1. Cours : Loi binomiale

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition 1 — Succession d'épreuves : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n.

L'univers Ω de la succession de ces n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

Les issues de cette succession d'expériences sont les n-uplets $(i_1\,;\,i_2\,;\,\ldots\,;\,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

■ **Exemple 1 :** On lance 2 fois un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde le numéro obtenu. L'univers de cette expérience est $\{1;2;3;4;5;6\}^2$. L'issue $(1\,;\,3)$ signifie que l'on a obtenu 1 au premier lancer et 3 au deuxième. ■

Définition 2 — Indépendance mutuelle : Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n, de lois respectives $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$, ... , $\mathbb{P}_n$.

Les épreuves sont dites mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour toute issue $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$, on a

$$\mathbb{P}((i_1,i_2,\ldots,i_n)) = \mathbb{P}_1(i_1) \times \mathbb{P}_2(i_2) \times \cdots \times \mathbb{P}_n(i_n).$$

Autrement dit, la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités de chacune des composantes i_1, i_2, ..., i_n.

■ **Exemple 2 :** M. Lapeyronnie a décidé de faire un petit contrôle surprise à ses élèves. Il place les noms des élèves de la classe dans une urne et une liste d'exercices dans une autre.

- Il y a 29 élèves dans la classe. Parmi eux, 12 suivent l'option Maths expertes ;
- L'urne des exercices en contient 40 : 20 sur les fonctions, 15 sur les suites et 5 sur la géométrie.

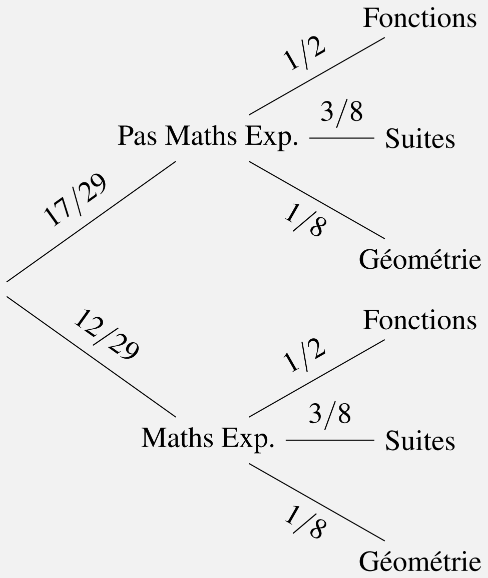
M. Lapeyronnie tire alors simultanément, de manière indépendante, un nom d'élève et un exercice.

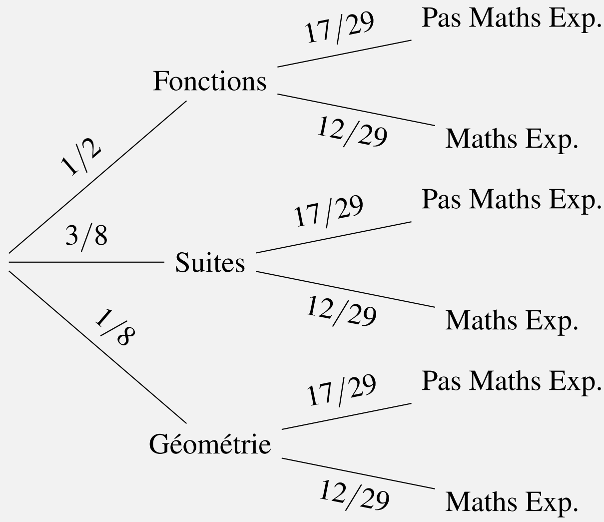
- La probabilité qu'il s'agisse d'un élève suivant l'option Maths expertes est de $\dfrac{12}{29}$;
- La probabilité de tirer un exercice de géométrie est de $\dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$;
- La probabilité qu'un élève suivant l'option Maths Expertes soit envoyé au tableau faire un exercice de géométrie est donc de $\dfrac{12}{29} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{58}$.

■

Si l'on essaie de représenter une succession de n épreuves indépendantes sous la forme d'un arbre de probabilités, on place alors toujours le même sous-arbre à chaque noeud d'un étage fixé. De plus, cet arbre peut être construit "dans un sens comme dans l'autre".

■ **Exemple 3 :** Les arbres suivants traduisent la succession des deux épreuves précédentes.





■

■ **Exemple 4 :** Soit n un entier naturel. On lance n fois un dé équilibré à six faces, numérotées de 1 à 6.

La probabilité de ne jamais obtenir le résultat 6 sur ces n lancers est alors de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ainsi, la probabilité d'obtenir une au moins une fois le résultat 6 sur ces n lancers vaut donc $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Par ailleurs, puisque $-1<\frac{5}{6}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)=1$.

Si l'on lance un grand nombre de fois un dé classique à six faces, la probabilité d'obtenir au moins une fois le résultat 6 est proche de 1.

On peut alors se demander combien de lances effectuer pour que cette probabilité dépasse 0,99. On cherche alors l'entier n à partir duquel $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}99$.

On a alors $-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant -0{,}01$ soit $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}01$. On applique alors la fonction logarithme népérien qui est croissante sur $]0;+\infty[$. On a donc $n\ln\left(\frac{5}{6}\right)\leqslant \ln(0{,}01)$. On divise alors par $\ln\left(\frac{5}{6}\right)$ qui est négatif, on aboutit à $n\geqslant\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$. Or, $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}\simeq 25{,}3$.

Ainsi, à partir de 26 lancers de dés à six faces, on est certains à au moins 99% d'obtenir au moins une fois le résultat 6. ■

2 Epreuve de Bernoulli

Définition 3 — Epreuve de Bernoulli : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès S et l'échec $\overline{S}$. On note p la probabilité de succès, aussi appelé paramètre de l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'échec vaut donc $1-p$.

Une variable aléatoire X sur cet univers suit une loi de Bernoulli de paramètre p si on a $\mathbb{P}(X=1)=p$ et $\mathbb{P}(X=0)=1-p$. On écrit $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Epreuve de Bernoulli

Issue	S	$\overline{S}$
Proba	p	$1-p$

Variable de Bernoulli

k	1	0
$\mathbb{P}(X=k)$	p	$1-p$

■ **Exemple 5 :** On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6. Si on considère le succès "Obtenir le nombre 6", cette expérience est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\dfrac{1}{6}$. ■

Propriété 1 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X]=p, \quad V(X)=p(1-p), \quad \sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration 1 : La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1. De plus $\mathbb{P}(X=0)=1-p$ et $\mathbb{P}(X=1)=p$. Ainsi,

$$E[X]=0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

et

$$V(X)=\mathbb{P}(X=0)\times(0-E[X])^2+\mathbb{P}(X=1)\times(1-E[X])^2$$

d'où

$$V(X)=(1-p)\times(-p)^2+p\times(1-p)^2=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p).$$

□

Démonstration 2 — Avec la formule de Koenig-Huygens : On sait que $V(X)=E[X^2]-(E[X])^2$.

Or, la variable aléatoire X vaut soit 0, soit 1. Par ailleurs, $0^2=0$ et $1^2=1$. X et X^2 ont donc la même loi.

Ainsi, $E[X^2]=E[X]=p$. Finalement, $V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=p-p^2=p(1-p)$.

□

■ **Exemple 6 :** Soit X un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre 0,2.

On a alors $E[X]=0{,}2$, $V(X)=0{,}2\times0{,}8=0{,}16$ et $\sigma(X)=\sqrt{0{,}16}=0{,}4$. ■

3 Loi binomiale

3.1 Schéma de Bernoulli

Définition 4 — Schéma de Bernoulli : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est une succession de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, chacune de paramètre p.

■ **Exemple 7 :** On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On considère comme succès « la pièce tombe sur FACE ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$. ■

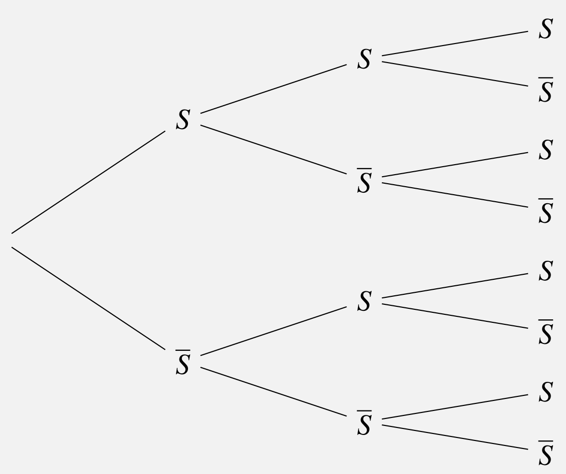
■ **Exemple 8 :** On lance 42 fois de suite un dé. On considère comme succès « le dé tombe sur 5 ou 6 ». Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres 42 et $\frac{2}{3}$. ■

3.2 Coefficients binomiaux

Définition 5 — Coefficient binomial : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ (k parmi n) est le nombre de chemins qui, dans un chemin de Bernoulli à n épreuves, aboutissent à exactement k succès.

■ **Exemple 9 :** On considère un schéma de Bernoulli à 3 épreuves.



Pour obtenir 2 succès, il y a 3 chemins possibles : $SS\overline{S}$, $S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS$. Ainsi, $\binom{3}{2} = 3$. ■

Propriété 2 : Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n. On a alors $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

On retrouve évidemment la formule établie lors du chapitre **Combinatoire et dénombrement**.

■ **Exemple 10 :** $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)\times(2\times1)} = 5\times2 = 10.$ ■

3.3 Loi binomiale

Définition

Définition 6 — Loi binomiale : Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1. On considère un schéma de Bernoulli à n épreuves de paramètre p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli. On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

On écrit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

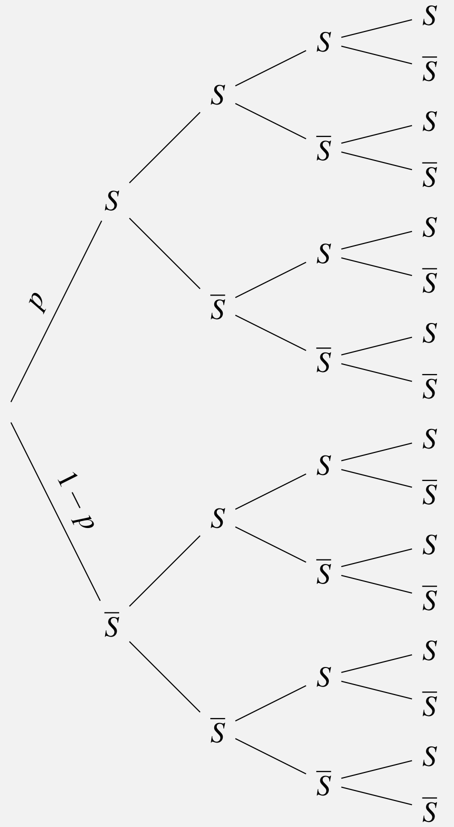
■ **Exemple 11 :** On lance une pièce équilibrée 5 fois de suite et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenus.

- On a bien des épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques ;
- Ces épreuves sont au nombre de 5.
- Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (ici, la probabilité d'obtenir FACE) vaut $\frac{1}{2}$.

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$. ■

Calcul de probabilités

■ **Exemple 12 :** On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et p. Ce schéma peut se traduire par l'arbre suivant :



Les chemins menant à deux succès sont $SS\overline{S}\overline{S}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{S}\overline{S}S$, $\overline{S}\overline{S}SS$, $\overline{S}S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS\overline{S}$. De plus,

- $\mathbb{P}(SS\overline{S}\overline{S}) = p\times p\times(1-p)\times(1-p) = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}S\overline{S}) = p\times(1-p)\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(S\overline{S}\overline{S}S) = p\times(1-p)\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}\overline{S}SS) = (1-p)\times(1-p)\times p\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}S\overline{S}S) = (1-p)\times p\times(1-p)\times p = p^2(1-p)^2$;
- $\mathbb{P}(\overline{S}SS\overline{S}) = (1-p)\times p\times p\times(1-p) = p^2(1-p)^2$. ■

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue de ce schéma. On a donc

$$\mathbb{P}(X=2) = 6p^2(1-p)^2.$$

En modifiant cette écriture, on a en réalité

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^{4-2}.$$

Propriété 3 : Soit n un entier naturel, p un réel compris entre 0 et 1 et X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Démonstration 3 : On considère un schéma de Bernoulli de paramètre p à n épreuves.

L'ensemble des issues aboutissant à k succès correspond à l'ensemble des n-uplets de $\{S;\overline{S}\}$ ayant exactement k fois la lettre S : il y en a $\binom{n}{k}$.

Or, chacune de ces issues a pour probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$: chacun des k succès a une probabilité de p et chacun des $n-k$ échecs a une probabilité $1-p$.

Ainsi, $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. □

■ **Exemple 13 :** On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le nombre 4 ?

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 4 obtenus. X suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 4, en un lancer). On cherche donc la probabilité de l'événement $X=2$, c'est-à-dire "obtenir exactement 2 succès".

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{n}{2}\times p^2\times(1-p)^{n-2}=\binom{3}{2}\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^1=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{75}.$$

Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le nombre 6 ?

On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus. Y suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ (le nombre de lancers) et $p=\frac{1}{6}$ (la probabilité de succès, obtenir 6, en un lancer).

On cherche donc la probabilité de l'événement $Y\geqslant 1$, c'est-à-dire "obtenir au moins 1 succès". Il y a plusieurs manières de procéder.

- Décomposer l'événement $Y\geqslant 1$ en donnant tous les cas possibles : $Y=1$, $Y=2$ ou $Y=3$;
- Passer par le complémentaire : $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y<1)$.
  Or, la seule valeur pour laquelle $Y<1$ est $Y=0$. Ainsi, $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\mathbb{P}(Y=0)$.
  De plus, $\mathbb{P}(Y=0)=\binom{3}{0}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0\times\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.
  Finalement, $\mathbb{P}(Y\geqslant 1)=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

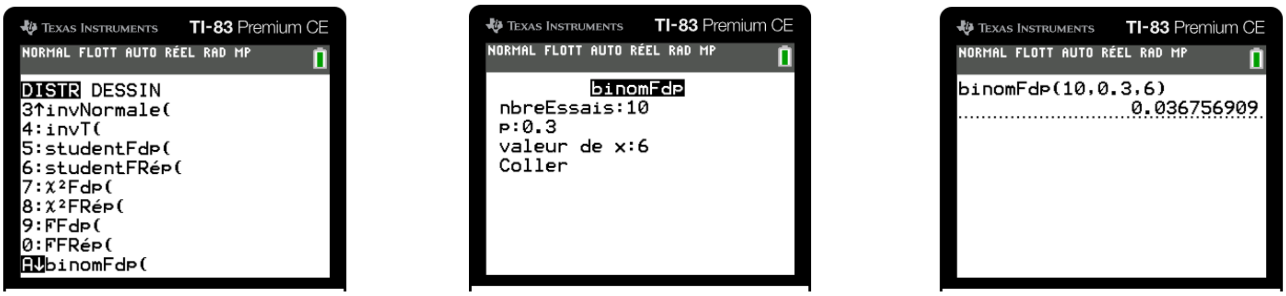
■

Avec la calculatrice

Texas Instruments : Appuyer successivement sur les touches **2nde** et **var**.

- Sélectionner **A binomFdp(** pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X=k)$.
- Sélectionner **B binomFrép(** pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X\leqslant k)$
- Pour calculer une probabilité de la forme $\mathbb{P}(X\geqslant k)$, on calculera $1-\mathbb{P}(X\leqslant k-1)$

Entrer alors les paramètres de la loi binomiale et la valeur du k souhaité puis valider.



Numworks : Sélectionner **Probabilités** sur l'écran d'accueil, puis Binomiale. Entrer alors les valeurs des paramètres n et p puis valider.
Vous pouvez calculer des probabilités de la forme $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$, $\mathbb{P}(X \geqslant k)$ et $\mathbb{P}(X = k)$ en sélectionnant l'icône en haut à gauche de l'écran.

Casio Graph : Dans le menu principal, sélectionner **STAT**. Appuyer ensuite sur **F5 [DIST]** puis **F5 [BINM]**. Pour le calcul de $\mathbb{P}(X = k)$, appuyer sur **F1 [Bpd]**. Pour le calcul de $\mathbb{P}(X \leqslant k)$, appuyer sur **F2 [Bcd]**.
Sur l'écran suivant, placer le curseur sur **Data** et appuyer sur **F2 [Var]**. Renseigner alors les valeurs des paramètres de la loi binomiale et les valeurs de k.

Espérance, variance, écart-type

Propriété 4 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E[X] = np, \quad Var(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

■ **Exemple 14 :** Un élève répond au hasard et de manière indépendante à un QCM de 20 questions. Chaque question laisse le choix entre 4 propositions dont une seule est correcte.

On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève. X désigne donc le nombre de succès (bonnes réponses) d'un schéma de Bernoulli à 20 épreuves, chaque épreuve ayant une probabilité de succès de $\dfrac{1}{4}$. X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}\left(20, \dfrac{1}{4}\right)$.

Ainsi, $E[X] = 20 \times \dfrac{1}{4} = 5$. L'élève peut espérer avoir 5 bonnes réponses. ■

Succession d'épreuves indépendantes

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde à chaque fois la face du dessus.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres pairs ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 au premier lancer mais de ne pas en obtenir au deuxième et troisième lancer ?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Dix cartes sont placées sur la table, faces cachées : 2 piques, 4 carreaux et 4 trèfles. On sélectionne une carte au hasard, de manière uniforme. La carte est alors dévoilée et on note sa couleur. Puis elle est retournée et les cartes sont mélangées. On tire alors une autre carte et on regarde sa couleur. On notera P, C et T lorsque la carte choisie est respectivement un pique, un carreau ou un trèfle.

1. Construire l'arbre de probabilité de cette expérience. Combien a-t-on d'issues ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux trèfles ?
3. Quelle est la probabilité de tirer un pique puis un carreau ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas tirer de trèfle ?
5. Quelle est la probabilité de tirer deux cartes de la même couleur ?

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Une urne renferme deux boules rouges, trois boules bleues et cinq boules jaunes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise trois boules dans l'urne

1. Quelle hypothèse permet d'affirmer que les tirages sont indépendants ?
2. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules jaunes ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge puis deux boules bleues ?
4. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de couleur différente ?

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Au dernier examen d'une université, composé de trois exercices, 70% des élèves ont réussi l'exercice 1, 50% ont réussi le deuxième et 25% ont réussi le troisième. On suppose que la réussite d'un exercice est indépendante de la réussite de tous les autres. On interroge un étudiant uniformément au hasard.

1. Quelle est la probabilité que cet étudiant ait réussi les trois exercices ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'en ait réussi aucun ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi exactement un exercice ?

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On lance n fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6, puis on regarde à chaque fois la face du dessus. On note A_n l'événement « le nombre 6 a été obtenu au moins une fois ».

1. Décrire l'événement $\overline{A_n}$ à l'aide d'une phrase puis déterminer $\mathbb{P}(\overline{A_n})$ et $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la limite de $\mathbb{P}(A_n)$? Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. Combien de lancers faut-il effectuer pour être sûr à au moins 95% que l'on obtiendra au moins une fois le nombre 6 en n lancers ?

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Un lycée présente n candidats au recrutement dans une école, où n est un entier naturel non nul. On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

1. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.
2. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à 0,99 ?

Loi binomiale

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour chacune des situations suivantes, dire si la variable aléatoire suit ou non une loi binomiale. Si c'est le cas, préciser ses paramètres.

1. On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de fois où la pièce où l'on obtient PILE.
2. On lance simultanément 5 dés équilibrés à 6 faces, numérotées de 1 à 6 ainsi que 3 dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On note X le nombre de faces 3 obtenues.
3. On lance simultanément 5 dés équilibrés à 6 faces, numérotées de 1 à 6 ainsi que 3 dés équilibrés à 4 faces, numérotées de 1 à 4. On note X le nombre de faces 5 obtenues.
4. D'après un sondage, 65% des Français se rendent au restaurant au moins une fois par mois. On interroge 30 Français au hasard et on note X le nombre de Français qui vont au restaurant au moins une fois par mois dans cet échantillon. On suppose que ce tirage peut être assimilé à un tirage avec remise.
5. Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions. Pour chaque question, une seule réponse est correcte et l'élève en choisit une au hasard, indépendamment de ses autres réponses. On note X le nombre de réponses correctes à l'issue du questionnaire.
6. Un élève répond au hasard à un QCM composé de 20 questions. Pour chaque question, une seule réponse est correcte et l'élève en choisit une au hasard, indépendamment de ses autres réponses. Une réponse correcte rapporte 3 points, une réponse fausse en retire 1. On suppose que l'élève répond à toutes les questions et on note X le nombre de points de cet élève à l'issue du questionnaire.
7. On répète 10 fois l'opération suivante : on lance simultanément 3 pièces de monnaie équilibrée. Sur ces 10 expériences, on note X le nombre de fois où les 3 pièces de monnaie sont tombées du même côté.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}\left(5;\frac{1}{3}\right)$. Calculer $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 4)$ et $\mathbb{P}(X<3)$

► Exercice 9 (Amérique du Nord 2023) – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(3;p)$. On sait que $\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{125}$. Que vaut p ?

► Exercice 10 – Voir le corrigé

On lance 4 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.

1. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 3 obtenus. Quelle est la loi de X ?
2. Que valent $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$?

► Exercice 11 (Amérique du Nord 2024) – Voir le corrigé

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au dis-millième.

On choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. On admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65. On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X \geqslant 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Une entreprise produit des composants électroniques, dont on estime que 5% d'entre eux sont défectueux. On prélève 10 composants parmi le stock. On suppose que le stock est assez grand pour que cette sélection soit assimilée à un tirage avec remise dans le stock. On note X le nombre de composants défectueux ainsi piochés.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse ?
3. Que vaut $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$?
4. Combien de composants doit-on prélever pour être sûr à au moins 99% de piocher au moins un composant défectueux dans ce lot ?

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On lance quatre fois une pièce équilibrée et on regarde sur quel côté elle tombe. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de PILE

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quel est la probabilité de ne tomber aucune fois sur PILE ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 PILE ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au plus 2 PILE ?
5. En moyenne, combien obtiendra-t-on de PILE ?
6. Reprendre les questions précédentes en lançant 5 fois une pièce truquée dont la probabilité de tomber sur PILE vaut 0.6.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Dans cet exercice, les probabilités calculées seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Une entreprise produit des stylos en grande quantité. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est de 0,1.

On prélève 10 stylos dans le stock de cet entreprise. On suppose que le nombre de stylos produits est suffisamment grand pour que cette sélection soit assimilée à des tirages indépendants et avec remise. On note X le nombre de stylos défectueux ainsi piochés.

1. Quelle est la loi de X ? On précisera ses paramètres.
2. Donner l'espérance et la variance de X.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement un stylo défectueux.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un stylo défectueux.
5. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus deux stylos défectueux.

► Exercice 15 (Asie 2024) – Voir le corrigé

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7% des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   (d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   (e) Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathbb{P}(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 16 (Asie 2015) – Voir le corrigé

Un concurrent participe à un concours de tir à l'arc, sur une cible circulaire. A chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est égale à 0,8.

1. Le concurrent tire quatre flèches. On considère que les tirs sont indépendants. Déterminer la probabilité qu'il atteigne au moins trois fois la cible.
2. Combien de flèches le concurrent doit-il prévoir pour atteindre en moyenne la cible 12 fois ?

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On suppose que $E[X] = 3{,}36$ et $\sigma(X) = 1{,}68$.

Calculer $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$. On donnera une réponse arrondie au dix-millième.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Une urne contient un très grand nombre de boules rouges et de boules noires, indiscernables au toucher. On note p la proportion de boules rouges dans cette urne. On tire 20 fois, et avec remise, une boule dans cette urne et on note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On effectue un tel tirage et on obtient alors 5 boules rouges. À partir de cette information, on souhaite déterminer le nombre de boules rouges dans l'urne en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance : cette méthode consiste à déterminer la valeur de la proportion p pour laquelle la probabilité $\mathbb{P}(X = 5)$ est maximale.

2. Exprimer $\mathbb{P}(X = 5)$ en fonction de p.
3. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on note $f(x) = x^5(1-x)^{15}$. On admet que la fonction f ainsi définie est dérivable sur $[0;1]$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = -5x^4(4x-1)(1-x)^{14}$.
   (b) En déduire que f admet un maximum sur $[0;1]$ en une valeur que l'on précisera.
4. Conclure à l'aide des résultats précédents.

Exercices de synthèse

► Exercice 19 (Réunion 2023) – Voir le corrigé

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE. On suppose que chaque client achète un seul matelas. On dispose des informations suivantes :

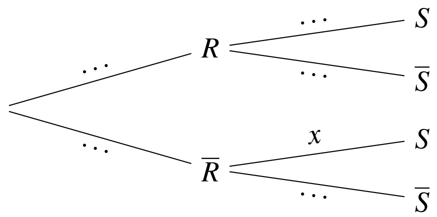
- 20% des clients achètent un matelas RESSORTS. Parmi eux, 90% sont satisfaits de leur achat.
- 82% des clients sont satisfaits de leur achat.

On choisit uniformément au hasard un client et on note les évènements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$ où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.



2. Démontrer que $x = 0{,}8$.
3. On choisit un client satisfait de son achat.
   Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.
4. On choisit 5 clients au hasard. On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.
   (a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
   On arrondira le résultat à 10^{-3}
5. Soit n un entier naturel non nul. On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.
   (a) On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat.
   Démontrer que $p_n = 0{,}82^n$.
   (b) Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0.01$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 20 (Antilles - Guyane 2016) – Voir le corrigé

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65% de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8% des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5% des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : " l'ampoule provient de la machine A " ;
- B : " l'ampoule provient de la machine B " ;
- D : " l'ampoule présente un défaut ".

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   (a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   (b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0, 9305.
   (c) L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle vienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X le nombre d'ampoules sans défaut ainsi obtenues.
   (a) Quelle est la loi de X ? On précisera ses paramètres.
   (b) Quelle est la probabilité qu'exactement une ampoule présente un défaut ?
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

▶ Exercice 21 (Amérique du Nord 2021) – Voir le corrigé

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.
Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage. Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme. On note D l'événement « l'athlète est dopé » et T « le test est positif ». On admet que la probabilité de l'événement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $\mathbb{P}(T) = 0{,}083$.
3. (a) Si un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?
   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95. Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète présente un test positif est 0,103.

4. Dans cette question, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.
   (b) Calculer l'espérance $E[X]$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
5. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

▶ Exercice 22 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé. Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases :

- La première phase est une phase de qualification. Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est 0,6.
- La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés. Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés.

Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- Condition 1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80% des cas.
- Condition 2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.

Le jeu peut-il être retenu ?

3. Corrigés

Succession d’épreuves indépendantes

Loi binomiale

Exercices de synthèse