliant numérateur et dénominateur par le produit $2p(2p-2)(2p-4)\ldots \times 4 \times 2$, on complète alors le produit du numérateur : on multiplie tous les nombres de 1 à $2p$: il s'agit tout simplement de $(2p)!$.
Finalement, pour tout entier naturel p, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p)^2}W_0 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}$.

De même, pour tout entier naturel p,

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}W_{2p-3} = \cdots = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times W_1.$$

En multipliant encore une fois le numérateur et le dénominateur par $2p(2p-2)(2p-4)... \times 4 \times 2$, on a alors $W_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}W_1 = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$.
Si vous savez manipuler la notation produit $\prod$, n'hésitez pas à l'utiliser pour résoudre cet exercice.

Partie C : Étude asymptotique

Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

1. Pour tout entier naturel n, $J_{n+1} - J_n = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} - (n+1)W_{n+1}W_n$.
   Or, d'après la question **B1**, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
   Ainsi, $J_{n+1} - J_n = (n+2)\dfrac{n+1}{n+2}W_nW_{n+1} - (n+1)W_{n+1}W_n = 0$.
   Or, $J_0 = W_1W_0 = \dfrac{\pi}{2}$. La suite (J_n) est donc constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.
2. D'une part, la suite (W_n) est décroissante et positive. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$.
   Par ailleurs, toujours par décroissance de la suite (W_n), pour tout entier naturel n, $W_{n+1} \geqslant W_{n+2}$ et donc, en utilisant la question **B1**, $W_{n+1} \geqslant \dfrac{n+1}{n+2}W_n$ d'où $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n}$.
3. Pour tout entier naturel non nul n, $nW_nW_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ d'où $W_{n-1} = \dfrac{\pi}{2nW_n}$.
   Or, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$.
   Ainsi, en remplaçant W_{n-1} dans cette inégalité, on a $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{2}{\pi}nW_n^2 \leqslant 1$.
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} = 1$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\pi}nW_n^2$ existe et vaut 1.

XII

Vecteurs droites et plans de l'espace

34. Géométrie dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Vecteurs et translations

Définition 40 : Un vecteur de l'espace est un objet mathématique caractérisé par une direction de l'espace, un sens et une longueur, également appelée norme.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

Définition 41 : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation de l'espace qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

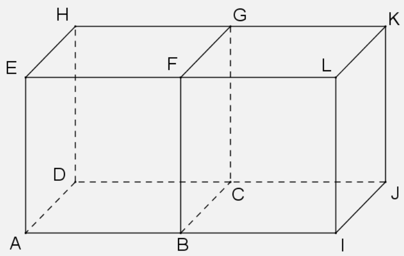
Toutes les notions vues en géométrie plane sur les vecteurs s'étendent dans l'espace : égalité de vecteurs, somme de vecteurs, produit d'un réel par un vecteur, relation de Chasles, vecteur nul, etc...

Il est donc fortement conseillé de revoir ces notions de la classe de Seconde avant de passer à la suite de ce chapitre.

Définition 42 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels.

Le vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{u}_i$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.

■ **Exemple 124 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



On a les égalités de vecteurs suivantes
- $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IJ}$;
- $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HB}$;
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EI}$.

■

Définition 43 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

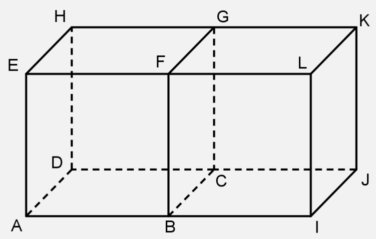
Le vecteur nul est ainsi colinéaire à tout vecteur de l'espace.

■ **Exemple 125 :** Sur la figure précédente, on a $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{HG}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont donc colinéaires. ■

Définition 44 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **ne sont pas colinéaires**.

On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

Exemple 126 : Sur la configuration suivante...



Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EL}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires. En effet, on a $\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{FG}$. ■

2 Droites et plans de l'espace

2.1 Droites de l'espace

Définition 45 : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. La droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Une droite est donc entièrement déterminée par un point et un vecteur non nul. On dit que $(A;\vec{u})$ est un repère de la droite passant par A dirigée par $\vec{u}$. Une droite peut également être déterminée par deux points distincts.

La définition d'une droite à l'aide des vecteurs permet d'exploiter la colinéarité pour résoudre des problèmes d'alignement de points ou de parallélisme de droites.

Propriété 63 : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété 64 : Soit A, B et C trois points de l'espace. Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2.2 Plans de l'espace

Définition 46 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point du plan.

Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M pour lesquels le vecteur $\overrightarrow{AM}$ s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Autrement dit, M appartient au plan passant par A, dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

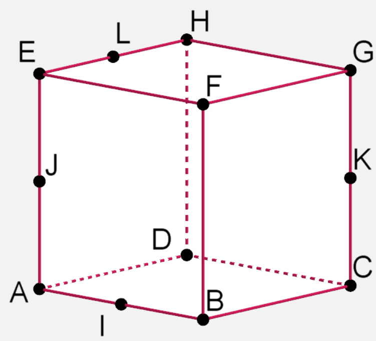
On dit que $(\vec{u};\vec{v})$ est une **base** de ce plan et que $(A;\vec{u},\vec{v})$ est un **repère** de ce plan.

Cette définition implique que par trois points **non alignés** de l'espace passe un unique plan.

Définition 47 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan de l'espace passant par ces quatre points.

Propriété 65 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

■ **Exemple 127 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi que les points I, J, K et L, milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AE]$, $[CG]$ et $[EH]$



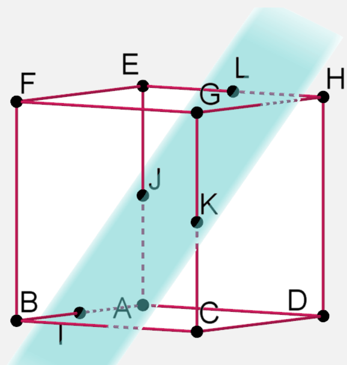
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}$. Or, J étant le milieu de $[AE]$, on a $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{JE}$.

De même, $\overrightarrow{EH} = 2\overrightarrow{EL}$. Ainsi, $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{JE} + 2\overrightarrow{EL} = 2\overrightarrow{JL}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires. Les droites (AH) et (JL) sont donc parallèles.

De la même manière, on montre que $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{JI}$.

On a $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{EG}$ D'après la relation de Chasles, on a donc $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EB}$.

En utilisant les points précédents, on a donc que $\overrightarrow{JK} = 2\overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{JI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont donc coplanaires. Les points I, J, K et L sont donc coplanaires : ces quatre points appartiennent à un même plan.



■

2.3 Positions relatives

Positions relatives de deux droites

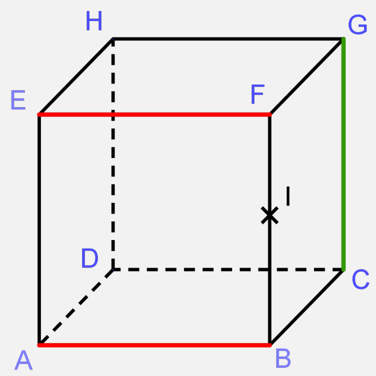
Définition 48 : Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Les droites (AB) et (CD) sont dites coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Autrement dit, il existe un plan qui contiennent les droites (AB) et (CD).

Propriété 66 : Deux droites de l'espace coplanaires sont...

- parallèles ou confondues si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires,
- sécantes en un unique point sinon.

■ **Exemple 128 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi qu'un point I sur le segment $[BF]$.



- Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
- Les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.
- Les droites (HI) et (BD) sont coplanaires mais pas parallèles : elles sont donc sécantes.

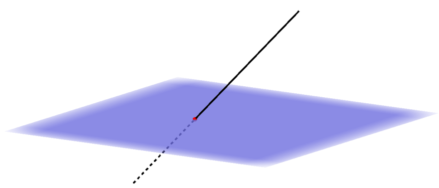
■

Positions relatives d'une droite et d'un plan

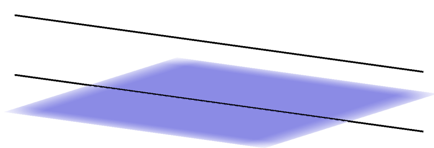
Propriété 67 : Une droite est...

- parallèle ou contenue dans un plan si tout vecteur de la droite est aussi un vecteur directeur du plan,
- sécante au plan en un unique point sinon.

Droite sécante à un plan



Droite parallèle à un plan



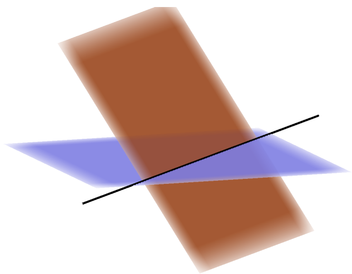
■ **Exemple 129 :** Dans le cube précédent, la droite (AE) est parallèle au plan (BDH). En revanche, cette droite est sécante au plan (IGH). ■

Positions relatives de deux plans

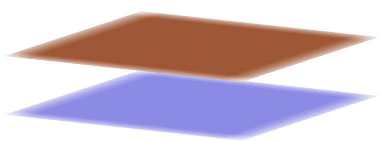
Propriété 68 : Deux plans de l'espace sont...

- parallèles ou confondus si les vecteurs directeurs de l'un sont aussi directeurs de l'autre,
- sécants sinon. L'intersection de ces deux plans est alors une droite.

Plans sécants selon une droite

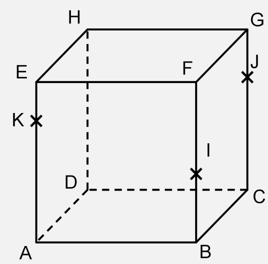


Plans parallèles

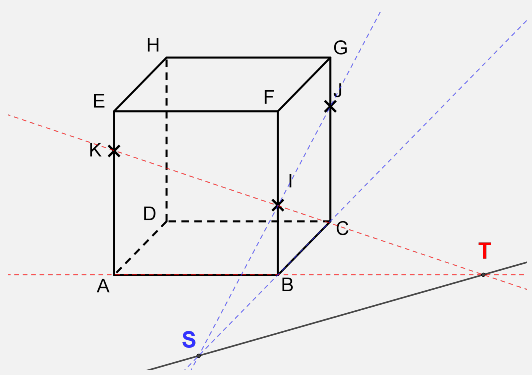


Il suffit donc de connaître deux points d'intersection A et B de deux plans pour déterminer toute leur intersection qui n'est autre que la droite (AB).

■ **Exemple 130 :** On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant ainsi que trois points : I sur le segment $[BF]$, J sur le segment $[CG]$ et K sur le segment $[AE]$ de telles sorte que les droites (IK) et (AB) sont sécantes en un point T et que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes en un point S.



- Puisque la droite (IJ) est dans le plan (IJK) et la droite (BC) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- Puisque la droite (IK) est dans le plan (IJK) et la droite (AB) est dans le plan (ABC), le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK).
- L'intersection de deux plans sécants étant une droite, l'intersection des plans (ABC) et (IJK) est la droite (ST).



■

Propriété 69 : Pour montrer que deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes non confondues (d_1) et (d_2) de $\mathscr{P}$ et deux droites sécantes non confondues (δ_1) et (δ_2) de $\mathscr{P}'$ telles que (d_1) est parallèle à (δ_1) et (d_2) est parallèle à (δ_2).

3 Repère de l'espace

Définition 49 : Un repère de l'espace est un quadruplet $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ où

- O est un point de l'espace ;
- $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont des vecteurs non coplanaires.

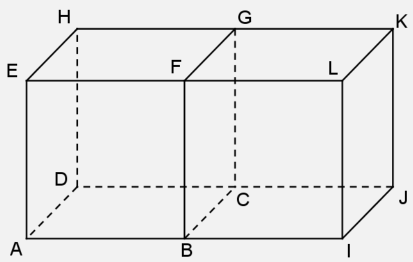
On dit que les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ forment une base de l'espace.

Propriété 70 : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace.

Il existe un unique triplet de réel $(x;y;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

x, y et z sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. On notera $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Exemple 131 : On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ sont $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a en effet $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. ■

Définition 50 : Soit M un point de l'espace et $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace. Les coordonnées du point M sont les réels $(x;y;z)$ tels que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On notera $M(x;y;z)$.

Exemple 132 : Dans la figure précédente, on a $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$

Le point K a pour coordonnées $(1,1,1)$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$. ■

Propriété 71 : Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- Le point I, milieu de $[AB]$, a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2};\dfrac{y_A + y_B}{2};\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Démonstration 45 : On a $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath} + z_A\vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} + z_B\vec{k}$. Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} = x_B\vec{\imath} + y_B\vec{\jmath} + z_B\vec{k} - (x_A\vec{\imath} + y_A\vec{\jmath} + z_A\vec{k}) = (x_B - x_A)\vec{\imath} + (y_B - y_A)\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

On retrouve bien le résultat attendu. Par ailleurs, si $I(x_I,y_I,z_I)$ est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

On a donc, en regardant la première coordonnée de ces deux vecteurs, $x_I - x_A = x_B - x_I$ d'où $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

En faisant de même avec les deuxièmes et troisièmes coordonnées, on retrouve la formule attendue. □

■ **Exemple 133 :** On se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(1;3;-4)$ et $B(2;7;-1)$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-1 \\ 7-3 \\ -1-4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+2}{2};\dfrac{3+7}{2};\dfrac{-4+(-1)}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{3}{2};5;-\dfrac{5}{2}\right)$.

■

Propriété 72 : Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Soit λ et μ des réels. Le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda y + \mu y' \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 134 :** On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. En effet, $\vec{v} = -3\vec{u}$. ■

■ **Exemple 135 :** Dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ? D'une part, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda v + \mu w$. Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu \\ 4\lambda + \mu \\ -7\lambda + 5\mu \end{pmatrix}$.

Nous sommes donc amenés à résoudre le système $\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu & = & 0 \\ 4\lambda + \mu & = & 6 \\ -7\lambda + 5\mu & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 4\lambda + 2\lambda & = & 6 \\ -7\lambda + 10\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2\lambda \\ 6\lambda & = & 6 \\ 3\lambda & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu & = & 2 \\ \lambda & = & 1 \\ \lambda & = & 1 \end{cases}$$

Le fait d'avoir deux fois la même ligne n'est pas anormal : nous avons trois équations pour deux inconnues. Si les résultats de ces deux lignes sont différents, cela signifie que les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Vérifions que les valeurs trouvées pour λ et μ conviennent.

Les coordonnées de $\vec{v} + 2\vec{w}$ sont en effet $\begin{pmatrix} 2 + 2 \times (-1) \\ 4 + 2 \times 1 \\ -7 + 2 \times 5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a donc $\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{w}$. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

■

4 Représentation paramétrique de droite

Propriété 73 : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

On note (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.

Un point $M(x,y,z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$.

Démonstration 46 : Le point M appartient à la droite (d) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Puisque $\vec{u}$ est non nul, cela revient à dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$. □

Définition 51 : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace et (d) la droite passant par le point A et dirigée par $\vec{u}$.

Le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite (d).

Attention ! Une représentation paramétrique de droite n'est pas unique !

■ **Exemple 136 :** La droite passant par le point $A(2;1;3)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \\ z=3+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$. ■

■ **Exemple 137 :** On considère la droite admettant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=5-2t \\ y=8-4t \\ z=3+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Cette droite passe par le point $A(5,8,3)$ et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\\1\end{pmatrix}$. En prenant $t=2$, on obtient que cette droite passe par le point de coordonnées $(1,0,5)$.

Le point $B(-1;-4;5)$ appartient-il à cette droite ?

Supposons que ce soit le cas. Il existe alors un réel t tel que $5-2t=-1$, $8-4t=-4$ et $3+t=5$.

La résolution de ces équations donne successivement $t=3$, $t=3$ et $t=2$.

Il n'y a pas une unique valeur de t qui est trouvée : le point B n'appartient donc pas à la droite considérée. ■

■ **Exemple 138 :** On considère les droites (d) : $\begin{cases} x=4-t \\ y=11-3t \\ z=9-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$ et (d') : $\begin{cases} x=2+k \\ y=6+4k \\ z=-2-5k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

On souhaite déterminer, s'il existe, le point d'intersection de ces droites. Il faut donc trouver deux paramètres t et k qui correspondent à un même point pour ces deux droites. Cela nous amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4-t=2+k \\ 11-3t=6+4k \\ 9-2t=-2-5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t=k \\ 11-3t=6+4(2-t) \\ 9-2t=-2-5(2-t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t=k \\ 11-3t=6+8-4t \\ 9-2t=-2-10+5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-t=k \\ t=3 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2-3=-1 \\ t=3 \end{cases}.$$

La solution que l'on trouve est unique, les droites sont donc sécantes en un point. Pour trouver les coordonnées de ce point, on remplace le paramètre t ou k dans la représentation paramétrique de la droite correspondante (le mieux étant de le faire pour les deux pour contrôler nos calculs).

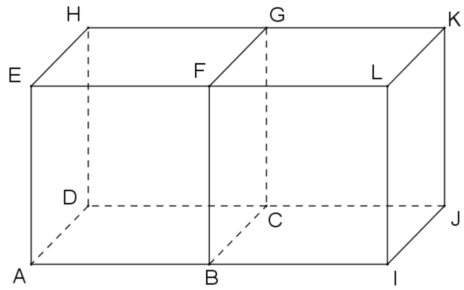
En prenant $t=3$ dans la représentation paramétrique de (d), on obtient le point de coordonnées $(1;2;3)$. De même, en prenant $k=-1$ dans la représentation paramétrique de (d'), on aboutit également au point de coordonnées $(1;2;3)$. Ce point est le point d'intersection des droites (d) et (d'). ■

35. Exercices

Vecteurs de l'espace

► Exercice 276

On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte. Compléter les égalités de vecteurs suivantes.



$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{A\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EK} + \overrightarrow{LF} = \overrightarrow{B\ldots}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{E\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{F\ldots}$

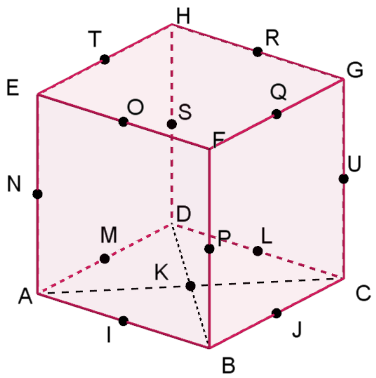
$\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{A\ldots}$ $\qquad$ $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{\ldots A}$

► Exercice 277

En utilisant la même figure, exprimer...

- ... le vecteur $\overrightarrow{AK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IK}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{JD}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{DL}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{JE}$.
- ... le vecteur $\overrightarrow{BK}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{CG}$.

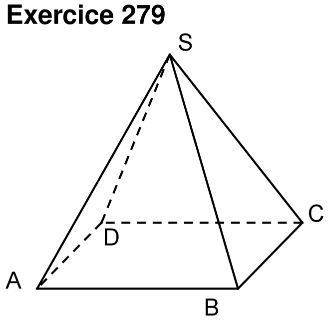
► Exercice 278



On considère un cube ABCDEFGH sur lequel on a placé les milieux des arêtes ainsi que le centre de la face ABCD. Donner...

- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{TR}$.
- Un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{OJ}$.
- Trois vecteurs colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$.
- Deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{DK}$.
- Deux vecteurs coplanaires à $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$.

► Exercice 279

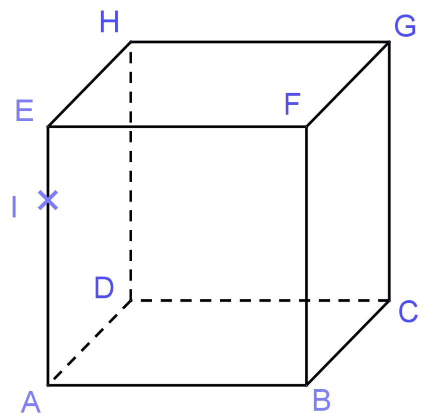


On considère une pyramide $SABCD$ à base carrée $ABCD$ et de sommet S.

On considère les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DS}$.
Montrer que $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.
Que peut-on en déduire sur ces trois vecteurs ?

Droites et plans de l'espace

▶ Exercice 280



On considère le $ABCDEFGH$ ci-contre, ainsi qu'un point I sur le segment $[AE]$.
Dans chacun des cas suivants, dire si les droites sont coplanaires ou non. Si oui, préciser si elles sont parallèles ou sécantes. Lorsqu'elles sont sécantes, construire le point d'intersection de ces droites.

(AB) et (FG)	(AF) et (IE)
(CD) et (EB)	(DI) et (EH)
(IB) et (FA)	(GF) et (DA)

▶ Exercice 281

Sur le cube précédent, déterminer...

a. l'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH).

b. un plan parallèle au plan (BFG).

c. l'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB).

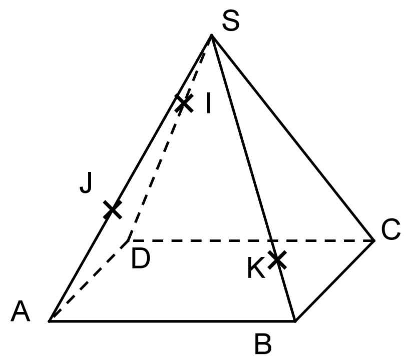
d. l'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD).

e. un plan parallèle au plan (IEB).

f. l'intersection de la droite (AI) et du plan (FGH).

▶ Exercice 282

On considère une pyramide $SABCD$ de sommet S et de base carrée. On place un point I sur $[DS]$, un point J sur $[AS]$ et un point K sur $[BS]$ de telle sorte que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles, de même que les droites (IK) et (BD).



1. Justifier que les droites (IJ) et (AD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
2. Justifier que les droites (IK) et (BD) sont sécantes et construire leur point d'intersection.
3. Construire alors l'intersection des plans (ABD) et (IJK).
4. Sans justifier la construction, vérifier que l'intersection des droites (JK) et (AB) se trouve sur cette droite.

▶ Exercice 283 — Théorème du toit

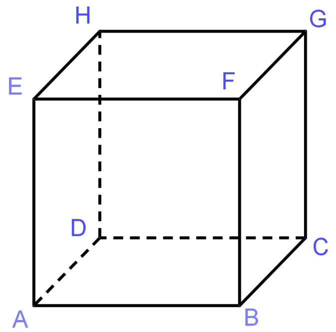
Soit P_1 et P_2 deux plans sécants et Δ la droite d'intersection de ces plans. Soit (d_1) une droite du plan P_1 et (d_2) une droite du plan P_2 telles que (d_1) et (d_2) sont parallèles.

En raisonnant par l'absurde, montrer que Δ est parallèle aux droites (d_1) et (d_2).

Repère de l'espace

▶ Exercice 284

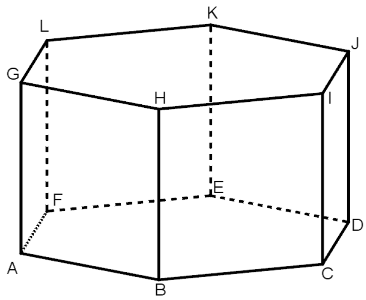
Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous, donner...



- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BH}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point G dans le repère $(B;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$.
- ... les coordonnées du point I, milieu du segment $[BG]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.
- ... les coordonnées du point J, milieu du segment $[FH]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$.

▶ Exercice 285

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$.



1. On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})$.
   (a) Donner les coordonnées des points D, E, H et J dans ce repère.
   (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{GD}$ dans ce repère.
2. Reprendre les questions précédentes en se plaçant cette fois dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AH})$.

▶ Exercice 286 — Centres étrangers 2023

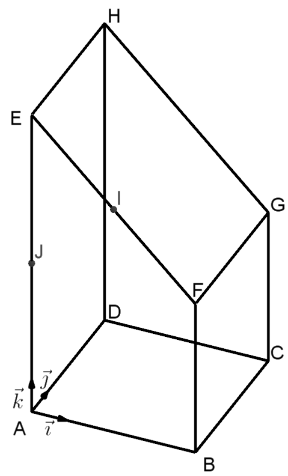
On considère le prisme droit $ABFEDCGH$ de base $ABFE$, rectangle en A. On associe à ce prisme le repère $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que

$$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}.$$

De plus, on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment $[EF]$ et J le milieu du segment $[AE]$.

Donner les coordonnées des points H, I et J.



▶ Exercice 287

On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $A(1;-1;2)$, $B(5;1;8)$, $C(-3;2;-1)$ et $D(-1;3;2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Que peut-on en déduire sur les droites (AB) et (CD) ?
3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

► Exercice 288
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(1;3;5)$, $B(2;7;-1)$ et $C(5;19;-19)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C sont alignés.

► Exercice 289
On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B et C de coordonnées respectives $A(2;4;-1)$, $B(3;-2;5)$ et $C(6;7;-2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer les coordonnées du point I, milieu de $[BC]$.
3. Déterminer les coordonnées du point J tel que $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$.
4. Déterminer les coordonnées du point K tel que C soit le milieu de $[AK]$.

► Exercice 290
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(1;2;3)$, $B(3;-1;2)$, $C(0;1;1)$ et $D(5;1;6)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B C et D ?

► Exercice 291
On se place dans un repère de l'espace $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives $A(2;2;0)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;1)$, $D(0;0;3)$ et $E(-1;4;0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?
3. Donner les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$.

Représentations paramétriques de droite

► Exercice 292
Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point $A(2;5;-3)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$

► Exercice 293
On considère les points $A(1;3,-2)$ et $B(2;5;-4)$. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

► Exercice 294
On considère les points $A(1;2;7)$ et $B(3;-1;6)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 5-4t \\ y = 1+6t \\ z = -3+2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

1. Le point A appartient-il à la droite Δ ?
2. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point $C(6;-1;2)$ et parallèle à Δ.

► Exercice 295

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

$$(d_1) : \begin{cases} x = -5+2t \\ y = 11-3t \\ z = 11-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 7-4t' \\ y = 1-2t' \\ z = -2+5t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point dont on donnera les coordonnées.

► Exercice 296

On considère les droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques

$$(d_1) : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = -5+t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 2+t' \\ y = -1 \\ z = 3+6t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires.

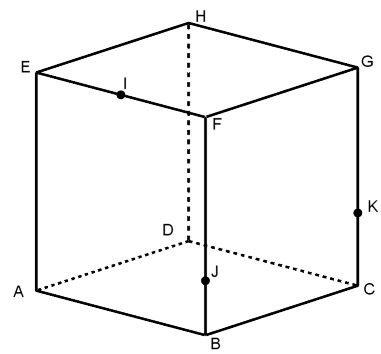
Exercices de synthèse

► Exercice 297

On se place dans un cube $ABCDEFGH$, d'arêtes de longueur 1. On note I le milieu du segment $[EF]$.

On considère par ailleurs le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$ et le point K tel que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}$.

L'espace est muni du repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

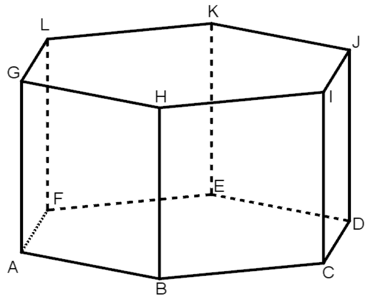


1. Montrer que les droites (IJ) et (AB) sont sécantes. On note M leur point d'intersection
2. A l'aide de deux autres droites sécantes, construire sur la figure ci-dessus, en justifiant la construction, l'intersection des plans (ABC) et (IJK)
3. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{5}{9};1;1\right)$
   (a) Sur quelle arête se situe le point L ?
   (b) Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
   (c) En déduire que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes.

(d) Donner une équation paramétrique de ces deux droites et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

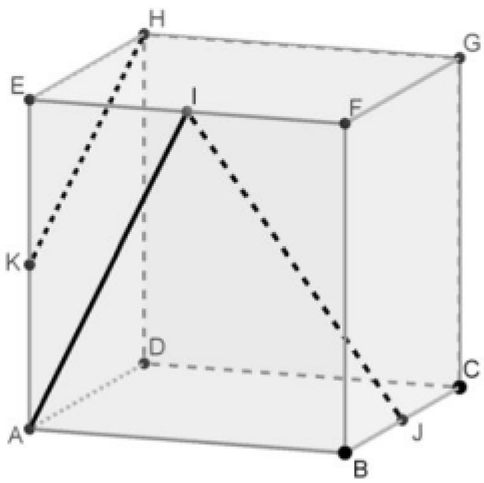
► Exercice 298

On considère un prisme droit $ABCDEFGHIJKL$ dont la base est un hexagone régulier $ABCDEF$. Les droites (AI) et (BK) sont-elles sécantes ?



► Exercice 299 — Amérique du Nord 2021

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$.

2. Donner les coordonnées des points I et J.
3. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

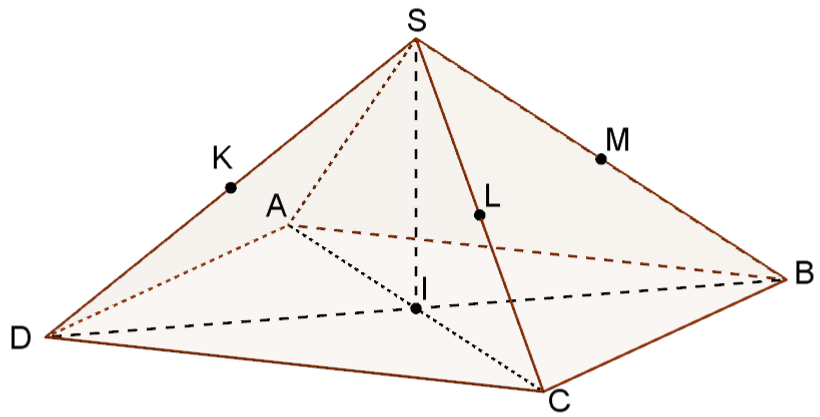
On considère les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques ci-dessous.

$$(d_1) : \begin{cases} x = 3+t \\ y = 8-2t \\ z = -2+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 4+t \\ y = 1+t \\ z = 8+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

4. Les droites (d_1) et (d_2) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

► Exercice 300 — Métropole 2021

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée.



$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré $ABCD$.

On suppose que $IC = IB = IS = 1$. Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé $(I, \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0,0,0), A(-1,0,0), B(0,1,0), C(1,0,0), D(0,-1,0), S(0,0,1)$$

2. Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont...

a. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont...

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est

a. $\begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

36. Corrigés

► **Correction 276**
On a $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{BJ}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{EL}$, $\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{FL}$, $\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EA}$.

► **Correction 277**
On a $\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{DL}=2\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{CG}$.

► **Correction 278**
On a $\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{TL}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{GE}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{ML}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{DK}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires aux vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AD}$.

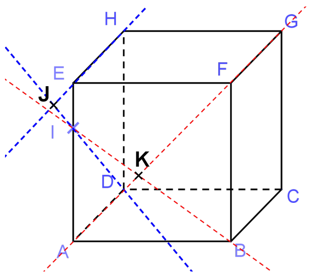
En effet, $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$.

► **Correction 279**
On a $\vec{u}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}$.

Par ailleurs, $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DS}$.

Or, puisque $ABCD$ est un carré, alors $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Ainsi, $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DS}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}=\vec{u}$.

► **Correction 280**



- (AB) et (FG) sont non coplanaires.
- (AF) et (IE) sont coplanaires et sécantes en A.
- (CD) et (EB) sont non coplanaires.
- (DI) et (EH) sont coplanaires et sécantes en J.
- (IB) et (FA) sont coplanaires et sécantes en K.
- (GF) et (DA) sont coplanaires et parallèles.

► **Correction 281**
L'intersection du plan (EFH) avec le plan (ADH) est la droite (EH).

Le plan (AEH) est un plan parallèle au plan (BFG).

L'intersection du plan (IFB) avec le plan (HDB) est la droite (FB).

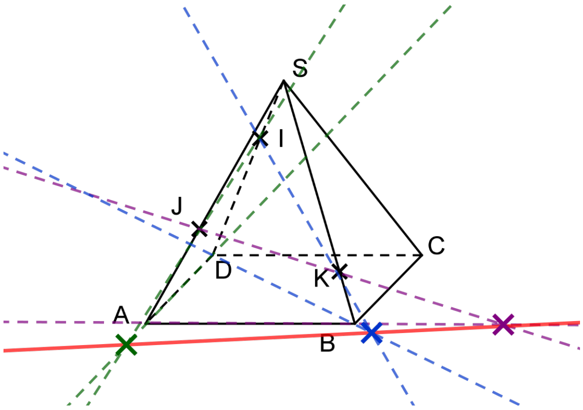
L'intersection du plan (GIC) avec le plan (HAD) est la droite (AE)

Le plan (HCG) est un plan parallèle au plan (IEB).

L'intersection de la droite (AI) et du plan (FGH) est le point E.

► **Correction 282**
Les points I, J, A et D sont coplanaires (ils sont sur la face triangulaire de droite). Les droites (IJ) et (AD) sont donc coplanaires. Elles sont non parallèles et donc sécantes.

Les points I, K, B et D sont coplanaires (ils sont sur un triangle qui coupe le tétraèdre en deux). Les droites (IK) et (BD) sont donc coplanaires. Elles sont non parallèles et donc sécantes.



► Correction 283

Supposons que Δ n'est pas parallèle à (d_1). Puisque (d_2) est parallèle à (d_1), on en déduit que Δ n'est pas non plus parallèle à (d_2).

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de (d_1), et donc également de (d_2). Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc non colinéaires.

Puisque les droites (d_1) et Δ appartiennent toutes deux au plan P_1, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base du plan P_1.

Par ailleurs, puisque les droites (d_2) et Δ sont toutes deux contenues dans le plan P_2, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment également une base du plan P_2.

Par conséquent, les pans P_1 et P_2 admettent un même couple de vecteurs de bases, ces deux plans sont donc parallèles : c'est impossible puisque l'on a supposé que ces deux plans étaient sécants.

Par conséquent, la droite Δ est parallèle à la droite (d_1) et donc à la droite (d_2).

► Correction 284

On a $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Ses coordonnées dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont donc $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du point F dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont $(1\,;0\,;1)$.

On a $\overrightarrow{CD} = 0\overrightarrow{AC} - 1\overrightarrow{AG} + 1\overrightarrow{AH}$. Ses coordonnées dans le repère $(A;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$ sont donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{BG} = 0\overrightarrow{AC} + 0\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$. Les coordonnées du point G dans le repère $(B;\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AH})$ sont $(0\,;0\,;1)$.

Les coordonnées du point I, milieu de $[BG]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ sont $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

Les coordonnées du point J, milieu de $[FH]$ dans le repère $(A;\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$ sont $\left(1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. Attention à l'ordre des vecteurs !

► Correction 285

Dans $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AG})$, on a $D(2\,;2\,;0)$, $E(1\,;2\,;0)$, $H(1\,;0\,;1)$, $J(2\,;2\,;1)$, $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Dans $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AH})$, on a $D(1\,;1\,;0)$, $E(0\,;1\,;0)$, $H(0\,;0\,;1)$, $J(0\,;1\,;1)$, $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

► Correction 286

Le point H a pour coordonnées $(0;4;8)$.

Le point E a pour coordonnées $(0{,}0{,}8)$. Le point F a pour coordonnées $(4{,}0{,}4)$. Puisque I est le milieu de $[EF]$, ses coordonnées sont $\left(\dfrac{0+4}{2},\dfrac{0+0}{2},\dfrac{8+4}{2}\right)$ soit $(2{,}0{,}6)$.

Le point E a pour coordonnées $(0{,}0{,}8)$. Le point A a pour coordonnées $(0{,}0{,}0)$. Puisque J est le milieu de $[AE]$, ses coordonnées sont $\left(\dfrac{0+0}{2},\dfrac{0+0}{2},\dfrac{8+0}{2}\right)$ soit $(0{,}0{,}4)$.

► Correction 287

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-1\\1-(-1)\\8-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-2\\2-(-1)\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-(-3)\\3-2\\2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$.

On remarque que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Par conséquent, ces droites sont également coplanaires. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

► Correction 288

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\7-3\\5-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-2\\19-7\\-19-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\12\\-18\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. De plus, les droites (AB) et (AC) ont un point en commun. Ainsi, les points A, B et C sont alignés.

► Correction 289

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\-2-4\\5-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-6\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-2\\7-4\\-2-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (on ne passe pas des coordonnées de l'un à l'autre en multipliant par un réel). Les points A, B et C ne sont pas alignés.

Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{3+6}{2};\dfrac{-2+7}{2};\dfrac{5+(-2)}{2}\right)$ soit $\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Notons $(x;y;z)$ les coordonnées du point J. Les coordonnées de $\overrightarrow{AJ}$ sont $\begin{pmatrix}x-2\\y-4\\z+1\end{pmatrix}$. Les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ sont $\begin{pmatrix}2\times 1+4\\2\times(-6)+3\\2\times 6+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-9\\13\end{pmatrix}$. On a alors

- $x-2=6$ d'où $x=8$;
- $y-4=-9$ d'où $y=-5$;
- $z+1=13$ d'où $z=12$.

Les coordonnées du point J sont $(8;-5;12)$.

Notons $(x;y;z)$ les coordonnées du point K. Le milieu de $[AK]$ a pour coordonnées $\left(\frac{2+x}{2};\frac{4+y}{2};\frac{-1+z}{2}\right)$.
Puisqu'il doit s'agir du point $C(6;7;-2)$, on a donc $\frac{2+x}{2}=6$ soit $x=10$, $\frac{4+y}{2}=7$ d'où $y=10$ et enfin $\frac{-1+z}{2}=-2$ d'où $z=-3$.
Les coordonnées de K sont donc $(10;10;-3)$.

► Correction 290

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-1-2\\2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-1\\1-2\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5-1\\1-2\\6-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Supposons qu'il existe des réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}$ On a alors

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}\quad\text{c'est-à-dire}\quad\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda+4\mu\\-\lambda-\mu\\-2\lambda+3\mu\end{pmatrix}.$$

D'après la deuxième équation, on a $-3=-\lambda-\mu$ et donc $\lambda=3-\mu$.

D'après la première équation, on a $-\lambda+4\mu=2$. On remplace alors λ par $3-\mu$ et on a donc $-(3-\mu)+4\mu=2$ soit $-3+\mu+4\mu=2$ ou encore $5\mu=5$ et donc $\mu=1$.

En remplaçant μ par 1, on trouve alors $\lambda=3-1=2$.

On peut alors vérifier que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Les points A, B, C et D sont donc sur un même plan.

► Correction 291

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$.

Cette deuxième question revient à déterminer si ces trois vecteurs sont coplanaires. Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}$. En utilisant les coordonnées, on a alors $\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda-2\mu\\-2\lambda-2\mu\\\lambda+3\mu\end{pmatrix}$.

- En utilisant la troisième égalité, on a $0=\lambda+3\mu$ et donc $\lambda=-3\mu$;
- En remplaçant λ par -3μ dans la première équation, on a alors $-2=3\mu-2\mu$ soit $-2=\mu$;
- En remplaçant μ par -2 on a $\lambda=-3\times(-2)=6$;
- Vérifions les coordonnées de $\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AD}$ avec $\lambda=6$ et $\mu=-2$. On obtient

$$\begin{pmatrix}-6-2\times(-2)\\-2\times6-2\times(-2)\\6+3\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-8\\0\end{pmatrix}.$$

  ce qui n'est pas le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, ils forment donc une base de l'espace.

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$, il existe un unique triplet de réels (x,y,z) tels que $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD}$. Ces réels sont les coordonnées du point E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$. En utilisant les coordonnées des vecteurs, on a alors

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-y-2z \\ -x-2y-2z \\ y+3z \end{pmatrix}.$$

- En utilisant la dernière ligne, on a $y+3z=0$ et donc $y=-3z$.
- En remplaçant y par $-3z$ dans la deuxième équation, on obtient $2=-x-2\times(-3z)-2z$ soit $2=-x+6z-2z$ c'est-à-dire $2=-x+4z$. On a donc $x=-2+4z$.
- En remplaçant y par $-3z$ et x par $-2+4z$ dans la première équation, on obtient $-3=-2x-y-2z$ soit $-3=-2(-2+4z)-(-3)z-2z$ soit $-3=4-8z+3z-2z$ et donc $-7=-7z$ d'où $z=1$.
- Puisque $y=-3z$, on a $y=-3$.
- Puisque $x=-2+4z$, $x=-2+4=2$.

On calcule alors les coordonnées de $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. elles valent

$$\begin{pmatrix} -2\times2-(-3)-2\times1 \\ -2-2\times(-3)-2\times1 \\ -3+3\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

qui sont bien les coordonnées de $\overrightarrow{AE}$. Ainsi, $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}+-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Les coordonnées de E dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ sont donc $(2;-3;1)$.

► Correction 292

Cette droite admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=2+3t \\ y=5+2t \\ z=-3-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

► Correction 293

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x=1+t \\ y=3+2t \\ z=-2-2t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

► Correction 294

Le point A appartient à la droite Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} 1=5-4t \\ 2=1+6t \\ z=7+2t \end{cases}$.

La première ligne donne alors $t=1$. Mais si $t=1$, alors la deuxième ligne donne $2=7$. Ainsi, un tel réel t n'existe pas : le point A n'appartient pas à la droite (AB).

Un vecteur directeur de (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. On a $\vec{u}=-2\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires : les droites (AB) et Δ sont donc parallèles.

La droite (d) admet le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de cette droite est donc $\begin{cases} x=6+2t \\ y=-1-3t \\ z=2-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$

► Correction 295

Supposons que les droites (d_1) et (d_2) soient sécantes en un point $M(x;y;z)$. Il existe alors deux réels t et t' tels que $\begin{cases} x=-5+2t=7-4t' \\ y=11-3t=1-2t' \\ z=11-2t=-2+5t' \end{cases}$

En remplaçant la troisième ligne par la somme des lignes 1 et 3, on a alors $\begin{cases} -5+2t=7-4t' \\ 11-3t=1-2t' \\ 6=5+t' \end{cases}$.

On trouve alors $\begin{cases} -5+2t=7-4t' \\ 11-3t=1-2t' \\ t'=1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -5+2t=7-4 \\ 11-3t=1-2 \\ t'=1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} t=4 \\ t'=1 \end{cases}$.

Vérifions : en remplaçant t par 4 dans l'équation de (d_1), on obtient le point de coordonnées $(3;-1;3)$. En remplaçant t' par 1 dans l'équation de (d_2), on obtient le point de coordonnées $(3;-1;3)$.

Ainsi, les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes et les coordonnées du point d'intersection des droites (d_1) et (d_2) sont donc $(3;-1;3)$.

► Correction 296

Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de (d_2) est $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites (d_1) est (d_2) ne sont donc pas parallèles.

Supposons que ces droites sont sécantes. Il existe donc deux réels t et t' tels que $\begin{cases} 1+2t=2+t' \\ 3-t=-1 \\ -5+t=3+6t' \end{cases}$.

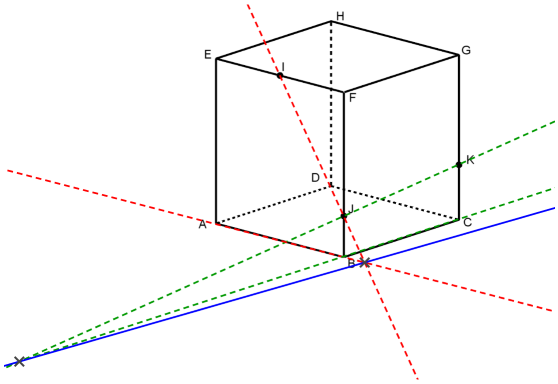
La deuxième ligne donne $t=4$. En remplaçant t par 4 dans la première ligne, on obtient $t'=7$. En remplaçant t par 4 dans la troisième ligne on obtient $t'=-\frac{2}{3}$. On a donc une contradiction. Par conséquent, les droites (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes.

Finalement, les droites (d_1) et (d_2) n'étant ni parallèles, ni sécantes, elles ne sont pas coplanaires.

► Correction 297

1. Les droites (IJ) est (AB) sont coplanaires puisque les 4 points cités se trouvent sur une même face. Par ailleurs, on trouve les coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -3/4 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites (IJ) et (AB) ne sont donc pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point M.
2. Les droites (JK) est (CB) sont coplanaires puisque les 4 points cités se trouvent sur une même face. Par ailleurs, on trouve les coordonnées $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1/12 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : les droites (KJ) et (CB) ne sont donc pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point N.

Ainsi, les points M et N appartiennent à l'intersection des plans (ABC) et (IJK). L'intersection de ces deux plans est par conséquent la droite (MN).



3. (a) Le point L se situe sur l'arête $[HG]$.

(b) On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1/2\\0\\-3/4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1/2\\1\\-2/3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IL}\begin{pmatrix}1/18\\1\\0\end{pmatrix}$. Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{IJ}=a\overrightarrow{IK}+b\overrightarrow{IL}$. On aurait alors

$$\begin{pmatrix}1/2\\0\\-3/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a/2+b/18\\a+b\\-2a/3\end{pmatrix}.$$

D'après la troisième ligne, on a $a=\dfrac{9}{8}$. En utilisant la deuxième ligne, on trouve alors $b=-\dfrac{9}{8}$.

Vérifions : on calcule les coordonnées de $\dfrac{9}{8}\overrightarrow{IK}-\dfrac{9}{8}\overrightarrow{IL}$. On obtient $\begin{pmatrix}9/16-1/16\\9/8-9/8\\-2/3\times 9/8\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}1/2\\0\\-3/4\end{pmatrix}$.

On retrouve bien les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$. Les points I, J, K et L sont coplanaires. Ainsi, les droites (IK) et (LJ) sont coplanaires.

(c) Or, elles ne sont pas parallèles. Ces droites sont donc sécantes.

(d) On a $(IK)\ :\ \begin{cases}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\\ y=t\\ z=1-\frac{2}{3}t\end{cases},t\in\mathbb{R}$ et $(LJ)\ :\ \begin{cases}x=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}t'\\ y=1-t'\\ z=1-\frac{3}{4}t'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$.

Cherchons donc deux réels t et t' tels que $\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=\frac{5}{9}+\frac{4}{9}t'\\ t=1-t'\\ 1-\frac{2}{3}t=1-\frac{3}{4}t'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$.

En remplaçant t par $1-t'$ dans la dernière équation, on a $-\dfrac{2}{3}(1-t')=-\dfrac{3}{4}t'$ soit $\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}\right)t'=\dfrac{2}{3}$ d'où $\dfrac{17}{12}t'=\dfrac{2}{3}$ et $t'=\dfrac{12}{17}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{17}$.

Remplaçons alors t' par $\dfrac{8}{17}$ dans l'équation de la droite (LJ). On a $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\times\dfrac{8}{17}=\dfrac{13}{17}$, $1-\dfrac{8}{17}=\dfrac{9}{17}$ et $1-\frac{3}{4}\times\dfrac{8}{17}=\dfrac{11}{17}$.

Le point d'intersection des droites (IK) et (LJ) a pour coordonnées $\left(\dfrac{13}{17};\dfrac{9}{17};\dfrac{11}{17}\right)$.

► **Correction 298**

On se place dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AG})$. On a alors les coordonnées des vecteurs suivantes :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AI}+\mu\overrightarrow{AK}$. On a alors

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\lambda+\mu\\\lambda+2\mu\\\lambda+\mu\end{pmatrix}.$$

La dernière ligne nous donne $\lambda=-\mu$. On remplaçant λ par $-\mu$ dans la seconde ligne, on a alors $\mu=0$ et donc $\lambda=0$. Or, si on remplace λ et μ par 0 dans la première ligne, on obtient $1=0$, ce qui est absurde.

Ainsi, les points A, B, I et K ne sont pas coplanaires. Les droites (AI) et (BK) ne sont donc pas coplanaires. Elles ne peuvent donc pas être sécantes.

► Correction 299

1. Les points A, I et K appartiennent au même plan (la face avant du cube). Le point H n'appartient pas à ce plan. Les points A, I, K et H ne sont donc pas coplanaires. Les droites (AI) et (KH) ne peuvent donc pas être parallèles.
2. On a $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $J\left(1;\frac{1}{2};0\right)$.
3. On a $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
4. La droite (d_1) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. La droite (d_2) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les droites (d_1) et (d_2) ne sont donc pas parallèles.

► Correction 300

1. Réponse **c.** : (DK) et (SD) ont un point en commun et sont donc sécantes. (AC) et (IC) sont sécantes en A, (LM) et (AD) sont parallèles et donc coplanaires.

2. Réponse **a.** : K a pour coordonnées $\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$. Le point N a donc pour coordonnées la moyenne des coordonnées de ces deux points, soit $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

3. Réponse **b.** On a $\overrightarrow{AS}=1\overrightarrow{IC}+0\overrightarrow{IB}+1\overrightarrow{IS}$. Ses coordonnées sont donc $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Attention à l'ordre des vecteurs de la base !

4. Réponse **c.** En prenant $t=0$, on retrouve le point S. En prenant $t=-1$, on retrouve le point A.

XIII

Orthogonalité dans l’espace

37. Cours : Orthogonalité dans l'espace

1 Produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Définition du produit scalaire

Définition 52 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On considère des points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. L'angle non orienté entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u};\vec{v})$ est l'angle $\widehat{BAC}$, vu dans le plan (ABC).

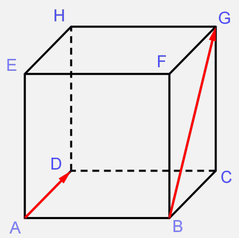
Définition 53 : Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **réel** notée $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et qui vaut

- 0 si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ vaut $\overrightarrow{0}$;
- $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u};\vec{v})$ sinon.

Rappel de certaines valeurs remarquables

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■ **Exemple 139 :** Dans un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG}$.



D'une part, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$. Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$.
L'angle $\widehat{HAD}$ mesure $45°$ ou $\frac{\pi}{4}$ radians.
$AD = 1$. Le théorème de Pythagore permet de montrer que $AH = \sqrt{2}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = AD \times AH \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

■

Définition 54 : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Le vecteur $\vec{0}$ est en particulier orthogonal à tous les autres vecteurs.

1.2 Propriétés du produit scalaire

Propriété 74 : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, k et k' deux réels.

- $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$. En particulier, $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$.
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$, le produit scalaire est **symétrique**.
- $\vec{u}\cdot(k\vec{v}+k'\vec{w}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})+k'(\vec{u}\cdot\vec{w})$ et $(k\vec{v}+k'\vec{w})\cdot\vec{u} = k(\vec{v}\cdot\vec{u})+k'(\vec{w}\cdot\vec{u})$.
  Le produit scalaire est **bilinéaire**.

■ **Exemple 140 :** Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$, $\vec{v}\cdot\vec{w}=5$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=-1$ et $||\vec{u}||=4$. On a

$$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(-3\vec{u}+4\vec{w}) = -3(\vec{u}\cdot\vec{u})+4(\vec{u}\cdot\vec{w})-6(\vec{v}\cdot\vec{u})+8(\vec{v}\cdot\vec{w}).$$

On remplace alors les valeurs par celle de l'énoncé en rappelant que $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.

$$(\vec{u}+2\vec{v})\cdot(-3\vec{u}+4\vec{w}) = -3\times 4^2+4\times(-1)-6\times 3+8\times 5 = -30$$

■

1.3 Formules de polarisation

Propriété 75 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $(\vec{u}+\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2$;
- $(\vec{u}-\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = ||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2$.

Démonstration 47 : On utilise la bilinéarité du produit scalaire. On a

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2.$$

□

Propriété 76 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2)$.

Démonstration 48 : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. D'après la propriété précédente, on a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2 \quad \text{et} \quad ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2.$$

En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans ces deux expressions, on retrouve les deux premiers points. De plus, en soustrayant ces deux égalités, on trouve que

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 4\vec{u}\cdot\vec{v}.$$

Il suffit de diviser par 4 pour retrouver la dernière égalité recherchée. □

■ **Exemple 141 :** Soit A, B et C trois points de l'espace tels que $AB = 5$, $BC = 7$ et $AC = 8$. On a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2 - AB^2 - AC^2).$$

Or, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$, d'où

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(CB^2 - AB^2 - AC^2) = -\frac{1}{2}(7^2-5^2-8^2) = -20.$$

■

2 Base orthonormée

Définition 55 : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère de l'espace.

- On dit que la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormée si
  - $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = 0$;
  - $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$.
- On dit alors que le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est un repère orthonormé.

Une famille orthonormée de trois vecteurs forme forcément une base de l'espace.

■ **Exemple 142 :** Si on considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1, le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace. ■

Propriété 77 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$. Alors, $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$.

Démonstration 49 : Il suffit de revenir à la définition de coordonnées. On a

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})\cdot(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}).$$

On développe alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+xz'\vec{\imath}\cdot\vec{k}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}+yz'\vec{\jmath}\cdot\vec{k}+zx'\vec{k}\cdot\vec{\imath}+zy'\vec{k}\cdot\vec{\jmath}+zz'\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Or, la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormé, les seuls produits scalaires non nuls sont $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}$, et $\vec{k}\cdot\vec{k}$ qui valent 1. Ainsi,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'.$$

□

■ **Exemple 143 :** Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times5+(-1)\times3+2\times-6 = 15-3-12 = 0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ■

Propriété 78 : On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

Alors $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
En particulier, si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ sont deux points de l'espace, alors

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

■ **Exemple 144 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $A(1;2;5)$ et $B(3;3;3)$. On a alors

$$AB = \sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2+(3-5)^2} = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

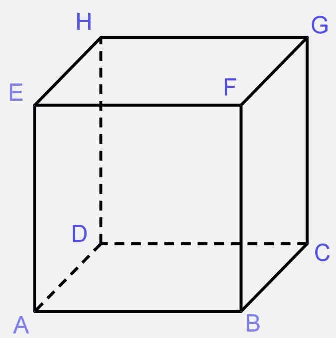
■

3 Orthogonalité

3.1 Droites orthogonales

Définition 56 : Soit (d) et (d') deux droites de l'espace. On dit que (d) et (d') sont orthogonales si les parallèles à ces deux droites passant par un même point sont perpendiculaires.

■ **Exemple 145 :** On considère un cube $ABCDEFGH$.



Les droites (AB) et (CG) sont orthogonales. En effet, la parallèle à (CG) passant par B est la droite (BF) qui est perpendiculaire à la droite (AB). ■

Propriété 79 : Deux droites (d) et (d'), dirigées respectivement par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

■ **Exemple 146 :** On se place dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les droites (d_1) et (d_2) définies par les représentations paramétriques suivantes.

$$(d_1)\,;\left\{\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=3+t \\ z=2-t \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (d_2)\,;\left\{\begin{array}{l} x=5-3t \\ y=3-2t \\ z=2+4t \end{array}\right.$$

La droite (d_1) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et la droite (d_2) par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\-2\\4\end{pmatrix}$.

Le repère étant orthonormé, on peut calculer le produit scalaire de ces deux vecteurs comme suit :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\times(-3)+1\times(-2)+(-1)\times 4=6-2-4=0.$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Les droites (d_1) et (d_2) sont donc orthogonales. ■

3.2 Droite orthogonale à un plan

Définition 57 : Soit (d) une droite et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. On dit que (d) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ si elle est orthogonale à toute droite contenue dans le plan $\mathscr{P}$.

Propriété 80 — Théorème de la porte : Soit (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La droite (d) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}_1=\vec{u}\cdot\vec{v}_2=0$.

Il suffit donc de montrer qu'une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan pour montrer qu'elle est en fait orthogonale à toute droites de ce plan.

■ **Exemple 147 :** On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les vecteurs $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ainsi que deux points $A(2;5;2)$ et $B(5;8;-1)$.

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (ces vecteurs n'étant pas colinéaires, on définit bien ainsi un plan). La droite (AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. En effet,

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}$
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, on peut calculer les produits scalaires à l'aide des coordonnées. On a alors
  - $\overrightarrow{AB}\cdot v_1=3\times 1+3\times 2+(-3)\times 3=0$;
  - $\overrightarrow{AB}\cdot v_2=3\times 1+3\times 0+(-3)\times 1=0$.
- Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. La droite (AB) est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

■

3.3 Vecteur normal à un plan

Définition 58 : Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. On dit que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur du plan $\mathscr{P}$.

De la même manière que ce que l'on faisait avec les droites orthogonales à un plan, pour montrer qu'un vecteur est normal à un plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

▪ **Exemple 148 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v_1}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$. En effet,

- Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires. Ils définissent donc bien un plan.
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,
- $\vec{u}\cdot\vec{v}_1 = 2\times 3+0\times 2+(-1)\times 6 = 0$;
- $\vec{u}\cdot\vec{v}_2 = 2\times 1+0\times(-3)+(-1)\times 2 = 0$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. ▪

Propriété 81 : Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal au premier est normal au second.

▪ **Exemple 149 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère le plan $\mathscr{P}_2$ passant par $A(2;5;9)$, dirigé par $\vec{w_1}\begin{pmatrix}5\\4\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{w_2}\begin{pmatrix}-2\\7\\-4\end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$, qui était normal au plan $\mathscr{P}$ de l'exemple précédent, est aussi normal au plan $\mathscr{P}_2$.

En effet, les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$ ne sont pas colinéaires et définissent donc bien un plan. De plus, puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,

- $\vec{u}\cdot\vec{w}_1 = 2\times 5+0\times 4+(-1)\times 10 = 0$;
- $\vec{u}\cdot\vec{w}_2 = 2\times(-2)+0\times 7+(-1)\times(-4) = 0$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$. $\vec{u}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$. Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_2$ admettent un même vecteur normal, ils sont donc parallèles. ▪

Définition 59 : Deux plans sont perpendiculaires si le premier plan contient une droite orthogonale au second plan.

Le concept de plans perpendiculaires peut être trompeur. Par exemple, deux plans perpendiculaires peuvent contenir des droites parallèles. En revanche, il est possible de caractériser la perpendicularité de deux plans en utilisant leurs vecteurs normaux.

Propriété 82 : Deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un est orthogonal à un vecteur normal du second.

4 Equation cartésienne d'un plan

Dans toute cette partie et dans la suivante, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

4.1 Equation cartésienne

Propriété 83 : Soit $\vec{n}$ un vecteur de l'espace et A un point de l'espace. L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ est le plan passant par A admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Réciproquement, soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace, A un point de $\mathscr{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

Il est donc possible de décrire un plan à l'aide d'un point et d'un vecteur normal.

Propriété 84 : Soit $A(x_A,y_A,z_A)$ un point de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

On note $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et admettant le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Un point $M(x,y,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0.$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Réciproquement, si a, b, c et d sont quatre réels fixés, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ vérifiant $ax+by+cz+d=0$ est un plan auquel le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal.

Démonstration 50 : Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. Le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. Puisque le repère que l'on considère est orthonormé,

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A).$$

Ainsi, le point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$.

Réciproquement, a, b, c et d quatre réels fixés, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. On supposera par exemple que $a\neq0$. On note alors $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

D'une part, l'ensemble $\mathscr{E}$ des points de l'espace vérifiant $ax+by+cz+d=0$ n'est pas vide. En effet, le point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ appartient à cet ensemble.

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace et $A\in\mathscr{E}$. On a alors $ax_A+by_A+cz_A=-d$. Ainsi,

$$M\in\mathscr{E}\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_a-by_A-cz_A=0\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

C'est-à-dire $M\in\mathscr{E}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc un plan admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal. □

■ **Exemple 150 :** On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x+2y-3z+1=0$. Ce plan admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Considérons le point $A(1;1;2)$. On a $3\times1+2\times1-3\times2+1=0$. Les coordonnées du point A vérifient l'équation du plan $\mathscr{P}$. Le point A appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

En revanche, le point $B(1;5;0)$ n'appartient pas à ce plan : on a $3\times1+2\times5-3\times0+1=14\neq0$. ■

■ **Exemple 151 :** Le plan $\mathscr{P}$ passant par $A(1;5;7)$ et admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne $4(x-1)-2(y-5)+3(z-7)=0$ c'est-à-dire $4x-2y+3z-15=0$. ■

Il est aussi possible de raisonner comme suit : tout plan admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$ comme vecteur normal admet une équation cartésienne de la forme $4x-2y+3z+d=0$ pour un certain réel d. Pour que ce plan passe par le point A, il faut que les coordonnées de A vérifient cette équation.

Autrement dit, $4\times1-2\times5+3\times7+d=0$, soit $15+d=0$ et donc $d=-15$.

4.2 Application : intersection d'une droite et d'un plan

■ **Exemple 152 :** On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+5y-3z+1=0$ et la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

On a $M(x;y;z)\in P\cap(d)$ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\\2x+5y-3z+1=0\end{cases}$

Résolvons ce système. En remplaçant les valeurs de x, y et z dans la dernière équation, on obtient

$$\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\\2(2-t)+5(5+t)-3(-2-2t)+1=0\end{cases}\quad\text{soit}\quad\begin{cases}x=2-t\\y=5+t\\z=-2-2t\\36+9t=0\end{cases}$$

Finalement, l'unique solution du système est

$$\begin{cases}t=-4\\x=2-(-4)=6\\y=5+(-4)=1\\z=-2-2\times(-4)=6\end{cases}$$

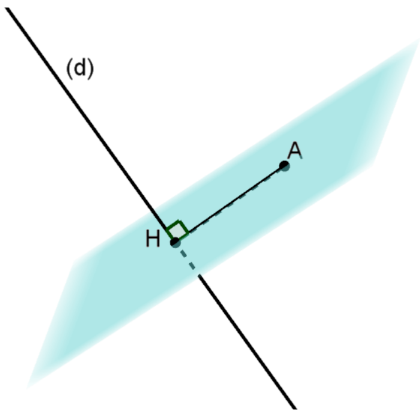
L'intersection de $\mathscr{P}$ et (d) est donc le point $M(6;1;6)$. ■

5 Projeté orthogonal

5.1 Projeté orthogonal sur une droite

Définition 60 : Soit A un point de l'espace et (d) une droite de l'espace, dirigée par un vecteur $\vec{u}$. On appelle projeté orthogonal de A sur (d) le point H de la droite (d) tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$. En particulier,

- Si A appartient à la droite (d), ce point est son propre projeté,
- sinon, la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (d).



H est en fait l'intersection de la droite (d) et du plan $\mathscr{P}$ qui passe par le point A et auquel la droite (d) est normale. Si l'on connaît un point et un vecteur directeur de la droite (d), il est alors possible de déterminer sa représentation paramétrique, déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$, puis d'en déterminer le point d'intersection avec la méthode vue précédemment : nous déterminons ainsi le projeté orthogonal de A sur (d).

■ **Exemple 153 :** Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+t \\ z = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et A le point de coordonnées $(3;3;3)$. On vérifie facilement que le point A n'appartient pas à la droite (d).

Un vecteur directeur de la droite (d) est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Notons alors $\mathscr{P}$ le plan passant par A est donc $\vec{u}$ est un vecteur normal : la droite (d) sera ainsi orthogonale à ce plan $\mathscr{P}$.

Une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donc

$$-(x-3)+(y-3)-2(z-3)=0 \quad \text{soit} \quad -x+y-2z+6=0.$$

Le projeté orthogonal de A sur (d) est le point d'intersection de (d) et de $\mathscr{P}$.

Notons $(x;y;z)$ les coordonnées de ce point et t son paramètre dans l'équation de (d). On a alors $x=1-t$, $y=3+t$, $z=1-2t$ et $-x+y-2z+6=0$. En remplaçant les valeurs de x, y et z dans cette dernière équation, on aboutit alors à

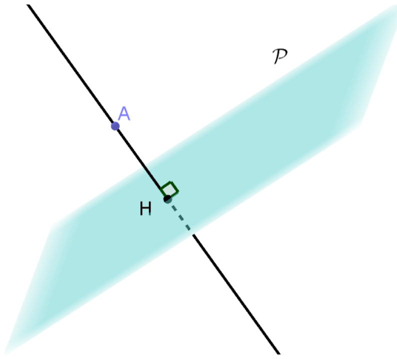
$$-(1-t)+(3+t)-2(1-2t)+6=0 \quad \text{soit} \quad 6t+6=0 \quad \text{et donc} \quad t=-1.$$

Ainsi, $x=1-(-1)=2$, $y=3+(-1)=2$ et $z=1-2\times(-1)=3$. Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est donc le point $H(2;2;3)$. ■

5.2 Projeté orthogonal sur un plan

Définition 61 : Soit A un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathscr{P}$ et de la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\vec{n}$. En particulier

- Si A appartient au plan $\mathscr{P}$, ce point est son propre projeté
- sinon, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathscr{P}$



■ **Exemple 154 :** On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(1;3;6)$, le point B de coordonnées $(1;1;1)$ et le plan $\mathscr{P}$ passant par B et dirigé par $\vec{v_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\10\\-4\end{pmatrix}$.
Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, on définit bien ainsi un plan.

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\\-5\end{pmatrix}$.
- Puisque l'on est dans un repère orthonormé, il est possible de calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées,
  - $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_1 = 0\times1+(-2)\times0+(-5)\times0 = 0$;
  - $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}_1 = 0\times2+(-2)\times10+(-5)\times(-4) = 0$;
- Ainsi, B appartient au plan $\mathscr{P}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan $\mathscr{P}$. B est donc le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

■

Là encore, une méthode similaire à la précédente peut être utilisée pour déterminer par le calcul les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan. Si l'on connaît l'équation cartésienne d'un plan $\mathscr{P}$ ainsi que les coordonnées d'un point A n'appartenant pas à ce plan, il est possible de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

Pour cela, on identifie un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathscr{P}$ et on détermine une représentation paramétrique de la droite passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur directeur : cette droite est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. Il nous reste alors à déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette droite et de ce plan pour obtenir le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$.

5.3 Distance à une droite ou un plan

Définition 62 : Soit A un point de l'espace et (d) une droite (ou $\mathscr{P}$ un plan).

On appelle distance de A à (d) (ou à $\mathscr{P}$) la plus petite distance AM pour M un point de la droite (d) (ou du plan $\mathscr{P}$).

■ **Exemple 155 :** Soit $A(2,1,3)$ et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 5+t \\ z = -2-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Soit M un point de paramètre t de cette droite. On a alors

$$AM^2 = (2-(1-t))^2 + (1-(5+t))^2 + (3-(-2-2t))^2 = (1+t)^2 + (-4-t)^2 + (5+2t)^2.$$

Développons alors cette expression. On a

$$AM^2 = 1 + 2t + t^2 + 16 + 8t + t^2 + 25 + 20t + 4t^2 = 6t^2 + 30t + 42.$$

Ainsi, $AM = \sqrt{6t^2+30t+42}$. Or, pour tout réel t, $6t^2+30t+42 > 0$. On rappelle que si u est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6t^2+30t+42}$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t,

$$f'(t) = \frac{12t+30}{2\sqrt{6t^2+30t+42}} = \frac{6t+15}{\sqrt{6t^2+30t+42}}.$$

Cette dérivée est du signe de $6t+15$. On sait par ailleurs que $6t+15 \geqslant 0$ si et seulement si $t \geqslant -\dfrac{5}{2}$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	

La fonction f admet donc un minimum en $-\dfrac{5}{2}$. Par ailleurs,

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \sqrt{6 \times \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 30 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 42} = \sqrt{\frac{75}{2} - 75 + 42} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi, la distance de A à (d) vaut $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

■

Propriété 85 : Soit $\mathscr{S}$ un plan ou une droite de l'espace.

Soit A un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}$.

Pour tout point K de l'ensemble $\mathscr{S}$,on a $AK \geqslant AH$: le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{S}$ est le point de l'ensemble $\mathscr{S}$ qui est le plus proche du point A. La distance du point A à l'ensemble $\mathscr{S}$ est alors égale à la distance AH.

Démonstration 51 : Soit K un point de $\mathscr{S}$. On a alors

$$AK^2 = ||\overrightarrow{AK}||^2 = ||\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HK}||^2 = ||\overrightarrow{AH}||^2 + 2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} + ||\overrightarrow{HK}||^2.$$

Or, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan ou à la droite $\mathscr{S}$, auquel appartiennent les points H et K. Ainsi, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} = 0$. De plus, $||\overrightarrow{HK}||^2 \geqslant 0$. Ainsi, on a bien $AK^2 \geqslant AH^2$.

Finalement, les distances étant des quantités positives, par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a bien

$$AK \geqslant AH.$$

□

■ **Exemple 156 :** On considère la droite (d) et le point A de l'exemple précédent. On a vu que la distance de A à (d) valait $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et que cette distance était atteinte pour le paramètre $t = -\dfrac{5}{2}$ dans la représentation paramétrique de (d) donnée.

Ainsi, le point le plus proche du point A est le point de coordonnées $(x;y;z)$ avec

$$\begin{cases} x = 1 - \left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{7}{2} \\ y = 5 + \left(-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{2} \\ z = -2 - 2 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) = 3 \end{cases}.$$

Le point $H\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{5}{2};3\right)$ est donc le projeté orthogonal du point A sur la droite (d). ■

38. Exercices

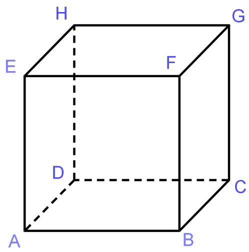
Produit scalaire

► Exercice 301

On considère trois points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

► Exercice 302

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1. Calculer les produits scalaires suivants



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{ED}$

► Exercice 303

Est-il possible d'avoir 3 points de l'espace A, B et C tels que $AB = 3$, $BC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$?

► Exercice 304

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 5$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -1$ et $||\vec{u}|| = 4$.

1. Que vaut $2\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w})$?
2. Que vaut $(3\vec{v} - 2\vec{u}) \cdot (4\vec{w} + \vec{u})$?

► Exercice 305

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

► Exercice 306

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

► Exercice 307

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1. $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 4$
2. $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 3$
3. $||\vec{u} - \vec{v}|| = 7$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 12$

► Exercice 308

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 4$ et $||u \vec{-} v|| = 5$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Exercice 309

Soit A, B et C trois points de l'espace tel que $AB + BC = AC$. Montrer que ces points sont alignés.

Base orthonormée

► Exercice 310

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

► Exercice 311

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;1;2)$, $C(8;2;x)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2. Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

► Exercice 312

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(3;4;2)$, $B(5;2;2x)$, $C(3;10;x)$. Pour quelles valeurs du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

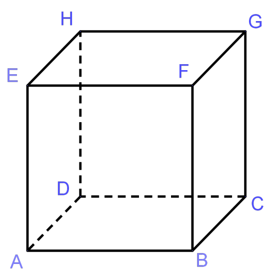
► Exercice 313

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3. Calculer les longueurs AB et AC.
4. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie eu degré près.

► Exercice 314

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1 ainsi que les points I, J et K, centres respectifs des faces $ABCD$, $BCGF$ et $ABFE$. On se place dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Calculer $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$
3. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{JIK}$.
4. Quelle est la nature du triangle IJK ?

► Exercice 315

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.
2. Soit λ un réel et $\vec{V}=\vec{v}+\lambda\vec{u}$. Déterminer la valeur de λ pour que $\vec{V}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.
3. Soit μ_1 et μ_2 deux réels et $\vec{W}=\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u}$. Déterminer les valeurs de μ_1 et μ_2 pour que le vecteur $\vec{W}$ soit orthogonal aux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{u}$.
4. En déduire une base orthonormée de l'espace différente de $(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Ce procédé pour exhiber une base orthonormée à partir de vecteurs non coplanaires est appelé algorithme de Gram-Schmidt.

Orthogonalité

► Exercice 316
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points $A(2;5;1)$, $B(3;2;3)$ et $C(3;6;2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

► Exercice 317
On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1. Quelle est la nature du repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$?
2. Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$.
4. Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

► Exercice 318
On considère les points $A(2;1;5)$ et $B(3;2;3)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+t \\ z = -5+2t \end{cases} ,t \in \mathbb{R}.$$

Les droites (AB) et Δ sont-elles orthogonales ?

► Exercice 319
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques respectives

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \quad \text{et}(d_2) : \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases} ,t' \in \mathbb{R}.$$

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite (d_1) et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite (d_2).
2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3. Montrer que le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2).
4. Montrer que la droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire aux droites (d_1) et (d_2).

► Exercice 320
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;-1;6)$ et $D(6;1;6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

► Exercice 321
On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit $\vec{v_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathscr{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

► **Exercice 322**
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3;-2;-2)$, $B(1;3;-8)$ et $C(-2;0;4)$ ainsi que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

► **Exercice 323**
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;3;-1)$, $B(2;4;1)$ et $C(0;1;1)$.

1. Justifier que les points A, B et C forment bien un plan.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

Equations cartésiennes de plan

Dans tous les exercices suivants, l'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé.

► **Exercice 324**
On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $3x+2y-z+1=0$ ainsi que les points $A(2,-3,1)$, $B(0,0,1)$, $C(0,2,5)$ et $D(1,5,3)$.

1. Quels sont les points qui appartiennent au plan $\mathscr{P}$?
2. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

► **Exercice 325**
Soit P le plan d'équation $2x-5y+3z-2=0$ et (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$.
Montrer que la droite (d) est incluse dans le plan P.

► **Exercice 326**
Donner une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2;5;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

► **Exercice 327**
On considère les points $A(-1;2;0)$, $B(1;2;4)$, $C(-1;1;1)$, $D(5;3;0)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Le point D appartient-il à ce plan ?
4. Donner une équation cartésienne du plan parallèle au plan (ABC) passant par D.

► **Exercice 328**
Soit P_1 et P_2 les plans d'équations cartésiennes respectives $2x+3y-5z+1=0$ et $4x+6y-10z+3=0$. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont parallèles mais non confondus.

► **Exercice 329**
On considère les points $A(2;-1;0)$, $B(1;0;-3)$ et $C(6;6;1)$ ainsi que le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x-y-z+4=0$.

Montrer que le plan $\mathscr{P}$ est parallèle au plan (ABC).

► Exercice 330

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection du plan P d'équation $2x-3y-2z+1=0$ et de la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5-3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

► Exercice 331

On considère les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ d'équations respectives $2x+y-z+3=0$ et $3x+2y-z+1=0$.

1. Donner un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ et un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$. Ces plans sont-ils parallèles ?
2. Montrer que les points $A(1;1;6)$ et $B(2;0;7)$ appartiennent aux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.
3. En déduire une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$.

Projeté orthogonal

► Exercice 332

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(5;1;3)$, le point B de coordonnées $(-2;-2;-2)$ et le plan $\mathscr{P}$ passant par B et dirigé par $\vec{v_1}\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$.
On considère le point H de coordonnées $(2;4;1)$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
2. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$
3. Montrer que le point H appartient au plan $\mathscr{P}$.
4. Que peut-on en déduire sur le point H ?

► Exercice 333

L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ orthonormé. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+4y-5z+1=0$ ainsi que le point $A(6;8;-9)$.

1. Le point A appartient-il au plan $\mathscr{P}$?
2. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$.

► Exercice 334

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1. L'espace est muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE).
2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (AG).
4. En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal du point G sur le plan (BDE).

► Exercice 335 — Amérique du nord 2021

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ dans un repère orthonormé. Montrer que le point $L(4,0,3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5,3,1)$ sur le plan $\mathscr{P}$.

► Exercice 336

On se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point $A(3,5,1)$ et la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d) \quad : \quad \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 1-t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

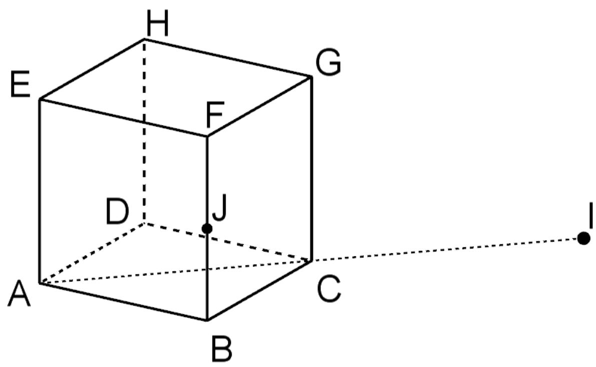
Soit M un point de la droite D, de paramètre t.

1. Montrer que la distance AM vaut $\sqrt{11t^2-22t+29}$.
2. On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \sqrt{11x^2-22x+29}$.
   (a) Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) Montrer que f admet un minimum en une valeur x_0 que l'on précisera. Que vaut ce minimum ?
3. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Exercices de synthèse

► Exercice 337

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté de longueur 1. L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. On considère le point I, symétrique du point A par rapport au point C ainsi que le point J, milieu du segment $[BF]$.



1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD)
3. En déduire une équation cartésienne du plan (IJD).
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BH).
5. Déterminer les coordonnées du point K, point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH).
6. Calculer $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}$ ainsi que les longueurs KB et KD.
7. En déduire une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BKD}$.

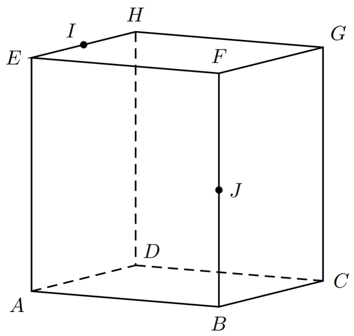
► Exercice 338 — Centres étrangers 2021

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants : $A(2;-1;0)$; $B(3;-1;2)$; $C(0;4;1)$ et $S(0;1;4)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
2. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan ABC en H.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
   (b) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2;2;3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}}{3}$. Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5. (a) Calculer la longueur SA.
   (b) On indique que $SB = \sqrt{17}$. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

► Exercice 339

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ de côtés de longueur 1 représenté ci-dessous. On note I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[FB]$.



L'espace est alors muni du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE})$.

1. Donner, sans les justifier, les coordonnées des points I et J.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?
3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   (a) En utilisant le triangle FIG pour base, montrer que le volume du tétraèdre $FBIG$ vaut $\dfrac{1}{6}$.
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. Montrer que le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9}\,;\dfrac{4}{9}\,;\dfrac{5}{9}\right)$.
   (d) Calculer la longueur FF'. En déduire l'aire du triangle BGI.

39. Corrigés

► Correction 301

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$. Ainsi, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{14}{7\times 4} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ (ou 60°).

► Correction 302

On a ...

- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AD\times AB\times\cos(\widehat{BAD}) = 1\times 1\times 0 = 0$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FG} = AD\times FG\times\cos(0) = 1\times 1\times 1 = 1$
- $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{ED} = EH\times ED\times\cos(\widehat{HED}) = 1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$
- $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{FB} = DH\times FB\times\cos(180°) = 1\times 1\times(-1) = -1$
- $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CE} = CG\times CE\times\cos(\widehat{GCE}) = 1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$. On utilise ici la relation $\cos = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ dans un triangle rectangle.
- $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{ED} = EG\times ED\times\cos(60°) = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2} = 1$

► Correction 303

On aurait $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{20}{18}$. Un cosinus étant toujours entre -1 et 1, c'est impossible.

► Correction 304

$2\vec{u}\cdot(3\vec{u}-2\vec{v}+4\vec{w}) = 6||\vec{u}||^2 - 4\vec{u}\cdot\vec{v} + 8\vec{u}\cdot\vec{w} = 96-12-8 = 76$

$(3\vec{v}-2\vec{u})\cdot(4\vec{w}+\vec{u}) = 12\vec{v}\cdot\vec{w} + 3\vec{v}\cdot\vec{u} - 8\vec{u}\cdot\vec{w} - 2||\vec{u}||^2 = 60+9+8-32 = 45$

► Correction 305

On a alors $\vec{u}\cdot(4\vec{v}-3\vec{w}) = 4\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\vec{u}\cdot\vec{w} = 12-12 = 0$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v}-3\vec{w}$.

► Correction 306

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ce qui implique que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 + 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et donc $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{58}$

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 - 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et $||\vec{u}-\vec{v}|| = \sqrt{58}$

► Correction 307

On a...

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\dfrac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)=-\dfrac{1}{2}(4^2-3^2-2^2)=\dfrac{3}{2}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)=\dfrac{1}{2}(3^2-5^2-2^2)=-10$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2)=\dfrac{1}{4}(12^2-7^2)=\dfrac{95}{4}$

► Correction 308

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-\dfrac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2)=-\dfrac{1}{2}(5^2-3^2-4^2)=-\dfrac{1}{2}(25-9-16)=0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Correction 309

On a alors $BA+BC=AC$. Or, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$. Utilisons alors les formules de polarisation.

On a $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}(||\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}||^2-AB^2-BC^2)=-\dfrac{1}{2}(CA^2-AB^2-BC^2)$. En remplaçant CA par $BA+BC$, on a alors $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{1}{2}((BA+BC)^2-AB^2-BC^2)=-\dfrac{1}{2}(BA^2+2BA\times BC+BC^2-AB^2-BC^2)=BA\times BC$.

Or, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=AB\times BC\times\cos(\widehat{ABC})$. Il en vient que $\cos(\widehat{ABC})=-1$ et que l'angle entre les vecteurs $\widehat{ABC}$ mesure donc 180 degrés. Cela signifie que les points A, B et C sont alignés (et même que le point B se situe entre A et C).

► Correction 310

On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times3+5\times3-9\times2=0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

► Correction 311

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\\x-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, c'est-à-dire $1\times6-4\times(-3)+1\times(x-1)=0$ c'est-à-dire $19+x=0$ d'où $x=-17$

► Correction 312

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\2x-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\6\\x-2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, c'est-à-dire $2\times0-2\times6+(2x-2)\times(x-2)=0$

On a donc $2x^2-6x-8=0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 4. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $x=-1$ ou $x=4$

► Correction 313

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\2-2\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\1-2\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Puisque l'on est dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times0+0\times-1+4\times1=4$.

On a $AB=\sqrt{2^2+0^2+4^2}=\sqrt{20}$ et $BC=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$.

On sait que $4=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Ainsi, $\sqrt{20}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC})=4$ d'où $\cos(\widehat{BAC})=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure environ 51 degrés (utiliser arccos ou $\cos^{-1}$ sur la calculatrice).

► Correction 314

Les points I, J et K ont pour coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ comme coordonnées respectives dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}$. Puisque le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est orthonormé,

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = 0.5\times 0 - 0\times 0.5 + 0.5\times 0.5 = 0.25 = \frac{1}{4}$$

On sait de plus que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = IJ\times IK\times\cos(\widehat{JIK})$. Or,

- $IJ = \sqrt{0.5^2+0^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $IK = \sqrt{0^2+(-0.5)^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $\cos(\widehat{JIK}) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et donc $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$.

Puisque $IJ = IK$, le triangle IJK est isocèle en I. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK}$. Or, $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$ et la somme des angles d'un triangle vaut π radians. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK} = \dfrac{\pi}{3}$. Le triangle IJK est donc équilatéral.

► Correction 315

1. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires. Sont donc a et b des réels tels que $\vec{u} = a\vec{v}+b\vec{w}$.
   On a alors $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\a+b\\a\end{pmatrix}$, ce qui est impossible. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont donc pas coplanaires.
2. On souhaite que $\vec{V}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{V}\cdot\vec{u} = 0$. Or, $\vec{V}\cdot\vec{u} = (\vec{v}+\lambda\vec{u})\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u}+\lambda\vec{u}\cdot\vec{u}$.
   De plus, $\vec{v}\cdot\vec{u} = 1$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = 2$. Ainsi, $\vec{V}\cdot\vec{u} = 0$ si et seulement si $1+2\lambda = 0$ soit $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. On considère donc $\vec{V} = \vec{v}-\dfrac{1}{2}\vec{u}$. Le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1/2\\1\\1/2\end{pmatrix}$.
3. On souhaite que $\vec{W}$ et $\vec{V}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{W}\cdot\vec{V} = 0$. Or, $\vec{W}\cdot\vec{V} = (\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u})\cdot\vec{V} = \vec{w}\cdot\vec{V}+\mu_1\vec{V}\cdot\vec{V}+\mu_2\vec{u}\cdot\vec{V}$.
   De plus, $\vec{w}\cdot\vec{V} = \dfrac{1}{2}$, $\vec{V}\cdot\vec{V} = \dfrac{3}{2}$ et $\vec{u}\cdot\vec{V} = 0$. Ainsi, $\vec{W}\cdot\vec{V} = 0$ si et seulement si $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mu_1 = 0$ soit $\mu_1 = -\dfrac{1}{3}$.
   On souhaite que $\vec{W}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux. On a donc $\vec{W}\cdot\vec{u} = 0$. Or, $\vec{W}\cdot\vec{u} = (\vec{w}+\mu_1\vec{V}+\mu_2\vec{u})\cdot\vec{u} = \vec{w}\cdot\vec{u}+\mu_1\vec{V}\cdot\vec{u}+\mu_2\vec{u}\cdot\vec{u}$.
   De plus, $\vec{w}\cdot\vec{u} = 1$, $\vec{V}\cdot\vec{u} = 0$ et $\vec{u}\cdot\vec{u} = 2$. Ainsi, $\vec{W}\cdot\vec{u} = 0$ si et seulement si $1+2\mu_2 = 0$ soit $\mu_2 = -\dfrac{1}{2}$.
   On considère donc $\vec{W} = \vec{w}-\dfrac{1}{3}\vec{V}-\dfrac{1}{2}\vec{u}$. Le vecteur $\vec{W}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$.
4. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ forment une base orthogonale de l'espace. Pour avoir une base orthonormé, il suffit de diviser chacun de ces vecteurs par sa norme.

▶ Correction 316

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1\times 1 - 3\times 1 + 2\times 1 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Les droites (AB) et (AC) sont donc orthogonales. De plus, ces droites ont le point A en commun, elles sont donc perpendiculaires.

▶ Correction 317

Ce repère est orthonormé.

On a $F(1{,}0{,}1)$, $D(0{,}1{,}0)$, $B(1{,}0{,}0)$, $H(0{,}1{,}1)$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BH} = -1\times(-1) + 1\times 1 - 1\times 1 = 1 \neq 0$. Les droite (DF) et (BH) ne sont pas perpendiculaires.

▶ Correction 318

La droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = 1\times 3 - 1\times 1 - 2\times 2 = 0$. Les droites (AB) et Δ sont orthogonales.

▶ Correction 319

1. Le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_1). Le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_2).
2. On considère le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$.
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_1 = 1\times 1 - 2\times(-1) - 3\times 1 = 0$;
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_2 = 1\times 2 - 2\times 1 - 3\times 0 = 0$.

   $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3. En prenant $t' = 4$ dans l'équation de (d_2), on obtient le point de coordonnées $(3;3;5)$. Le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2)
4. La droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire à la droite (d_2). En effet $\vec{v}$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux et les deux droites ont en commun le point B. On sait de plus que (d_1) et Δ sont orthogonales. Il reste à montrer qu'elles sont sécantes.

   Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 5 - 3t' \end{cases}$ $,t' \in \mathbb{R}$.

   Chercher l'intersection de (d_1) et Δ revient à chercher deux réels t et t' tels que $\begin{pmatrix}2+t\\3-t\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+t'\\3-2t'\\5-3t'\end{pmatrix}$.

   La dernière ligne permet d'exprimer t en fonction de t'. remplaçons t par $5-3t'$ dans la première ligne. On obtient alors $2+5-3t' = 3+t'$ d'où $t' = 1$. Puisque $t = 5-3t'$, on a alors $t = 2$.

   Vérifions : en remplaçant t par 2 dans l'équation de (d_1), on obtient le point de coordonnées $(4;1;;2)$. En replaçant t' par 1 dans l'équation de Δ, on obtient le point de coordonnées $(4;1;2)$. Les droites Δ et (d_1) sont donc sécantes. Puisqu'elles sont orthogonales, elles sont donc perpendiculaires.

   Ainsi, Δ est perpendiculaire à (d_1) et (d_2).

► Correction 320

D'une part, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\4-2\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-4\\1-(-1)\\6-6\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires et $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus, on a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6-3\\1-4\\6-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times3-2\times3+0\times5=0$. L'angle $\widehat{ABD}$ est un angle droit. $ABDC$ est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est donc un rectangle.

► Correction 321

Puisque le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormé, on a donc

- $\vec{v}_1\cdot\vec{u}=1\times2+4\times(-1)+1\times2=0$;
- $\vec{v}_2\cdot\vec{u}=3\times2-1\times1-2\times2=0$.

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$. $\vec{u}$ est normal au plan P.

► Correction 322

On a

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(1-3)+2\times(3-(-2))+1\times(-8-(-2))=0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2-3)+2\times(0-(-2))+1\times(4-(-2))=0$.

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est donc normal au plan (ABC).

► Correction 323

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}2$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont donc pas alignés et forment donc un plan.

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC).

On a alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et donc $x+y+2z=0$. Ainsi, on a $x=-y-2z$.

On a également $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ et donc $-x-2y+2z=0$. En remplaçant x par $-y-2z$, on trouve alors $y+2z-2y+2z=0$ et donc $-y+4z=0$ soit $y=4z$.

Prenons alors $z=1$. On a alors $y=4$ et $x=-4-2=-6$. On peut alors vérifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

► Correction 324

On regarde quels sont les points dont les coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{P}$. Pour le point A, on a $3\times2+2\times(-3)-1+1=0$, le point A appartient au plan $\mathscr{P}$. De même, les points B et C appartiennent à ce plan. En revanche, $3\times1+2\times5-3+1=11\neq0$. Le point D n'appartient donc pas au plan $\mathscr{P}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les point A, B et C ne sont donc pas alignés. Ils définissent bien un plan (ABC) qui n'est autre que le plan $\mathscr{P}$. Or, D n'appartient pas à ce plan, les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires.

► Correction 325

Pour tout réel t, $2(2-2t)-5(1+t)+3(1+3t)-2=4-4t-5-5t+3+9t-2=0$. Tous les points de la droite (d) appartiennent donc au plan P.

► Correction 326

Une équation cartésienne du plan passant par le point $A(2;5;-1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est

$2(x-2)-3(y-5)+(z+1)=0$ c'est-à-dire $2x-3y+z+12=0$.

► Correction 327

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Ainsi,

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times 2+(-1)\times 0+(-1)\times 4=0$;
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 0+(-1)\times(-1)+(-1)\times 1=0$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal eu plan (ABC).

Le plan (ABC) passe par A et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $2(x-(-1))-1(y-2)-1(z-0)$, c'est-à-dire $2x-y-z+4=0$.

Le plan parallèle au plan (ABC) passant par D admet également le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation de ce plan est donc $2(x-5)-(y-3)-(z-0)=0$ c'est-à-dire $2x-y-z-7=0$.

► Correction 328

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}$ sont normaux respectivement aux plans P_1 et P_2. Ces vecteurs sont colinéaires, les plans P_1 et P_2 sont donc parallèles.

► Correction 329

Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$. De plus,

- $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=2(1-2)-(0-(-1))-(-3-0)=-2-1-3=0$;
- $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=2(6-2)-(6-(-1))-(1-0)=8-7-1=0$.

Le vecteur $\vec{u}$ est donc également normal au plan (ABC). Les plans $\mathscr{P}$ et (ABC) sont donc parallèles.

► Correction 330

Supposons qu'il existe un point $M(x;y;z)$ dans $P\cap(d)$. On a alors $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=5-3t \\ 2x-3y-2z+1=0 \end{cases}$.

En remplaçant les x, y et z de la dernière ligne, on obtient. $2(1+t)-3(1+2t)-2(5-3t)+1=0$ c'est-à-dire $t=5$. Vérifions : en remplaçant t par 5 dans l'équation de (d), on obtient le point de coordonnées $(6;11;-10)$. Or, $2\times 6-3\times 11-2\times(-10)+1=0$. Ce point appartient également au plan P.

► Correction 331

Un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$. Un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont donc pas parallèles. On a par ailleurs

- $2x_A+y_A-z_A+3=2\times 1+1-6+3=0$. Le point A appartient à $\mathscr{P}_1$.
- $2x_B+y_B-z_B+3=2\times 2+0-7+3=0$. Le point B appartient à $\mathscr{P}_1$.
- $3x_A+2y_A-z_A+1=3\times 1+2\times 1-6+1=0$. Le point A appartient à $\mathscr{P}_2$.
- $3x_A+2y_A-z_A+1=3\times 2+2\times 0-7+1=0$. Le point B appartient à $\mathscr{P}_2$.

L'intersection de deux plans sécants étant une droite, on a donc $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=(AB)$. Or, les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AB}$ étant $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, une représentation paramétrique de $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ est donc $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=6+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

► Correction 332

On a $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-3\\3\\-2\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v}_1=-3\times 2+3\times 4-2\times 3=0$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{v}_2=-3\times 1+3\times 3-2\times 3=0$. Le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathscr{P}$, il est donc normal à ce plan.

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $-3(x+2)+3(y+2)-2(z+2)=0$ soit $-3x+3y-2z-4=0$.

Par ailleurs, $-3x_H+3y_H-2z_H-4=-3\times 2+3\times 4-2\times 1-4=0$. Le point H appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

Le point H est en réalité le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

► Correction 333

On a $2x_A+4y_A-5z_A+1=2\times 6+4\times 8-5\times(-9)+1=90\neq 0$. A n'appartient donc pas au plan $\mathscr{P}$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.

Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A dirigée par $\vec{n}$ est $\begin{cases} x=6+2t \\ y=8+4t \\ z=-9-5t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

Le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathscr{P}$ n'est autre que l'intersection de la droite (d) et du plan $\mathscr{P}$.

Résolvons donc le système $\begin{cases} x=6+2t \\ y=8+4t \\ z=-9-5t \\ 2x+4y-5z+1=0 \end{cases}$.

La dernière ligne nous donne $2(6+2t)+4(8+4t)-5(-9-5t)+1=0$ soit $12+4t+32+16t+45+25t+1=0$

d'où $45t+90=0$ et donc $t=-2$. Ainsi, on a $\begin{cases} t=-2 \\ x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$. Le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(2;0;1)$.

► **Correction 334**

On a $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. De plus, $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AG}=-1\times1+0\times1+1\times1=0$ et $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AG}=-1\times1+1\times1+0\times1=0$. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs du plan (BDE), il est donc normal au plan (BDE).

Le plan (BDE) admet $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et passe par $B(1,0,0)$. Il admet donc comme équation cartésienne $(x-1)+(y-0)+(z-0)=0$ c'est-à-dire $x+y+z-1=0$.

La droite (AG) passe par $A(0,0,0)$ et est dirigée par $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Cette droite admet donc pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

La droite (AG) passe par G et est orthogonale au plan (BDE). Le point d'intersection de (AG) et (BDE) est donc le projeté orthogonal de G sur (BDE). Un point de (AG) possède des coordonnées de la forme (t,t,t) pour un certain réel t. Si ce point appartient au plan (BDE), on a de plus $t+t+t-1=0$ soit $t=\dfrac{1}{3}$. Le point K, point d'intersection du plan (BDE) et de la droite (AG), a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

► **Correction 335**

D'une part, on a $x_L+3y_L-2z_L+2=4+3\times0-2\times3+2=0$. Le point L appartient donc au plan $\mathscr{P}$.

De plus, on a $\overrightarrow{LM}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ qui est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$. La droite (LM) est donc orthogonale au plan $\mathscr{P}$. L est donc le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$.

► **Correction 336**

1. Les coordonnées du point M sont par conséquent $(1+3t\,;t\,;1-t)$. Le repère considéré est orthonormé. On utilise la formule de la distance :

$$AM=\sqrt{(1+3t-3)^2+(t-5)^2+(1-t-1)^2}=\sqrt{(3t-2)^2+(t-5)^2+(-t)^2}.$$

   Ainsi,

$$AM=\sqrt{9t^2-12t+4+t^2-10t+25+t^2}=\sqrt{11t^2-22t+29}.$$

2. (a) Pour tout réel x, $11x^2-22x+29>0$. En effet, il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $(-22)^2-4\times11\times29=-792<0$. De plus, la fonction $x\mapsto 11x^2-22x+29$ est

dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{22x-22}{2\sqrt{11x^2-22x+29}} = \frac{11x-11}{\sqrt{11x^2-22x+29}}.$$

(b) Pour tout réel x, $\sqrt{11x^2-22x+29} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $11x-11$. De plus, $f(1) = \sqrt{11-22+29} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$3\sqrt{2}$	$\nearrow$	

f admet un minimum en 1. Ce minimum vaut $3\sqrt{2}$.

3. D'après la question 1, la distance entre A et un point M de la droite de paramètre t vaut $\sqrt{11t^2-22t+29}$, c'est-à-dire $f(t)$. Cette distance est minimale lorsque $t=1$, c'est-à-dire pour le point de coordonnées $(4,1,0)$: ce point est donc le projeté orthogonal de A sur la droite (d).

► Correction 337

1. On a $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC}$. Ainsi, le point I a pour coordonnées $(2,2,0)$. Par ailleurs, J est le milieu de $[BF]$, ses coordonnées sont donc $\left(1;0;\frac{1}{2}\right)$.
2. On a $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}1\\2\\-1/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1/2\end{pmatrix}$. Le repère considéré étant orthonormé, on a alors
   - $\overrightarrow{JI}\cdot\vec{n} = 1\times1-2\times2-6\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$;
   - $\overrightarrow{JD}\cdot\vec{n} = 1\times(-1)-2\times1-6\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est ainsi orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJD). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ est normal au plan (IJD).
3. Le plan (IJD) passe par le point $I(2,2,0)$ et admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $1\times(x-2)-2\times(y-2)-6\times(z-0)=0$ soit $x-2y-6z+2=0$.
4. La droite (BH) passe par le point $B(1,0,0)$ et admet pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
5. Le point d'intersection du plan (IJD) et de la droite (BH) doit avoir des coordonnées qui vérifient les deux équations.

Soit (x,y,z,t) quatre réels. On doit avoir $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \\ x-2y-6z+2=0 \end{cases}$.

En utilisant la dernière ligne, on a alors $(1-t)-2t-6t+2=0$ soit $t=\frac{1}{3}$. On trouve alors $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ et $z=\frac{1}{3}$. Réciproquement, on vérifie que le point $K\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ vérifient bien les équations du plan (IJD) et de la droite (BH) .

6. D'une part,

$$\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(0-\frac{2}{3}\right)+\left(0-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(0-\frac{1}{3}\right)\times\left(0-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}.$$

Par ailleurs, $\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}=KB\times KC\times\cos(\widehat{BKD})$. Or,
- $KB=\sqrt{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;
- $KB=\sqrt{\left(0-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2}=1.$

7. Ainsi, $\cos(\widehat{BKD})=\dfrac{\overrightarrow{KB}\cdot\overrightarrow{KD}}{KB\times KD}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

L'angle $\widehat{BKD}$ mesure environ 125°.

▶ **Correction 338**

1. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-2\\-1-(-1)\\2-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-2\\4-(-1)\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$. Puisque le repère est orthonormé, on a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+0\times5+2\times1=0.$$

Ainsi, les droites (AB) et (AC) sont orthogonales. Celles-ci se coupent au point A : ces droites sont donc perpendiculaires et l'angle $\widehat{BAC}$ est donc un angle droit. Le triangle BAC est rectangle en A.

2. (a) On a
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times1+1\times0+(1-)\times2=0$;
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)+1\times5+(-1)\times1=0.$

   Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc normal à ce plan.

   (b) Le plan (ABC) passe par le point A et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur normal. Une équation cartésienne de ce plan est donc $2(x-2)+1(y-(-1))-1(z-0)=0$ soit $2x+y-z-3=0$.

   (c) On a $2x_S+y_S-z_S-3=2\times0+1-4-3=-6\neq0$. Ainsi, le point S n'appartient pas au plan (ABC) car ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de ce plan. Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. (a) La droite (d) passe par le point S et admet le vecteur $\vec{n}$ comme vecteur directeur. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$(d)\quad:\quad\begin{cases} x= & & & 2t \\ y= & 1 & + & t \\ z= & 4 & - & t \end{cases},t\in\mathbb{R}.$$

(b) D'une part, les coordonnées du point H vérifient l'équation du plan (ABC).
En effet, $2\times 2+2-3-3=0$. D'autre part, en prenant $t=1$, on a bien $2t=2$, $1+t=2$ et $4-t=3$. Le point H appartient donc aussi à la droite (d). Il s'agit donc du point d'intersection de (d) et (ABC).
Il est également possible de remplacer x, y et z dans l'équation du plan par $2t$, $1+t$ et $4-t$. On trouve alors $t=1$.

4. Prenons le triangle ABC comme base. Le triangle ABC est rectangle en A. Son aire vaut donc $\dfrac{AB\times AC}{2}$.
Or,
   - $AB=\sqrt{(3-2)^2+(-1-(-1))^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$;
   - $AC=\sqrt{(0-2)^2+(4-(-1))^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+25+1}=\sqrt{30}$.

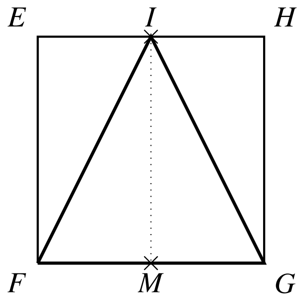
   Ainsi, l'aire du triangle ABC vaut $\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{30}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.
   D'autre part, H est le projeté orthogonal du point S sur la plan (ABC). $[SH]$ est donc la hauteur du tétraèdre issue du point S. Or, $SH=\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.
   Ainsi, le volume du tétraèdre $(SABC)$ vaut $V=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}=5$.
5. (a) On a $SA=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.
   (b) On a $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2-0\\-1-1\\0-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}3-0\\-1-1\\2-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{SA}\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SB}\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}$. Ainsi,
$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=2\times 3-2\times(-2)-4\times(-2)=18$$
   Or, $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=SA\times SB\times\cos\widehat{ASB}$ et donccos$(\widehat{ASB})=\dfrac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}}{SA\times SB}=\dfrac{18}{\sqrt{17}\times 2\sqrt{6}}$.
   Ainsi, $\widehat{ASB}\simeq 27{,}0°$.

► Correction 339

1. Le point I a pour coordonnées $\left(0;\dfrac{1}{2};1\right)$. Le point J a pour coordonnées $\left(1;0;\dfrac{1}{2}\right)$.
2. (a) Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1\end{pmatrix}$. Ainsi,
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG}=1\times 0-2\times 1+2\times 1=0$;
   - $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BI}=1\times(-1)-2\times 1/2+2\times 1=0$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal a deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI). Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est donc normal au plan (BGI).
   (b) Le point $B(1{,}0{,}0)$ appartient au plan (BGI), qui admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.
   Une équation cartésienne de ce plan est donc $(x-1)-2(y-0)+2(z-0)=0$ soit $x-2y+2z-1=0$.
   (c) On note K le milieu du segment $[HJ]$. Ce point a pour coordonnées $\left(\dfrac{0+1}{2};\dfrac{1+0}{2};\dfrac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)$, c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{4}\right)$. Or, $\dfrac{1}{2}-2\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{4}-1=0$. Les coordonnées du point K vérifient l'équation de (BGI). Le point K appartient donc au plan (BGI).

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   (a) Le triangle FIG est isocèle en I. Notons M le milieu de $[FG]$. La hauteur issue de I dans le triangle FIG est donc la droite (IM). Il en vient que l'aire de ce triangle vaut $\dfrac{FG \times IM}{2}$ soit $\dfrac{1\times 1}{2}$.



   Dans le tétraèdre $FIGB$, la hauteur relative au triangle FIG est BF. Ainsi, le volume de ce tétraèdre vaut $\dfrac{\frac{1}{2}\times 1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

   (b) La droite Δ passant par $F(1,0,1)$ et orthogonale au plan (BGI). Elle est donc dirigée par le vecteur $\vec{n}$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \end{array}\right. \quad ,t \in \mathbb{R}.$$

   (c) La droite Δ coupe le plan (BGI) en F'. On résout

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \\ x-2y+2z-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 1+2t \\ 1+t-2t+2(1+2t)-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=-2/9 x=1-2/9 \\ y=4/9 \\ z=5/9 \end{array}\right. .$$

   Le point F' a pour coordonnées $\left(\dfrac{7}{9};\dfrac{4}{9};\dfrac{5}{9}\right)$.

   (d) On a

$$FF' = \sqrt{\left(\frac{7}{9}-1\right)^2+\left(\frac{4}{9}-0\right)^2+\left(\frac{5}{9}-1\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

   Or, en utilisant le triangle BGI comme base, la hauteur du tétraèdre $FGBI$ relative à cette base n'est autre que (FF'). Si on note A_{BGI} l'aire du triangle (BGI), il en vient que le volume du tétraèdre vaut $\dfrac{A_{BGI}\times FF'}{3}$ soit $\dfrac{2A_{BGI}}{9}$. Or, d'après les questions précédentes, ce volume vaut $\dfrac{1}{6}$. Ainsi, $A_{BGI} = \dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{2} = \dfrac{3}{4}$.

XIV

Rappels de probabilités

40. Cours : Rappels de probabilité

Avant de s'engager sur le programme de terminale, faisons quelques rappels de probabilités de l'année de Première.

Dans tout ce chapitre, on note Ω l'univers non vide d'une expérience aléatoire.
On rappelle que pour deux événements A et B de Ω, l'événement $A \cap B$ est l'événement qui est réalisé lorsque « à la fois A et B sont réalisés ».
De plus, l'événement $\bar{A}$, appelé contraire de A, est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

$\mathbb{P}(A)$ désignera la probabilité de l'événement A. On a alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 63 — Probabilité conditionnelle : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

■ **Exemple 157 :** On considère l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. On tire un nombre uniformément au hasard sur Ω. On considère les événements

- A : le nombre est pair ;
- B : le nombre est supérieur ou égal à 3.

Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Par ailleurs, $A \cap B = \{4;6\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Appliquant la définition, on trouve donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

■

Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

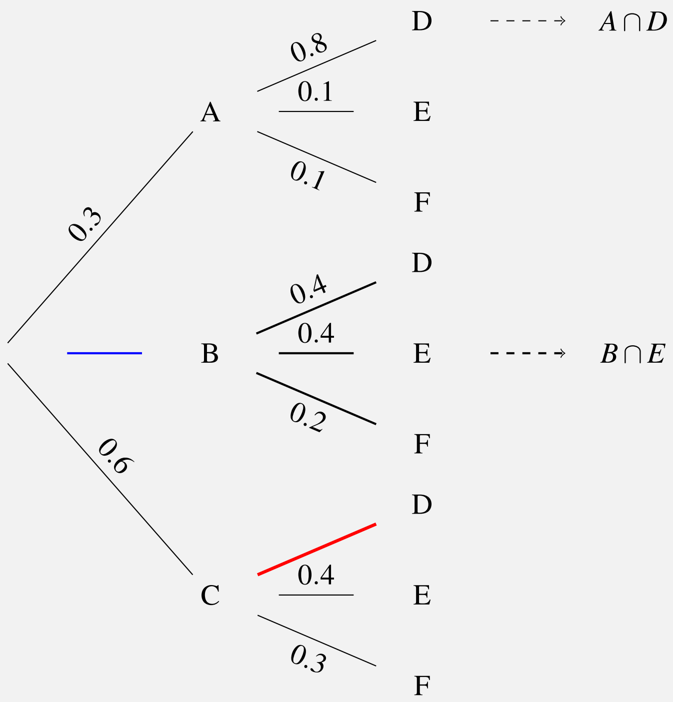
■ **Exemple 158 :** Une entreprise commande à une société de sondage une enquête sur la satisfaction de ses clients. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité qu'un client réponde est de 0,25. Si le client répond à l'appel, la probabilité qu'il réponde au questionnaire de la société est de 0,3. On note R l'événement « la personne répond à l'appel » et Q l'événement « la personne répond au questionnaire ».

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(R) = 0{,}25$ et $\mathbb{P}_R(Q) = 0{,}3$. Ainsi, la probabilité qu'une personne prise au hasard réponde à l'appel puis au questionnaire vaut $\mathbb{P}(R \cap Q) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(Q) = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075$. ■

1.1 Construction d'un arbre pondéré

Propriété 86 — Règle de la somme : Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

■ **Exemple 159 :** On considère une succession de deux expériences aléatoires dont l'arbre pondéré associé est représenté ci-dessous.



- Sur cet arbre, on voit que $\mathbb{P}(A) = 0.3$ et $\mathbb{P}(C) = 0.6$.
- Puisque la somme des probabilités issues d'une branche vaut 1, on a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$, soit $\mathbb{P}(B) = 0.1$.
- La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(D)$ se lit sur la branche qui relie A à D. Ainsi, $\mathbb{P}_A(D) = 0.8$.
- La somme des probabilités issues du nœud C doit valoir 1.
  On a donc $\mathbb{P}_C(D) + \mathbb{P}_C(E) + \mathbb{P}_C(F) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_C(D) = 0.3$.

■

Cette règle traduit le fait que l'on construit l'arbre en découpant l'univers selon des événements disjoints. Ici, $A \cap B = \varnothing$.

Propriété 87 — Règle du produit : Dans un arbre pondéré la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette issue

■ **Exemple 160 :** Pour obtenir l'issue $A \cap D$, on passe par les sommets A puis D.

On a alors $\mathbb{P}(A \cap D) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$. ■

On retrouve la relation $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$.

1.2 Formule des probabilités totales

Définition 64 — Partition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de Ω lorsque

- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont non vides ;
- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux disjoints ;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

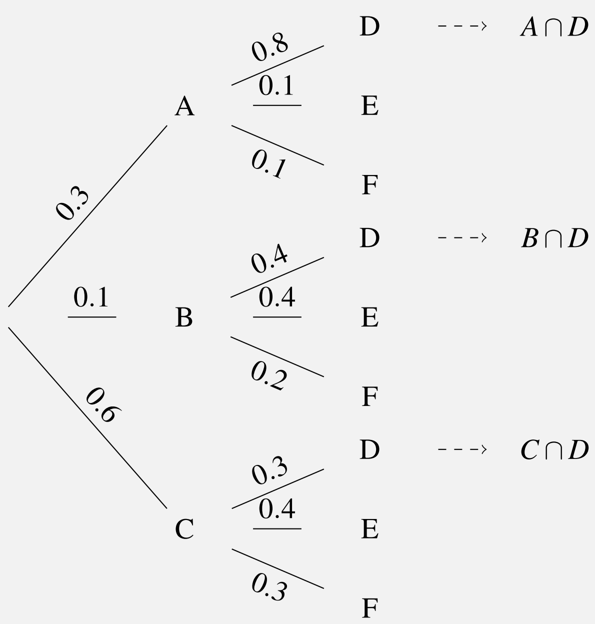
Dans le cadre des probabilités, on parle également de **système complet d'événements**.

■ **Exemple 161 :** On considère $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ ainsi que les événements $A_1 = \{1;3\}$, $A_2 = \{2;4;5;6;7\}$ et $A_3 = \{8\}$. A_1, A_2 et A_3 forment une partition de Ω. ■

Propriété 88 — Formule des probabilités totales : On considère un événement B et une partition A_1, A_2, ..., A_n de l'univers Ω. Alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

■ **Exemple 162 :** On reprend l'exemple de la partie précédente. On souhaite calculer la probabilité $\mathbb{P}(D)$. Pour cela, on regarde l'ensemble des branches qui contiennent l'événement D.



- A, B et C forment une partition de Ω.
- On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$. De plus,
  - $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D) \times \mathbb{P}(A) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$;
  - $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D) \times \mathbb{P}(B) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$;
  - $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$.
- Ainsi, $\mathbb{P}(D) = 0.24 + 0.04 + 0.18 = 0.46$. ■

2 Variable aléatoire réelle

2.1 Variable aléatoire

Définition 65 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les variables aléatoires sont en général notées X.

■ **Exemple 163 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 compris. L'univers de l'expérience aléatoire est donc l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$.
Si le nombre obtenu est 6, on gagne 2 points. Si le nombre est impair, on perd 1 point. Dans les autres cas, on ne gagne ni ne perd aucun point.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés selon le résultat.

- Si on obtient le nombre 1, on perd 1 point.
  On a ainsi $X(1) = -1$.
- Si on obtient le nombre 6, on gagne 2 points.
  On a ainsi $X(6) = 2$.
- On a également $X(2) = 0$, $X(3) = -1$, $X(4) = 0$ et $X(5) = -1$.

■

Univers	Variable aléatoire
1	-1
2	0
3	-1
4	0
5	-1
6	2

Définition 66 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et a un réel.
On note $\{X = a\}$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.
On peut définir de la même manière les événements $\{X < a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $\{X \geqslant a\}$...

■ **Exemple 164 :** On reprend l'exemple précédent.

- L'événement $\{X = -1\}$ correspond aux issues qui font perdre un point, soit les issues 1, 3 et 5.
- L'événement $\{X \geqslant 0\}$ correspond aux issues qui font gagner 0 point ou plus, soit les issues 2, 4 et 6.

■

2.2 Loi d'une variable aléatoire

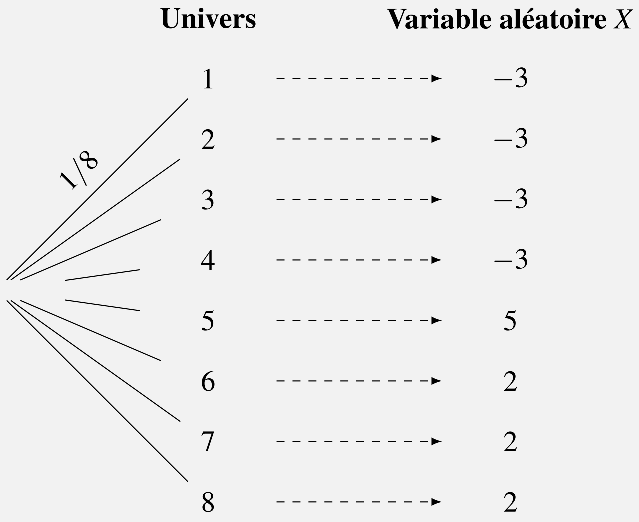
Définition 67 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω.
La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel k, associe la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

On rappelle que **la somme des probabilités doit valoir 1** !

■ **Exemple 165 :** On choisit uniformément au hasard un nombre entier entre 1 et 8 compris.

- Si le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6, on gagne 2 points.
- Si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4, on perd 3 points.
- Si le nombre obtenu est 5, on gagne 5 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés après l'expérience.



X peut donc prendre trois valeurs : -3, 2 ou 5. Pour déterminer la loi de X, il faut donc déterminer $\mathbb{P}(X = -3)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$.

- L'événement $\{X = -3\}$ est composé des issues 1, 2, 3 et 4.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.
- L'événement $\{X = 2\}$ est composé des issues 6, 7 et 8.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{3}{8}$.
- L'événement $\{X = 5\}$ est composé de l'issue 5.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \dfrac{1}{8}$.

On peut résumer la loi de la variable aléatoire X dans un tableau.

k	-3	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

■

2.3 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 68 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par X.
Pour i allant de 1 à n, on note p_i la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$. L'espérance de X, notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Il s'agit en quelque sorte de la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X, pondérées par leurs probabilités. Nous verrons dans un prochain chapitre que le terme de moyenne prendra tout son sens...

■ **Exemple 166 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$$E[X] = \frac{1}{3}\times(-1)+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{4}\times 8 = \frac{8}{3}.$$

« En moyenne », la variable aléatoire X vaut $\frac{8}{3}$. ■

2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 69 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X. La variance X, notée $V(X)$, est la valeur

$$V(X) = p_1(x_1-E[X])^2+p_2(x_2-E[X])^2+\ldots+p_n(x_n-E[X])^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E[X])^2.$$

Cette quantité mesure la dispersion de la variable aléatoire autour de l'espérance.

Remarque : On a en fait $V(X) = E[(X-E[X])^2]$.

■ **Exemple 167 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-3	1	4	9
$\mathbb{P}(X=k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Dans un premier temps, on calcule l'espérance de la variable aléatoire X.

$$E[X] = -3\times 0.6+1\times 0.2+4\times 0.15+9\times 0.05 = -0.55.$$

Pour calculer la variance,

- Pour chaque valeur de la variable aléatoire, on retire l'espérance. On dit que l'on centre la variable aléatoire ;
- On met chaque nombre obtenu au carré ;
- Chaque nombre est multiplié par sa probabilité ;
- On ajoute alors chacun des nombres obtenus.

Dans ce cas,

x_i	-3	1	4	9
$x_i - E[X]$	-2.45	1.55	4.55	9.55
$(x_i - E[X])^2$	6.0025	2.4025	20.7025	91.2025
p_i	0.6	0.2	0.15	0.05
$p_i(x_i - E[X])^2$	3.6015	0.4805	3.105375	4.560125

La variance de X vaut donc

$$V(X) = 3.6015 + 0.4805 + 3.105375 + 4.560125 = 11.7475.$$

■

Propriété 89 — Formule de König-Huygens : Soit X une variable aléatoire. On a alors

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

■ **Exemple 168 :** Reprenons l'exemple précédent. Pour déterminer la loi de X^2, il suffit de mettre les valeurs prises par la variable aléatoire au carré. On a alors

k	9	1	16	81
$\mathbb{P}(X^2 = k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Ainsi, $E[X^2] = 9 \times 0.6 + 1 \times 0.2 + 16 \times 0.15 + 81 \times 0.05 = 12.05$.

On a donc $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 12.05 - (-0.55)^2 = 11.7475$. On retrouve bien la valeur précédente.

■

Définition 70 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X, noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type mesure la "variation moyenne" de la variable aléatoire autour de l'espérance.

■ **Exemple 169 :** Dans l'exemple précédent, l'écart-type était donc $\sigma(X) = \sqrt{11.7475} \simeq 3.42$. ■

41. Exercices

Probabilités conditionnelles

► Exercice 340 — Polynésie 2021

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1% sont déclarés positifs. Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note

- M l'événement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. (a) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

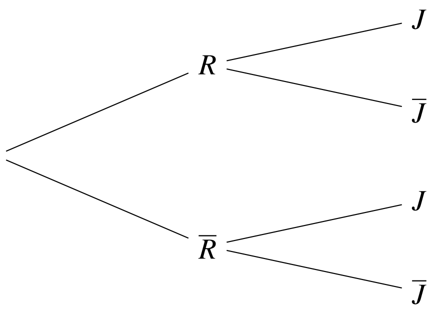
► Exercice 341 — Centres étrangers 2021

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17% de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32% sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

On interroge une personne au hasard et on note :

- R : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun » ;
- J : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré modélisant cette situation.



2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11% de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun. On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

► Exercice 342 — Métropole 2021

Dans une école de statistiques, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur leur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On note

- D l'événement : « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement : « le candidat a été admis à l'école ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'un candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné initialement ?

► Exercice 343

D'année en année, les professeurs doivent rivaliser d'imagination pour inventer des sujets de bac blanc à leurs élèves. Certains sujets comportent des exercices sur les suites et d'autres pas. On s'intéresse à la probabilité de présence d'un exercice sur les suites pour une année donnée et on fait les hypothèses suivantes :

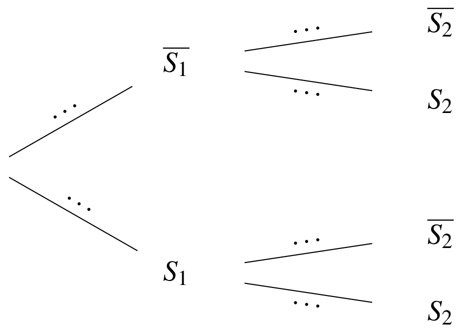
- Le bac blanc de l'année 2021 comporte un exercice sur les suites ;
- Si le bac blanc d'une année comporte un exercice sur les suites, la probabilité que celui de l'année suivante en ait également un est de 0,7 ;
- Si le bac blanc de d'une année ne comporte pas d'exercice sur les suites, la probabilité que celui de l'année suivante en ait un est de 0,9.

Pour tout entier naturel n, on note S_n l'événement "le bac blanc de l'année 2021 + n comporte un exercice sur les suites" et on note $p_n = \mathbb{P}(S_n)$. D'après l'énoncé, on a alors $p_0 = \mathbb{P}(S_0) = 1$. **Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaires arrondis à 10^{-3} près.**

Partie A : D'ici à 2023...

On s'intéresse dans un premier temps aux sujets qui tomberont en 2022 et 2023.

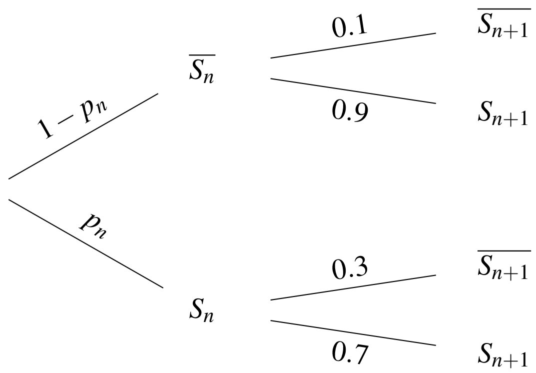
1. A l'aide des informations de l'énoncé, recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant.



2. Que représente p_2 ? Montrer que $p_2 = 0{,}76$.
3. Des élèves venus du futur affirment que le bac blanc de l'an 2023 comportait bien un exercice sur les suites. Quelle est la probabilité que celui de l'an 2022 en comportait un également ?

Partie B : Comportement général

On rappelle que pour tout entier n, $p_n = \mathbb{P}(S_n)$ désigne la probabilité que le sujet comporte un exercice sur les suites l'année 2021 + n et que $p_0 = 1$. On peut alors construire l'arbre de probabilités suivant.



1. Montrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = -0{,}2p_n + 0{,}9$.
2. Pour tout entier naturel n, on note alors $u_n = p_n - 0{,}75$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n, $p_n = 0.75 + 0.25 \times (-0.2)^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (p_n) en $+\infty$ et interpréter cette limite dans le cadre de l'exercice.

► Exercice 344

Une étude a montré que, pour la bonne santé mentale des lycéens, il était nécessaire que des frites figurent au menu de la cantine au moins 2 semaines sur 3 en moyenne. Dans les cuisines d'un certain lycée, le menu est élaboré de la manière suivante :

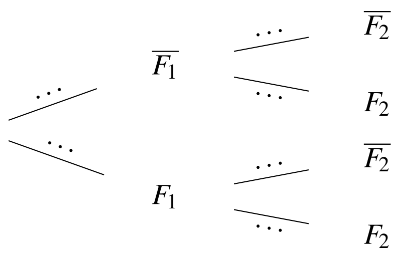
- La probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la première semaine est de $\frac{4}{5}$.
- Si des frites sont au menu d'une semaine, la probabilité qu'il y en ait la suivante vaut $\frac{2}{5}$.
- S'il n'y a pas de frites au menu, la probabilité qu'il y en ait la semaine suivante est de $\frac{4}{5}$.
- Ces affirmations restent vraies même s'il y a des vacances entre les semaines concernées, peu importe l'année étudiée.

Pour tout entier naturel non nul n, on note F_n l'événement « il y a des frites à la cantine lors de la semaine n » et on note $p_n = \mathbb{P}(F_n)$. On aura ainsi que $p_1 = \frac{4}{5}$.

Partie A : Sur deux semaines...

On s'intéresse dans un premier temps aux deux premières semaines d'ouvertures de la cantine.

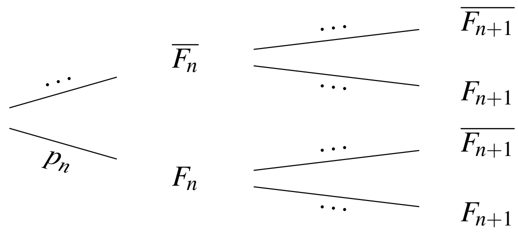
1. A l'aide des informations de l'énoncé, recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2. Que représente p_2 ? Montrer que $p_2 = \dfrac{12}{25}$.
3. Le menu de la deuxième semaine a fuité et des frites figurent sur ce menu. Quelle est la probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la première semaine ? On exprimera cette probabilité sous la forme d'une fraction irréductible.



Partie B : Comportement général

On rappelle que pour tout entier non nul n, $p_n = \mathbb{P}(F_n)$ désigne la probabilité des frites soient au menu de la cantine lors de la semaine n et que $p_1 = 0{,}8$.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant, traduisant la situation.



2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} = -\dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{5}$.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on note alors $u_n = p_n - \dfrac{4}{7}$.
   (a) Montrer la suite (u_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) Montrer alors que pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{8}{35} \times \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.
4. Déterminer la limite de la suite (p_n) en $+\infty$. La bonne santé mentale des élèves de cet établissement est-elle assurée ?

Notion de variable aléatoire

► Exercice 345
On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans un tableau.

k	-2	0	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.3	p	0.2

1. Déterminer la valeur du réel p pour que l'on ait effectivement une loi de probabilité.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$

► Exercice 346
Dans une urne, on place 7 boules vertes, 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule au hasard : si la boule est bleue, on gagne 3 euros. Si elle est rouge, on gagne 1 euro, sinon, on perd un euro. On note X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce tirage. Donner la loi de probabilité de la variable X.

► Exercice 347
On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on regarde le résultat à chaque fois.

1. Construire un arbre de probabilités de cette expérience. Combien a-t-on d'issues ?
2. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de Pile. Donner la loi de probabilité de X.
3. Reprendre ces deux questions si la pièce est truquée et que la probabilité d'obtenir Pile est de 0,6.

► Exercice 348
On lance deux dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

► Exercice 349
Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X, dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-3	1	2	5
$\mathbb{P}(X=k)$	0.4	0.2	0.1	0.2

► Exercice 350
Paul se rend à la gare en voiture. On note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous. Déterminer l'espérance de la variable T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\mathbb{P}(T=k)$	0.14	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07

► Exercice 351
On place 1 boule blanche et n boules noires dans une urne. On tire au hasard une boule dans cette urne. Si elle est blanche, on gagne 10 euros. Sinon, on perd 1 euro. On note X la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur, positif ou négatif.

1. Construire le tableau résumant la loi de probabilité de X en fonction de n.
2. Exprimer $E[X]$ en fonction de n.
3. On dit que le jeu est équitable si $E[X]=0$. Pour quelle valeur de n le jeu est-il équitable ?

► Exercice 352
On considère un entier naturel n strictement positif. On choisit un nombre uniformément au hasard entre 1 et n inclus et note X le résultat obtenu. Calculer $E[X]$.

► Exercice 353
Une urne contient n jetons ($n \geqslant 9$) indiscernables au toucher, dont sept sont noirs et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise deux jetons de cette urne et on note X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes obtenues lors du tirage. Déterminer la valeur de n pour laquelle l'espérance de X est maximale.

Exercices de synthèse

► Exercice 354 — Centres étrangers 2022
Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.
   (a) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Calculer la probabilité de perdre 9 euros sur une partie.
2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

(a) Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
(b) Résoudre l'inéquation pour x réel : $-x^2+30x-81>0$
(c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
(d) Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

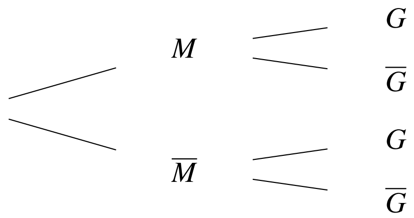
► Exercice 355 — Métropole 2022

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte. Une étude a montré que 70% des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60% visitent la grotte. Cette étude montre aussi que 6% des clients de l'hôtel ne font aucune visite. On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée » ;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire de M, $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E. Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p(M\cap G)=0.06$.

1. (a) Vérifier que $p_{\overline{M}}(\overline{G})=0.2$, où $p_{\overline{M}}(\overline{G})$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.
   (b) L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation. Compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



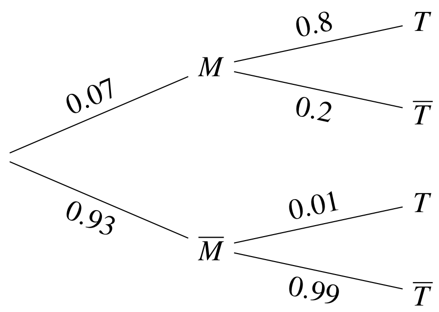
   (c) Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?
   (d) Montrer que $p(G)=0{,}66$.
2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?
3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :
   - visite du musée : 12 euros ;
   - visite de la grotte : 5 euros.

   On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.
   (a) Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de T.
   (c) Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour. Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.
4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros. Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

42. Corrigés

► **Correction 340**

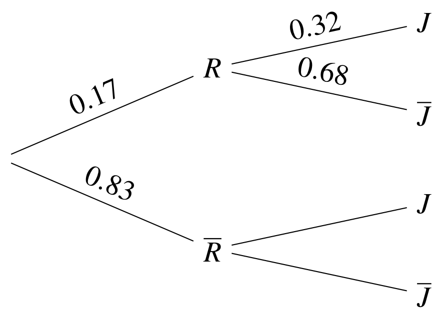
1. On construit l'arbre pondéré suivant.



2. (a) La probabilité pour que la personne soit infectée et que son test soit positif est $\mathbb{P}(M \cap T)$. Cette probabilité vaut $\mathbb{P}(M) \times \mathbb{P}_M(T)$ soit 0.07×0.8 soit 0.056.
   (b) $(M;\overline{M})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales
$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(M \cap T) + \mathbb{P}(\overline{M} \cap T) = 0.056 + 0.93 \times 0.01 = 0.0653.$$
3. On a $\mathbb{P}_T(M) = \dfrac{\mathbb{P}(M \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \dfrac{0.056}{0.0653} \simeq 0.86$. La probabilité qu'une personne dont le test est positif soit infectée est d'environ 0,86.

► **Correction 341**

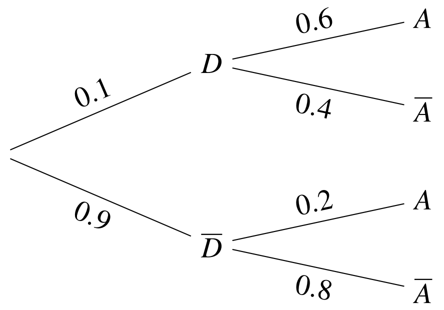
1. On complète l'arbre pondéré modélisant cette situation.



2. On a $\mathbb{P}(R \cap J) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(J) = 0.17 \times 0.32 = 0.0544$.
3. L'énoncé dit que $P(J) = 11$. Or, $(R,\overline{R})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}(R \cap J) + \mathbb{P}(\overline{R} \cap J)$. Ainsi, $0.11 = 0.0544 + \mathbb{P}(\overline{R} \cap J)$ d'où $\mathbb{P}(\overline{R} \cap J) = 0.11 - 0.0544 = 0.0556$. soit environ 0.056 à 10^{-3} près.
4. On a $\mathbb{P}_{\overline{R}}(J) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{R} \cap J)}{\mathbb{P}(\overline{R}} = \dfrac{0.056}{0.83} \simeq 0.068$.

► **Correction 342**

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.



2. On a $\mathbb{P}(D \cap A) = \mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}_D(A) = 0.1 \times 0.6 = 0.06$.
3. $(D, \overline{D})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

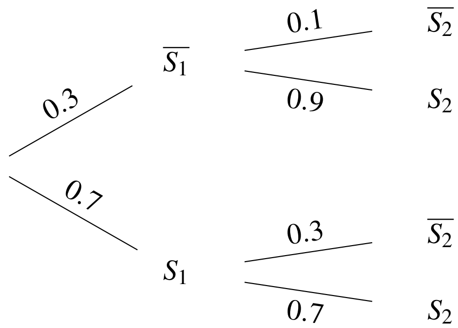
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(\overline{D} \cap A) = 0.06 + 0.9 \times 0.2 = 0.24.$$

4. On a $\mathbb{P}_A(\overline{D}) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap \overline{D})}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.9 \times 0.2}{0.24} = 0.75$. Il y a 75% de chances que cette élève n'ait pas été admis sur dossier.

► **Correction 343**

Partie A : D'ici à 2023...

1. A l'aide des informations de l'énoncé, on complète l'arbre de probabilité suivant.



2. p_2 représente la probabilité d'avoir un exercice sur les suites en 2023. $(S_1, \overline{S_1})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$p_2 = \mathbb{P}(S_2) = \mathbb{P}(S_1 \cap S_2) + \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap S_2) = 0.7 \times 0.7 + 0.3 \times 0.9 = 0.49 + 0.27 = 0.76.$$

3. On cherche $\mathbb{P}_{S_2}(S_1)$. $\mathbb{P}_{S_2}(S_1) = \dfrac{\mathbb{P}(S_2 \cap S_1)}{\mathbb{P}(S_2)} = \dfrac{0.7 \times 0.7}{0.76} \simeq 0.644$. La probabilité que celui de l'an 2022 comportait un exercice sur les suites est de 0,644 environ.

Partie B : Comportement général

1. $(S_n, \overline{S_n})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc $p_{n+1} = \mathbb{P}(S_n \cap S_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{S_n} \cap S_{n+1}) = p_n \times 0.7 + (1 - p_n) \times 0.9 = -0.2p_n + 0.9$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0.75 = -0.2p_n + 0.9 - 0.75 = -0.2(u_n + 0.75) + 0.15 = -0.2u_n$.
   (b) La suite (u_n) est géométrique de raison -0.2 et de premier terme $u_0 = p_0 - 0.75 = 0.25$.

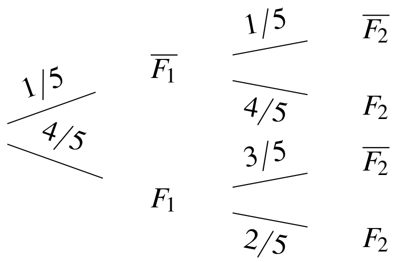
(c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = 0.25 \times (-0.2)^n$ et $p_n = u_n + 0.75 = 0.75 + 0.25 \times (-0.2)^n$.

3. Puisque $-1 < -0.2 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0.2)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0.75$. À terme, il y a 75% de chance que le bac blanc comporte un exercice sur les suites.

► **Correction 344**

Partie A : Sur deux semaines...

1. On a complété l'arbre de probabilités ci-dessous.



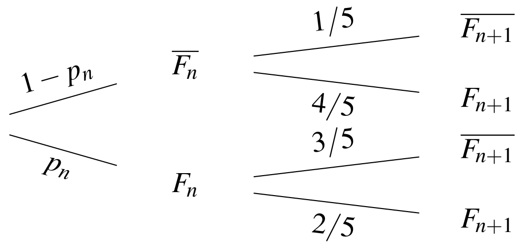
2. p_2 est la probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la deuxième semaine. $(F_1;\overline{F_1})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$p_2 = \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \times \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2) \times \mathbb{P}(\overline{F_1}) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}.$$

3. On a $\mathbb{P}_{F_2}(F_1) = \dfrac{\mathbb{P}(F_2 \cap F_1)}{\mathbb{P}(F_2)} = \dfrac{\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}}{\frac{12}{25}} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{3}{4}$. La probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la première semaine est de $\dfrac{3}{4}$.

Partie B : Comportement général

1. L'arbre pondéré suivant traduit la situation.



2. $(F_n;\overline{F_n})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$p_{n+1} = \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) \times \mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \times \mathbb{P}(\overline{F_n}) = p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}p_n + \frac{4}{5}.$$

3. Pour tout entier naturel non nul n, on note alors $u_n = p_n - \dfrac{4}{7}$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{7} = -\frac{2}{5}p_n + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} = -\frac{2}{5}\left(u_n + \frac{4}{7}\right) + \frac{8}{35} = -\frac{2}{5}u_n.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $-\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{7} = \dfrac{8}{35}$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = \dfrac{8}{35} \times \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ et $p_n = u_n + \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7} + \dfrac{8}{35} \times \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.

4. Puisque $-1 < -\dfrac{2}{5} < 1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{4}{7}$. Or, $\dfrac{4}{7} < \dfrac{2}{3}$. La bonne santé mentale des élèves de cet établissement n'est donc pas assurée.

► Correction 345

On doit avoir $0.1 + 0.3 + p + 0.2 = 1$ et donc $p = 0.4$.

On a $\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 3) = 0.1 + 0.3 + 0.4 = 0.8$. On aurait également pu passer par l'événement contraire.

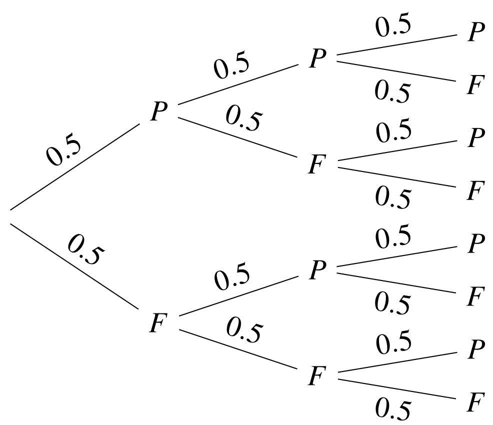
► Correction 346

La loi de X est résumée dans le tableau suivant.

k	-1	1	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\dfrac{7}{12}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{6}$

► Correction 347

On peut modéliser cette expérience par l'arbre suivant, on a alors 8 issues : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF



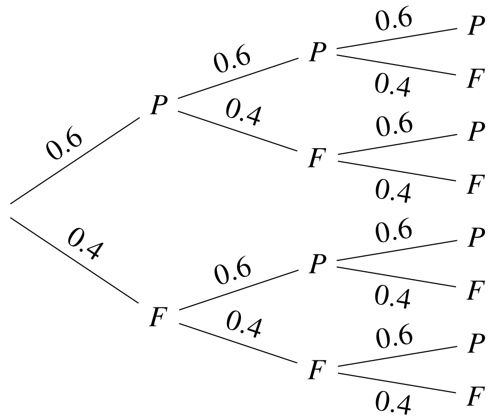
Le tableau suivant donne la probabilité de chaque issue ainsi que le nombre de piles dans cette issue.

Issue	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
Nb piles	3	2	2	1	2	1	1	0
Probabilité	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125

On peut alors en déduire le tableau qui résume la loi de X en sommant les probabilités des issues qui compte le même nombre de piles.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	0.125	0.375	0.375	0.125

On peut alors refaire le même travail lorsque la probabilité d'obtenir Pile vaut 0,6.



Le tableau suivant donne la probabilité de chaque issue ainsi que le nombre de piles dans cette issue (il suffit de multiplier les probabilités rencontrées sur chaque branche).

Issue	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
Nb piles	3	2	2	1	2	1	1	0
Probabilité	0.216	0.144	0.144	0.096	0.144	0.096	0.096	0.064

On peut alors en déduire le tableau qui résume la loi de X en sommant les probabilités des issues qui compte le même nombre de piles.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	0.064	0.3288	0.432	0.216

► Correction 348

La loi de la variable aléatoire X peut être résumée dans le tableau ci-dessous.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

► Correction 349

L'espérance de X vaut $-3\times 0.4+1\times 0.2+2\times 0.1+5\times 0.2=0.2$. Sa variance vaut

$$V(X)=0.4\times(-3-0.2)^2+0.2\times(1-0.2)^2+0.1\times(2-0.2)^2+0.2\times(5-0.2)^2=9.156$$

L'écart-type vaut alors $\sigma(X)=\sqrt{9.156}\simeq 3.026$.

► Correction 350

On a $E[T]=0.14\times 10+0.13\times 11+0.13\times 12+0.12\times 13+0.12\times 14+0.11\times 15+0.1\times 16+0.08\times 17+0.07\times 18=13.5$. Paul met en moyenne 13 minutes et 30 secondes pour se rendre à la gare.

► Correction 351

La loi de la variable aléatoire X peut être résumée dans le tableau suivant.

k	-1	10
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{n+1}$

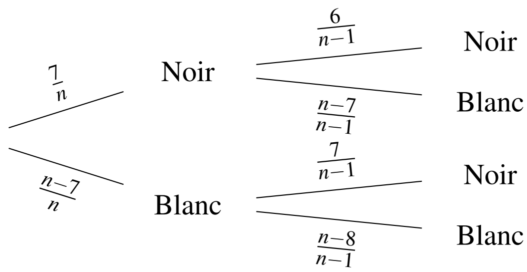
L'espérance de X vaut alors $-\dfrac{n}{n+1}+10\times\dfrac{1}{n+1}$ soit $\dfrac{10-n}{n+1}$. Le jeu est équitable lorsque $n=10$.

► Correction 352
Les issues sont 1, 2, 3, ..., n.

Chaque issue a une probabilité $\dfrac{1}{n}$. L'espérance de X vaut donc $\dfrac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)$.

Or, $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, $E(X)=\dfrac{1}{n}\times\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n+1}{2}$.

► Correction 353
L'urne contient 7 jetons noirs et $n-7$ jetons blancs. L'arbre suivant permet de modéliser la situation.



La variable aléatoire peut prendre les valeurs 1 (deux jetons noirs ou deux jetons blancs) et 2 (un jeton noir et un jeton blanc). On a par ailleurs,

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{n-7}{n}\times\frac{n-8}{n-1}+\frac{7}{n}\times\frac{6}{n-1}=\frac{(n-7)(n-8)+42}{n(n-1)}=\frac{n^2-15n+98}{n^2-n}.$$

Par ailleurs, on a

$$\mathbb{P}(X=2)=1-\mathbb{P}(X=1)=1-\frac{n^2-15n+98}{n^2-n}=\frac{14n-98}{n^2-n}$$

Finalement,

$$E(X)=1\times\mathbb{P}(X=1)+2\times\mathbb{P}(X=2)=\frac{n^2-15n+98}{n^2-n}+2\times\frac{14n-98}{n^2-n}=\frac{n^2+13n-98}{n^2-n}$$

On définit alors la fonction f pour tout réel $x\geqslant 9$ par $f(x)=\dfrac{x^2+13x-98}{x^2-x}$.

La fonction f est dérivable sur $[9;+\infty[$ et pour tout réel $x\geqslant 9$, on a

$$f'(x)=\frac{(2x+13)(x^2-x)-(x^2+13x-98)(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{2x^3-2x^2+13x^2-13x-2x^3+x^2-26x^2+13x+196x-98}{(x^2-x)^2}$$

$$=\frac{-14x^2+196x-98}{(x^2-x)^2}=\frac{-14(x^2-14x+7)}{(x^2-x)^2}.$$

Puisque $-14 < 0$ et que pour tout réel $x \geqslant 9$, $(x^2-x)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe opposé à de $x^2-14x+7$.

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont $7-\sqrt{42}$ et $7+\sqrt{42}$. On peut alors construire le tableau de signes de $f'(x)$.

x	9		$7+\sqrt{42}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

La fonction f atteint donc son maximum en $7+\sqrt{42}$ soit environ 13,48.

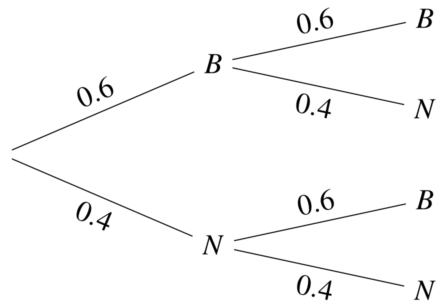
Or, nous recherchons un entier. On teste alors les valeurs $n=13$ et $n=14$ et on calcule l'espérance dans chacun des cas.

- Si $n=13$, on a $E[X]=\dfrac{20}{13}$.
- Si $n=14$, on a $E[X]=\dfrac{20}{13}$.

L'espérance de X est donc maximale si l'on place 6 ou 7 jetons dans l'urne.

► **Correction 354**

1. (a) On modélise la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant



   (b) La probabilité de perdre 9 euros sur une partie correspond au fait de tirer 2 jetons blancs. Ceci arrive avec une probabilité de 0.6×0.6 soit 0.36.
2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
   (a) Il y a alors 3 jetons blancs, N jetons noirs et donc $N+3$ jetons au total. La probabilité de tirer deux jetons blancs vaut $\dfrac{9}{(N+3)^2}$.

   La probabilité de tirer deux jetons noirs vaut $\dfrac{N^2}{(N+3)^2}$. La probabilité de tirer deux jetons de couleurs différentes vaut $\dfrac{6N}{(N+3)^2}$: on tire blanc puis noir ou noir puis blanc : la première possibilité à une probabilité de $\dfrac{3}{N+3}\times\dfrac{N}{N+3}$ et la deuxième a une probabilité de $\dfrac{N}{N+3}\times\dfrac{3}{N+3}$.
   On peut alors résumer la loi de X sous la forme d'un tableau.

k	-9	-1	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{9}{(N+3)^2}$	$\dfrac{N^2}{(N+3)^2}$	$\dfrac{6N}{(N+3)^2}$

(b) Le polynôme $-x^2+30x-81>0$ possède deux racines qui sont 3 et 27. Le coefficient dominant de ce polynôme est négatif, ainsi, $-x^2+30x-81>0$ si et seulement si $x\in]3;27[$.

(c) On a $E(X) = -9\times\dfrac{9}{(N+3)^2} - 1\times\dfrac{N^2}{(N+3)^2} + 5\times\dfrac{6N}{(N+3)^2} = \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$. Cette quantité est du signe de $-N^2+30N-81$, qui est strictement positif si et seulement si $3<N<27$. N étant un entier, le jeu est favorable au joueur si le jeu présente entre 4 et 26 boules noirs (4 et 26 inclus).

(d) On considère la fonction $f : x\mapsto\dfrac{-x^2+30x-81}{(x+3)^2}$, définie sur $[0;+\infty[$. f est dérivable sur cet intervalle et, pour tout réel $x\geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{(-2x+30)(x+3)^2-2(x+3)(-x^2+30x+81)}{((x+3)^2)^2} = \frac{-2x^2-6x+30x+90+2x^2-60x+162}{(x+3)^4}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-36x+252}{(x+3)^4}$. $f'(x)$ est du signe de $-36x+252$.

Or, $-36x+252>0$ si et seulement si $x<7$. Ainsi, f est croissante sur $[0;7]$ puis décroissante sur $[7;+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 7. L'espérance de gain du joueur est donc maximal lorsqu'il y a 7 boules noires dans l'urne.

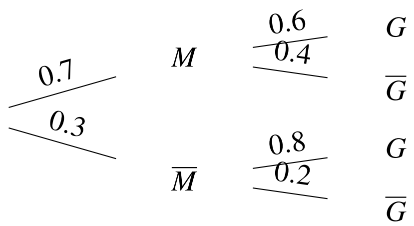
► **Correction 355**

1. (a) On a $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = \dfrac{p(\overline{M}\cap\overline{G})}{p(\overline{M})}$. Or, 6% des clients ne font aucune visite. Ainsi, $p(\overline{M}\cap\overline{G}) = 0.06$.

De plus, 70% des clients visitent le musée. Ainsi, $p(M)=0.7$ et $p(\overline{M}) = 1-0.7 = 0.3$.

Finalement, $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = \dfrac{0.06}{0.3} = 0.2$.

(b) L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation.



(c) On a $p(\overline{M}\cap G) = p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(G) = 0.3\times 0.8 = 0.24$.

(d) $(M,\overline{M})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $p(G) = p(\overline{M}\cap G)+p(M\cap G) = 0.24+0.7\times 0.6 = 0.66$.

2. On a $p_G(M) = \dfrac{p(G\cap M)}{p(G)} = \dfrac{0.42}{0.66}\simeq 0.64>0.5$. L'affirmation du responsable de l'hôtel est exacte.

3. (a) La loi de probabilité de T est la suivante.

Événement	$M\cap G$	$\overline{M}\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
Dépense	17	5	12	0
$\mathbb{P}(X=k)$	0.42	0.24	0.28	0.06

(b) On a $E(T) = 17\times 0.42+5\times 0.24+12\times 0.28+0\times 0.06 = 11.7$.

(c) Chaque visiteur dépense en moyenne 11.7 euros. Il faut donc que le nombres x de visiteurs doit tel que $11.7x\geqslant 700$, soit $x\geqslant\dfrac{700}{11.7}\simeq 59.8$. Il faut donc atteindre au moins 60 visiteurs.

4. Notons x le prix de la visite de la grotte. La loi de T est alors la suivante.

Événement	$M \cap G$	$\overline{M} \cap G$	$M \cap \overline{G}$	$\overline{M} \cap \overline{G}$
Dépense	$12+x$	x	12	0
$\mathbb{P}(X=k)$	0.42	0.24	0.28	0.06

   Son espérance vaut alors $E(T) = (12+x)\times 0.42 + x \times 0.24 + 12 \times 0.28 + 0 \times 0.06 = 0.66x + 8.4$. Or, $8.4x + 0.66 \geqslant 15$ si et seulement si $x \geqslant 10$. Le prix de la visite de la grotte doit être fixée à 10 euros.

XV

Combinatoire et dénombrement

43. Cours : Combinatoire et dénombrement

1 Cardinal d'ensembles

1.1 Union d'ensembles

Définition 71 : Un **ensemble** A est une collection d'objets distincts que l'on appelle ses éléments.

- On dit qu'un objet x appartient à A si x est un élément de A. On note $x \in A$.
- On dit qu'un ensemble B est inclus dans A si tout élément de B est aussi un élément de A.
  On note $B \subset A$.

■ **Exemple 170 :** On considère l'ensemble $A = \{1;2;7;9;44\}$. On a $1 \in A$ mais $3 \notin A$.

L'ensemble $B = \{2;9\}$ est inclus dans A : on a $B \subset A$.

En revanche, l'ensemble $C = \{1;2;4;7\}$ n'est pas inclus dans A puisque 4 est un élément de l'ensemble C mais pas de l'ensemble A.

Par ailleurs, il ne faut pas confondre 2 et $\{2\}$: 2 désigne l'élément alors que $\{2\}$ désigne l'ensemble qui contient un seul élément, 2. On a ainsi $2 \in A$ et $\{2\} \subset A$. ■

Définition 72 : Soit A un ensemble ayant un nombre fini d'éléments.

On appelle **Cardinal** de A, noté $\text{Card}(A)$, $\sharp A$ ou $|A|$ le nombre d'éléments de A.

■ **Exemple 171 :** Le cardinal de l'ensemble $A = \{1;3;\pi;5;\sqrt{2}\}$ est 5. ■

Définition 73 : Soit A et B deux ensembles.

- L'**union** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient tous les éléments qui sont au moins dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B.
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B.
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun, càd $A \cap B = \varnothing$.

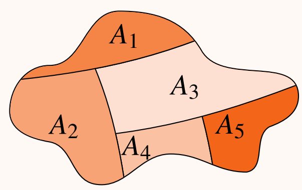
■ **Exemple 172 :** On considère les ensemble $A = \{1;3;4;5;8\}$ et $B = \{1;2;4;6;7\}$.

Alors $A \cup B = \{1;2;4;5;6;7;8\}$ et $A \cap B = \{1;4\}$.

En particulier, les ensembles A et B ne sont pas disjoints. ■

Définition 74 :

Soit Ω un ensemble et A_1, A_2, ..., A_n des sous-ensembles de Ω.
On dit que les ensembles A_1, ..., A_n forment une **partition** de Ω si ces ensembles sont deux à deux disjoints et si $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.



Propriété 90 : Soit n un entier naturel non nul et A_1, A_2, ..., A_n des ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \ldots + \text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(A_1)$$

Une approche possible du dénombrement est d'établir une disjonction de cas pour découper le problème que l'on étudie en d'autres problèmes plus petits que l'on sait dénombrer. Ceci rappelle naturellement la **formule des probabilités totales**.

■ **Exemple 173 :** Un tournoi de mathématiques est organisé entre 256 joueurs. A chaque manche du tournoi, les participants sont répartis en groupes de 4 candidats et chaque groupe se voit alors attribuer une épreuve à l'issue de laquelle un seul candidat parmi les 4 du groupe pourra se qualifier. A la fin de ce tournoi, il n'y a qu'un seul vainqueur. Combien d'épreuves auront lieu au total ?

- Notons E_1 les épreuves de la première manche. Puisqu'il y a 256 candidats répartis en groupe de 4, il y aura $\frac{256}{4}$ soit 64 épreuves, à l'issue desquelles il restera 64 participants. On a $\text{Card}(E_1) = 64$.
- Notons E_2 les épreuves de la deuxième manche. Puisqu'il reste 64 candidats répartis en groupe de 4, il y aura $\frac{64}{4}$ soit 16 épreuves, à l'issue desquelles il restera donc 16 participants. On a $\text{Card}(E_2) = 16$.
- De même, si l'on note E_3 et E_4 le nombre d'épreuves aux troisièmes et quatrièmes manches, on a $\text{Card}(E_3) = 4$ et $\text{Card}(E_4) = 1$.

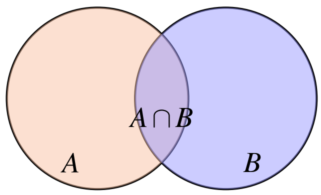
Les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont disjoints : il n'est pas possible qu'une épreuve se déroule sur deux manches différentes. Par ailleurs, l'union de ces ensembles constitue l'ensemble de toutes les épreuves. Ainsi, le cardinal de l'ensemble de toutes les épreuves de la compétition est égal à la somme des cardinaux de ces 4 ensembles. Il y a donc $64+16+4+1$ soit 85 épreuves dans cette compétition. ■

Tout ce raisonnement peut vous sembler inutilement compliqué pour une situation aussi simpliste que celle-là, mais il faut parfois savoir préciser à outrance les objets et les ensembles que l'on manipule pour être certains que les outils mathématiques que nous utilisons sont les bons.

Propriété 91 — Formule du crible : Soit A et B des ensembles finis

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Si l'on compte le nombre d'éléments de A et que l'on ajoute le nombre d'éléments de B, certains éléments ont alors été compté deux fois : ceux communs à A et B (c'est-à-dire les éléments de $A \cap B$).
En retirant le nombre d'éléments de cette intersection à notre compte, on obtient alors le nombre d'éléments de l'union.



Encore une fois, la liaison est à faire avec les probabilités et la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

■ **Exemple 174 :** Pour accompagner leurs frites à la cantine, 150 élèves choisissent leur sauce entre ketchup et mayonnaise (éventuellement les deux). On suppose que tous les élèves ont pris au moins une sauce. Par ailleurs, 92 élèves ont pris du ketchup et 97 ont pris de la mayonnaise. Combien ont pris les deux sauces ?

Notons K l'ensemble des élèves ayant pris du ketchup et M l'ensemble des élèves ayant pris de la mayonnaise. On a alors $\text{Card}(K) = 92$ et $\text{Card}(M) = 97$. De plus, chaque élève ayant pris au moins une sauce, on a alors $\text{Card}(K \cup M) = 150$. Or, $\text{Card}(K \cup M) = \text{Card}(K) + \text{Card}(M) - \text{Card}(K \cap M)$.
Ainsi, $\text{Card}(K \cap M) = 97 + 92 - 150 = 49$. 49 élèves ont pris à la fois du ketchup et de la mayonnaise. ■

1.2 Produit cartésien

Définition 75 : Soit A et B deux ensembles.

- On appelle **produit cartésien** de A et B, noté $A \times B$ (A "croix" B), l'ensemble composé des couples $(a;b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
- Le produit cartésien $A \times A$ est également noté A^2.

■ **Exemple 175 :** On considère les ensembles $A = \{2;5;9\}$; et $B = \{3;5\}$.

- Les éléments de $A \times B$ sont $(2;3)$, $(2;5)$, $(5;3)$, $(5;5)$, $(9;3)$ et $(9;5)$.
- Les éléments de $B \times A$ sont $(3:2)$, $(3;5)$, $(3;9)$, $(5;2)$, $(5;5)$, $(5;9)$.
- Les éléments de B^2 sont $(3;3)$, $(3;5)$, $(5;3)$ et $(5;5)$.

■

On remarque sur cet exemple que le produit cartésien n'est pas commutatif !

Définition 76 : La notion de **produit cartésien** s'étend naturellement à plus de deux ensembles.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. le produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, ..., A_n est l'ensemble des n-uplets $(a_1;a_2;\ldots;a_n)$ avec $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ... $a_n \in A_n$.
- Le produit cartésien $A \times A \times ... \times A$ où A apparaît n fois est noté A^n. Ses éléments sont appelés les ***n*-uplets** de A.

■ **Exemple 176 :** On considère les ensembles $A = \{1;2;4\}$, $B = \{3;7;14\}$ et $C = \{1;3\}$.

- $(1;7;3) \in A \times B \times C$ puisque $1 \in A$, $7 \in B$ et $3 \in C$.
- $(3;7;7;3;14) \in B^5$ puisque 3, 7 et 14 sont dans l'ensemble B.

■

Propriété 92 : Soit A et B des ensembles finis.

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.
- Plus généralement, soit n un entier naturel, A_1, A_2, ..., A_n des ensembles finis.

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \ldots \times \text{Card}(A_n).$$

- En particulier, pour tout entier naturel n, on a $\text{Card}(A^n) = [\text{Card}(A)]^n$.

■ **Exemple 177 :** On reprend les ensembles $A = \{1;2;4\}$, $B = \{3;7;14\}$ et $C = \{1;3\}$. On a

- $\text{Card}(A \times B) = 3 \times 3 = 9$;
- $\text{Card}(A \times B \times C) = 3 \times 3 \times 2 = 18$;
- $\text{Card}(A^4) = 3^4 = 81$;
- $\text{Card}(C^{10}) = 2^{10} = 1024$.

■

Propriété 93 : Le produit cartésien est utilisé pour dénombrer des situations où l'ordre des symboles (chiffres, lettres, signes...) est important et où ces symboles peuvent être utilisés plusieurs fois.

■ **Exemple 178 :** A l'entrée d'un bâtiment est installé un digicode. Pour composer le code, on utilise 4 chiffres compris entre 1 et 6 suivis de deux lettres parmi les lettres A, B, C et D. Un chiffre ou une lettre peuvent être utilisés plusieurs fois. Combien de codes sont possibles ?

On note $A_1 = \{1;2;3;4;5;6\}$ et $A_2 = \{A;B;C;D\}$. Un digicode est un élément de $A_1^4 \times A_2^2$. Le cardinal de cet ensemble est donc $\text{Card}(A_1)^4 \times \text{Card}(A_2)^2 = 6^4 \times 4^2 = 20736$.

Il y a donc 20736 digicodes possibles. ■

2 Arrangements et permutations

Définition 77 : Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ (**factorielle** de n) le produit de tous les entiers de 1 à n. Ainsi, $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Par ailleurs, on convient que $0! = 1$.

Il est également possible de définir la factorielle par récurrence, en stipulant que $0! = 1$ et que, pour tout entier naturel n, $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Cette version de la factorielle a notamment été rencontrée par les élèves suivants la spécialité NSI lors de leur premier contact avec la récursivité.

■ **Exemple 179 :** $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$; $\dfrac{8!}{6!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 8 \times 7 = 56$. ■

Définition 78 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n.

Un k-**arrangement** de A est un k-uplet d'éléments distincts de A.

Lorsque $k = n$, on parle de **permutation** de A.

■ **Exemple 180 :** On considère l'ensemble $A = \{1;3;4;5;7;10\}$.

- $(7;10;3)$ est un 3-arrangement de A.
- $(10;5;4;1)$ est un 4-arrangement de A.
- En revanche, $(7;10;1;7)$ n'est pas un arrangement de A car l'élément 7 y apparaît deux fois.
- $(3;7;4;5;1;10)$ est par ailleurs une permutation de A puisque tous les éléments de A y apparaissent.

■

Propriété 94 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n.

Le nombre de k-arrangements de A vaut $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

En particulier, le nombre de permutation de A vaut $n!$.

Démonstration 52 : Pour construire un k-uplet d'éléments distincts de A, on a

- n choix pour le premier élément
- $n-1$ choix pour le deuxième
- ...
- $n-(k-1)$ pour le k-ième

Le nombre de k arrangements de A vaut donc $n \times (n-1) \times \ldots \times n-(k+1)$, ce que l'on peut réécrire en

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

d'où

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

■ **Exemple 181 :** On considère l'ensemble $A = \{1;3;4;5;7;9;11\}$, de cardinal 7.

Le nombre de 3-arrangements de A vaut $7 \times 6 \times 5 = 210$. ■

Propriété 95 : Les arrangements sont utilisés pour dénombrer des situations où l'ordre des objets (chiffres, nombres, lettres, signes,...) est important mais où chaque objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 182 :** Une cours hippique réunit 8 jockeys et leurs chevaux. Le "quarté dans l'ordre" est un pari qui consiste à deviner les quatre premiers chevaux arrivés dans l'ordre. Combien de paris différents est-il possible de réaliser ?

- On a 8 choix pour le premier cheval arrivé.
- Il reste 7 choix pour le deuxième, 6 pour le troisième et 5 pour le quatrième.
- Le nombre total de paris est donc $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$.

Formellement, si on nomme A l'ensemble des chevaux de la course, un quarté dans l'ordre est un 4-arrangement de A. ■

3 Combinaisons d'un ensemble fini

Définition 79 : Une **partie** ou **combinaison** d'un ensemble fini A est un ensemble inclus dans A. L'ensemble des parties de A est noté $\mathscr{P}(A)$.

■ **Exemple 183 :** Soit $A = \{1;2;3\}$. Les parties de A sont $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ et $\{1;2;3\}$. Elles sont au nombre de 8

Attention à ne pas oublier l'ensemble vide $\varnothing$ et l'ensemble complet A lui-même en établissant cette liste. ■

Propriété 96 : Soit A un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de parties de A est 2^n.

Démonstration 53 : Nous allons montrer qu'il y a autant de parties de A que de n-uplets de l'ensemble $\{0;1\}^n$. Puisque $\{0;1\}$ possède 2 éléments, le cardinal de $\{0;1\}^n$ vaut donc 2^n.

Pour cela, à chaque partie de A, on fait correspondre un élément de $\{0;1\}^n$ de telle sorte que deux parties différentes de A sont associés à deux n-uplets différents de $\{0;1\}$. On dit qu'on réalise une bijection entre $\mathscr{P}(A)$ et $\{0;1\}^n$.

L'idée : Pour chaque élément de A, on a deux choix pour construire une partie de A : soit cet élément appartient à la partie que l'on construit, soit il ne lui appartient pas.

On a donc

- 2 choix pour le premier élément de A
- 2 choix pour le deuxième élément...
- ...
- 2 choix pour le n-ième élément de A.

Ainsi, le cardinal de $\mathscr{P}(A)$ vaut $2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$.

De manière formelle : Notons a_1, a_2 , ..., a_n les éléments de A. Soit B une partie de A. On construit un n-uplet $(b_0; b_1; ...; b_n)$ de $\{0; 1\}$ comme suit : pour tout entier naturel i entre 1 et n

- $b_i = 1$ si $a_i \in B$
- $b_1 = 0$ sinon.

Chaque partie de A est ainsi associé de manière unique à un n-uplet de $\{0; 1\}$ et réciproquement. Les cardinaux de $\mathscr{P}(A)$ et $\{0; 1\}^n$ sont donc égaux. □

Définition 80 : Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel n.

Le nombre de combinaisons à k éléments de A est noté $\binom{n}{k}$ et se lit "k parmi n".

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux

■ **Exemple 184 :** Soit $A = \{1 : 2 : 3 : 4 : 5\}$. Les parties à deux éléments de A sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{1;5\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$, $\{2;5\}$, $\{3;4\}$, $\{3;5\}$ et $\{4;5\}$. Il y en a 10 : ainsi, $\binom{5}{2} = 10$. ■

Attention, l'ordre n'a pas d'importance lorsque l'on parle de partie d'un ensemble : le sous-ensemble $\{1; 2\}$ est le même que le sous-ensemble $\{2; 1\}$.

Propriété 97 : Soit n et k deux entiers naturels.

- Si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$;
- Sinon, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

.

Démonstration 54 : On sait qu'il y a $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ k-arrangements de A. Cependant, plusieurs k-arrangements utilisent les mêmes éléments de A (par exemple, les couples (1;2) et (2;1) utilisent les nombres 1 et 2). Etant donné une partie de A à k éléments, on peut construire $k!$ arrangements différents : on a k choix pour le premier élément, $k-1$ pour le deuxième, etc.

Ainsi, le nombre de k-arrangements est $k!$ fois plus grand que la nombre de combinaisons à k éléments. Ainsi, le nombre de combinaisons à k élements est égale au nombre de k-arrangements divisé par $k!$, soit $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.□

■ **Exemple 185 :** Soit $A=\{1;2;3;4\}$.

Le nombre de parties de A à deux éléments vaut $\binom{4}{2}=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=\dfrac{4!}{2!2!}=\dfrac{24}{2\times 2}=6$.

Ces parties sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$ et $\{3;4\}$. ■

Propriété 98 : Soit n un entier naturel non nul.

Pour tout entier naturel $k\leqslant n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.	$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.
Si $n\geqslant 1$, $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$.	Si $n\geqslant 2$, $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration 55 : (Avec la formule) :

- Pour tout entier naturel $k\leqslant n$, $\binom{n}{n-k}=\dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}$.
- D'après le premier point, on a bien $\binom{n}{0}=\binom{n}{n-0}=\binom{n}{n}$. Or, $\binom{n}{0}=\dfrac{n!}{0!n!}=\dfrac{n!}{n!}=1$.
- D'après le premier point, $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}$. Or, $\binom{n}{1}=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}=\dfrac{n!}{(n-1)!}=\dfrac{n\times(n-1)!}{(n-1)!}=n$.
- D'après le premier point, $\binom{n}{2}=\binom{n}{n-2}$.

  Or, $\binom{n}{2}=\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=\dfrac{n!}{2(n-2)!}=\dfrac{n(n-1)\times(n-2)!}{2(n-1)!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

□

Démonstration 56 : (Démonstration combinatoire)

- Choisir k objets parmi n revient à exclure $n-k$ objets parmi ces n objets. Ainsi, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.
- Il n'existe qu'un seul ensemble à 0 élément, il s'agit de l'ensemble vide $\varnothing$. De la même manière, si A est un ensemble à n éléments, la seule partie de A ayant n éléments est l'ensemble A lui-même.

  Ainsi, $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$.
- Si A est un ensemble fini $\{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$ de cardinal supérieur ou égal à 1, les parties à 1 élément de A sont simplement les singletons $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ... , $\{a_n\}$.

  Ainsi, $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$.
- Soit A un ensemble de cardinal $n\geqslant 2$. Pour construire une partie à 2 éléments de A, on choisit un premier élément (n choix possibles) puis un second ($n-1$ choix). En faisant ainsi, on peut construire $n(n-1)$ couples d'éléments de A. Or, l'ordre n'ayant pas d'importance, il est possible d'inverser l'ordre dans lequel on choisit les éléments de A.

  Le nombre de combinaisons de A à 2 éléments vaut donc $\dfrac{n(n-1)}{2}$

□

■ **Exemple 186 :** $\binom{100}{98}=\binom{100}{2}=\dfrac{100\times 99}{2}=4950$. ■

Propriété 99 : Les combinaisons sont utilisées pour dénombrer les situations où l'ordre des objets n'est pas important - lorsque l'on tire simultanément plusieurs personnes ou objets au hasard par exemple - et qu'un objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 187 :** A la belote, on utilise un jeu de 32 cartes. Chaque carte est déterminé par sa couleur (Pique, Trèfle, Carreau, Coeur) et sa valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Pour le premier tour de distribution, chaque joueur reçoit 5 cartes, que l'on appelle une main. Combien existe-t-il de mains comportant exactement 2 as ?

L'ordre de distribution des cartes n'a pas d'importance ici : recevoir un as en première carte ou en deuxième carte n'a pas d'influence, on utilise donc les combinaisons.

- La main est composée de 2 as, choisis parmi 4, ce qui donne $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{24}{4} = 6$ possibilités.
- Il reste 3 cartes à déterminer, choisis parmi les 28 cartes qui ne sont pas des as. Cela donne $\binom{28}{3} = \dfrac{28!}{3!(28-3)!} = \dfrac{28!}{3!25!} = \dfrac{28 \times 27 \times 26}{3 \times 2 \times 1} = 3276$.
- Au total, cela fait $6 \times 3276 = 19656$ mains de 5 cartes contenant exactement 2 as.

■

Propriété 100 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. On a alors

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Cette relation s'appelle la relation de Pascal.

Démonstration 57 — Avec la formule : : On a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

On multiplie le premier quotient par $\dfrac{k}{k}$ et le second par $\dfrac{n-k}{n-k}$, ce qui donne

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times (n-1)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{k! \times (n-k-1)! \times (n-k)}$$

Or, $k \times (k-1)! = k!$, $(n-k-1) \times (n-k) = (n-k)!$. Ainsi,

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k) \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Démonstration 58 — Combinatoire : : Soit A un ensemble fini à n éléments et $a \in A$. Soit k un entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

L'ensemble des combinaisons à k éléments, noté $\mathscr{P}_k(A)$, est, par définition, de cardinal $\binom{n}{k}$. Il peut se décomposer en deux ensembles disjoints :

- P_1, l'ensemble des combinaisons à k éléments de A qui contiennent l'élément a. Il reste donc à choisir $k-1$ éléments parmi les $n-1$ restants. Le cardinal de cet ensemble est donc $\binom{n-1}{k-1}$;
- P_2, L'ensemble des combinaisons à k éléments de A qui ne contiennent pas l'élément a. Il faut donc choisir k éléments parmi les $n-1$ autres éléments. Le cardinal de P_2 est donc $\binom{n-1}{k}$.

On a alors $\mathscr{P}_k(A) = P_1 \cup P_2$ ce qui implique que $\binom{n}{k} = \mathrm{Card}(\mathscr{P}_k(A)) = \mathrm{Card}(P_1 \cup P_2)$. Or, les ensembles P_1 et P_2 sont disjoints. Ainsi, $\mathrm{Card}(P_1 \cup P_2) = \mathrm{Card}(P_1) + \mathrm{Card}(P_2)$.

Autrement dit, on a $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. □

Propriété 101 : La relation de Pascal permet de construire récursivement les coefficients binomiaux. Ces coefficients peuvent être arrangés en triangle et forment ce que l'on appelle le triangle de Pascal.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dans ce triangle, on démarre avec un 1 en haut à gauche. Pour compléter chaque cellule, on ajoute alors le nombre au-dessus avec le nombre en haut à gauche. Les cases vides se voient assigner la valeur 0. On peut alors lire les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce triangle.

44. Exercices

Cardinal d'ensembles

► **Exercice 356**
On considère l'ensemble $A = \{5;9;13\}$. Déterminer l'ensemble B, disjoint de A, tel que $A \cup B = \{1;2;5;8;9;13;14\}$.

► **Exercice 357**
On considère deux ensembles A et B.

- Si $\text{Card}(A) = 18$, $\text{Card}(B) = 23$, A et B étant disjoints, que vaut $\text{Card}(A \cup B)$?
- Si $\text{Card}(A) = 12$, $\text{Card}(B) = 47$ et $\text{Card}(A \cup B) = 58$, A et B sont-ils disjoints ?
- Si $\text{Card}(A) = 14$ et $\text{Card}(A \cup B) = 27$, quel est le nombre minimal d'éléments dans B ?

► **Exercice 358**
À leur entrée en L1, les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand.

Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

► **Exercice 359**
Pour tout entier naturel n, on note A_n l'ensemble des corrs de l'équation $x^2 - n = 0$.

Déterminer $\text{Card}(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$.

► **Exercice 360**
Soit $A = \{5;7\}$ et $B = \{7;9;10\}$. Donner l'ensemble des éléments de $A \times B$, de $B \times A$, de A^3 et de B^2.

► **Exercice 361**
Soit A et B deux ensembles finis tels que $\text{Card}(A \times B) = 299$ et $\text{Card}(A \cup B) = 37$. Les ensembles A et B sont-ils disjoints ?

► **Exercice 362**
Parmi tous les nombres de 1 à 1000, combien s'écrivent avec le chiffre 9 ?

► **Exercice 363**
En informatique, un octet est une succession de 8 bits, chaque bit ne pouvant prendre que deux valeurs, 0 ou 1. Un octet est donc un 8-uplet de $\{0;1\}$.

1. Combien d'octets différents existe-t-il ?
2. Dans le système RGB, une couleur est codée à l'aide de 3 octets désignant respectivement les niveaux de rouge, de vert et de bleu. Combien de couleurs différentes est-il ainsi possible de coder ?
3. Une adresse IPv4 est codée sur 4 octets. On considère un sous-réseau dont le masque est 255.255.0.0, c'est-à-dire que toutes les adresses IP des ordinateurs de ce sous-réseau commencent par les deux mêmes octets. Par ailleurs, les adresses se terminant par les octets 0.0 et 255.255 sont réservées respectivement au réseau et au broadcast. Combien de machines différentes peut-on brancher sur un tel réseau ?

► Exercice 364
Dans un restaurant figurent au menu

- 12 entrées : 3 avec viande, 3 avec poisson et 6 végétariennes ;
- 20 plats : 10 avec viande, 6 avec poisson et 4 végétariens.

Un client commande au hasard de manière uniforme et indépendante une entrée et un plat.

1. Quelle est la probabilité que le menu de ce client soit végétarien ?
2. Quelle est la probabilité que son menu soit composé d'une entrée et d'un plat tous deux sans poisson ?
3. Quelle est la probabilité que l'entrée et le plat soit de nature différente (par exemple une entrée avec viande et un plat végétarien) ?

► Exercice 365
Un trigramme est une figure composée de trois lignes parallèles, chacune pouvant être coupée en deux morceaux ou non. Le drapeau de la Corée du Sud présente par exemple quatre trigrammes entourant un Taiju bleu et rouge.

1. Combien de trigrammes différents peut-on constituer ?
2. Construire les trigrammes ne figurant pas sur le drapeau.

Arrangements et permutations

► Exercice 366
On considère l'ensemble $A = \{1;3;7;11\}$. Donner tous les 2-arrangements de A. Combien y en a-t-il ?

► Exercice 367
On considère l'ensemble $A = \{c;o;s\}$ Donner toutes les permutations de A. Combien y en a-t-il ?

► Exercice 368
On considère l'ensemble $A = \{1;3;7;9;11\}$.

1. Donner deux éléments de A^3. Combien en existe-t-il ?
2. Donner deux 3-arrangements d'éléments de A. Combien en existe-t-il ?
3. Donner deux permutations de A. Combien en existe-t-il ?

► Exercice 369
Une course de 8 athlètes a lieu.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
2. Combien y a-t-il de classements complets possibles ?
3. Anne a participé à la course et a terminé sur le podium. Sachant cette information, combien de classements complets sont possibles ?

► Exercice 370

Le professeur souhaite envoyer ses élèves au tableau pour corriger des exercices. Il y a 3 exercices à corriger et 30 élèves dans la classe.

1. Combien y a-t-il de configurations possibles si un même élève ne peut pas venir deux fois au tableau ?
2. Même question si un élève peut être interrogé sur plusieurs exercices.

► Exercice 371

Deux groupes d'étudiants se rendent au cinéma. Le premier est composé de 6 personnes et le deuxième de 4 personnes. Les étudiants s'installent sur une rangée de dix places.

1. Combien de configurations différentes existe-t-il ?
2. Les deux groupes ne veulent pas être séparés. Combien de configurations sont possibles ?

► Exercice 372

On dispose des lettres de SAINTEX. On souhaite construire de nouveaux mots à l'aide de ces lettres, sans s'intéresser au sens de ces mots. On peut par exemple former les mots EXTIA ou SINETAX.

1. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si toutes les lettres peuvent être utilisées autant de fois que l'on veut ?
2. Combien de mots de 4 lettres peut-on former si chaque lettre ne peut être utilisée qu'une seule fois ?
3. Combien de mots de 6 lettres ne commençant pas par la lettre X peut-on former, chaque lettre pouvant être utilisée autant de fois que l'on veut ?
4. Combien de mots de 4 lettres comportant la lettre I existe-t-il, chaque lettre ne pouvant être utilisée qu'une seule fois ?

► Exercice 373 — Amérique du Sud 2009

On considère un questionnaire comportant cinq questions. Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres. Par exemple, le mot BBAAC signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
2. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - E : " le candidat a exactement une réponse exacte ".
   - F : " le candidat n'a aucune réponse exacte ".
   - G : " le mot-réponse du candidat est un palindrome " (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, BACAB est un palindrome).

► Exercice 374 — Centres étrangers 2024

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac. Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus. Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4; 5; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   (b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

Combinaisons d'un ensemble fini

► Exercice 375

Soit $A = \{1;2;3;4\}$. donner toutes les parties de A à 2 éléments et en déduire la valeur de $\binom{4}{2}$.

► Exercice 376

Donner les valeurs de $\binom{6}{3}$, $\binom{10}{7}$, $\binom{14}{11}$, $\binom{9}{4}$, $\binom{9}{5}$ et $\binom{8}{3}$.

► Exercice 377

Calculer les coefficients binomiaux : $\binom{31}{2}$, $\binom{279}{279}$, $\binom{1457}{0}$, $\binom{4321}{4320}$, $\binom{101}{99}$.

► Exercice 378

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

► Exercice 379

Pour préparer le prochain devoir de mathématiques, le professeur donne une liste de dix exercices et vous recommande d'en travailler cinq.

1. Combien de combinaisons d'exercice pouvez-vous construire ?
2. Le professeur insiste sur le fait que l'exercice 8 est à le travailler absolument. Il vous reste donc 4 exercices à choisir. Combien de combinaisons pouvez-vous construire ?

► Exercice 380

Dans une grille de loto, il faut choisir cinq nombres de 1 à 49 ainsi qu'un nombre chance allant de 1 à 10. De combien de manières différentes peut-on remplir sa grille de loto ?

► Exercice 381

On considère un jeu de 32 cartes. Chaque carte possède une couleur (Cœur, Pique, trèfle, Carreau) et une valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Une main est un ensemble de 5 cartes tirées dans ce paquet, sans tenir compte de l'ordre des cartes tirées. Déterminer le nombre de mains :

- comportant exactement 3 cœurs ;
- comportant exactement un roi et exactement deux dames ;
- comportant au plus 2 roi.

► Exercice 382
On lance simultanément dix pièces de monnaies et on regarde de quel côté elles tombent.

1. Combien de configurations avec 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?
2. Combien de configurations avec au plus 3 pièces tombant sur FACE existe-t-il ?

► Exercice 383
Un entraîneur doit constituer une équipe de football. Il a à sa disposition 3 gardiens de buts, 8 défenseurs, 6 milieux de terrain et 6 attaquants. Il doit alors constituer une équipe en désignant 1 gardien, 4 défenseurs, 3 milieux de terrain et 3 attaquants. Combien d'équipes peut-il ainsi construire ?

► Exercice 384
En entrant en première, il vous a été demandé de choisir trois spécialités parmi les douze proposées.

1. Combien de choix différents pouviez-vous faire ?
2. Un élève de seconde sait qu'il devra abandonner une spécialité en terminale. Il décide donc de choisir deux spécialités qu'il conservera et une qu'il abandonnera. Combien a-t-il de choix ?

Exercices de synthèse

► Exercice 385
Une association sportive propose diverses activités telles que le football, le handball, l'athlétisme etc. Ces activités sont au nombre de 20. Sur sa fiche d'inscription, chaque adhérent doit alors choisir 3 activités au maximum parmi ces 20.

1. Si la préférence des activités n'entre pas en compte, combien de fiches d'inscription différentes peut-on former ?
2. Face à l'affluence grandissante, l'association à ses adhérents de classer ces 3 disciplines au maximum selon les préférences de l'adhérent. Combien de fiches différentes peut-on alors former ?

► Exercice 386
Parmi tous les nombres entiers entre 1 et 10^9, combien ont une somme de chiffres qui vaut 3 ?

► Exercice 387
Une assemblée de 30 personnes souhaite élire une délégation de 4 personnes pour les représenter à un congrès.

1. Combien de délégations peut-on ainsi désigner ?
2. Alice et Bob ne se supportent pas et ne souhaitent pas faire tous deux partie de la délégation. Combien de possibilités reste-t-il ?
3. Alice et Bob acceptent finalement de mettre leur différend de côté. Cependant, les inséparables Camille et Dominique imposent que si l'un d'entre eux fait partie de la délégation, alors l'autre doit en être également. Combien de possibilités reste-t-il ?

► Exercice 388

Soit n un entier naturel non nul et A un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $k \leqslant n$, on note P_k l'ensemble des parties de A ayant k éléments.

1. Rappeler le cardinal de P_k.
2. Que vaut l'union des P_k pour k allant de 0 à n ? Cette union est-elle disjointe ?
3. En déduire que $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

► Exercice 389

Dans une assemblée de n personnes, on souhaite élire k personnes dans une commission. L'une de ces k personnes en sera la présidente.

1. Combien de commissions avec son président peut-on ainsi constituer ?
2. On procède différemment : on choisit d'abord le président de la commission puis on choisit les autres membres parmi les personnes restantes. De combien de manières peut-on procéder ?
3. En déduire que $n\binom{n-1}{k-1}=k\binom{n}{k}$.
4. Retrouver cette égalité à l'aide de la formule sur les coefficients binomiaux.

► Exercice 390

Soit n un entier naturel. On s'intéresse aux mots de taille $2n$ comportant exactement n fois la lettre A et n fois la lettre B.

1. Combien de tels mots peut-on construire ?
2. (a) Combien de tels mots contenant 0 fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
   (b) Combien de tels mots contenant 1 fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
   (c) Soit $k \geqslant n$. Combien de tels mots contenant k fois la lettre A parmi les n premières lettres peut-on construire ?
3. A l'aide des question précédentes, simplifier l'expression $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$.

► Exercice 391

Outre des baguettes croustillantes et de délicieux croissants, le boulanger vend également d'autres produits. On trouve ainsi 10 sortes de pâtisseries différentes, 4 types de cookies, 12 types de boissons ainsi que 15 sandwichs différents.

1. La vitrine du boulanger n'étant pas assez grande pour accueillir tous les types de sandwichs en même temps, le boulanger doit en choisir 8 qu'il pourra exposer et ainsi mettre en avant. L'ordre dans lequel il place les sandwichs dans la vitrine étant important, combien de choix s'offrent au boulanger pour réaliser sa présentation ?
2. Une formule est composée d'un sandwich, d'une boisson et d'un dessert, ce-dernier pouvant être une pâtisserie ou un cookie. Combien de formules différentes peut-on ainsi constituer ?
3. Un client un peu gourmand souhaite goûter à un échantillon des produits du boulanger. Il compte ainsi commander 3 gâteaux et 2 cookies, tous différents les uns des autres pour varier les plaisirs. Combien de choix s'offrent à lui pour réaliser sa commande ?
4. Face au succès des cookies, notre boulanger-mathématicien décide de lancer un service de cookies personnalisés. Chaque client peut alors choisir une base de cookie (nature ou chocolat) et les ingrédients à mettre dessus. 5 ingrédients sont disponibles et les clients peuvent choisir d'en mettre autant qu'ils veulent sur leur gâteau. Ils peuvent ainsi tout à fait choisir de n'en mettre aucun comme de mettre les 5 en même temps. Combien de recettes de cookies différentes est-il alors possible de créer ?

► Exercice 392

Lors de la Seconde Guerre Mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés, incompréhensibles pour leurs opposants. Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers différentes composants.

Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer. Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine est une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement des rotors dans la machine est important. Combien de configurations différentes ces rotors permettent-ils ?
2. Chaque rotor peut alors être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. La position d'un rotor n'influence pas la position des autres, ceux-ci sont totalement indépendants. Les trois rotors étant choisis, combien de positions différentes peut-on donner au mécanisme formé par ces trois rotors ?
3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Six lettres resteront inchangées. Les vingt restantes seront reliées par paire à l'aide de câbles.
   (a) Combien de manières a-t-on de choisir les six lettres inchangées ?
   (b) Parmi les vingt lettres restantes, on en choisit deux que l'on relie à l'aide du câble numéro 1. Combien a-t-on de choix différents ?
   (c) Parmi les dix-huit lettres restantes, on en choisit de nouveau 2 qui seront reliées par le câble numéro 2. Combien a-t-on de choix différents ?
   (d) On poursuit ainsi jusqu'à ce que les vingt lettres soient toutes reliées. En remarquant que l'ordre de câblage n'a pas d'importance (inverser le câble 1 et le câble 2 donnera le même résultat), donner le nombre de câblages de la machine Enigma.
4. En déduire un ordre de grandeur du nombre de configurations de la machine Enigma.
5. En supposant qu'un ordinateur soit capable de tester un milliard de configurations par seconde, combien d'années faudrait-il pour passer en revue toutes les configurations d'Enigma ?

45. Corrigés

► Correction 356

On prend les éléments de $A \cup B$ qui ne sont pas dans A. $B = \{1;2;8;14\}$.

► Correction 357

- Puisque A et B sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 18 + 23 = 41$.
- On a $\text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 47 + 12 = 59 \neq \text{Card}(A \cup B)$, A et B ne sont pas disjoints.
- B comporte au moins $27 - 24 = 13$ éléments.

► Correction 358

Il est possible de résoudre cet exercice en utilisant un tableau.

	Informatique	Chimie	Astronomie	Total
Anglais	3	9	8	20
Allemand	6	6	4	16
Total	9	15	12	36

► Correction 359

Pour tout entier naturel n, on note A_n l'ensemble des corrs de l'équation $x^2 - n = 0$. Ainsi, $A_0 = \{0\}$ et pour tout entier naturel non nul, $A_n = \{-\sqrt{n}; \sqrt{n}\}$. Ces ensembles sont disjoints et de cardinal 2.

Ainsi, $\text{Card}(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card}(A_0) + \text{Card}(A_1) + \ldots + \text{Card}(A_n) = 1 + 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n + 1$.

► Correction 360

On a

- $A \times B = \{(5;7),(5;9),(5;10),(7;7),(7;9),(7;10)\}$,
- $B \times A = \{(7;5),(7;7),(9;5),(9;7),(10;5),(10;7)\}$,
- $A^3 = \{(5;5;5),(5;5;7),(5;7;5),(5;7;7),(7;5;5),(7;5;7),(7;7;5),(7;7;7)\}$,
- $B^2 = \{(7;7),(7;9),(7;10),(9;7),(9;9),(9;10),(10;7),(10;9),(10;10)\}$.

► Correction 361

$299 = 1 \times 299 = 13 \times 23$. Les seules possibilités pour les cardinaux de A et B sont donc 1, 13, 23 et 299.

Or, $13 + 23 = 39$ et $1 + 299 = 300$, qui sont différents de 37. Ainsi, A et B ne sont pas disjoints.

► Correction 362

Comptons le nombre de nombres n'ayant aucun 9 dans leur écriture. Il y a 9 choix pour le premier chiffre, 9 pour le deuxième, 9 pour le troisième soit $9^3 = 729$ possibilités. Ainsi, les nombres qui s'écrivent avec un 9 sont au nombre de $1000 - 729 = 271$.

► **Correction 363**
Il existe 2^8 soit 256 octets. Il est alors possible de coder 256^3 soit 16777216 couleurs dans le système RGB.

Pour établir une adresse IPv4 de ce sous-réseau, on a 256 possibilités pour le troisième octet et 256 pour le quatrième. Il faut alors retirer les deux adresses réservées. Il est alors possible de connecter $256^2 - 2$ soit 65534 machines au réseau.

► **Correction 364**
Il y a 12×20 soit 240 menus au total. Il y a par ailleurs 6×4 menus végétariens.
La probabilité que le menu soit végétarien est de $\dfrac{24}{240}$ soit $\dfrac{1}{10}$.
Il y a 9 entrées sans poissons et 14 plats sans poissons, soit 9×14 menus sans poisson.
La probabilité que le menu soit sans poisson est de $\dfrac{9 \times 14}{240} = \dfrac{21}{40}$.
Le nombres de menus ayant entrée et plat différents est $3 \times 10 + 3 \times 14 + 6 \times 16$ soit 168.
La probabilité de l'événement recherché est donc $\dfrac{168}{240}$ soit $\dfrac{7}{10}$.

► **Correction 365**
Il est possible de constituer 8 trigrammes.

► **Correction 366**
Les 2-arrangements de A sont (1;3), (1;7), (1;11), (3;1), (3;7); (3;11), (7;1), (7;3), (7;11), (11;1), (11;3), (11;7). Il y en a 12.

► **Correction 367**
Les permutations de A sont (s;i;n), (s;n;i), (i;s;n), (i;n;s), (i;s;n), (i;n;s). Il y en a 6.

► **Correction 368**

- $(1;3;3)$ et $(7;7;1)$ sont deux éléments de A^3. Il en existe 5^3 soit 125.
- $(1;7;11)$ et $(7;9;1)$ sont deux 3-arrangements d'éléments de A. Il en existe $5 \times 4 \times 3 = 60$.
- $(1;7;3;11;9)$ et $(11;9;3;7;1)$ sont deux permutations de A. Il en existe $5! = 120$.

► **Correction 369**
Il y a $8 \times 7 \times 6$ soit 336 podiums possibles. Il y a 8! soit 40320 classements possibles.

Classons les 7 autres personnes : il y a 7! classement possibles. Il faut alors insérer Anne en première, deuxième ou troisième position. Le nombre de classements complets vaut alors $3 \times 7!$ soit 15120.

► **Correction 370**
Si un élève ne peut pas venir deux fois au tableau, il y a 30 possibilités pour le premier élèves, 29 pour le deuxième et 28 pour le troisième, soit un total de $30 \times 29 \times 28 = 24360$ configurations.

Si, en revanche, un élève peut passer plusieurs fois, il y a 30 choix pour chaque exercice, soit un total de $30^3 = 27000$ configurations.

► Correction 371
Il existe $10! = 3628800$ configurations possibles.

Si les étudiants ne souhaitent pas se séparer, il y a deux situations possibles.

- On place le premier groupe puis le deuxième. Il y a $6!$ manières de placer le premier groupe et $4!$ pour le deuxième.
- On place le deuxième groupe puis le premier, on obtient le même nombre de placements.
- Le nombre de configurations possibles est donc de $2 \times 6! \times 4! = 34560$.

► Correction 372

1. On peut former $7^4 = 2401$ mots.
2. On peut former $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ mots.
3. Il y a 6 choix pour la première lettre, puis 7 pour la deuxième, 7 pour la troisième et ainsi de suite. Le nombre de mots est de $6 \times 7^5 = 100842$.
4. On divise les mots selon la position de la lettre I.
   - Si elle est en première position, on a alors 6 choix pour la deuxième lettre, 5 pour la troisième, 4 pour la quatrième, soit 120 possibilités.
   - Le même raisonnement vaut si le O est en position 2, 3 ou 4.
   - Il y a donc 480 possibilités au total.

► Correction 373

1. Il y a à chaque fois 3 choix par question, soit 3^5 mots-réponses possibles.
2. - On distingue selon la position de la bonne réponse.
     - S'il s'agit de la première réponse, il y a $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ mots-réponses possibles.
     - Le même raisonnement tient s'il s'agit de la deuxième, troisième, quatrième ou cinquième réponse.
     - Au total 80 mots-réponses contiennent exactement une bonne réponse.

     La probabilité d'avoir exactement une bonne réponse est donc de $\dfrac{80}{243}$.
   - Il y a deux mauvaises réponses par question. La probabilité de n'avoir aucune réponse exacte est donc $\dfrac{2^5}{243} = \dfrac{32}{243}$.
   - Il y a 3 choix pour la première lettre, 3 pour la deuxième et 3 pour la troisième. Il n'y a qu'un choix pour la quatrième qui doit être la même que la deuxième et un seul choix également pour la cinquième qui doit être la même que la première.

     La probabilité d'avoir un palindrome est donc de $\dfrac{3^3}{3^5} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.

► Correction 374
L'ordre des tirages est pris en compte et il y a remise entre chaque tirage. Nous avons 8 possibilités pour le premier tirage, 8 pour le deuxième et 8 pour le troisième. Il y a donc $8^3 = 512$ tirages. possibles.

Le nombre de tirages sans répétition est de $8 \times 7 \times 6 = 336$. Le nombre de tirage contenant au moins une répétition est donc de $512 - 336 = 176$.

► Correction 375
Les parties de A à deux éléments sont $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{1;4\}$, $\{2;3\}$, $\{2;4\}$ et $\{3;4\}$.

► Correction 376

- $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{(3\times2\times1)3!} = 5\times4 = 20.$
- $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{(3\times2\times1)7!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2} = 5\times3\times8 = 120.$
- $\binom{14}{11} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{14\times13\times12\times11!}{11!\times(3\times2\times1)} = 14\times13\times2 = 364.$
- $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5!}{5!(4\times3\times2\times1)} = 3\times7\times6 = 126.$
- $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = 126$ d'après le calcul précédent.
- $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!(1\times2\times3)} = 8\times7 = 56.$

► Correction 377
$\binom{31}{2} = \frac{31\times30}{2} = 465$, $\binom{279}{279} = 1$, $\binom{1457}{0} = 1$, $\binom{4321}{4320} = 4321$, $\binom{101}{99} = \frac{101\times100}{2} = 5050.$

► Correction 378
Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. Pour savoir si $u_{n+1} \geqslant u_n$, on regarde donc si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)\times(2n+1)\times(2n)!}{n!\times(n+1)\times n!\times(n+1)} \times \frac{n!n!}{(2n)!}.$$

En simplifiant, on trouve alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{n+1}.$$

Or, pour tout entier naturel n, $2n+1 \geqslant n+1$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. La suite (u_n) est croissante.

► Correction 379
Il faut choisir 5 exercices parmi 10 soit

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5!}{5!\times5!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5!} = 252 \text{ possibilités.}$$

Si l'exercice 8 est imposé, il faut choisir 4 exercices parmi les 9 restants, soit

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5!}{4!\times5!} = 126 \text{ possibilités.}$$

► Correction 380

On a donc $\binom{49}{5} \times \binom{10}{1} = 19068840$ manières de remplir une grille de loto.

► Correction 381

Pour obtenir une main comptant exactement 3 cœurs

- On choisit 3 cœurs parmi les 8 : $\binom{8}{3} = 56$;
- On choisit 2 cartes parmi les 24 restantes : $\binom{24}{2} = 276$;
- Le nombre total de mains ayant exactement 3 cœurs est donc de $56 \times 276 = 15456$.

Pour obtenir une main ayant exactement un roi et deux dames

- On choisit un roi parmi 4 puis deux dames parmi 4 : $\binom{4}{1}\binom{4}{2} = 4 \times 6 = 24$;
- On choisit 2 cartes parmi les 24 restantes : $\binom{24}{2} = 276$;
- Le nombre total de mains comptant exactement un roi et deux dames est donc de $4 \times 6 \times 276 = 6624$.

Pour obtenir une main contenant au plus deux rois, on compte les mains ayant exactement 0, 1 ou 2 roi et on ajoute les différents cas.

- Aucun roi : On choisit 5 cartes parmi les 28 qui ne sont pas des rois, soit $\binom{28}{5} = 98280$;
- Un roi : On choisit un roi parmi 4 puis 4 cartes parmi les 28 restantes, soit $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 81900$;
- Deux rois : On choisit deux rois parmi 4 puis 3 cartes parmi les 28 restantes, soit $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19656$;
- Le nombre total de mains comportant au plus deux rois vaut donc $98280 + 81900 + 19656 = 199836$.

► Correction 382

Il existe $\binom{10}{3} = 120$ configurations avec 3 pièces tombant sur FACE.

Il existe $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$ configurations avec au plus 3 pièces tombant sur FACE.

► Correction 383

Le nombre d'équipes est de $\binom{3}{1} \times \binom{8}{4} \times \binom{6}{3} \times \binom{6}{3} = 84000$.

► Correction 384

Il fallait choisir 3 spécialités parmi 12. Le nombre de choix est donc de $\binom{12}{3} = \dfrac{12!}{3!9!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3!} = 220$.

On choisit 3 spécialités parmi 12 puis une parmi les 3 qu'on abandonnera.

Le nombre de choix est donc de $\binom{12}{3} \times \binom{3}{1} = 220 \times 3 = 660$.

► **Correction 385**

Si la préférence des activités n'entre pas en compte, chaque adhérent choisi 1, 2 ou 3 activités parmi 20. Il y a donc $\binom{20}{1}+\binom{20}{2}+\binom{20}{3} = 20+190+1140 = 1350$ fiches différentes.

Supposons que l'ordre compte : si l'adhérent choisit une seule discipline, il a 20 choix. S'il en choisit deux, il a 20 choix pour la première et 19 pour la deuxième soit $20\times 19 = 380$ choix au total. S'il en choisit trois, il a $20\times 19\times 18 = 6840$ choix. Au total, il y a 7240 fiches possibles.

► **Correction 386**

Notons d'abord que 10^9 n'est pas une corr. On regarde donc tous les nombres composés de 9 chiffres (quitte à compléter avec des 0 devant les nombres). Pour avoir un nombre dont la somme des chiffres vaut 3, il y a trois possibilités :

- Il est composé de huit 0 et d'un 3 : il y a alors 9 possibilités pour placer le chiffre 3 dans ce nombre ;
- Il est composé de sept 0, d'un 1 et d'un 2 : il y a alors 9 possibilités pour placer le chiffre 1 et 8 possibilités pour placer le chiffre 2, soit 72 possibilités au total ;
- Il est composé de six 0 et de trois 1 : il faut placer trois fois le chiffre 1 parmi neuf emplacements. Cela donne $\binom{9}{3}$ possibilités, soit 84.

Au total, il y a 165 nombres entres 1 et 10^9 dont la somme des chiffres vaut 2.

► **Correction 387**

1. On peut désigner $\binom{30}{4} = 27405$ délégations différentes.
2. On distingue les cas :
   - Aucun ne fait partie de la délégation. On choisit donc 4 personnes parmi 28 : $\binom{28}{4} = 20475$;
   - Alice fait partie de la délégation et pas Bob.
     Il reste à choisir 3 personnes parmi 28, soit $\binom{28}{3} = 3276$ possibilités ;
   - Bop fait partie de la délégation et pas Alice. On a de nouveau 3276 possibilités.
   - Au total, il y a $20475+3276+3276 = 27027$ délégations possibles.

   Une autre technique consiste à compter les délégations où Alice et Bob font tous deux parties de la délégation et de retrancher ce nombre au total. Si les deux font partie de la délégation, on doit encore choisir 2 membres parmi les 28 restants, soit $\binom{28}{2} = 378$ possibilités. Il y a donc $27405-378 = 27027$ délégations convenables.
3. On distingue les cas
   - Camille et Dominique font tous deux partie de la délégation. Il faut encore choisir deux membres parmi les 28 restants, soit $\binom{28}{2} = 378$
   - Camille et Dominique n'en font pas partie. On choisit donc 4 membres parmi les 28 restants, soit $\binom{28}{4} = 20475$ possibilités
   - En tout, on a donc $20475+378 = 20853$ possibilités.

► Correction 388

Le cardinal de P_k vaut $\binom{n}{k}$. Or, l'union des P_k vaut $\mathscr{P}(A)$ et cette union est disjointe.

Ainsi, $\text{Card}(\mathscr{P}(A)) = \text{Card}(P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_n) = \text{Card}(P_0) + \text{Card}(P_1) + \cdots + \text{Card}(P_n)$ et donc $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$.

► Correction 389

On choisit k personnes parmi les n personnes. Puis, parmi ces k personnes, on en choisit une qui sera la présidente. Le nombre de choix est $\binom{n}{k} \times \binom{k}{1}$ soit $k\binom{n}{k}$.

On choisit 1 personne pour présider l'assemblée parmi les n personnes. Pour la suite, on choisit alors $k-1$ personnes sur les $n-1$ présentes pour constituer la commission.
Le nombre de choix est donc $\binom{n}{1} \times \binom{n-1}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$.

On a déterminé le nombre de manières d'élire un comité et un président de deux manières différentes, ces deux quantités sont donc égales. On a donc bien $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k compris entre 1 et n,

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}.$$

On multiplie en haut et en bas par k

$$n\binom{n-1}{k-1} = k \times \frac{n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}.$$

► Correction 390

Parmi les $2n$ emplacements pour les lettres, on en choisit n pour placer les A : les autres recevront la lettre B. Il y a donc $\binom{2n}{n}$ tels mots.

- Il n'y a qu'un seul mot qui comporte 0 fois la lettre A parmi les n premières.
- On choisit 1 lettre parmi les n premières pour placer la lettre A puis $n-1$ lettres parmi les n dernières pour placer la lettre A. On aura bien au total n fois la lettre A. Il y a $\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}$ mots de ce type.
- On choisit k lettres parmi les n premières pour placer la lettre A puis $n-k$ lettres parmi les n dernières pour placer la lettre A. On aura bien au total n fois la lettre A. Il y a $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ mots de ce type.

On note E l'ensemble des mots recherchés et E_k l'ensemble des mots contenant k fois la lettre A parmi les n premières lettres. Les ensembles E_k sont disjoints et leur union fait E. Ainsi, $\text{Card}(E) = \text{Card}(E_0) + \text{Card}(E_1) + \cdots + \text{Card}(E_n)$.

Or, pour tout entier naturel k, $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$, mais $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Finalement, $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}^2$ et on en déduit que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

► **Correction 391** 1. L'ordre est important et il n'y a pas de répétitions : il s'agit d'un arrangement. Le boulanger a donc 15 choix pour le premier sandwich, 14 pour le deuxième, 13 pour le troisième etc. La nombre de possibilités vaut donc $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8$ soit 259 459 200.

2. Il y a 15 choix de sandwich, 12 choix de boissons et 14 choix de dessert. Le nombre de formules est donc de $15 \times 12 \times 14$ soit 2520.
3. Le client choisit 3 pâtisseries parmi 10 et 2 cookies parmi 4. Le nombre de possibilités vaut donc $\begin{pmatrix}10\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, soit 720.
4. Il y a deux chois de bases. Pour choisir les ingrédients, on a alors 2^5 possibilités (pour chaque ingrédient, on a 2 choix : le prendre ou pas). Le nombre total de cookies que l'on peut former est donc 2×2^5 soit 64.

► **Correction 392**

1. Il y a donc 5 possibilités pour le premier rotor, 4 pour le deuxième, 3 pour le troisième, soit $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilités pour les rotors.
2. Cela donne 26 placements pour le premier rotor, 26 pour le deuxième et 26 pour le troisième, soit un total de $26 \times 26 \times 26 = 17576$ possibilités.
3. (a) Il y a $\binom{26}{6}$ manières de choisir 6 lettres parmi 26, soit $\dfrac{26!}{6!20!}$, c'est-à-dire 230230 possibilités.
   (b) Il y a $\binom{20}{2}$ choix possibles.
   (c) Il y a alors $\binom{18}{2}$ possibilités.
   (d) On a alors $\binom{20}{2} \times \binom{18}{2} \times \binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{16}{2}$ possibilités.
   Cette écriture est simplifiable, puisque ce nombre vaut
$$\frac{20\times 19}{2} \times \frac{18\times 17}{2} \times \frac{16\times 15}{2} \times \frac{14\times 13}{2} \times \frac{12\times 11}{2} \times \frac{10\times 9}{2} \times \frac{8\times 7}{2} \times \frac{6\times 5}{2} \times \frac{4\times 3}{2} \times \frac{2\times 1}{2} = \frac{20!}{2^{10}}.$$
   Or, l'ordre des câbles n'a pas d'importance : les lettres reliées par le câble 1 auraient pu l'être par le câble 2. Au total, on peut permuter les 10 câbles de 10! façons différentes. Le nombre de câblages d'Enigma vaut donc $\dfrac{20!}{2^{10} \times 10!}$ soit 654729075
   (e) Le nombre de configurations de la machine Enigma vaut donc $60 \times 17576 \times 230230 \times 654729075$soit environ 1.59×10^{20} configurations possibles !
   (f) En supposant qu'un ordinateur soit capable de tester un milliard de configurations par seconde, il faudrait environ $\dfrac{1.59 \times 10^{20}}{10^9 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365}$ soit 5040 années !

XVI

Loi binomiale

46. Cours : Loi binomiale

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition 81 — Succession d'épreuves : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n.

L'univers Ω de la succession de ces n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

Les issues de cette succession d'expériences sont les n-uplets $(i_1\,;\,i_2\,;\,\ldots\,;\,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

■ **Exemple 188 :** On lance 2 fois un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde le numéro obtenu. L'univers de cette expérience est $\{1;2;3;4;5;6\}^2$. L'issue $(1\,;3)$ signifie que l'on a obtenu 1 au premier lancer et 3 au deuxième. ■

Définition 82 — Indépendance mutuelle : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n, de lois respectives $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, ... , $\mathbb{P}_n$.

Les épreuves sont dites mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour toute issue $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$, on a

$$\mathbb{P}((i_1,i_2,\ldots,i_n)) = \mathbb{P}_1(i_1) \times \mathbb{P}_2(i_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_n(i_n).$$

Autrement dit, la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités de chacune des composantes i_1, i_2, ..., i_n.

■ **Exemple 189 :** M. Lapeyronnie a décidé de faire un petit contrôle surprise à ses élèves. Il place les noms des élèves de la classe dans une urne et une liste d'exercices dans une autre.

- Il y a 29 élèves dans la classe. Parmi eux, 12 suivent l'option Maths expertes ;
- L'urne des exercices en contient 40 : 20 sur les fonctions, 15 sur les suites et 5 sur la géométrie.

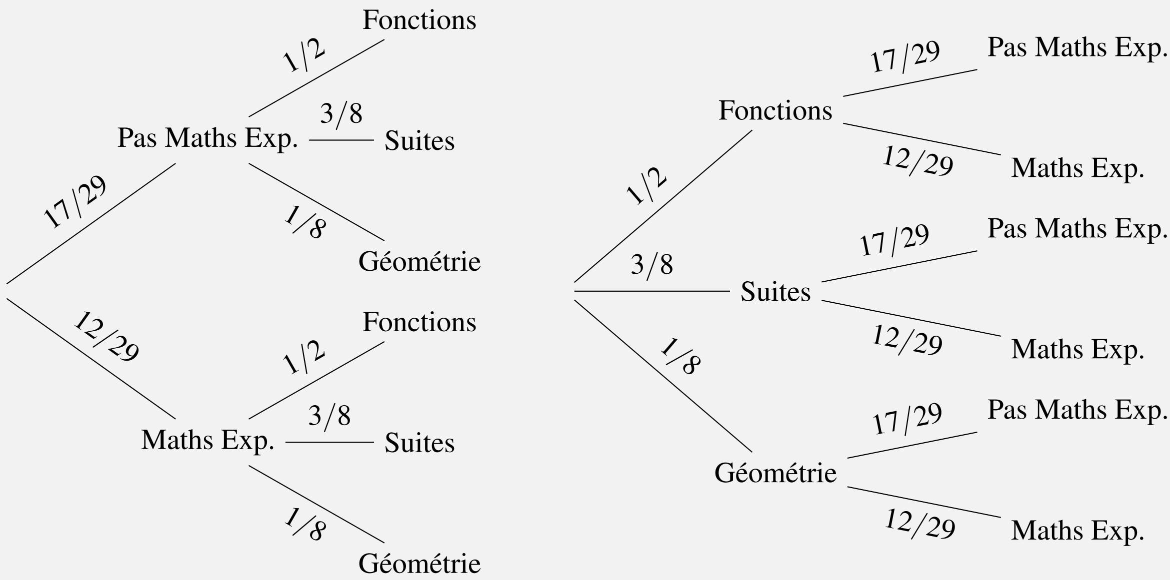
M. Lapeyronnie tire alors simultanément, de manière indépendante, un nom d'élève et un exercice.

- La probabilité qu'il s'agisse d'un élève suivant l'option Maths expertes est de $\dfrac{12}{29}$;
- La probabilité de tirer un exercice de géométrie est de $\dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$;
- La probabilité qu'un élève suivant l'option Maths Expertes soit envoyé au tableau faire un exercice de géométrie est donc de $\dfrac{12}{29} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{58}$.

■

Si l'on essaie de représenter une succession de n épreuves indépendantes sous la forme d'un arbre de probabilités, on place alors toujours le même sous-arbre à chaque noeud d'un étage fixé. De plus, cet arbre peut être construit "dans un sens comme dans l'autre".

■ **Exemple 190 :** Les arbres suivants traduisent la succession des deux épreuves précédentes.



■

■ **Exemple 191 :** Soit n un entier naturel. On lance n fois un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6. La probabilité de ne jamais obtenir le résultat 6 sur ces n lancers est alors de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ainsi, la probabilité d'obtenir une au moins une fois le résultat 6 sur ces n lancers vaut donc $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Par ailleurs, puisque $-1<\frac{5}{6}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)=1$.

Si l'on lance un grand nombre de fois un dé classique à six faces, la probabilité d'obtenir au moins une fois le résultat 6 est proche de 1.

On peut alors se demander combien de lances effectuer pour que cette probabilité dépasse 0,99. On cherche alors l'entier n à partir duquel $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}99$.

On a alors $-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant -0{,}01$ soit $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01$. On applique alors la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $]0;+\infty[$. On a donc $n\ln\left(\frac{5}{6}\right)\leqslant \ln(0{,}01)$. On divise alors par $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ qui est négatif, on aboutit à $n\geqslant\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$. Or, $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\simeq 25{,}3$.

Ainsi, à partir de 26 lancers de dés à six faces, on est certains à au moins 99% d'obtenir au moins une fois le résultat 6. ■

2 Epreuve de Bernoulli

Définition 83 — Epreuve de Bernoulli : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès S et l'échec $\overline{S}$. On note p la probabilité de succès, aussi appelé paramètre de l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'échec vaut donc $1-p$.

Une variable aléatoire X sur cet univers suit une loi de Bernoulli de paramètre p si on a $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$. On écrit $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Epreuve de Bernoulli

Issue	S	$\overline{S}$
Proba	p	$1-p$

Variable de Bernoulli

k	1	0
$\mathbb{P}(X=k)$	p	$1-p$

■ **Exemple 192 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si on considère le succès "Obtenir le nombre 6", cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{1}{6}$. ■

Propriété 102 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X]=p, \quad V(X)=p(1-p), \quad \sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration 59 : La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1. De plus $\mathbb{P}(X=0)=1-p$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$. Ainsi,

$$E[X]=0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

et

$$V(X)=\mathbb{P}(X=0)\times(0-E[X])^2+\mathbb{P}(X=1)\times(1-E[X])^2$$

d'où

$$V(X)=(1-p)\times(-p)^2+p\times(1-p)^2=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p).$$

□

Démonstration 60 — Avec la formule de Koenig-Huygens : On sait que $V(X)=E[X^2]-(E[X])^2$.
Or, la variable aléatoire X vaut soit 0, soit 1. Par ailleurs, $0^2=0$ et $1^2=1$. X et X^2 ont donc la même loi.
Ainsi, $E[X^2]=E[X]=p$. Finalement, $V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p(1-p)$.

□

■ **Exemple 193 :** Soit X un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0,2.
On a alors $E[X]=0{,}2$, $V(X)=0{,}2\times0{,}8=0{,}16$ et $\sigma(X)=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$. ■

3 Loi binomiale

3.1 Schéma de Bernoulli

Définition 84 — Schéma de Bernoulli : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une succession de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, chacune de paramètre p.

■ **Exemple 194 :** On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On considère comme succès « la pièce tombe sur FACE ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$. ■

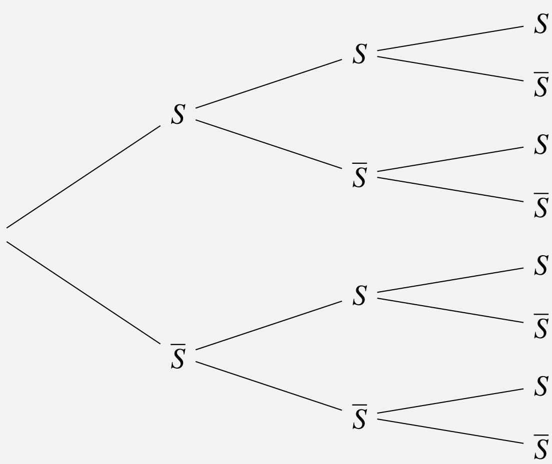
■ **Exemple 195 :** On lance 42 fois de suite un dé. On considère comme succès « le dé tombe sur 5 ou 6 ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 42 et $\frac{2}{3}$. ■

3.2 Coefficients binomiaux

Définition 85 — Coefficient binomial : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (k parmi n) est le nombre de chemins qui, dans un chemin de Bernoulli à n épreuves, aboutissent à exactement k succès.

■ **Exemple 196 :** On considère un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.



Pour obtenir 2 succès, il y a 3 chemins possibles : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS$. Ainsi, $\binom{3}{2} = 3$.

■

Propriété 103 : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n. On a alors $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On retrouve évidemment la formule établie lors du chapitre **Combinatoire et dénombrement**.

■ **Exemple 197 :** $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(2\times1)} = 5\times2 = 10.$ ■

3.3 Loi binomiale

Définition

Définition 86 — Loi binomiale : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves de paramètre p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

On écrit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

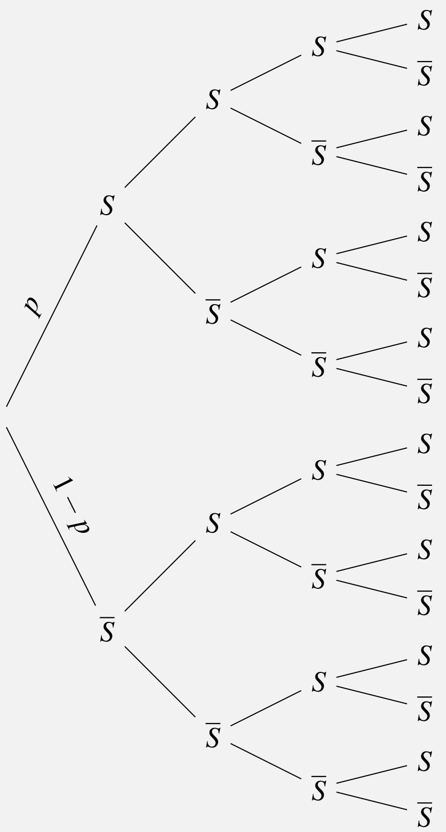
■ **Exemple 198 :** On lance une pièce équilibrée 5 fois de suite et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenus.

- On a bien des épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques ;
- Ces épreuves sont au nombre de 5.
- Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (ici, la probabilité d'obtenir FACE) vaut $\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\dfrac{1}{2}$. ■

Calcul de probabilités

■ **Exemple 199 :** On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et p. Ce schéma peut se traduire par l'arbre suivant :



Les chemins menant à deux succès sont $SS\overline{S}\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\overline{S}S$, $\overline{S}\overline{S}SS$, $\overline{S}S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS\overline{S}$. De plus,

- $\mathbb{P}(SS\overline{S}\overline{S}) = p\times p\times(1-p)\times(1-p) = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}S\overline{S}) = p\times(1-p)\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}\overline{S}S) = p\times(1-p)\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}\overline{S}SS) = (1-p)\times(1-p)\times p\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}S\overline{S}S) = (1-p)\times p\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}SS\overline{S}) = (1-p)\times p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$. ■

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue de ce schéma. On a donc

$$\mathbb{P}(X=2) = 6p^2(1-p)^2.$$

En modifiant cette écriture, on a en réalité

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^{4-2}.$$

Propriété 104 : Soit n un entier naturel, p un réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Démonstration 61 : On considère un schéma de Bernoulli de paramètre p à n épreuves.

L'ensemble des issues aboutissant à k succès correspond à l'ensemble des n-uplets de $\{S;\overline{S}\}$ ayant exactement k fois la lettre S : il y en a $\binom{n}{k}$.

Or, chacune de ces issues a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$: chacun des k succès a une probabilité de p et chacun des $n-k$ échecs a une probabilité $1-p$.

Ainsi, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. □

■ **Exemple 200 :** On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le nombre 4 ?

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus. X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 4, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $X=2$, c'est-à-dire "obtenir exactement 2 succès".

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{n}{2}\times p^2\times(1-p)^{n-2}=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{75}.$$

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 ?

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 6, en un lancer).

On cherche donc la probabilité de l'événement $Y\geqslant 1$, c'est-à-dire "obtenir au moins 1 succès". Il y a plusieurs manières de procéder.

- Décomposer l'événement $Y\geqslant 1$ en donnant tous les cas possibles : $Y=1$, $Y=2$ ou $Y=3$;
- Passer par le complémentaire : $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y<1)$.
  Or, la seule valeur pour laquelle $Y<1$ est $Y=0$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y=0)$.
  De plus, $\mathbb{P}(Y=0)=\binom{3}{0}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.
  Finalement, $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

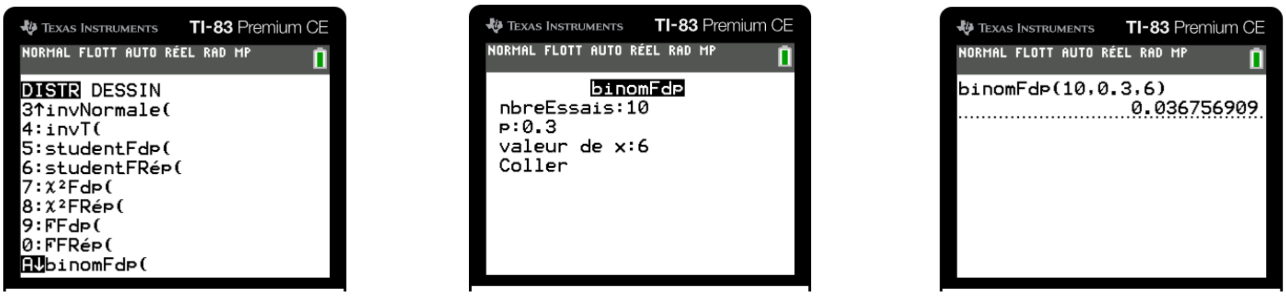
■

Avec la calculatrice

Texas Instruments : Appuyer successivement sur les touches **2nde** et **var**.

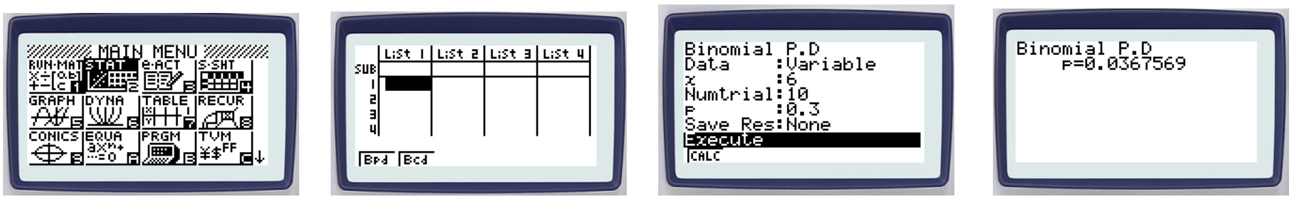
- Sélectionner **A binomFdp(** pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X=k)$.
- Sélectionner **B binomFrép(** pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X\leqslant k)$
- Pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X\geqslant k)$, on calculera $1-\mathbb{P}(X\leqslant k-1)$

Entrer alors les paramètres de la loi binomiale et la valeur du k souhaité puis valider.



Numworks : Sélectionner **Probabilités** sur l'écran d'accueil, puis Binomiale. Entrer alors les valeurs des paramètres n et p puis valider.
Vous pouvez calculer des probabilités de la forme $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$, $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ et $\mathbb{P}(X = k)$ en sélectionnant l'icône en haut à gauche de l'écran.

Casio Graph : Dans le menu principal, sélectionner **STAT**. Appuyer ensuite sur **F5 [DIST]** puis **F5 [BINM]**. Pour le calcul de $\mathbb{P}(X = k)$, appuyer sur **F1 [Bpd]**. Pour le calcul de $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, appuyer sur **F2 [Bcd]**.
Sur l'écran suivant, placer le curseur sur **Data** et appuyer sur **F2 [Var]**. Renseigner alors les valeurs des paramètres de la loi binomiale et les valeurs de k.



Espérance, variance, écart-type

Propriété 105 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X] = np, \quad Var(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

■ **Exemple 201 :** Un élève répond au hasard et de manière indépendante à un QCM de 20 questions. Chaque question laisse le choix entre 4 propositions dont une seule est correcte.

On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève. X désigne donc le nombre de succès (bonnes réponses) d'un schéma de Bernoulli à 20 épreuves, chaque épreuve ayant une probabilité de succès de $\dfrac{1}{4}$. X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}\left(20, \dfrac{1}{4}\right)$.

Ainsi, $E[X] = 20 \times \dfrac{1}{4} = 5$. L'élève peut espérer avoir 5 bonnes réponses. ■

47. Exercices

Succession d'épreuves indépendantes

► **Exercice 393**
On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde à chaque fois la face du dessus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres pairs ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 au premier lancer mais de ne pas en obtenir au deuxième et troisième lancer ?

► **Exercice 394**
Dix cartes sont placées sur la table, faces cachées : 2 piques, 4 carreaux et 4 trèfles. On sélectionne une carte au hasard, de manière uniforme. La carte est alors dévoilée et on note sa couleur. Puis elle est retournée et les cartes sont mélangées. On tire alors une autre carte et on regarde sa couleur. On notera P, C et T lorsque la carte choisie est respectivement un pique, un carreau ou un trèfle.

1. Construire l'arbre de probabilité de cette expérience. Combien a-t-on d'issues ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux trèfles ?
3. Quelle est la probabilité de tirer un pique puis un carreau ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas tirer de trèfle ?
5. Quelle est la probabilité de tirer deux cartes de la même couleur ?

► **Exercice 395**
Une urne renferme deux boules rouges, trois boules bleues et cinq boules jaunes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise trois boules dans l'urne

1. Quelle hypothèse permet d'affirmer que les tirages sont indépendants ?
2. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules jaunes ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis deux boules bleues ?
4. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de couleur différente ?

► **Exercice 396**
Au dernier examen d'une université, composé de trois exercices, 70% des élèves ont réussi l'exercice 1, 50% ont réussi le deuxième et 25% ont réussi le troisième. On suppose que la réussite d'un exercice est indépendante de la réussite de tous les autres. On interroge un étudiant uniformément au hasard.

1. Quelle est la probabilité que cet étudiant ait réussi les trois exercices ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'en ait réussi aucun ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi exactement un exercice ?

► **Exercice 397**
On lance n fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6, puis on regarde à chaque fois la face du dessus. On note A_n l'événement « le nombre 6 a été obtenu au moins une fois ».

1. Décrire l'événement $\overline{A_n}$ à l'aide d'une phrase puis déterminer $\mathbb{P}(\overline{A_n})$ et $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(A_n)$? Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. Combien de lancers faut-il effectuer pour être sûr à au moins 95% que l'on obtiendra au moins une fois le nombre 6 en n lancers ?

► Exercice 398

Un lycée présente n candidats au recrutement dans une école, où n est un entier naturel non nul. On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

1. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
2. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Loi binomiale

► Exercice 399

Pour chacune des situations suivantes, dire si la variable aléatoire suit ou non une loi binomiale. Si c'est le cas, préciser ses paramètres.

1. On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de fois où la pièce où l'on obtient PILE.
2. On lance simultanément 5 dés équilibrés à 6 faces, numérotées de 1 à 6 ainsi que 3 dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On note X le nombre de faces 3 obtenues.
3. On lance simultanément 5 dés équilibrés à 6 faces, numérotées de 1 à 6 ainsi que 3 dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On note X le nombre de faces 5 obtenues.
4. D'après un sondage, 65% des Français se rendent au restaurant au moins une fois par mois. On interroge 30 Français au hasard et on note X le nombre de Français qui vont au restaurant au moins une fois par mois dans cet échantillon. On suppose que ce tirage peut être assimilé à un tirage avec remise.
5. Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions. Pour chaque question, une seule réponse est correcte et l'élève en choisit une au hasard, indépendamment de ses autres réponses. On note X le nombre de réponses correctes à l'issue du questionnaire.
6. Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions. Pour chaque question, une seule réponse est correcte et l'élève en choisit une au hasard, indépendamment de ses autres réponses. Une réponse correcte rapporte 3 points, une réponse fausse en retire 1. On suppose que l'élève répond à toutes les questions et on note X le nombre de points de cet élève à l'issue du questionnaire.
7. On répète 10 fois l'opération suivante : on lance simultanément 3 pièces de monnaie équilibrée. Sur ces 10 expériences, on note X le nombre de fois où les 3 pièces de monnaie sont tombées du même côté.

► Exercice 400

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}\left(5;\dfrac{1}{3}\right)$. Calculer $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X\geqslant 4)$ et $\mathbb{P}(X<3)$

► Exercice 401 — Amérique du Nord 2023

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$. On sait que $\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{1}{125}$. Que vaut p ?

► Exercice 402

On lance 4 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 3 obtenus. Quelle est la loi de X ?
2. Que valent $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(X\leqslant 3)$?

► Exercice 403 — Amérique du Nord 2024
Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au dis-millième.

On choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. On admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65. On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 404
Une entreprise produit des composants électroniques, dont on estime que 5% d'entre eux sont défectueux. On prélève 10 composants parmi le stock. On suppose que le stock est assez grand pour que cette sélection soit assimilée à un tirage avec remise dans le stock. On note X le nombre de composants défectueux ainsi piochés.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse ?
3. Que vaut $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$?
4. Combien de composants doit-on prélever pour être sûr à au moins 99% de piocher au moins un composant défectueux dans ce lot ?

► Exercice 405
On lance quatre fois une pièce équilibrée et on regarde sur quel côté elle tombe. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de PILE

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quel est la probabilité de ne tomber aucune fois sur PILE ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 PILE ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 PILE ?
5. En moyenne, combien obtiendra-t-on de PILE ?
6. Reprendre les questions précédentes en lançant 5 fois une pièce truquée dont la probabilité de tomber sur PILE vaut 0.6.

► Exercice 406
Dans cet exercice, les probabilités calculées seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Une entreprise produit des stylos en grande quantité. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est de 0,1.

On prélève 10 stylos dans le stock de cet entreprise. On suppose que le nombre de stylos produits est suffisamment grand pour que cette sélection soit assimilée à des tirages indépendants et avec remise. On note X le nombre de stylos défectueux ainsi piochés.

1. Quelle est la loi de X ? On précisera ses paramètres.
2. Donner l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement un stylo défectueux.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un stylo défectueux.
5. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux stylos défectueux.

► Exercice 407 — Asie 2024

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7% des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   (d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   (e) Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 408 — Asie 2015

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. A chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible 12 fois ?

► Exercice 409

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On suppose que $E[X] = 3{,}36$ et $\sigma(X) = 1{,}68$.

Calculer $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$. On donnera une réponse arrondie au dix-millième.

► Exercice 410

Une urne contient un très grand nombre de boules rouges et de boules noires, indiscernables au toucher. On note p la proportion de boules rouges dans cette urne. On tire 20 fois, et avec remise, une boule dans cette urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On effectue un tel tirage et on obtient alors 5 boules rouges. À partir de cette information, on souhaite déterminer le nombre de boules rouges dans l'urne en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance : cette méthode consiste à déterminer la valeur de la proportion p pour laquelle la probabilité $\mathbb{P}(X = 5)$ est maximale.

2. Exprimer $\mathbb{P}(X = 5)$ en fonction de p.
3. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on note $f(x) = x^5(1-x)^{15}$. On admet que la fonction f ainsi définie est dérivable sur $[0;1]$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = -5x^4(4x-1)(1-x)^{14}$.
   (b) En déduire que f admet un maximum sur $[0;1]$ en une valeur que l'on précisera.
4. Conclure à l'aide des résultats précédents.

Exercices de synthèse

► Exercice 411 — Réunion 2023

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE. On suppose que chaque client achète un seul matelas. On dispose des informations suivantes :

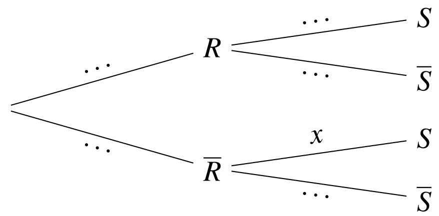
- 20% des clients achètent un matelas RESSORTS. Parmi eux, 90% sont satisfaits de leur achat.
- 82% des clients sont satisfaits de leur achat.

On choisit uniformément au hasard un client et on note les évènements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$ où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.



2. Démontrer que $x = 0{,}8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.
4. On choisit 5 clients au hasard. On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   (a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}
5. Soit n un entier naturel non nul. On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   (a) On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
   Démontrer que $p_n = 0{,}82^n$.
   (b) Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0.01$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 412 — Antilles - Guyane 2016

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65% de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8% des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5% des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : " l'ampoule provient de la machine A " ;
- B : " l'ampoule provient de la machine B " ;
- D : " l'ampoule présente un défaut ".

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   (a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0, 9305.
   (c) L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle vienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X le nombre d'ampoules sans défaut ainsi obtenues.
   (a) Quelle est la loi de X ? On précisera ses paramètres.
   (b) Quelle est la probabilité qu'exactement une ampoule présente un défaut ?
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

► Exercice 413 — Amérique du Nord 2021

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.
Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage. Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme. On note D l'événement « l'athlète est dopé » et T « le test est positif ». On admet que la probabilité de l'événement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $\mathbb{P}(T) = 0{,}083$.
3. (a) Si un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95. Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète présente un test positif est 0,103.

4. Dans cette question, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer l'espérance $E[X]$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
5. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

► Exercice 414 — Centres étrangers 2023

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé. Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification. Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est 0,6.
- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés. Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.

Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- Condition 1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80% des cas.
- Condition 2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.

Le jeu peut-il être retenu ?

48. Corrigés

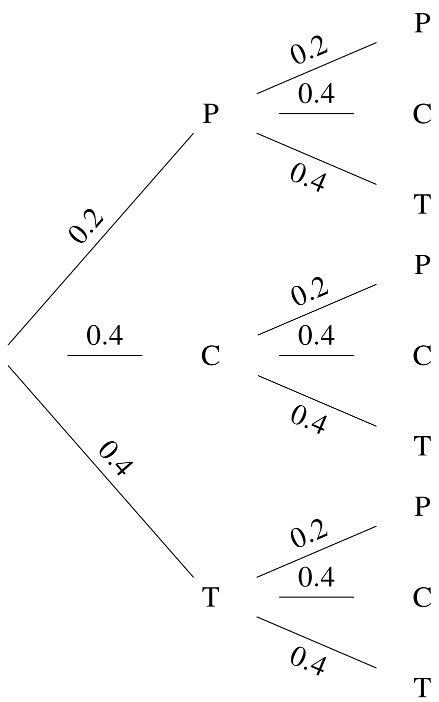
► Correction 393

À chaque lancer, on a une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'obtenir un nombre pair. La probabilité d'obtenir 3 nombres pairs vaut donc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

La probabilité d'obtenir un 6 au premier lancer vaut $\frac{1}{6}$. La probabilité de ne pas obtenir 6 au deuxième lancer vaut $\frac{5}{6}$, et de même pour le troisième lancer. La probabilité recherchée est donc $\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$

► Correction 394

On peut construire l'arbre pondéré suivant



La probabilité de tirer deux trèfles vaut $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$.

La probabilité de tirer un pique puis un carreau vaut $0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$.

La probabilité de ne pas tirer de trèfle vaut $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

La probabilité de tirer deux piques vaut $0{,}2 \times 0{,}2 = 0{,}04$. Celle de tirer deux carreaux vaut $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$ et celle de tirer deux trèfles vaut aussi $0{,}16$. Finalement, la probabilité de tirer deux cartes de la même couleur veut $0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}04 = 0{,}36$

► Correction 395

Le fait de remettre la boule tirée dans l'urne permet d'affirmer que les tirages sont indépendants

La probabilité de tirer 3 boules jaunes, c'est-à-dire la probabilité du triplet $(J;J;J)$ est de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

La probabilité de tirer une boule rouge puis deux boules bleues, c'est à-dire la probabilité du triplet $(R;B;B)$ vaut $\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{500}$

Les issues ayant 3 boules de couleurs différentes sont $(J;B;R)$, $(J;R;B)$, $(B;R;J)$, $(B;J;R)$, $(R;B;J)$ et $(R;J;B)$. Elles sont au nombre de 6, sont naturellement disjointes, et ont toutes les trois la même probabilité, à savoir $\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{100}$. La probabilité de tirer trois boules de couleur différente vaut donc $6\times\frac{3}{100}=\frac{9}{50}$

► Correction 396

La probabilité que cet étudiant ait réussi les trois exercices vaut $0.7\times 0.5\times 0.25=0.0875$

La probabilité qu'il n'en ait réussi aucun vaut $(1-0.7)\times(1-0.5)\times(1-0.25)=0.1125$

La probabilité qu'il ait seulement réussi l'exercice 1 vaut $0.7\times(1-0.5)\times(1-0.25)=0.2525$. La probabilité qu'il ait seulement réussi l'exercice 2 vaut $(1-0.7)\times 0.5\times(1-0.25)=0.1125$. La probabilité qu'il ait seulement réussi l'exercice 3 vaut $(1-0.7)\times(1-0.5)\times 0.25=0.0375$ La probabilité qu'il ait réussi exactement un exercice vaut donc $0.2625+0.1125+0.0375=0.4125$.

► Correction 397

$\overline{A_n}$ est l'événement « le nombre de 6 n'a été obtenu aucune fois ». Chaque lancer étant indépendant, sa probabilité vaut $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ainsi, $\mathbb{P}(A_n)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Puisque $-1<\frac{5}{6}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n)=1$. en lançant le dé un grand nombre de fois, on est quasiment certain d'obtenir au moins une fois le nombre 6.

Cherchons les entiers n tels que $=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geqslant 0.95$. On a alors $-\left(\frac{5}{6}\right)^n\geqslant -0.05$ et donc $\left(\frac{5}{6}\right)^n\leqslant 0.05$. On applique alors le logarithme népérien, qui est croissant sur $]0;+\infty[$, et on a donc $n\ln\left(\frac{5}{6}\right)\leqslant\ln(0.05)$.

En divisant par $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ qui est négatif, on aboutit alors à $n\geqslant\frac{\ln(0.05)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\simeq 16.4$.

En lançant 17 fois le dé, on a plus de 95% de chances d'obtenir au moins une fois le nombre 6.

► Correction 398

La probabilité qu'aucun élève ne soit admis vaut 0.76^n.

La probabilité qu'au moins un élève soit admis vaut donc $1-0.76^n$. Or, $1-0.76^n\geqslant 0.99$ si et seulement si $-0.76^n\geqslant -0.01$ soit $0.76^n\leqslant 0.01$. On applique alors le logarithme népérien, qui est croissant sur $]0;+\infty[$, et on a donc $n\ln(0.76)\leqslant\ln(0.01)$.

En divisant par $\ln(0.76)$ qui est négatif, on aboutit alors à $n\geqslant\frac{\ln(0.01)}{\ln(0.76)}\simeq 16.8$. A partir de 17 candidats, la probabilité qu'un élève du lycée soit admis dans cette école est supérieure à 99%.

► Correction 399

1. X compte le nombre de succès (obtenir Pile) après une succession de 3 lancers identiques indépendants. La probabilité de succès sur une épreuve est de $\frac{1}{2}$. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{2}$.
2. Les expériences ne sont pas identiques : la probabilité d'obtenir un 3 sur un dé à 6 faces vaut $\frac{1}{6}$ alors que pour un dé à 4 faces, elle vaut $\frac{1}{4}$. X ne suit donc pas une loi binomiale.

3. Il n'est pas possible d'obtenir 5 sur un dé à 4 faces, seuls les dés à 6 faces importent donc. On compte le nombre de succès après une succession de 5 lancers identiques et indépendants. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{6}$.
4. Le tirage est assimilé à un tirage avec remise, ce qui suppose donc que les tirages sont indépendants. X compte alors le nombre de succès (la personne tirée au hasard va au restaurant au moins une fois par mois) d'une répétition de 30 tirages. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}65$.
5. Les réponses étant données de manière identique et indépendante, X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{1}{4}$.
6. Ici, X ne compte pas le nombre de succès mais un nombre de points. X ne suit donc pas une loi binomiale.
7. La probabilité que les pièces tombent sur la même face est de $\frac{1}{4}$. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

► Correction 400

$\mathbb{P}(X=1) = \binom{5}{1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \times \frac{1}{3} \times \frac{16}{81} = \frac{80}{243}$

D'une part, $\mathbb{P}(X \geqslant 4) = \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5)$. Or,

- $\mathbb{P}(X=4) = \binom{5}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} = 5 \times \frac{1}{81} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{243}$
- $\mathbb{P}(X=5) = \binom{5}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243}$
- Ainsi, $\mathbb{P}(X \geqslant 4) = \frac{11}{243} + \frac{1}{243} = \frac{12}{243}$

D'une part, $\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$. Or,

- $\mathbb{P}(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$
- $\mathbb{P}(X=1) = \frac{80}{243}$ d'après la question 1
- $\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27} = \frac{80}{243}$
- Ainsi, $\mathbb{P}(X < 3) = \frac{32}{243} + \frac{80}{243} + \frac{80}{243} = \frac{192}{243} = \frac{64}{81}$

► Correction 401

On sait que $\mathbb{P}(X=0) = \binom{3}{0} p^0 (1-p)^3 = (1-p)^3 = \frac{1}{125}$. Ainsi, $1 - p = \frac{1}{5}$ et $p = \frac{4}{5}$.

► Correction 402

X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{6}$.

On a $\mathbb{P}(X=1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = \frac{125}{324}$

On peut calculer pour toutes les issues qui vérifient $X \leqslant 3$:

$$\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$$

Or,

- $\mathbb{P}(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$

- $\mathbb{P}(X=1)=\dfrac{125}{324}=\dfrac{500}{1296}$
- $\mathbb{P}(X=2)=\dbinom{4}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{150}{1296}$
- $\mathbb{P}(X=3)=\dbinom{4}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{5}{6}\right)^1=\dfrac{20}{1296}$

Ainsi, $\mathbb{P}(X\leqslant 3)=\dfrac{1295}{1296}$. Il est aussi possible (et plus facile) de calculer la probabilité de l'événement complémentaire $X>3$. Celui-ci est composé d'une seule issue.

$$\mathbb{P}(X>3)=\mathbb{P}(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{1296}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X\leqslant 3)=1-\mathbb{P}(X>3)=1-\frac{1}{1296}=\frac{1295}{1296}$$

► Correction 403

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=500$ et $p=0{,}65$. En utilisant la calculatrice, on trouve $\mathbb{P}(X=325)\simeq 0{,}0374$ et $\mathbb{P}(X\geqslant 325)\simeq 0{,}5206$.

► Correction 404

La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,05.

La probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse correspond à $\mathbb{P}(X=0)$. $\mathbb{P}(X=0)=0.95^{10}\simeq 0.599$.

On a $\mathbb{P}(X\leqslant 2)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)$. Or,

- $\mathbb{P}(X=0)=0.95^{10}$
- $\mathbb{P}(X=1)=10\times 0.05\times 0.95^9=0.5\times 0.95^9$
- $\mathbb{P}(X=2)=45\times 0.05^2\times 0.95^8=0.1125\times 0.9^8$
- Finalement $\mathbb{P}(X\leqslant 2)=0.95^{10}+0.5\times 0.95^9+0.1125\times 0.9^8\simeq 0.988$

Il y a environ 98,8 % de chances que le nombre de pièces défectueuses soit inférieur ou égal à 2.

Soit n le nombre de composants prélevés et Y le nombre de composants défectueux obtenus.
On a $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y=0)=1-0.95^n$. Or, $1-0.95^n\geqslant 0.99$ ssi $0.95^n\leqslant 0.01$. En appliquant le logarithme népérien, qui est croissant sur $]0:+\infty[$, on obtient alors $n\ln(0.95)\leqslant\ln(0.01)$ puis en divisant par $\ln(0.95)$, qui est négatif, on aboutit à $n\geqslant\dfrac{\ln(0.01)}{\ln(0.95)}\simeq 89.8$. Il faut donc prélever 90 pièces pour être sûr à au moins 99% d'en avoir au moins une défectueuse.

► Correction 405

X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\dfrac{1}{2}$.

La probabilité de ne tomber aucune fois sur PILE correspond à $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=0)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

La probabilité d'obtenir exactement 2 PILE correspond à $\mathbb{P}(X=2)$

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

La probabilité d'obtenir au plus 2 PILE correspond à $\mathbb{P}(X\leqslant 2)$, soit $\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)$. Il reste à calculer $\mathbb{P}(X=1)$

- $\mathbb{P}(X=1)=\binom{4}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^3}=\frac{3}{8}$
- Ainsi, $\mathbb{P}(X\leqslant 2)=\frac{1}{16}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{13}{16}$

On a $E[X]=4\times 0.5=2$. En moyenne, on obtient 2 PILE.

Si maintenant on lance 5 fois une pièce truquée dont la probabilité de tomber sur PILE vaut 0.6. Notons Y la variable aléatoire qui compte le nombre de PILE obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0.6.

On a alors $\mathbb{P}(Y=0)=0.4^5=0.01024$, $\mathbb{P}(Y=2)=\binom{5}{2}\times 0.6^2\times 0.4^3=0.2304$.

Par ailleurs, $\mathbb{P}(Y=1)=\binom{5}{1}\times 0.6^1\times 0.4^4=0.0768$.

Ainsi, $\mathbb{P}(Y\leqslant 2)=0.01024+0.0768+0.2304=0.31744$.

Enfin, $E[Y]=5\times 0.6=3$. En moyenne, on obtiendra 3 PILE.

► **Correction 406**

1. X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0.1.
2. On a $E(X)=10\times 0.1=1$ et $Var(X)=10\times 0.1\times(1-0.1)=0.9$.
3. On a a $\mathbb{P}(X=1)=\binom{10}{1}\times 0.1^1\times 0.9^9\simeq 0.387$.
4. On a $\mathbb{P}(X\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(X=0)=1-0.9^{10}\simeq 0.651$
5. On a $\mathbb{P}(X\leqslant 2)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)$
   Ainsi, $\mathbb{P}(X\leqslant 2)=0.9^{10}+\binom{10}{1}\times 0.1^1\times 0.9^9+\binom{10}{2}\times 0.1^2\times 0.9^98\simeq 0.930$

► **Correction 407**

1. On a $\mathbb{P}(I)=0{,}057$.
2. (a) Le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, ce qui signifie que les personnes sélectionnées le sont de manière identique et indépendante. X compte le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à 100 épreuves, de probabilité de succès 0,057. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}057$.
   (b) On a $E[X]=100\times 0{,}057=5{,}7$. Sur un échantillon de 100 personnes, en moyenne 5,7 d'entre elles ont déjà été infectées par la COVID 19.
   (c) On a $\mathbb{P}(X=0)=\binom{100}{0}\times 0{,}057^0\times(1-0{,}057)^0\simeq 0{,}0028$.
   (d) On a $\mathbb{P}(X\geqslant 2)\simeq 0{,}9801$.
   (e) On trouve $\mathbb{P}(X\leqslant 8)\simeq 0{,}8829$ et $\mathbb{P}(X\leqslant 9)\simeq 0{,}9408$. L'entier recherché est donc 9. Cela signifie que sur un échantillon de 100 personnes, la probabilité qu'au plus 9 d'entre elles aient déjà été infectées par la COVID 19 est supérieure à 0,9.

► **Correction 408**
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de flèches qui atteignent la cible en 4 tirs. Les tirs étant indépendants, X suit une loi binomiale de paramètres 4 et 0.8. Ainsi, $\mathbb{P}(X=3)=\binom{4}{3}0.8^3\times 0.2^1=0.4096$.

Soit n un entier naturel et Y la variable aléatoire qui compte le nombre de flèches qui atteignent la cible en n

tirs. Les tirs étant indépendants, Y suit une loi binomiale de paramètres n et 0.8. Par ailleurs, $E(Y) = 0.8n$. Ainsi, $E(Y) = 12$ si $n = 15$. Il lui faut 15 flèches pour espérer atteindre la cible 12 fois.

► Correction 409

On sait que $E[X] = np = 3{,}36$ et $V(X) = \sigma(X)^2 = 2{,}8224 = np(1-p) = 3{,}36 \times (1-p)$. Ainsi, $1 - p = \dfrac{2{,}8824}{3{,}36} = 0{,}84$ et donc $p = 0{,}16$.

Ainsi, on a $np = 3{,}36$ soit $n = \dfrac{3{,}36}{0{,}16} = 21$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 21$ et $p = 0{,}84$. On trouve alors $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5) \simeq 0{,}7655$.

► Correction 410

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et p.
2. On a $\mathbb{P}(X = 5) = \dbinom{20}{5} \times p^5 \times (1-p)^{15}$.
3. (a) Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f'(x) = 5x^4 \times (1-x)^{15} + x^5 \times (-15)(1-x)^{14} = 5x^4 \times (1-x)^{14} \times ((1-x) - 3x)$. Finalement, on a $f'(x) = -5x^4(4x-1)(1-x)^{14}$.

   (b) Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $-5x^4 \leqslant 0$ et $(1-x)^{14} \geqslant 0$. $f'(x)$ est donc du signe opposé à $4x - 1$.

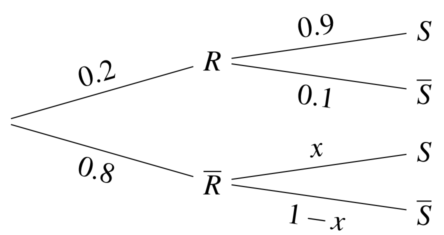
x	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

   La fonction f admet un maximum sur $[0;1]$ en $\dfrac{1}{4}$.

4. On remarque que $\mathbb{P}(X = 5) = \dbinom{20}{5} f(p)$. Cette probabilité est donc maximale lorsque f est maximale, c'est-à-dire pour $p = \dfrac{1}{4}$. La méthode d'estimation par maximum de vraisemblance nous indique donc que la proportion de boules rouges dans l'urne est de $\dfrac{1}{4}$.

► Correction 411

1. L'arbre pondéré ci-dessous décrit la situation



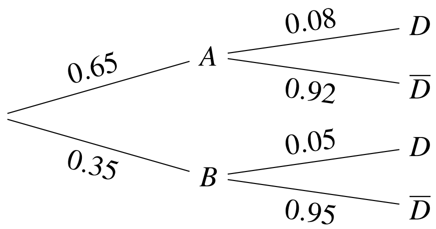
2. $(R;\overline{R})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $P(S) =$

$P(S \cap R) + P(S \cap \overline{R})$. On a donc $0.82 = 0.8x + 0.2 \times 0.9$ soit $0.8x = 0.64$ et $x = \dfrac{0.64}{0.8} = 0.8$.

3. On a $P_S(R) = \dfrac{P(R \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.2 \times 0.9}{0.82} \simeq 0.22$
4. (a) X suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0.82.
   (b) On cherche $P(X \leqslant 3)$. On procède en calculant la probabilité de l'événement contraire.
   $P(X \leqslant 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - P(X = 4) - P(X = 5)$.
   Ainsi, $P(X \leqslant 3) = 1 - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times 0.82^4 \times (1 - 0.82)^{5-4} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0.82^5 \times (1 - 0.82)^0 \simeq 0.222$
5. Soit n un entier naturel non nul. On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   (a) Pour un client, la probabilité que celui-ci soit satisfait de son achat est de 0.82. Par indépendance, la probabilité que les n clients soient satisfaits vaut $0{,}82^n$.
   (b) Par croissance du logarithme népérien sur $]0; +\infty[$, $0.82^n < 0.01$ ssi $n \ln(0.82) < \ln(0.01)$ soit $n > \dfrac{\ln(0.82)}{\ln(0.01)} \simeq 23.2$. Si l'on prend 24 acheteurs ou plus, la probabilité que tous soient satisfaits de leur achat est inférieure à 1%.

► Correction 412

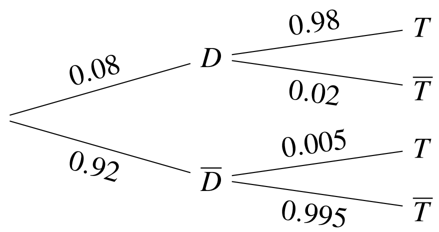
1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   (a) L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation



   (b) $(A; B)$ forme un système complet d'événements. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, $P(\overline{D}) = P(A \cap \overline{D}) + P(B \cap \overline{D})$. Ainsi, $P(\overline{D}) = 0.65 \times 0.92 + 0.35 \times 0.95 = 0.9305$.
   (c) On a $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{P(\overline{D} \cap A)}{P(\overline{D}} = \dfrac{0.598}{0.9305} \simeq 0.643$
2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X le nombre d'ampoules sans défaut ainsi obtenues.
   (a) X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0.92.
   (b) On a $P(X = 9) = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} 0.92^9 \times (1 - 0.92)^{10-9} \simeq 0.377$
   (c) On a $P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix} 0.92^9 \times (1 - 0.92)^{10-9} + 0.92^{10} \simeq 0.812$.

► Correction 413

1. L'arbre pondéré ci-dessous décrit la situation



2. $(D;\overline{D})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $P(T) = P(T\cap D) + P(T\cap\overline{D})$. Ainsi, $P(T) = 0.08\times 0.98 + 0.92\times 0.005 = 0.083$
3. (a) On a $P_T(D) = \dfrac{P(T\cap D)}{P(T)} = \dfrac{0.08\times 0.92}{0.083} \simeq 0.945$.
   (b) $0.945 < 0.95$. Le test ne sera donc pas commercialisé.
4. Dans cette question, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   (a) X suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0.103
   (b) $E[X] = 5\times 0.103 = 0.515$. Sur un très grand nombre de contrôle, il y aura en moyenne 1 athlète positif sur 10.
   (c) On a $P(X\geqslant 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) = 1-(1-0.103)^5 \simeq 0.419$.
5. Soit n un entier naturel et Y la variable aléatoire qui compte le nombre d'athlètes positifs en n tests. Y suit une loi binomiale de paramètres n et 0.103. Par ailleurs, $P(Y\geqslant 1) = 1-P(Y=0) = 1-0.897^n$. Or, $1-0.897^n \geqslant 0.75$ ssi $0.897^n \leqslant 0.25$ ssi $n\ln(0.897)\leqslant \ln(0.25)$ par croissance du logarithme népérien. Finalement, on a $n\geqslant \dfrac{\ln(0.25)}{\ln(0.897)} \simeq 12.75$. Il faut contrôler au minimum 13 athlètes pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75.

► Correction 414

Notons X la variable aléatoire qui donne le nombre de candidats qui passent la deuxième épreuve. X suit une loi binomiale de paramètres 4 et 0.6.

On a $P(X=2) = \dbinom{4}{2}\times 0.6^2\times 0.4^2 = 0.3456$, $P(X=3) = \dbinom{4}{3}\times 0.6^3\times 0.4^1 = 0.3456$ et $P(X=4) = \dbinom{4}{4}\times 0.6^4\times 0.4^0 = 0.1296$.

Ainsi, $P(X\geqslant 2) = 0.3456+0.3456+0.1296 = 0.8208 > 0.8$. La condition 1 est donc respectée.

Soit T la variable aléatoire donnant le temps de la deuxième phase. T prend les valeurs 0, 5, 9 et 11. De plus, $P(T=5) = P(X=2) = 0.3456$, $P(T=9) = P(X=3) = 0.3456$ et $P(T=11) = P(X=4) = 0.1296$. Ainsi, $P(T=0) = 1-0.3456-0.3456-0.1296 = 0.1792$

k	0	5	9	11
$P(T=k)$	0.1792	0.3456	0.3456	0.1296

Ainsi, $E[T] = 0\times 0.1792 + 5\times 0.3456 + 9\times 0.3456 + 11\times 0.1296 = 6.264 > 6$. La durée moyenne de la deuxième phase excède 6 minutes. La condition 2 n'est pas respectée et le jeu ne peut pas être programmé.

XVII

Loi des grands nombres

49. Cours : Loi des grands nombres

1 Opérations sur les variables aléatoires

1.1 Sommes et produits par un réel

Définition 87 : Soit X une variable aléatoires réelle, définie sur Ω. Soit a un réel non nul et b un réel.

La variable aléatoire $aX+b$ est définie par : pour tout $\omega \in \Omega$, $(aX+b)(\omega) = a \times X(\omega) + b$

Ainsi, pour tout réel k, on a $\mathbb{P}(aX+b=k) = \mathbb{P}\left(X = \dfrac{k-b}{a}\right)$.

■ **Exemple 202 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-2	3	7
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

On note Y la variable aléatoire telle que $Y = 3X-1$.
Puisque X prend les valeurs -2, 3 et 7, Y prend les valeurs -7, 8 et 20.
Par ailleurs, $\mathbb{P}(Y=-7) = \mathbb{P}(3X-1=-7) = \mathbb{P}(X=-2)$.
La loi de Y peut être résumée par le tableau ci-contre.

k	-7	8	20
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

■

■ **Exemple 203 :** On considère le jeu suivant : on paye 10 euros puis on lance 4 dés équilibrés à 6 faces, numérotés de 1 à 6. On remporte alors 6 euros par dé qui tombe sur le nombre 6.

Notons X le nombre de 6 obtenus et Y le gain en euros à l'issue de ce jeu. X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{6}$.

Par ailleurs, on a $Y = 6X-10$. En effet, -10 représente le coût fixe du jeu, et $6X$ le gain, 6 euros par numéro 6 obtenu. Il est donc facile d'obtenir la loi de Y à partir de celle de X.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

k	-10	-4	2	8	14
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{625}{1296}$	$\frac{125}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{324}$	$\frac{1}{1296}$

■

1.2 Variables aléatoires indépendantes

Définition 88 : Soit n un entier naturel et X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires définies sur un univers Ω.

On dit que les variables aléatoires X_1, X_2, ... X_n sont mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour tous réels x_1, x_2, ..., x_n, on a

$$\mathbb{P}(X = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap \ldots \cap X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

■ **Exemple 204 :** On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6.On appelle X le numéro obtenu au premier lancer, Y le numéro obtenu au deuxième lancer et Z le numéro obtenu au troisième lancer. Alors, les variables aléatoires X, Y, et Z sont indépendantes.

Plus généralement, si l'on considère une succession d'épreuves aléatoires indépendantes, chacune étant reliée à une variable aléatoire réelle, alors ces variables aléatoires sont indépendantes. ■

1.3 Somme de deux variables aléatoires

Définition 89 : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω.

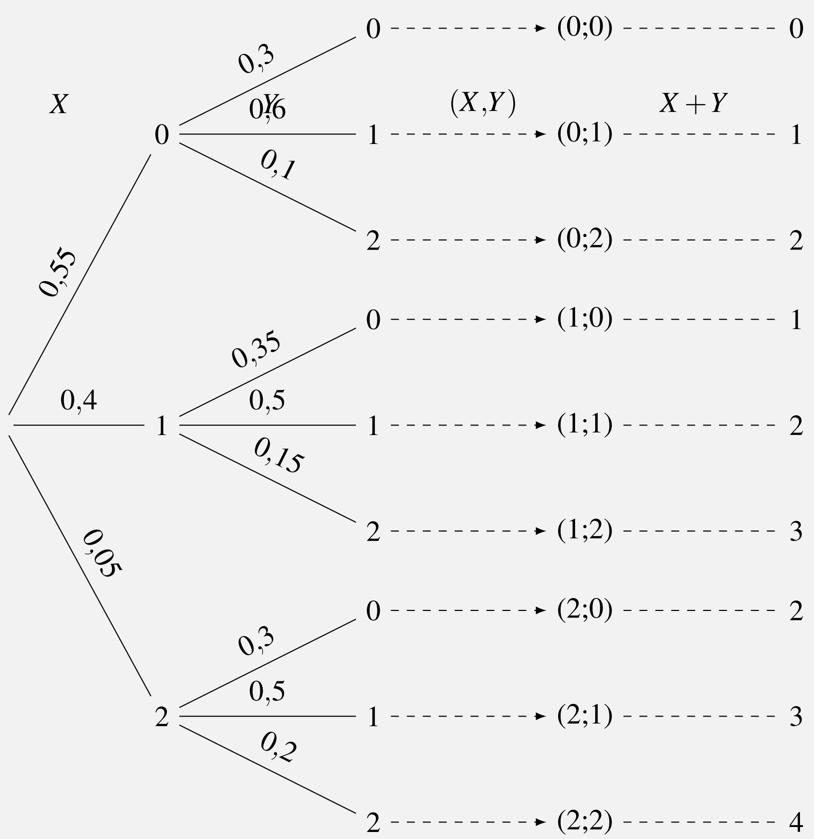
La variable aléatoire $Z = X + Y$ est définie par : pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$.

Par ailleurs, pour tout réel k, on a $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j))$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, on a alors $\mathbb{P}(Z = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$.

■ **Exemple 205 :** Un supporter de football a étudié le nombre de buts marqués par son équipe au cours d'une saison. On considère un match au hasard de cette équipe et on appelle X le nombre de buts marqué par cette équipe en première mi-temps de ce match et Y le nombre de buts marqués en second mi-temps. Ainsi, $X + Y$ représente le nombre de buts marqués par l'équipe en question au cours du match.

D'après l'étude de ce supporter, on peut construire l'arbre de probabilités suivant.



La variable aléatoire $X + Y$ prend alors les valeurs 0, 1, 2, 3 et 4.

Il est alors possible d'établir la loi de en s'appuyant sur cet arbre de probabilités. Par exemple, on a

$$\mathbb{P}(X+Y=1)=\mathbb{P}(X=0\cap Y=1)+\mathbb{P}(X=1\cap Y=0)=0{,}55\times 0{,}6+0{,}4\times 0{,}35=0{,}47$$

La loi de $X+Y$ peut alors être résumée dans le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	0,165	0,47	0,27	0,085	0,01

■

2 Espérance et variance d'une somme de variables

2.1 Cas général

Propriété 106 : Soit X et Y deux variables aléatoires, a et b deux réels. On a

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad \text{et} \qquad E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

■ **Exemple 206 :** On considère le jeu suivant : la participation est fixée à 8 euros. On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on remporte deux fois la somme inscrite sur le dé. On considère la variable aléatoire X qui donne le résultat du lancer et Y le gain du joueur, positif ou négatif. On a alors $Y=2X-8$.

L'espérance de X est 3,5. Ainsi, $\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(2X-8)=2\mathbb{E}(X)-8=2\times 3{,}5-8=-1$.
L'espérance étant négative, le jeu est défavorable au joueur. ■

■ **Exemple 207 :** On reprend l'exemple précédent de l'étude du supporter. La loi de X s'obtient simplement à l'aide du premier sous-arbre. La loi de $X+Y$ avait été déterminée.

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0,55	0,4	0,05

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X+Y=k)$	0,165	0,47	0,27	0,085	0,01

On a alors $E[X]=1\times 0{,}4+2\times 0{,}05=0{,}5$ et $E[X+Y]=1\times 0{,}47+2\times 0{,}27+3\times 0{,}085+4\times 0{,}01=1{,}305$.
Or, $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$. Ainsi, $E[Y]=E[X+Y]-E[X]=1{,}305-0{,}5=0{,}805$.

Il est aussi possible de déterminer la loi de la variable aléatoire Y. En effet, les événements $\{X=0\}$, $\{X=1\}$ et $\{X=2\}$ forment une partition de l'univers. Ainsi, d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y=0)=\mathbb{P}(Y=0\cap X=0)+\mathbb{P}(Y=0\cap X=1)+\mathbb{P}(Y=0\cap X=2)=0{,}55\times 0{,}3+0{,}4\times 0{,}35+0{,}05\times 0{,}3.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y=0)=0{,}32$. On calcule de la même manière $\mathbb{P}(Y=1)$ et $\mathbb{P}(Y=2)$ pour obtenir le tableau suivant.

k	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,32	0,555	0,125

On retrouve alors que $E[Y]=0\times 0{,}32+1\times 0{,}555+2\times 0{,}125=0{,}805$. ■

Remarque : Dans l'exemple précédent, les variables aléatoires X et Y n'étaient pas indépendantes, et pourtant, l'espérance de la somme pouvait être exprimée comme la somme des espérances.

L'hypothèse d'indépendance des variables aléatoires est toutefois primordiales pour la propriété qui suit.

Propriété 107 : Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes**, a un réel.

$$V(aX) = a^2 \times V(X) \qquad \text{et} \qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

Il est important de ne pas oublier le carré : une variance est toujours positive !

Attention également à ne pas se faire piéger lorsque l'on calcule la variance de la somme.
Si X et Y sont deux variables aléatoire réelles indépendantes, alors

$$V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + (-1)^2 V(Y) = V(X) + V(Y).$$

■ **Exemple 208 :** Toujours dans l'exemple précédente, on peut comparer les variances de X, Y et $X+Y$.

Calculons la variance de X. On rappelle pour cela la formule de Koenig-Huygens : $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0,55	0,4	0,05

k	0	1	4
$\mathbb{P}(X^2=k)$	0,55	0,4	0,05

Ainsi, $E[X^2] = 0\times 0{,}55 + 1\times 0{,}4 + 4\times 0{,}05 = 0{,}6$ et donc $V(X) = 0{,}6 - 0{,}5^2 = 0{,}35$.

De même, $E[Y^2] = 0\times 0{,}32 + 1\times 0{,}555 + 4\times 0{,}125 = 1{,}055$ et donc $V(Y) = 1{,}055 - 0{,}805^2 = 0{,}406975$.

Enfin, $E[(X+Y)^2] = 0\times 0{,}165 + 1\times 0{,}47 + 4\times 0{,}27 + 9\times 0{,}085 + 16\times 0{,}01 = 2{,}475$
On obtient donc $V(X+Y) = 2{,}475 - 1{,}305^2 = 0{,}771975$.

En particulier, on voit que $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$. Ce n'est pas surprenant puisque les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

■

2.2 Applications à la loi binomiale

Propriété 108 : Soit X_1, X_2, ..., X_n des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p.

Notons $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. La variable aléatoire S suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété 109 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X] = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Démonstration 62 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

On considère des variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, ..., X_n suivant toute une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et p, on a en particulier $E[X_i] = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$.

On note alors $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. D'après la propriété précédente, S suit également une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. S et X sont donc de même loi et ont la même espérance.

Or, on a $E[S] = p + p + \ldots + p = np$.
De plus, les variables X_i étant indépendants, $V(S) = p(1-p) + p(1-p) + \ldots + p(1-p) = np(1-p)$. □

▪ **Exemple 209 :** On lance 12 dés équilibrées à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note Y la variable aléatoires qui compte le nombre de 6 obtenus.

Y suit une loi binomiale de paramètres 12 et $\frac{1}{6}$. Ainsi, $E[Y] = 12 \times \frac{1}{6} = 2$ et $V(Y) = 12 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ ▪

3 Concentration et loi des grand nombres

3.1 Échantillon de variables aléatoires

Définition 90 : Un échantillon est un ensemble de variables aléatoires réelles $(X_1, ..., X_n)$ indépendantes et de même loi.

La variable aléatoire moyenne de cette échantillon est la variable aléatoire notée M_n ou $\overline{X}$, définie par

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

Propriété 110 : On a alors $\mathbb{E}(M_n) = E[X_1]$, $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X_1)$ et $\sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X_1)$

Démonstration 63 : On a en effet

$$E[M_n] = E\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{1}{n}(E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \times nE[X_1] = E[X_1]$$

Par ailleurs, les variables aléatoires étant indépendantes,

$$V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n))$$

et donc

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X_1) = \frac{V(X_1)}{n}$$

□

▪ **Exemple 210 :** On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{3}$.

On rappelle que $E[X] = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ et $V(X) = 3 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_{100})$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_{100} = \frac{1}{100}(X_1 + X_2 + \ldots + X_{100})$.

On a alors $E[M_{100}] = E[X] = 1$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{100} = \frac{2}{300}$. ▪

On remarque que lorsque n tend vers $+\infty$, la variance de M_n tend vers 0 alors que l'espérance ne change pas. Cela signifie intuitivement que la variable aléatoire M_n se rapproche d'une variable aléatoire "constante". Ce comportement sera précisé plus en détails dans les parties qui suivent.

3.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 111 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout réel δ strictement positif

$$\mathbb{P}(|X - E[X]| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(x)}{\delta^2}$$

Cette inégalité illustre le fait que la variance permet de mesurer l'écart d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.

■ **Exemple 211 :** Soit X une variable aléatoire d'espérance 10 et de variance 1.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à $\delta = 4$, on a $\mathbb{P}(|X - 10| \geqslant 4) \leqslant \frac{1}{4^2}$.

Par ailleurs, les événements $|X - 10| \geqslant 4$ et $|X - 10| < 4$ étant contraires, on a donc

$$\mathbb{P}(|X - 10| < 4) = 1 - \mathbb{P}(|X - 10| \geqslant 4) \geqslant 1 - \frac{1}{4^2}.$$

Or, $|X - 10| < 4$ est équivalent à $X \in]10-4; 10+4[$, c'est-à-dire $X \in]6; 14[$. Finalement, $\mathbb{P}(X \in]6; 14[) \geqslant \frac{15}{16}$.
■

■ **Exemple 212 :** On lance 180 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de 1 obtenus. X suit donc une loi binomiale de paramètres 180 et $\frac{1}{6}$.

Ainsi, $E(X) = 180 \times \frac{1}{6} = 30$ et $V(X) = 180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 25$.

Lors des précédentes chapitres, nous avons interprété l'espérance comme une moyenne si l'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire. Ainsi, si on lance 180 fois un dé, on s'attend en moyenne à avoir 30 fois le nombre 6.

Seulement, tout ceci n'est qu'une moyenne, et il est rare de tomber exactement 30 fois sur la face numéro 6. Cependant, il y a une grande probabilité que le nombre de fois que nous obtenons ce nombre 6 soit proche de 30, et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut nous fournir une minoration de cette probabilité.

On souhaite par exemple minorer la probabilité que X soit compris entre 21 et 39.

Or, $X \in [21; 39]$ revient à dire que $X \in [30-9; 30+9]$ c'est-à-dire $|X - 30| \leqslant 9$. Puisque la variable aléatoire X prend des valeurs entières uniquement, ceci est équivalent à $|X - 30| < 10$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 10) \leqslant \frac{V(X)}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Ainsi, puisque $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 10) + \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 10) = 1$, on a que

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| < 10) = 1 - \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 10) \geqslant 1 - \frac{1}{4}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 10) \geqslant \frac{3}{4}$.

Si l'on lance 180 dés, la probabilité d'avoir entre 21 et 39 fois le nombre 6 est supérieure à 0,75. ■

Cette borne n'est pas toujours optimale. En l'occurrence, en faisant les calculs de manière exhaustive, on s'aperçoit que $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 10) \simeq 0{,}9434$, mais ce calcul est un poil plus compliqué...

3.3 Inégalité de concentration

Propriété 112 — Inégalité de concentration : Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes, et M_n la variable aléatoire moyenne de cette échantillon. Alors, pour tout réel δ strictement positif,

$$\mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\delta^2}$$

Démonstration 64 : On applique simplement l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire M_n. Son espérance vaut $E(X_1)$ et sa variance $\dfrac{V(X_1)}{n}$. □

■ **Exemple 213 :** Soit X une variable aléatoire d'espérance 3 et de variance 100.

On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel δ strictement positif, on a alors $\mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(X_1)}{n\delta^2}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|M_n - 3| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{100}{n\delta^2}$.

En particulier, pour $n = 100000$ et $\delta = 0{,}1$, on a $\mathbb{P}(|M_n - 3| \geqslant 0{,}1) \leqslant \dfrac{100}{100000 \times 0{,}1^2}$

Ainsi, $\mathbb{P}(|M_n - 3| \geqslant 0{,}1) \leqslant 0{,}1$.

En passant au complémentaire, on obtient alors que $\mathbb{P}(|M_n - 3| < 0{,}1) = 1 - \mathbb{P}(|M_n - 3| \geqslant 0{,}1) \geqslant 0{,}9$.

Bien que la variable aléatoire X ait une grande variance, si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, la moyenne des résultats est très proche de l'espérance de X : avec probabilité 0,9, la moyenne est entre 2,9 et 3,1. ■

3.4 Loi des grands nombres

Théorème 65 — Loi faible des grands nombres : Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et M_n la variable aléatoire moyenne de cet échantillon. Pour tout réel δ strictement positif,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geqslant \delta) = 0$$

Démonstration 66 : On applique l'inégalité de concentration à cet échantillon :

$$\mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V(X_1)}{n\delta^2}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{V(X_1)}{n\delta^2} = 0$. De plus, $\mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geqslant \delta) \geqslant 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|M_n - E(X_1)| \geqslant \delta) = 0$. □

Opérations sur les variables aléatoires

► Exercice 415

On considère la variable aléatoire X dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-3	-1	2	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\ldots$

1. Compléter ce tableau avec la probabilité manquante.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $Y = X + 2$.
3. Donner la loi de la variable aléatoire $Z = 2X - 1$.

► Exercice 416

Une entreprise commercialise des lave-vaisselles et propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires au prix de 65 euros. Si une panne irréparable survient au cours de cette période, l'entreprise remboursera alors les 399 euros correspondant au prix du lave-vaisselle. D'après les statistiques relevées par l'entreprise, 11,5% des lave-vaisselles tombent en panne durant cette période de 3 ans. Un client achète un lave-vaisselle avec extension de garantie.

1. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le lave-vaisselle tombe en panne durant la période concernant l'extension de garantie et 0 sinon. Quelle est la loi de X ?
2. On note Y le gain réalisée par l'entreprise grâce à l'extension de garantie. Exprimer Y en fonction de X.

► Exercice 417 — Asie 2022

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking. Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5% de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 200)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros. Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet et C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y=k)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

   (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus.
   (b) Exprimer C en fonction de Y puis donner la loi de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
   (c) Calculer l'espérance de C à l'euro près.
   (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

► Exercice 418
On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants.

k	1	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\dots$

et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\dots$

1. Compléter ces tableaux avec les probabilités manquantes.
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $Z = 2X$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(X+Y=5)$?
4. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $W = X+Y$
5. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $A = 3X-2Y$.

► Exercice 419
On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont résumées dans les tableaux suivants.

k	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

et

k	1	4	5
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $X+Y$.
2. Construire le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $2X+3Y$.

Espérance et variance d'une somme de variables

► Exercice 420
On considère les deux variables aléatoires X et Y de l'exercice précédent.

1. Calculer l'espérance et la variance de X et de Y.
2. En déduire l'espérance et la variance de $3X+2$, de $X+Y$ et de $5X-2Y$.

► Exercice 421
Soit X et Y deux variables aléatoire indépendantes telles que $E(X)=3$, $E(Y)=-5$, $V(X)=1$ et $V(Y)=2$.

1. On considère la variable aléatoire $Z_1 = 2X+3Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_1
2. On considère la variable aléatoire $Z_2 = 4X-2Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_2.
3. On considère lavariable aléatoire $Z_3 = 3Y-2X+7$. Donner l'espérance et la variance de Z_3.

► Exercice 422
On dit qu'une variable aléatoire X est centrée réduite si son espérance est nulle et sa variance vaut 1.

Montrer que pour toute variable aléatoire X non constante et admettant une espérance et une variance, la variable $Y = \dfrac{X-\mathbb{E}(\mathbb{X})}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

► Exercice 423 — Centres étrangers 2024

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.

Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4; 5; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. (a) Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
   (b) En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1 ,X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.
4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.
6. Déterminer $\mathbb{P}(S = 24)$.
7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
   (a) Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
   (b) En déduire la probabilité de gagner un lot.

► Exercice 424

On lance trois pièces de monnaies et on regarde sur quels côtés elles tombent.

1. On note X le nombre de FACE obtenus. Construire le tableau résumant la loi de X.
2. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si les trois pièces tombent du même côté et 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de Y ? On précisera la valeur du ou des paramètres(s).
   (b) Que vaut l'espérance de Y ?
3. Le jeu consiste à miser deux euros. Si les trois pièces tombent sur les mêmes faces, on reprend sa mise et on remporte cinq euros supplémentaires. Sinon, on perd la mise. On note Z la variable aléatoire qui détermine le gain algébrique du joueur.
   (a) Justifier que $Z = 7Y - 2$
   (b) En déduire l'espérance de Z. Ce jeu est-il équitable ?

► Exercice 425

Une urne contient 100 jetons parmi lesquels 10 sont gagnants. Pour jouer à la loterie, un joueur doit payer 10 euros et tire au hasard et successivement deux jetons, en remettant entre temps le jeton tiré. Chaque jeton gagnant tiré lui rapporte 20 euros.

1. On note X le nombre de jetons gagnants tirés. Quelle est la loi de X ?
2. Que vaut l'espérance de X ?
3. On note Y le gain algébrique d'un joueur. Expliquer pourquoi $Y = 20X - 10$.
4. En déduire l'espérance de Y. Ce jeu est-il équitable ?

► Exercice 426

On considère les deux variables aléatoires X et Y indépendantes dont les lois sont données ci-dessous.

k	2	1	-1
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$

et

k	1	2	-2
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

1. Donner l'espérance et la variance des variables aléatoires X et Y.
2. On propose le jeu suivant : 8 boules sont dans une urnes. On mise un euro et on tire une de ces boules au hasard. 5 sont perdantes, 2 font gagner 2 euros et 1 fait gagner 3 euros. Quelle variable aléatoire permet de modéliser ce jeu ?
3. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ?
4. Proposer une expérience aléatoire correspondant à la variable aléatoire Y.
5. On réalise deux fois le jeu correspondant à la variable X et trois fois celui correspondant à la variable Y. On note Z le gain algébrique de cette successions de jeu. Sans déterminer précisément la loi de Z, dire si ce jeu est avantageux pour le joueur ou non.

► Exercice 427

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale. On suppose que $E(X)=6$ et $V(X)=4$. Retrouver les paramètres de la loi binomiale.

► Exercice 428

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(10;0{,}3)$ et Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(8;0{,}2)$. On suppose que X et Y sont des variables indépendantes.

1. Donner les espérances et variances de X et Y. Donner leur écart-type arrondi au millième.
2. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type arrondi au millième de la variable aléatoire Z définie par $Z=2X-3Y$.

► Exercice 429

On range n objets dans une commode contenant n tiroirs, chaque objet étant placé uniformément au hasard et indépendamment des autres objets dans l'un de ces tiroirs. L'objectif de cet exercice est de déterminer le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.

Partie A : Étude de cas particuliers

1. On suppose qu'il y a 2 tiroirs et 2 objets à ranger.
   (a) On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement des 2 objets. Construire le tableau donnant la loi de X
   (b) En déduire l'espérance de X.
2. On suppose qu'il y a 3 tiroirs et 3 objets à ranger dans la commode. Un rangement peut alors être assimilé à un 3-uplet de $\{1;2;3\}$. Par exemple, le 3-uplet $(2;1;2)$ signifie que le premier objet est rangé dans le tiroir 2, le deuxième objet dans le tiroir 1 et le troisième objet dans le tiroir 2.
   (a) Combien de rangements différents peut-on effectuer ?
   (b) Combien de rangements laissant le tiroir 1 vide peut-on effectuer ?
   (c) Pour $k \in \{1;2;3\}$ on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir k est vide et 0 sinon. Quelle est la loi de X_1 ?
   (d) On considère la variable aléatoire $X=X_1+X_2+X_3$. Que vaut $E[X]$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : Cas général

On dispose désormais de n objets que l'on répartit uniformément au hasard et de manière indépendante dans les n tiroirs.

1. Pour $k \in \{1;2;\ldots;n\}$ on note Y_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le tiroir k est vide et 0 sinon. Montrer que l'espérance de Y_1 vaut $\dfrac{(n-1)^n}{n^n}$.
2. En déduire le nombre moyen de tiroirs vides à l'issue de cette expérience.

Loi des grands nombres

► Exercice 430

Soit X une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 2. On considère un échantillon $(X_1,\ldots,X_n)$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$.

1. Donner l'espérance et la variance de M_n.
2. Pour quelle valeur de n la variance de M_n est-elle inférieure à 10^{-4} ?

► Exercice 431

Soit X une variable aléatoire d'espérance 4 et de variance 1.

1. Traduire l'inégalité $|X-4| \geqslant 2$ en terme d'intervalle.
2. Donner une minoration de $\mathbb{P}(|X-E(X)| \in]2;6[)$.

► Exercice 432

Soit X une variable aléatoire non constante. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Thecbychev, minorer les probabilités $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 2\sigma(X))$ et $\mathbb{P}(|X-E(X)| < 3\sigma(X))$.

► Exercice 433

En 2018, le trafic moyen quotidien de véhicules sur le réseau autoroutier s'élevait à 24000 voitures, avec une variance de 6000. Majorer la probabilité que l'écart entre le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard et la moyenne de véhicules recensés soit supérieure ou égal à 1000, puis à 100.

► Exercice 434 — Métropole 2024, Jour 1 Bis

Un client arrive à une station-service et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.

On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. (a) Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

► Exercice 435 — Métropole 2024, jour 2

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude.

On interroge au hasard dix étudiants. Les variables aléatoires N_1, N_2, ..., N_{10} modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres $(20;0{,}615)$.

Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + + N_{10}$.

1. Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.
2. On considère la variable aléatoire $M = \dfrac{S}{10}$.
   (a) Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?
   (b) Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.
   (c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.
   « La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80

► Exercice 436

On jette 3600 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 obtenus.

1. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ? sa variance ?
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

► Exercice 437

Soit X une variable aléatoire d'espérance 5 et de variance 2. On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_{100})$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on note $M_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$.

1. Soit δ un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.
   Écrire l'inégalité de concentration pour M_n.
2. En déduire l'entier n à partir duquel on a $\mathbb{P}(|M_n - 5| \geqslant 0{,}05) \leqslant 0{,}01$.

► Exercice 438

Une compagnie aérienne exploite un avion ayant une capacité de 200 places. Pour ce vol, une analyse a montré que chaque passager à une probabilité $p = 0{,}8$ de se présenter à l'embarquement. On suppose que les présences individuelles des passagers à l'embarquement sont indépendantes. La compagnie souhaite vendre davantage de billets que de places disponibles tout en limitant le risque de voir trop de personnes se présenter à l'embarquement.

Soit n un entier strictement supérieur à 200, correspondant au nombre de billets vendus. On note S_n le nombre de personnes se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de S_n ? Que valent son espérance et sa variance ?
2. On suppose que $n < 250$.
   (a) Justifier que si $S_n \geqslant 200$, alors $|S_n - 0{,}8n| \geqslant 200 - 0{,}8n$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geqslant 200) \leqslant \dfrac{0{,}16n}{(200-0{,}8n)^2}$.
   (c) Combien de billets la compagnie peut-elle vendre tout en ayant une probabilité inférieure à 5% que plus de 200 clients se présentent à l'embarquement ?

► Exercice 439

Un joueur joue à la roulette en misant à chaque fois un euro sur une couleur (rouge ou noir). A chaque partie, il récupère sa mise et gagne un euro avec probabilité $\frac{18}{37}$. Sinon, il perd sa mise. Pour tout entier naturel n, on note X_n son gain après n parties et Y_n le nombre de parties gagnés parmi les n premières parties.

1. Quelle est la loi de Y_n ? Que vaut son espérance et sa variance ?
2. Exprimer X_n en fonction de Y_n puis donner son espérance et sa variance.
3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier n à partir duquel la probabilité que le joueur ait perdu de l'argent après n parties soit supérieure ou égale à 0,95.

Exercices de synthèse

► Exercice 440 — Sujet zéro 2024

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

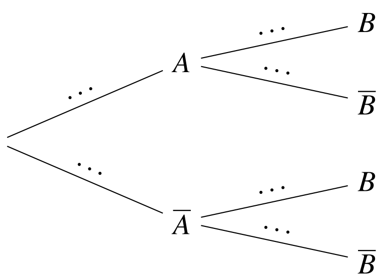
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'évènement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et de B.

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.
3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X.
   Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.
5. On souhaite déterminer la variance de X.
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(X=0)$ et $\mathbb{P}(X=2)$. En déduire $\mathbb{P}(X=1)$.
   (b) Montrer que la variance de X vaut 0,57.
   (c) A-t-on $V(X)=V(X_1)+V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $\mathbb{P}(Y=8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z=X+Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Soit n un nombre entier strictement positif.
   Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.
   On admet que les variables aléatoires Z_1, Z_2, ..., Z_n sont identiques à Z et indépendantes.
   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire : $M_n=\dfrac{Z_1+Z_2+\ldots+Z_n}{n}$.
   (a) Quelle est l'espérance de M_n ?
   (b) Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
   (c) Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6{,}3<M_n<8{,}3$ est supérieure ou égale à 0,75 .

► Exercice 441 — Métropole 2024, Jour 1

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60% des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30% des ventes et ceux en grandes surfaces 10% des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

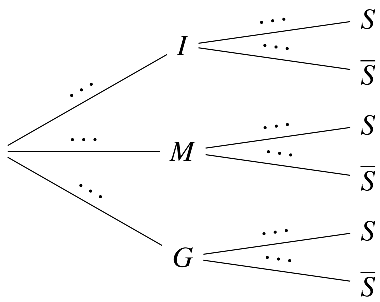
- 75% pour les clients sur internet ;
- 90% pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80% pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné. On définit les évènements suivants.

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un évènement quelconque, on notera $\overline{A}$ son évènement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.
3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.
4. Un client est satisfait du service clientèle.
   Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.
5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.
6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.
7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.

   Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

   La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

   On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
   - L'espérance $(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
   - L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

   (a) Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.
   (b) Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

51. Corrigés

► Correction 415

La probabilité manquante est $\frac{3}{10}$. On a alors les tableaux suivants pour les lois de Y et Z.

k	-1	1	4	6
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

k	-5	-1	5	9
$\mathbb{P}(Z=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$

► Correction 416

X suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,115. Par ailleurs, on a $Y = 65 - 399X$.

► Correction 417

Les présences des passagers étant indépendantes, X suit une loi binomiale de paramètres 206 et 0,95.

D'après la calculatrice, $\mathbb{P}(X \leqslant 200) \simeq 0{,}948$. Il y a donc environ 5,2% de chances que trop de passagers se présentent à l'embarquement.

On a $\mathbb{P}(Y=6) = 1 - (\mathbb{P}(Y=0) + \cdots + \mathbb{P}(Y=5)) = 0{,}00003$.

En vendant 206 billets, la compagnie encaisse $206 \times 250 = 51500$ euros. Seulement, elle doit rembourser 850 euros par client ne pouvant embarquer (représenté par la variable Y). Ainsi, $C = 51500 - 850Y$.

k	51500	50650	49800	48950	48100	47250	46400
$\mathbb{P}(C=k)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

On a alors $E[C] \simeq 51429$. Si la compagnie avait vendu seulement 200 billets, son chiffre d'affaires aurait été de 50000 euros, le surbooking lui est donc avantageux.

► Correction 418

On complète les tableaux donnant les lois de X et Y en faisant en sorte que la somme des probabilités vaille 1.

k	1	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

et

k	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $Z = 2X$ est le suivant.

k	2	6	8
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$

L'événement $X+Y=5$ est réalisé lorsque $(X=3 \cap Y=2)$ ou $(X=4 \cap Y=1)$. Ces variables étant indépendantes, on a donc

$$\mathbb{P}(X+Y=5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{30}.$$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $W = X + Y$ est le suivant.

k	2	3	4	5	6	7
$\mathbb{P}(W = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{4}$

Le tableau résumant la loi de la variable aléatoire $A = 3X - 2Y$ est le suivant.

k	-3	-1	1	3	5	6	7	8	10
$\mathbb{P}(A = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

► **Correction 419**
La loi de $X + Y$ est la suivante.

k	3	4	6	7	8
$\mathbb{P}(X + Y = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}$

Le cas le plus compliqué ici est $X + Y = 7$ puisqu'il y a deux cas à étudier.

$$\mathbb{P}(X + Y = 7) = \mathbb{P}(X = 2 \cap Y = 5) + \mathbb{P}(X = 3 \cap Y = 4).$$

X et Y étant indépendantes, on a alors

$$\mathbb{P}(X + Y = 7) = \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 5) + \mathbb{P}(X = 3)\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

La loi de $2X + 3Y$ est la suivante.

k	7	9	16	18	19	21
$\mathbb{P}(X + Y = k)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

► **Correction 420**
On a $E[X] = 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ et $E[Y] = 1 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{2}$.
Ainsi, $E[3X + 2] = 3E[X] + 2 = 10$, $E[X + Y] = E[X] + E[Y] = \frac{8}{3} + \frac{7}{2} = \frac{37}{6}$ et
$E[5X - 2Y] = 5E[X] - 2E[Y] = \frac{40}{3} - 7 = \frac{19}{3}$.

► **Correction 421**
On a $E(Z_1) = 2E(X) + 3E(Y) = 2 \times 3 + 3 \times (-5) = -9$. De plus, les variables X et Y étant indépendantes, $V(Z_1) = V(2X) + V(3Y) = 4V(X) + 9V(Y) = 4 \times 1 + 9 \times 2 = 22$.

On a $E(Z_2) = 4E(X) - 2E(Y) = 4 \times 3 - 2 \times (-5) = 22$. De plus, les variables X et Y étant indépendantes, $V(Z_2) = V(4X) + V(-2Y) = 16V(X) + 4V(Y) = 16 \times 1 + 4 \times 2 = 24$.

On a $E(Z_3) = 3E(Y) - 2E(X) + 7 = 3 \times (-5) - 2 \times 3 + 7 = -14$. De plus, les variables X et Y étant indépendantes, et 7 étant un réel, $V(Z_3) = V(3Y) + V(-2X) + V(7) = 9V(Y) + 4V(X) + 0 = 9 \times 2 + 4 \times 1 = 22$.

► Correction 422

On a $E[Y] = \dfrac{E[X] - E[X]}{\sigma(X)} = 0$ et $V(Y) = \dfrac{V(X) + 0}{\sigma(X)^2} = \dfrac{V(X)}{V(X)} = 1$. Y est centrée et réduite.

► Correction 423

1. Le nombre de tirages est de $8 \times 8 \times 8 = 512$.
2. (a) Le nombre de tirages sans répétition est de $8 \times 7 \times 6 = 336$.
   (b) Le nombre de tirages avec au moins une répétition est donc $512 - 336 = 176$.
3. X_1 prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8, chacune avec probabilité $\dfrac{1}{8}$.
4. On a $E(X_1) = \dfrac{1}{8} \times (1+2+3+4+5+6+7+8) = \dfrac{9}{2}$.
5. On a $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \dfrac{9}{2} + \dfrac{9}{2} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{27}{2}$.
6. On a $S = 24$ si et seulement si le numéro 8 a été tiré lors des trois tirages. Ainsi, $\mathbb{P}(S = 24) = \mathbb{P}((8;8;8)) = \dfrac{1}{512}$.
7. (a) Les 10 tirages possibles sont $(8;8;8)$, $(8;8;7)$, $(8;7;8)$, $(7;8;8)$, $(8;7;7)$, $(7;8;7)$, $(7;7;8)$, $(8;8;6)$, $(8;6;8)$ et $(6;8;8)$.
   (b) La probabilité de gagner un lot est donc de $\dfrac{10}{512}$ soit $\dfrac{5}{256}$.

► Correction 424

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}5$. Le tableau résumant la loi de X est le suivant :

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y est une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$. L'espérance de Y vaut $\dfrac{1}{4}$.

On a alors $Z = 7Y - 2$: Si Y vaut 0, on perd deux euros. Sinon, on en remporte 5.
Ainsi, $E(Z) = 7E(Y) - 2 = \dfrac{7}{4} - 2 = -\dfrac{1}{4}$. L'espérance est négative, ce jeu est donc au désavantage du joueur.

► Correction 425

On note X le nombre de jetons gagnants tirés. X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\dfrac{1}{10}$. L'espérance de X vaut $2 \times \dfrac{1}{10} = 0{,}2$

On note Y le gain algébrique d'un joueur. Si X représente le nombre de jetons gagnants tirés, le gain est de $20X$. La participation au jeu étant de 10 euros, le gain Y vaut $Y = 20X - 10$.
On a donc $E(X) = 20E(X) - 10 = 20 \times 0{,}2 - 10 = -6$. Le jeu est au désavantage du joueur.

► Correction 426

On a $E[X]=2\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{4}+(-1)\times\frac{5}{8}=-\frac{1}{8}$ et

$$V(X)=\frac{1}{2}\left(2-\left(-\frac{1}{8}\right)\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right)^2+\frac{5}{8}\left(-1-\left(-\frac{1}{8}\right)\right)^2=\frac{1563}{512}\simeq 3{,}05$$

Par ailleurs, $E[Y]=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}+(-2)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ et

$$V(Y)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{2}\left(-2-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{89}{36}\simeq 2{,}47$$

La variable X correspond au jeu proposé ici. L'espérance est négative : le jeu est désavantageux pour le joueur

Pour la loi de Y : Dans une urne sont placées six boules. Une participation coûte deux euros. Deux boules sont perdantes, 3 rapportent 3 euros et 1 rapporte 4 euros.

On a $Z=2X+3Y$ et donc $E(Z)=2E(X)+3E(Y)=-2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{4}>0$. Le jeu est avantageux pour le joueur.

► Correction 427

D'une part, $V(X)=(1-p)E(X)$. Ainsi, $p=\frac{1}{3}$. Par ailleurs, $E(X)=np=6$ d'où $n=18$.

► Correction 428

On a $E(X)=10\times 0{,}3=3$, $V(X)=10\times 0{,}3\times(1-0{,}3)=2{,}1$ et $\sigma(X)=\sqrt{2{,}1}\simeq 1{,}449$ puis
$E(Y)=8\times 0{,}2=1{,}6$, $V(Y)=8\times 0{,}2\times(1-0{,}2)=1{,}28$ et $\sigma(X)=\sqrt{1{,}28}\simeq 1{,}131$.

Par ailleurs, $E(Z)=2E(X)-3E(Y)=2\times 3-3\times 1{,}6=1{,}2$. De plus, X et Y étant indépendantes, on a $V(Z)=V(2X)+V(-3Y)=4V(X)+9V(Y)=19.92$ et $\sigma(Z)=\sqrt{19.92}\simeq 4{,}463$

► Correction 429

Partie A : Étude de cas particuliers

1. (a) La loi de X est la suivante.

k	0	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La probabilité d'avoir un tiroir vide correspond au cas où les deux objets sont rangés dans le tiroir 1 (probabilité $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$) ou dans le tiroir 2 (même probabilité), soit une probabilité total de $\frac{1}{2}$. La probabilité qu'il y ait un tiroir vide s'obtient par complément à 1.

   (b) $E[X]=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$.

2. (a) On peut effectuer $3\times 3\times 3=27$ rangements différents.
   (b) Si le tiroir 1 n'est pas utilisé, on peut effectuer $2\times 2\times 2=8$ rangements différents.
   (c) X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{8}{27}$.
   (d) On considère la variable aléatoire $X=X_1+X_2+X_3$. X donne le nombre de tiroirs vides à l'issue de l'expérience. $E[X]=E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]=3\times\frac{8}{27}=\frac{8}{9}$. Si l'on fait un grand nombre de fois cette expérience, la moyenne de tiroirs vide se rapprochera de $\frac{8}{9}$.

Partie B : Cas général

1. Il y a n^n rangements dans les tiroirs possibles et $(n-1)^n$ rangements dans les tiroirs qui laissent le tiroir

1 vide. Ainsi, $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \dfrac{(n-1)^n}{n^n}$. Puisque Y_1 est une variable de Bernoulli, c'est également son espérance.

2. Le nombre moyen de tiroirs vides est l'espérance de $Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$. Les Y_k ont tous pour espérance $\dfrac{(n-1)^n}{n^n}$. Ainsi, $E(X) = n \times \dfrac{(n-1)^n}{n^n} = \dfrac{(n-1)^n}{n^{n-1}}$.

► Correction 430

L'espérance de M_n vaut 4 et sa variance $\dfrac{2}{n}$. La variance de M_n est inférieure à 10^{-4} dès que $n \geqslant 2 \times 10^4$.

► Correction 431

On a $|X-4| \geqslant 2$ si et seulement si $X \in]2;6[$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2) \leqslant \dfrac{V(X)}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|X - E(X)| \in]2;6[) \geqslant \dfrac{3}{4}$.

► Correction 432

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \geqslant \dfrac{V(X)}{(2\sigma(X))^2}$. Or, $(2\sigma(X))^2 = 4\sigma(X)^2 = 4V(X)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \leqslant \dfrac{1}{4}$ et donc $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 2\sigma(X)) = 1 - \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma(X)) \geqslant \dfrac{3}{4}$.

De même, on montrer que $\mathbb{P}(|X - E(X)| < 3\sigma(X)) \geqslant \dfrac{8}{9}$.

► Correction 433

Notons X la variable aléatoire qui donne le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard. D'après l'énoncé, on a donc $E(X) = 24000$ et $V(X) = 6000$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, la probabilité que l'écart entre le nombre de véhicules en circulation lors d'une journée prise au hasard et la moyenne de véhicules recensés soit supérieure ou égal à 1000 peut être majorée comme suit :

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 1000) \leqslant \frac{V(X)}{1000^2} = 0{,}006.$$

De la même manière,

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant 100) \leqslant \frac{V(X)}{100^2} = 0{,}6.$$

► Correction 434

On a $S = T_1 + T_2 + T_3$. Ainsi, $E(S) = E(T_1 + T_2 + T_3) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 18$. En moyenne, un automobiliste qui a deux personnes devant lui dans la file d'attente attendra 18 minutes avant de pouvoir repartir.

Par ailleurs, puisque T_1, T_2 et T_3 sont indépendantes, on a $V(S) = V(T_1) + V(T_2)V(T_3) = 3$.

On cherche alors à minorer la probabilité $\mathbb{P}(S \in]14;22[)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(S \in]18-4;18+4[)$.

La probabilité recherchée est donc $\mathbb{P}(|S-18| < 4)$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|S - E(S)| < 4)$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout réel δ strictement positif, $\mathbb{P}(|S - E(S)| \geqslant \delta) \leqslant \dfrac{V(S)}{\delta^2}$.

En prenant $\delta = 4$, on a donc $\mathbb{P}(|S - E(S)| \geqslant 4) \leqslant \dfrac{3}{16}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|S-E(S)|<4)=1-\mathbb{P}(|S-E(S)|\geqslant 4)\geqslant 1-\frac{3}{16}$. On a donc $\mathbb{P}(|S-E(S)|<4)\geqslant\frac{13}{16}$.

Or, $\frac{13}{16}=0{,}8125>0{,}81$. Finalement, la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

► Correction 435

X suit une loi binomiale de paramètres 3600 et $\frac{1}{6}$.

Ainsi, $E[X]=3600\times\frac{1}{6}=600$ et $V(X)=3600\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=500$.

Par ailleurs, $X\in]480;720[$ correspond à $X-600\in]-120;120[$ c'est-à-dire $|X-600|<120$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Techebychev, $\mathbb{P}(|X-E[X]|\geqslant 120)\leqslant\frac{500}{120^2}=0{,}035$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|X-E[X]|<120)\geqslant 1-0{,}035=0{,}965$.

► Correction 436

L'inégalité de concentration pour M_n s'écrit $\mathbb{P}(|M_n-E(X_1)|\geqslant\delta)\leqslant\frac{V(X)}{n\delta^2}=\frac{2}{n\delta^2}$.

En prenant $\delta=0{,}05$, on obtient $\mathbb{P}(|M_n-5|\geqslant 0{,}05)\leqslant\frac{2}{0{,}0025n}$, qui est inférieur à 0,01 lorsque $n\geqslant 80000$.

► Correction 437

S_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,8. Ainsi, $E[S_n]=0{,}8n$ et $V(S_n)=0{,}16n$.

Si $S_n\geqslant 200$, alors $S_n-0{,}8n\geqslant 200-0{,}8n$. Puisque $n<250$, alors $200-0{,}8n>0$ et donc, par croissance de la fonction valeur absolue sur $\mathbb{R}_+$, $|S_n-0{,}8n|\geqslant 200-0{,}8n$.

Ainsi, $\mathbb{P}(S_n\geqslant 200)\leqslant\mathbb{P}(|S_n-0{,}8n|\geqslant 200-0{,}8n)$. Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(|S_n-0{,}8n|\geqslant 200-0{,}8n)\leqslant\frac{0{,}16n}{(200-0{,}8n)^2}$, d'où le résultat voulu.

On a $\frac{0{,}16n}{(200-0{,}8n)^2}\leqslant 0{,}05$ si et seulement si $0{,}032n^2-16{,}16n+2000\geqslant 0$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines valent environ 217,06 et 287.94. En particulier, si $n<250$, cette quantité est positive pour $n\leqslant 217$. La compagnie peut vendre 217 billets : elle aura alors moins de 5% de chance que plus de 200 clients se présentent à l'embarquement.

► Correction 438

Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{18}{37}$. Son espérance vaut $\frac{18n}{37}$ et sa variance $\frac{306n}{1369}$.

On a par ailleurs $X_n=Y_n\times 1+(n-Y_n)\times(-1)=2Y_n-n$.

Ainsi, $E[X_n]=2E[X_n]-n=-\frac{n}{37}$ et $V(X_n)=4V(Y_n)=\frac{1224n}{1369}$.

On cherche alors $P(X_n<0)$. Or, si $X_n\geqslant 0$, alors $X_n+\frac{n}{37}\geqslant\frac{n}{37}$ et donc $\left|X_n+\frac{n}{37}\right|\geqslant\frac{n}{37}$.

Ainsi, $P(X_n\geqslant 0)\leqslant\mathbb{P}\left(\left|X_n+\frac{n}{37}\right|\geqslant\frac{n}{37}\right)$.

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}\left(\left|X_n+\frac{n}{37}\right|\geqslant\frac{n}{37}\right)\leqslant\frac{\frac{1224n}{1369}}{\frac{n^2}{37^2}}=\frac{1224}{n}$.

Ainsi, en utilisant le complémentaire, $P(X_n<0)\geqslant 1-\frac{1224}{n}$. Or, $1-\frac{1224}{n}\geqslant 0.95$ si et seulement si $n\geqslant$

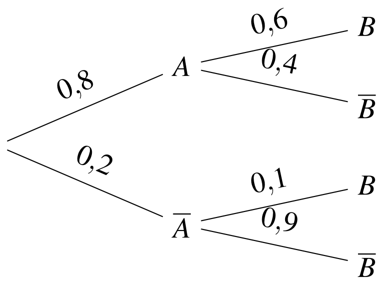
$\dfrac{1224}{0{,}05} = 22480.$

Un joueur qui fait 22480 parties a plus de 95% de chances de perdre de l'argent à l'issue de ces parties.

► Correction 439

Partie I

1. On complète l'arbre de probabilités modélisant la situation



2. On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$.
3. $(A;\overline{A})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}5.$$
4. X_1 prend les valeurs 0 et 1, elle suit donc une loi de Bernoulli. Son paramètre (et donc son espérance) vaut 0,8.
De même, X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,5. On a donc $E(X_2) = 0{,}5$.
Ainsi, $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 0{,}8 + 0{,}5 = 1{,}3$. En moyenne, un élève obtient une note de 1,3 au premier exercice.
5. On a $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}18$ et $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}48$.
Ainsi, $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - (0{,}18 + 0{,}48) = 0{,}34$.
6. On a $E(X^2) = 0^2 \times 0{,}18 + 1^2 \times 0{,}34 + 2^2 \times 0{,}48 = 2{,}26$.
D'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2{,}26 - 1{,}3^2 = 0{,}57$.
7. On a $V(X_1) = 0{,}8 \times (1 - 0{,}8) = 0{,}16$ et $V(X_2) = 0{,}5 \times (1 - 0{,}5) = 0{,}25$.
Ainsi, $V(X_1) + V(X_2) = 0{,}41 \neq V(X)$.
Ce résultat n'est pas surprenant puisque les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Partie II

1. Y compte le nombre de succès (la réponse donnée est exacte) d'une répétitions de 8 épreuves identiques et indépendantes. La probabilité de succès est de $\dfrac{3}{4}$. Ainsi, Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}\left(8; \dfrac{3}{4}\right)$.
2. On a $\mathbb{P}(Y = 8) = \dbinom{8}{8} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^8 \times \left(1 - \dfrac{3}{4}\right)^{8-8} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^8$.
3. On a $E(Y) = 8 \times \dfrac{3}{4} = 6$ et $V(Y) = 8 \times \dfrac{3}{4} \times \left(1 - \dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Partie III

1. On a $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 1{,}3 + 6 = 7{,}3$.
De plus, puisque X et Y sont indépendantes, on a $V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 0{,}57 + 1{,}5 = 2{,}07$.
2. (a) On a $E[M_n] = E[Z_1] = 7{,}3$.
   (b) On a $V(M_n) = \dfrac{V(Z_1)}{n} = \dfrac{2{,}07}{n}$ et donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\dfrac{2{,}07}{n}}$.

Ainsi, $\sigma(M_n) \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{2{,}07}{n}} \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2{,}07}}{0{,}5} \leqslant \sqrt{n}$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0;+\infty[$, on a alors $n \geqslant \dfrac{2{,}07}{0{,}25}$. Or, $\dfrac{2{,}07}{0{,}25} = 8{,}28$. L'entier recherché est donc $n = 9$.

(c) On a $6{,}3 < M_n < 8{,}3$ si et seulement si $M_n \in]6{,}3;8{,}3[$ soit $M_n \in]7{,}3-1;7{,}3+1[$ c'est-à-dire $|M_n - 7{,}3| < 1$.

Or, $E(M_n) = 7{,}3$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| \geqslant 1) \leqslant \dfrac{V(M_n)}{1^2}$ et donc $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| \geqslant 1) \leqslant \dfrac{2{,}07}{n}$.

Ainsi, $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| < 1) = 1 - \mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| \geqslant 1) \geqslant 1 - \dfrac{2{,}07}{n}$.

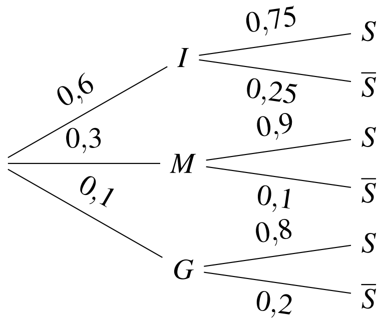
D'après la question précédente, on a $n \geqslant 9$.

Ainsi, $\dfrac{2{,}07}{n} \leqslant \dfrac{2{,}07}{9}$ et $1 - \dfrac{2{,}07}{n} \geqslant 1 - \dfrac{2{,}07}{9}$. Or, $1 - \dfrac{2{,}07}{9} = 0{,}77$.

Ainsi, on a bien $\mathbb{P}(|M_n - 7{,}3| < 1) \geqslant 0{,}77 \geqslant 0{,}75$.

► Correction 440

1. On complète l'arbre comme suit.



2. On a $P(I \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$.
3. $(I;M;G)$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0{,}45 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}8.$$
4. On a $P_S(I) = \dfrac{P(S \cap I)}{P(S)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}8} \simeq 0{,}563$.
5. (a) Puisque les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, X compte le nombre de succès (le client est satisfait) d'une répétition de 30 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(30;0{,}8)$.
   (b) D'après la calculatrice, on a $P(X \geqslant 25) \simeq 0{,}428$.
6. Notons Y le nombre de clients non satisfaits lorsque l'on interroge n clients.
   Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n;0{,}2)$.
   On a alors $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0)$ puisque Y est à valeurs entières.
   Or, $P(Y=0) = \dbinom{8}{0} \times 0{,}2^0 \times (1-0{,}2)^n = 0{,}8^n$.
   Ainsi, $P(Y \geqslant 1) \geqslant 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}8^n \geqslant 0{,}8^n \Leftrightarrow -0{,}8^n \geqslant -0{,}01 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant 0{,}01$.
   Par croissance du logarithme népérien sur $]0;+\infty[$, on a alors $\ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}01)$ soit $n\ln(0{,}8) \leqslant \ln(0{,}01)$ et donc $n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$. Or, $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \simeq 20{,}6$. L'entier recherché est donc 21.
7. (a) On a $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2) = 4 + 3 = 7$.
   De plus, puisque T_1 et T_2 sont indépendantes, $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2 + 1 = 3$.
   (b) On cherche $P(5 \leqslant T \leqslant 9)$.
   Puisque T est à valeurs entières, cette probabilité est égale à $P(4 < T < 10)$. Or, on a $4 < T < 10$ si et seulement si $7 - 3 < T < 7 + 3$ c'est-à-dire $|T - 7| < 3$ et donc $|T - E(T)| < 3$.
   D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|T - E(T)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{V(T)}{3^2}$.
   On obtient donc $P(|T - E(T)| \geqslant 3) \leqslant \dfrac{1}{3}$.
   Ainsi, $P(|T - E(T)| < 3) = 1 - P(|T - E(T)| \geqslant 3) \geqslant 1 - \dfrac{1}{3}$ et finalement, $P(|T - E(T)| < 3) \geqslant \dfrac{2}{3}$.