1. Cours : Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue positive

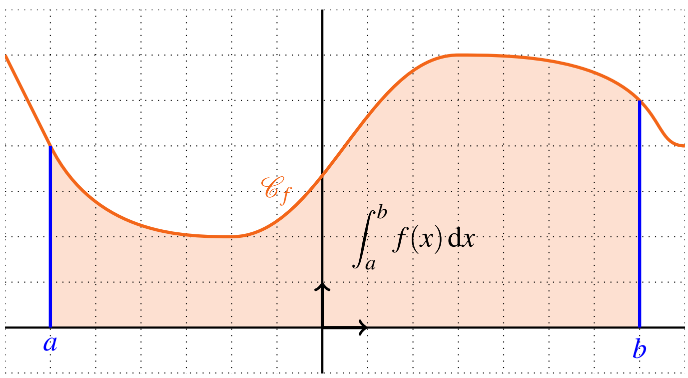
Définition 1 : On considère un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit $I(1;0)$, $K(1;1)$ et $J(0;1)$.

On appelle unité d'aire du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ l'aire du rectangle $OIKJ$.

Dans tout ce chapitre, on se place désormais dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Définition 2 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe de la fonction f dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

L'aire délimitée par $\mathscr{C}_f$, par l'axe des abscisses et par les droites d'équation $x=a$ et $x=b$, exprimée en unité d'aires se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et s'appelle l'intégrale de $f(x)$ pour x allant de a à b.

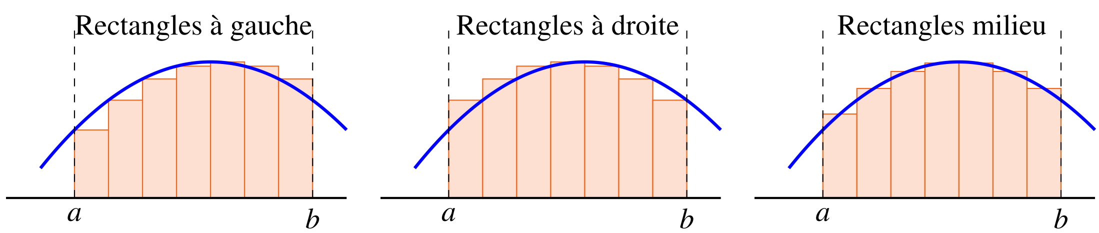


■ **Exemple 1 :** Il est possible d'encadrer l'aire sous la courbe en utilisant le quadrillage.

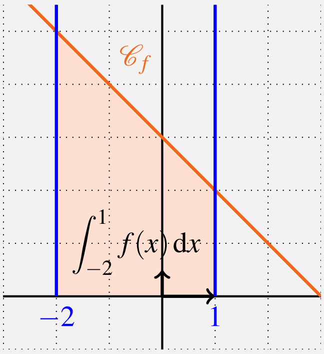
Ici, l'aire sous la courbe est composée de 44 carreaux entiers, l'intégrale est donc supérieur ou égale à 44. Par ailleurs, si on ajoute les 17 carreaux que traverse la courbe, on a alors que l'intégrale est inférieure à 61.

On a alors $44 \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 61$. ■

La notation de l'intégrale est due à Leibniz : pour calculer l'aire sous une courbe, Leibniz l'approchait par des rectangles de largeur de plus en plus petite. La hauteur des rectangles en x était $f(x)$ et leur largeur, notée $\mathrm{d}x$, se rapprochait de 0 : on faisait donc la somme des $f(x)\,\mathrm{d}x$ entre a et b. Le symbole $\int$ de l'intégrale n'est autre qu'un S allongé qui signifie justement "somme".



■ **Exemple 2 :** Pour tout réel x, on pose $f(x)=6-2x$. On cherche la valeur de $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



Pour tout réel $x\in[-2;1]$, on a bien $f(x)\geqslant 0$.

Le polygone délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=1$ est un trapèze.

L'aire d'un trapèze dont les côtés parallèles ont pour longueur b et B et dont la hauteur vaut h est de $\dfrac{(B+b)h}{2}$.

Ici, on a $B=f(-2)=10$, $b=f(1)=4$ et $h=1-(-2)=3$.

Ainsi,

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(10+4)\times 3}{2}=21.$$

■

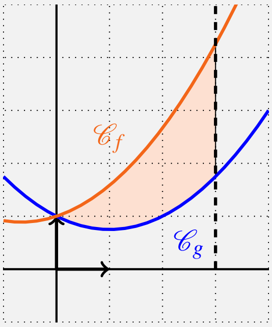
Propriété 1 : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.

On suppose que pour tout réel $x\in[a,b]$, on a $f(x)\geqslant g(x)$.

L'aire délimitée par les courbes de f et de g ainsi les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ vaut $\displaystyle\int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$.

Il est alors possible de déterminer l'aire entre deux courbes sans même savoir l'aire sous chacune de ces deux courbes.

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, on pose $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{3}+1$ et $g(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{x}{2}+1$.
On souhaite déterminer l'aire entre les courbes de f et g entre les abscisses 0 et 3.



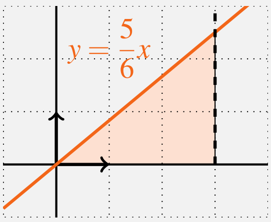
Pour tout réel $x\in[0;3]$, on a

$$f(x)-g(x)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}+1-\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}+1\right)=\frac{5x}{6}.$$

Cette quantité est positive sur $[0;3]$, L'aire entre la courbe de f et celle de g entre les abscisses 0 et 3 vaut donc $\displaystyle\int_0^3 \frac{5}{6}x\,\mathrm{d}x$.

Or, cette intégrale correspond à l'aire d'un triangle dont la base a pour longueur 3 et la hauteur associée vaut $\dfrac{5}{6}\times 3$ soit $\dfrac{5}{2}$.

Cette aire vaut $\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{5}{2}$, soit $\dfrac{15}{4}$.



Ainsi, l'aire entre les courbes de f et de g entre les abscisses 0 et 3 vaut $\dfrac{15}{4}$ unités d'aire.

■

2 Intégrale et primitives

2.1 Théorème fondamental

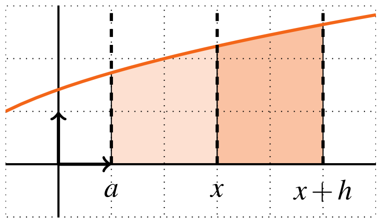
Théorème 1 : f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

En particulier, toute fonction continue positive admet une primitive.

Démonstration 2 : On se contente de démontrer le cas où f est strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$.

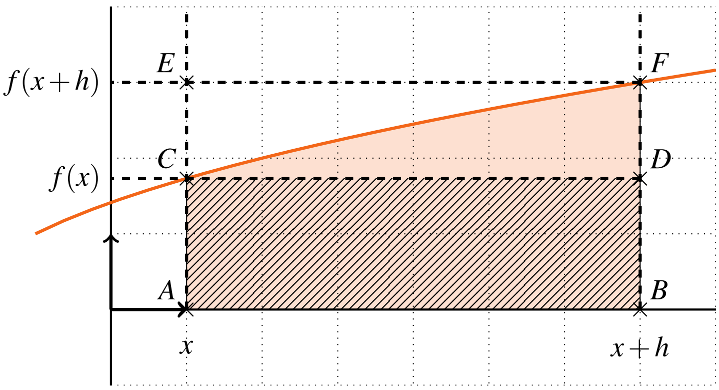
Soit $x \in [a,b[$ et h un réel strictement positif tel que $x+h \in [a,b]$.



$F_a(x+h) - F_a(x)$ représente l'aire sous la courbe de f entre a et $x+h$ à laquelle on retire l'aire sous la courbe de f entre a et x. C'est donc l'aire sous la courbe de f entre x et $x+h$.

Ainsi, $F_a(x+h) - F_a(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$.

On considère les points $A(x,0)$, $B(x+h,0)$, $C(x,f(x))$, $D(x+h,f(x))$, $E(x,f(x+h))$ et $F(x+h,f(x+h))$.



La fonction f étant strictement croissante, l'aire $\int_x^{x+h} f(t)dt$ est comprise entre l'aire du rectangle $ABDC$, qui vaut $h \times f(x)$ et l'aire du rectangle $ABFE$ qui vaut $h \times f(x+h)$.

Ainsi, $hf(x) \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant hf(x+h)$. En divisant par h strictement positif, on a alors

$$f(x) \leqslant \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leqslant f(x+h).$$

Or, f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$.

D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{h \to 0^+} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

On raisonne de la même manière pour $x \in]a;b]$ et $h < 0$. On a donc $\lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(x)$.

La fonction F_a est dérivable en x et $F_a'(x) = f(x)$. Ce raisonnement vaut pour tout $x \in [a,b]$: F_a est une primitive de f sur $[a,b]$.

Par ailleurs, $F_a(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$. □

Définition 3 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

On note également $[F(x)]_a^b$.

Démonstration 3 : On considère la fonction $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. On rappelle que cette fonction est l'unique primitive de f sur $[a;b]$ qui s'annule en a.

Soit F une autre primitive de f sur $[a,b]$. Les primitives de f sur $[a,b]$ ne variant que par une constante, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $F_a(x) = F(x) + k$.

Or, on sait que $F_a(a) = 0$. Il en vient que $F(a) + k = 0$ et donc $k = -F(a)$. Ainsi, pour tout réel $x \in [a;b]$,

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

En particulier, $F_a(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. □

Cette quantité ne dépend donc pas de la primitive choisie !

■ **Exemple 4 :** On cherche à calculer $\displaystyle\int_1^5 x^2\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[1;5]$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$. Ainsi,

$$\int_1^5 x^2) \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}.$$

■

2.2 Généralisation aux fonctions de signe quelconque

Définition 4 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

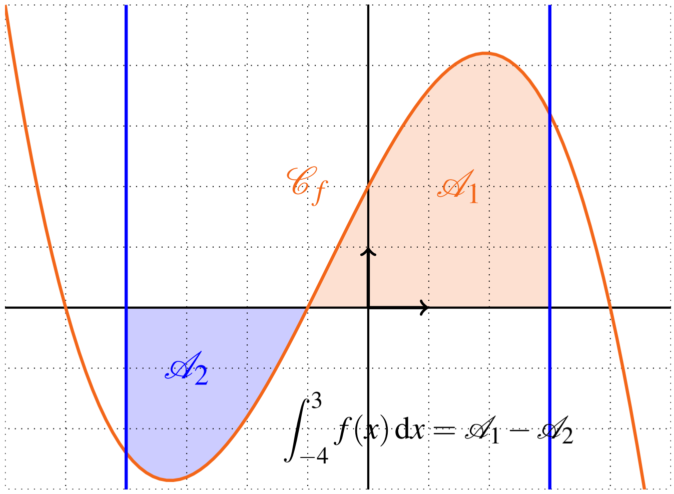
■ **Exemple 5 :** On cherche à calculer $\displaystyle\int_{-2}^1 x^3\,\mathrm{d}x$.

Une primitive de la fonction $x \mapsto x^3$ sur $[-2;1]$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}$. Ainsi,

$$\int_{-2}^1 x^3) \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}.$$

■

La quantité ici est négative, il n'est pas possible de l'interpréter directement comme une aire. Il s'agit en réalité de la différence de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses lorsque la courbe est au-dessus de cet axe et de cette même aire lorsque la courbe est cette fois en-dessous de l'axe des abscisses.



2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 2 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et c un réel de l'intervalle $[a,b]$. Soit λ réel.

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$;
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$;
- **(Relation de Chasles)** $\displaystyle\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.

La relation de Chasles permet notamment de calculer la valeur d'intégrales de fonctions définies par morceaux.

■ **Exemple 6 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{, si } x<0 \\ x^3+1 & \text{, si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

La fonction f est continue sur $[-2;3]$. En effet, le seul souci en éventuel se situe en 0.

Or, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^2+1 = 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^3+1 = 1$ et $f(0)=1$. Ainsi,

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} (x^2+1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (x^3+1)dt.$$

Or, une primitive de $x \mapsto x^2+1$ sur $[-2,0]$ est $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}+x$ et une primitive de $x \mapsto x^3+1$ sur $[0;3]$ est $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}+x$. Finalement,

$$\int_{-2}^{3} f(t)dt = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}+x\right]_{0}^{3} = \frac{14}{3} + \frac{93}{4} = \frac{335}{12}.$$

■

Propriété 3 : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Si pour tout réel x dans $[a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Cette propriété est souvent utilisée dans le sens contraposé : si f est une fonction continue et positive d'intégrale nulle, alors f est la fonction nulle.

Propriété 4 : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que pour tout réel x, $f(x) \leqslant g(x)$.

On a alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration 4 : La fonction $g-f$ est continue et positive sur $[a,b]$.

Ainsi, d'après la propriété précédente, $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Or, $\int_a^b (g-f)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$. On a donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

■ **Exemple 7 :** Soit f une fonction continue sur $[-2,5]$ telle que pour tout $x \in [-2;5]$, $x \leqslant f(x) \leqslant 7$.

Ainsi, $\int_{-2}^5 x\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Or, $\int_{-2}^5 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^5 = \frac{21}{2}$ et $\int_{-2}^5 7\,\mathrm{d}x = [7x]_{-2}^5 = 49$. Ainsi, $\frac{21}{2} \leqslant \int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 49$. ■

2.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 5 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel

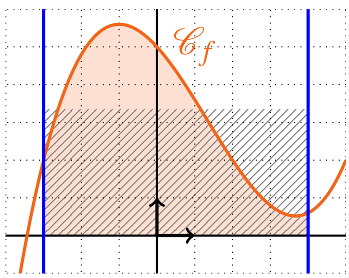
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■ **Exemple 8 :** La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2+1$ sur $[1;4]$ vaut

$$\frac{1}{4-1}\int_1^4 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+x\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{4^3}{3}+4-\frac{1^3}{3}-1\right) = 24.$$

■

Pourquoi le nom de valeur moyenne ? Si l'on note M la valeur moyenne de la fonction f, alors l'aire sous la courbe de f entre a et b correspond à l'aire du rectangle ayant pour longueur $b-a$ et pour hauteur M.
Dans le cas ci-contre, le rectangle hachuré (qui a pour hauteur la valeur moyenne de la fonction représentée) et le domaine rempli en rouge ont la même aire.



3 Intégration par parties

Propriété 5 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$ dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Alors

$$\int_a^b (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration 5 : uv est dérivable sur $[a,b]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire $uv' = (uv)' - u'v$. En intégrant cette égalité entre a et b, on obtient le résultat voulu. □

■ **Exemple 9 :** On souhaite calculer $\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $u(x) = x$. On a alors $u'(x) = 1$;
- Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $v(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ de sorte que $v'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

On cherche alors à calculer $\int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x$. D'après la formule d'intégration par parties,

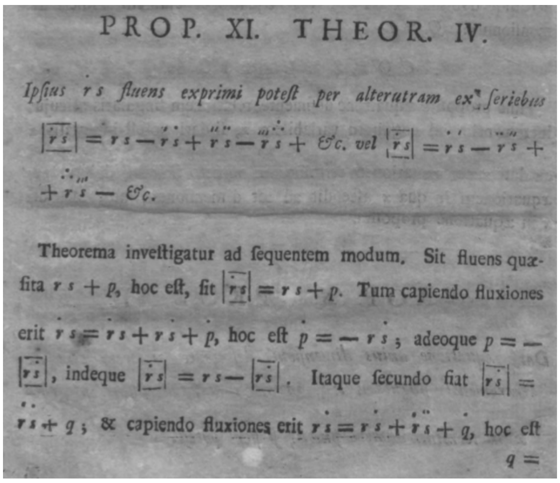
$$\int_0^1 (uv')(x)\,\mathrm{d}x = [uv]_0^1 - \int_0^1 (u'v)(x)\,\mathrm{d}x = \left[x \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Or, $\left[x \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ et $\int_0^1 1 \times \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2} = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1 = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4} - \dfrac{1}{4}$. Ainsi,

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$

■

L'intégration par parties est pour la première fois abordée par Brook Taylor en 1715, dans son livre *Methodus Incrementorum directa et inversa*. Dans cet ouvrage, Taylor utilise la notation de Newton : les dérivées sont symbolisées par un point et les intégrales par un rectangle qui entoure la fonction.


PROP. XI. THEOR. IV.

Ipsius $\dot{r}s$ fluens exprimi potest per alterutram ex seriebus

$\boxed{\dot{r}s} = rs - r\dot{s} + r\ddot{s} - r\dddot{s} + $ &c. vel $\boxed{r\dot{s}} = rs - \dot{r}s + \ddot{r}s - \dddot{r}s + $ &c.

Theorema investigatur ad sequentem modum. Sit fluens quæsita $rs + p$, hoc est, sit $\boxed{\dot{r}s} = rs + p$. Tum capiendo fluxiones erit $\dot{r}s = \dot{r}s + r\dot{s} + \dot{p}$, hoc est $\dot{p} = -r\dot{s}$; adeoque $p = -\boxed{r\dot{s}}$, indeque $\boxed{\dot{r}s} = rs - \boxed{r\dot{s}}$. Itaque secundo fiat $\boxed{r\dot{s}} = \dot{r}s + q$; & capiendo fluxiones erit $r\dot{s} = r\dot{s} + \ddot{r}s + \dot{q}$, hoc est $q =$