1. Cours : Continuité

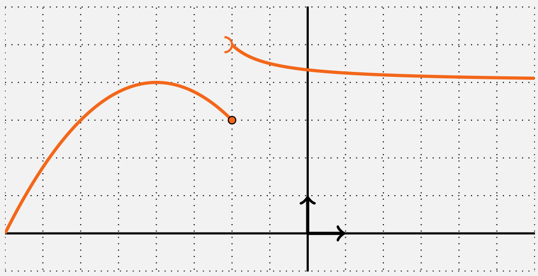
1 Continuité d'une fonction réelle

Définition 1 — Continuité : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

- On dit que f est *continue* en a si f admet une limite en a, par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout réel de I.

■ **Exemple 1 :** Jusqu'ici, les fonction de référence rencontrées étaient continues sur leur domaine de définition : fonctions polynômes ou quotients de polynômes, exponentielle, racine carrée, sinus, cosinus, valeur absolue... ■

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



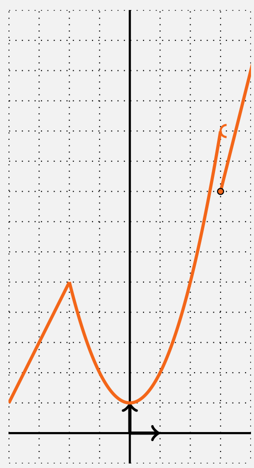
On remarque que

- $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = 3$;
- $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = 5$.

Ces deux valeurs sont différentes, la fonction f n'est pas continue en 2.
Graphiquement, on voit que la courbe de la fonction fait un "saut" en $x = -2$. ■

■ **Exemple 3 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x+9 & \text{si } x < -2 \\ x^2+1 & \text{si } -2 \leqslant x < 3 \\ 4x-4 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]-\infty;-2[$, $]-2;3[$ et $]3;+\infty[$.
Il faut étudier la continuité aux bords de chaque intervalle.



Continuité en -2

- $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$;
- $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = 2 \times (-2) + 9 = 5$;
- $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = (-2)^2 + 1 = 5$.

Ainsi, f est continue en -2.

Continuité en 3

- $f(3) = 4 \times 3 - 4 = 8$;
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 3^2 + 1 = 10$.

On a $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq f(3)$. Ainsi, f est n'est pas continue en 3. ■

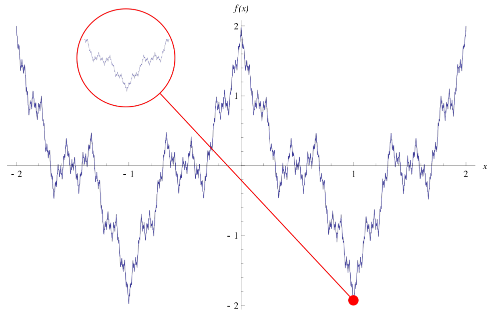
Propriété 1 : La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continus sur I.

■ **Exemple 4 :** La fonction $x \mapsto \cos(x)(x^2+3\sqrt{x}) - \sin(x)e^x$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. ■

Théorème 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable sur I, alors f est également continue sur I.

La réciproque est fausse. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0.

Il existe par ailleurs des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont dérivables nulle part !
Les exemples les plus connus sont sans doute les fonctions de Weierstrass. Ce sont des courbes fractales : peu importe le niveau de zoom que l'on peut avoir sur la courbe, on verra toujours de nouveaux détails apparaître.



2 Suites et fonction continue

Propriété 2 — Image d'une suite convergente : Soit I un intervalle et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$. Soit g une fonction définie sur l'intervalle I.

Si la suite (u_n) est convergente avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in I$ et si g est **continue** en ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\ell)$

En d'autres termes, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$.

■ **Exemple 5 :** Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \sqrt{9+\dfrac{1}{n}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(9+\dfrac{1}{n}\right) = 9$.

Or, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 9. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{9} = 3$. ■

L'hypothèse de continuité est primordiale ! Pour tout réel x, notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire le plus grand entier qui soit plus petit que x. Par exemple, $\lfloor 1{,}3 \rfloor = 1$.

Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = 1 - \dfrac{1}{10^n}$. On a ainsi $u_0 = 0$, $u_1 = 0{,}9$, $u_2 = 0{,}999$, $u_3 = 0{,}9999$ etc.

- Pour tout entier naturel non nul, $\lfloor u_n \rfloor = 0$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = 0$;
- La suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Ainsi, $\lfloor \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$;
- On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor \neq \lfloor \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \rfloor$.
  On montre en fait que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 1.

Théorème 2 — Théorème du point fixe : Soit I un intervalle, g une fonction définie et continue sur I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

On suppose que la suite (u_n) est convergente, de limite $\ell \in I$. Alors $g(\ell) = \ell$.

Démonstration 3 : Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = g(u_n)$. La suite (u_n) étant convergente, il est possible de passer à la limite dans cette égalité.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et, la fonction g étant continue sur I, on a d'après la propriété précédente que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n) = g(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) = g(\ell)$. Ainsi, $g(\ell) = \ell$. □

■ **Exemple 6 :** On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

Montrons que la suite (u_n) est croissante et que pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant 4$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 2$, $u_1 = \sqrt{3 \times 2 + 4} = \sqrt{10}$. On a bien $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$. Or, la fonction $x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est croissante sur $[2;4]$. Ainsi,

  $$\sqrt{3 \times 2 + 4} \leqslant \sqrt{3 \times u_n + 4} \leqslant \sqrt{3 \times u_{n+1} + 4} \leqslant \sqrt{3 \times 4 + 4},$$

  c'est-à-dire,

  $$\sqrt{10} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4.$$

  Puisque $2 \leqslant \sqrt{10}$, on a donc bien

  $$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Puisque la suite (u_n) est croissante et majorée, la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite.

Puisque la fonction $g : x \mapsto \sqrt{3x+4}$ est continue sur $\left]-\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ et que $l \in [2;4]$, on a alors $g(\ell) = \ell$.

Ainsi, $\sqrt{3\ell+4} = \ell$. En élevant cette inégalité au carré, on a $3\ell + 4 = \ell^2$, soit $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 4. Or, il n'est pas possible que la suite tende vers -1 puisque celle-ci est supérieure à 2. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

■

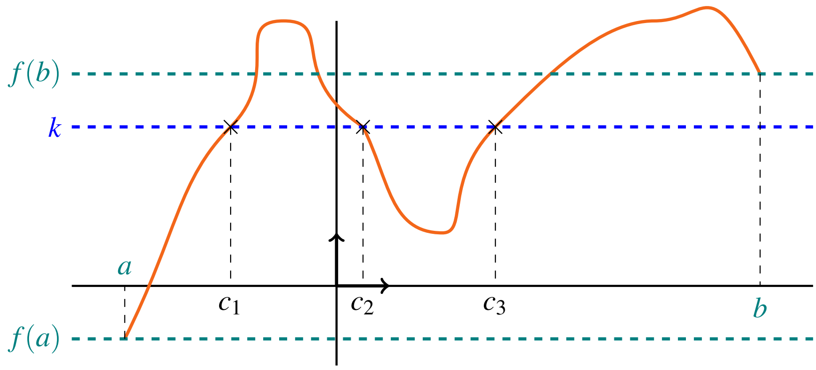
3 Théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Cas général

Théorème 4 — Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $[a;b]$ tel que $f(c)=k$.

Illustration : On représente une fonction f ci-dessous.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, k possède au moins un antécédent par f. Dans cet exemple, il y en a trois. Le nom de ce théorème se justifie ainsi : une fonction continue qui passe d'une valeur $f(a)$ à une valeur $f(b)$ passe forcément au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires.

▪ **Exemple 7 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-3x-1$, définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est une fonction polynômiale, elle est donc continue. De plus, $f(-2)=-1$ et $f(2)=3$.

Or, $0 \in [-1;3]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel $c \in [-2;2]$ tel que $f(c)=0$. ▪

Ce théorème ne nous donne aucune indication sur le nombre de ces solutions (en réalité, il y en a 3 sur cet intervalle). Nous verrons dans très peu de temps comment pallier ce problème.

Il est également possible d'utiliser les limites dans le théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 5 — Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a;b[$ telle que $\lim\limits_{x\to a^+}$ et $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existent. Soit k un réel strictement compris entre ces deux limites.

Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $]a;b[$ tel que $f(c)=k$.

▪ **Exemple 8 :** Soit a, b, c et d quatre réels avec $a>0$. On considère la fonction $f : x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$, définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel non nul, $f(x)=x^3\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x^3}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\dfrac{d}{x^3}\right)=a>0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. De même, on montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Or, $0\in]-\infty;+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel x tel que $f(x)=0$. Le même raisonnement vaut pour $a<0$: nous venons de démontrer que tout polynôme de degré 3 admet au moins une racine réelle. ▪

3.2 Fonctions strictement monotones

Théorème 6 : Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$. Soit k un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou les limites en a et b de f). Alors il existe un **unique** réel $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = k$.

Là encore, il est possible d'utiliser les limites de f en a et en b si elles existent.

■ **Exemple 9 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^{x-1}}{x}$, définie sur $I =]0;+\infty[$. Montrons que l'équation $f(x) = 2$ possède exactement deux solutions sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

D'une part, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{x} = \dfrac{1}{e} \times \dfrac{e^x}{x}$.

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x-1} = e^{-1} > 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

La fonction f est un quotient de fonctions dérivables sur I et son dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi, f est également dérivable sur I et, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{e^{x-1} \times x - e^{x-1} \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}.$$

Or, pour tout réel $x > 0$, $e^{x-1} > 0$ et $x^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $x - 1$. Ceci nous permet d'établir le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On raisonne alors selon les intervalles sur lesquels f est strictement monotone.

La fonction f est continue sur $]0;1]$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = 1$. Ainsi, $2 \in]1;+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c_1 \in]0;1[$ tel que $f(c_1) = 2$. De plus, la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $]0;1]$: la solution à cette équation est donc unique.

De même, il existe un unique réel $c_2 \in]1;+\infty[$ tel que $f(c_2) = 2$. Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$.

■

3.3 Algorithme de dichotomie

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence de solutions à une certaine équation. En revanche, il ne nous indique en rien la valeur de cette solution. Plusieurs algorithmes nous permettent néanmoins d'obtenir au moins une valeur approchée d'une solution de l'équation qui nous intéresse.

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Dans cet exemple, on supposera par exemple que $f(a) \leqslant k \leqslant f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'un réel c dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(c) = k$. L'idée, pour obtenir une valeur approchée d'un tel réel, est d'évaluer la valeur prise par la fonction au milieu de l'intervalle $[a;b]$

- Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < k$, on a alors $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant k \leqslant f(b)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors de l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$;
- Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > k$, on a alors $f(a) \leqslant k \leqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors de l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$ sur l'intervalle $\left[a;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Dans les deux cas, nous avons trouvé un intervalle deux fois plus petit que l'intervalle $[a;b]$ dans lequel l'équation $f(x) = k$ possède une solution.

■ **Exemple 10 :** On considère la fonction $f : x \mapsto 3x - e^x$. f est continue, $f(0) = -1$ et $f(1) = 3 - e > 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = 0$.

On calcule alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$: on a $f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0.15 < 0$. Ainsi, il existe un réel $c \in \left[\frac{1}{2};1\right]$ tel que $f(c) = 0$ ■

En réitérant le même procédé sur le nouvel intervalle obtenu, on obtiendra alors un intervalle 4 fois plus petit que celui de l'intervalle de départ, puis 8 fois plus petit, 16 fois, 32 fois et ainsi de suite.

On définit en réalité deux suites (a_n) et (b_n) de la manière suivante

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$;
- Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, on pose alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$;
- Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, il existe une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a_n;b_n]$.

De plus, puisque $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, la longueur de l'intervalle $[a_n;b_n]$ tend vers zéro : il est donc possible d'avoir une valeur approchée aussi précise que l'on veut à l'aide de cet algorithme. Cet algorithme peut alors être implémenté en Python

```python
def dichotomie(a, b, k, f, p) :
  # f est une fonction continue sur [a;b]
  # k est un reel tel que f(a) <= k <= f(b)
  # p designe la precision voulue pour l estimation de la solution
  while b - a >= p :
    m = (a + b) / 2
    if f(m) <= k :
      a = m
    else :
      b = m
  return a
```

Dans le cas où $f(a) \geqslant k \geqslant f(b)$, il suffit de changer le sens des inégalités.

2. Exercices

Continuité d'une fonction

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$. f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x, $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Suites et fonction continue

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4n^2+1}{n^2+3n+2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$, en énonçant bien les propriétés utilisées.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie par $f(0) = 1$ et pour tout réel non nul x, $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

1. Que vaut $f(u_n)$ pour tout entier naturel n ?
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$. La fonction f est-elle continue en 0 ?

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{3}{u_n+1} + 3$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et que la suite (u_n) est croissante.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la limite de la suite (u_n).

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$.

1. Supposons que (u_n) converge : quelle peut-être sa limite ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ et que la suite u_n est croissante.
3. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?

▶ Exercice 10 (Amérique du Nord 2021) – Voir le corrigé

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par par

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0{,}75u_n(1-0.15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 0{,}75x(1-0.15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Déterminer la limite l de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   (a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   (b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() ci-dessous.

```python
def menace():
  U = 0.6
  N = 0
  while U > 0.02 :
    U = 0.75 * U * (1 - 0.15 * U)
    N = N + 1
  return N
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace(). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Théorème des valeurs intermédiaires

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1;2]$.

► Exercice 12 (Amérique du Nord 2023) – Voir le corrigé

On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2;4]$ telle que $h(-1) = 0$, $h(1) = 4$ et $h(3) = -1$. Parmi les affirmations suivantes, quelle est l'unique affirmation correcte ?

- La fonction h est croissante sur $[-1;1]$;
- la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1;1]$;
- il existe au moins un nombre réel α dans l'intervalle $[1;2]$ tel que $h(\alpha) = 1$;
- l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-2;4]$.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1;0]$?
3. Que vaut $f(0)$? Quel est le signe de $f(-1)$?
4. En déduire que l'équation $e^x + x = 0$ admet exactement une solution sur $[-1;1]$.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 60x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier les variations de la fonction f.
2. En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

► Exercice 16 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
2. Construire le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$. On précisera les limites en 0 et en $+\infty$.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ en fonction de la valeur de m.

► Exercice 17 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0.5t^2+t+2}$. où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous. Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

▶ Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x + 1$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{T}$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ à l'abscisse 1.
2. Montrer qu'il existe une unique autre tangente à $\mathscr{C}_f$ qui soit parallèle à $\mathscr{T}$.

▶ Exercice 19 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^5 - 2x - 4$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$ possède au moins une solution sur $[1;2]$.
3. Écrire les 3 premières étapes de l'algorithme de dichotomie et donner un intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ qui contient une solution de l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$.
4. Donner une solution de cette équation au centième près.

▶ Exercice 20 – Voir le corrigé

Soit f et g les fonction définies pour tout réel x par $f(x) = (1-x)e^x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

1. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur à 10^{-2} près. On note α ce réel.
3. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.
4. Construire le tableau de variations de g.

▶ Exercice 21 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

Soit deux réels a et b avec $a < b$. On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a;b]$ et qui s'annule en un réel α. Parmi les propositions suivantes, quelle est la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0.001 près ?

```python
#Algorithme A

def racine(a,b) :
  while abs(b-a) >= 0.001 :
    m = (a+b)/2
    if f(m) < 0 :
      b = m
    else :
      a = m
    return m
```

```python
#Algorithme B

def racine(a,b) :
  m = (a+b) / 2
  while abs(b-a) >= 0.001 :
    if f(m) < 0 :
      a = m
    else :
      b = m
    return m
```

```python
#Algorithme C

def racine(a,b) :
  m = (a+b)/2
  while abs(b-a) <= 0.001 :
    if f(m) < 0 :
      a = m
    else :
      b = m
    return m
```

```python
#Algorithme D

def racine(a,b) :
  while abs(b-a) >= 0.001 :
    m = (a+b)/2
    if f(m) < 0 :
      a = m
    else :
      b = m
    return m
```

▶ Exercice 22 – Voir le corrigé

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

► Exercice 23 (Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires) – Voir le corrigé

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires... Mais pour commencer, nous avons besoin de résultats supplémentaires sur les suites.

Partie A

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$.

L'objectif de cette première partie est de démontrer que deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

1. Pour tout entier naturel n, on pose $c_n=b_n-a_n$.
   (a) Montrer que la suite (c_n) est décroissante.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $c_n\geqslant 0$ et en déduire que $a_n\leqslant b_n$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_n\leqslant b_0$ et $b_n\geqslant a_0$.
   Que peut-on en déduire sur les suites (a_n) et (b_n) ?
3. Montrer que (a_n) et (b_n) ont même limite.

Partie B

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, avec $a<b$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On suppose que $f(a)<k<f(b)$. On considère alors les suites (a_n) et (b_n) définies par

- $a_0=a$ et, pour tout entier naturel $n, a_{n+1}=\begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\geqslant k \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<k \end{cases}$
- $b_0=b$ et, pour tout entier naturel $n, b_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)\geqslant k \\ b_n & \text{si } f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)<k \end{cases}$

Le but est évidemment de montrer que ces suites sont adjacentes. Dans l'ensemble des questions suivantes, il faudra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n\leqslant b_n$.
2. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b_n-a_n}{2}$.
4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)$. Que peut-on en conclure sur les suites (a_n) et (b_n) ?
5. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(a_n)\leqslant k\leqslant f(b_n)$.
6. On note ℓ la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a,b]$.
   Montrer que $f(\ell)=k$.

3. Corrigés

Continuité d'une fonction

► Correction 1 – Voir l'énoncé

Continuité en -1 **?** : D'une part, $f(-1) = 6 \times (-1) + 8 = 2$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -3 \times (-1) + 7 = 10$.

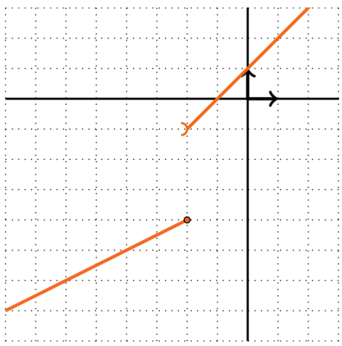
Ainsi, f n'est pas continue en -1.

Continuité en 2 **?** : D'une part, $f(2) = 2 - 1 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to 2^-} = -3 \times 2 + 7 = 1$. Enfin, $\lim\limits_{x \to 2^+} = 2 - 1 = 1$

La fonction f est continue en 2.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

$f(-2) = \dfrac{1}{2} \times (-2) - 3 = -4$. Or, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} = -2 + 1 = -1$. La fonction f n'est pas continue en -2.



► Correction 3 – Voir l'énoncé

f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Il reste à déterminer si elle est continue en 1.

- $f(1) = 1^2 + a \times 1 + b = 1 + a + b$;
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a \times 1^2 + b \times 1 + 1 = a + b + 1$;
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + a + b$.

Ainsi, f est continue en 1. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

La fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$. Or, $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. De la même manière, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$. f est donc continue en 0.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

La fonction f est continue sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) 1$ et donc $-x \leqslant x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x$. Or, $\lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

De même, on montre que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Ainsi, la fonction f est aussi continue en 0.

Suites et fonction continue

► Correction 6 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{4n^2+1}{n^2+3n+2}=\frac{n^2}{n^2}\times\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = 4$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 4.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} = \sqrt{4} = 2$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$. De plus, la fonction exponentielle est continue en 0.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^0 = 1$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, $f(u_n = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = 0$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$. La fonction f n'est donc pas continue en 0.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

- $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$ et on a bien $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$, $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
  Ainsi, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, d'où $2 \leqslant u_n + 1 \leqslant u_{n+1} + 1 \leqslant 3$.
  La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors, $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{u_n+1} \geqslant \frac{1}{u_{n+1}+1} \geqslant \frac{1}{3}$, puis, en multipliant par -3 qui est négatif, $\frac{-3}{2} \leqslant -\frac{3}{u_n+1} \leqslant -\frac{3}{u_{n+1}+1} \leqslant -1$.
  Finalement, on a $\frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$. En particulier, puisque $\frac{3}{2} > 1$, on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie P est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

La fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{x+1} + 3$ est continue sur $]-1;+\infty[$ et, pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \in]-1;+\infty[$.

Ainsi, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\ell = -\frac{3}{\ell+1} + 3$.

Ainsi, on trouve $\dfrac{\ell(2-\ell)}{\ell+1}=0$ et donc $l=0$ ou $l=2$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$, le cas $\ell=0$ est impossible. On a donc $\ell=2$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Si (u_n) converge vers un réel ℓ, puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{6+x}$ est continue sur $[-6;+\infty[$, ce réel ℓ vérifie $\ell=\sqrt{6+\ell}$. Ainsi, $\ell^2=6+\ell$ ou encore $\ell^2-\ell-6=0$. On trouve alors deux solutions qui sont $\ell=-2$ et $\ell=3$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

- $u_1=\sqrt{6+0}=\sqrt{6}$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel tel que $\mathscr{P}(\backslash)$ soit vraie. Ainsi, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
  Alors, $6 \leqslant 6+u_n \leqslant 6+u_{n+1} \leqslant 9$. Par ailleurs, la fonction Racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{6} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+3} \leqslant 3$. Or, puisque $\sqrt{6} \geqslant 0$, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. De plus, elle n'a que deux limites possibles qui sont -2 et 3. -2 est impossible puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1=0.75\times0.6\times(1-0.75\times0.6)=0.4095$ et $u_2=0.75\times0.4095\times(1-0.75\times0.4095)\simeq0.2882$. Ainsi, il y aura environ 410 individus en 2021 et 288 en 2022.
2. f est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout réel $x\in[0;1]$, $f'(x)=0.75\times(1-0.15x)+0.75x\times(-0.15)=0.75-0.225x$.
   Or, si $0\leqslant x\leqslant 1$, alors $0\leqslant 0.225x\leqslant 0.225$ d'où $0\geqslant -0.225x\geqslant -0.225$ et $0.75\geqslant 0.75-0.225x\geqslant 0.525$. En particulier, pour tout $x\in[0;1]$, $f'(x)>0$: f est strictement croissante sur $[0;1]$.

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	0 $\longrightarrow$	0.6375

3. Soit $x\in[0;1]$. $f(x)=x$ si et seulement si $0.75x(1-0.15x)=x$ soit $0.75x(1-0.15x)-x=0$. En factorisant par x, ceci est équivalent à $x(0.75(1-0.15x)-1)=0$, c'est-à-dire $x(-0.25-0.1125x)=0$. Ainsi, $f(x)=x$ si et seulement si $x=0$ ou $-0.25-0.1125x=0$, soit $x=0$ ou $x=-\dfrac{0.25}{0.1125}$. Or, $-\dfrac{0.25}{0.1125}<0$. L'unique solution de l'équation $f(x)=x$ sur $[0;1]$ est donc $x=0$.
4. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$ ».
   - On a $u_0=0.6$ et $u_1=0.4095$. On a donc bien $0\leqslant u_1\leqslant u_0\leqslant 1$. $P(1)$ est vraie.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a donc $0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_n\leqslant 1$. En appliquant la fonction f qui est strictement croissante sur $[0;1]$, on a alors $f(0)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)\leqslant f(1)$, soit $0\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 0.6375$. Puisque $0.6375<1$, on a bien $0\leqslant u_{n+2}\leqslant u_{n+1}\leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente vers un réel ℓ.

   (c) La fonction f étant continue sur $[0;1]$, on a $f(\ell)=\ell$. Or, l'unique solution de cette équation sur $[0;1]$ est 0. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
5. (a) D'après les questions précédentes, le nombre d'individus en milliers dans la population étudiée décroît et tend vers 0 : il arrivera donc un moment où cette population sera inférieure à 20 individus.

(b) L'algorithme renvoie la valeur 11 : l'espace sera menacée d'extinction en 2031.

Théorème des valeurs intermédiaires

► Correction 11 – Voir l'énoncé

On a $f(1) \simeq 1.7$ et $f(2) \simeq 6.9$.

De plus, f est continue sur $[1;2]$. Or, $2 \in [f(1);f(2)]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1;2]$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

L'affirmation correcte est l'affirmation 3 : il s'agit d'une simple application du théorème des valeurs intermédiaires.

Les images de -1 et de 1 par h ne nous donnent aucune information sur le comportement de h entre -1 et 1 : on pourrait très bien avoir $h(0) = -5$ par exemple, ce qui contredirait les affirmations 1 et 2. L'affirmation 4 est fausse : on pourrait avoir $h(0) = h(2) = h(4) = 1$. En revanche, si la fonction h était strictement monotone sur les intervalles $[-1;1]$ et $[1;3]$, on aurait alors en effet exactement deux solutions à l'équation $h(x) = 1$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

f est dérivable comme somme de fonctions dérivables (et est donc continue). Pour tout réel x, $f'(x) = e^x + 1$. Puisque pour tout réel x, $e^x > 0$, il en vient que f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (et en particulier sur $[-1;0]$). La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1;2]$. Par ailleurs, $f(0) = 1$ et $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$.

Reprenons les informations des questions précédentes : La fonction f est continue sur $[-1;0]$. On a $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-1;0]$. De plus, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, une telle solution est unique.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x) = 6x^2 + 18x - 60 = 6(x^2 + 3x - 10)$. Ainsi, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -5$. On a par ailleurs $f(2) = -65$ et $f(-5) = 278$. En outre, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Le tableau de variations de f est le suivant.

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	278	$\searrow$	-65	$\nearrow$	$+\infty$

On peut en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Par exemple, sur $]-\infty;-5[$:

- La fonction f est continue et strictement monotone ;
- $f(-5) > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
- Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $]-\infty;-5[$.

De la même manière, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-5;2[$ puis une unique solution sur $]2;+\infty[$. Ainsi, l'équation $f(x)=0$ possède exactement 3 solutions sur $\mathbb{R}$.

▶ Correction 15 – Voir l'énoncé

f est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x)=3x^2-10x+3=3(x-3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$.
Les racines peuvent aussi se calculer à l'aide de la méthode du discriminant. On peut alors dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones sur chacun des intervalles $\left]-\infty;\dfrac{1}{3}\right]$, $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$ et $[3;+\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ possède exactement 3 solutions.

▶ Correction 16 – Voir l'énoncé

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{e^x\times x-e^x\times 1}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$.

Puisque pour tout $x>0$, $e^x>0$ et $x^2>0$, $f'(x)$ est du signe de $x-1$. Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Enfin, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi,

- si $m<e$, l'équation $f(x)=m$ ne possède aucune solution sur $]0;+\infty[$.
- si $m=e$, l'équation $f(x)=m$ possède une unique solution sur $]0;+\infty[$: il s'agit de $x=1$.
- si $m>e$, l'équation $f(x)=m$ possède deux solutions sur $]0;+\infty[$: l'une sur l'intervalle $]0;1[$, l'autre sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

▶ Correction 17 – Voir l'énoncé

- **Faux** : f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et, pour tout réel $t>0$,

  $$f'(t)=-(-t+1)e^{-0.5t^2+t+2}=(t-1)e^{-0.5t^2+t+2}$$

  $f'(t)$ est du signe de $t-1$. On peut alors construire le tableau de variations de f.

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f	e^3-e^2	$\searrow$	$e^3-e^{2.5}$	$\nearrow$	e^3

En particulier, $f(1)<f(0)$. La population ne fait pas qu'augmenter en permanence.

- **Faux :** On a $\lim_{t\to+\infty} f(t)=e^3\simeq 20.08$. Par ailleurs, la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$. Ainsi, pour tout $t>1$, $f(t)\leqslant 20.08$. En particulier, la population ne dépasse 21000 bactéries.
- **Vrai :** La fonction f est continue sur $[0;1]$. Par ailleurs, $f(0)=e^3-e^2>10$ et $f(1)=e^3-e^{2.5}<10$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t\in]0;1[$ tel que $f(t)=10$. La fonction f étant strictement décroissante sur cet intervalle, une telle solution est unique. De même, il existe un unique réel $t_2\in[1;+\infty[$ tel que $f(t_2)=10$. Finalement, 10 possède exactement deux antécédents par la fonction f : la population de bactéries aura donc un effectif de 10000 à deux reprises.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f'(x)=5x^4-12x^3+2$. Ainsi, $f'(1)=-5$. Par ailleurs, $f(1)=1$. Ainsi, l'équation réduite de $\mathscr{T}$ est $y=-5(x-1)+1$ soit $y=-5x+6$.

La deuxième question revient à montrer que l'équation $f'(x)=-5$ possède exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$ (l'une de ces solutions étant $x=1$). Pour tout réel x, $f''(x)=20x^3-36x^2=x^2(20x-36)$. Ainsi, pour tout réel x, $f''(x)$ est du signe de $20x-36$. Par ailleurs, par opérations sur les limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

Enfin, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=x^4\left(5-\dfrac{12}{x}+\dfrac{2}{x^4}\right)$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Ceci nous permet de dresser le tableau de variations de f'.

x	$-\infty$		$9/5$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1937}{125}$	$\nearrow$	$+\infty$

Or, f' est continue sur $\left[\dfrac{9}{5};+\infty\right[$. Par ailleurs, $-5\in\left[f\left(\dfrac{9}{5}\right);+\infty\right[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x)=-5$ possède une unique solution sur l'intervalle $\left[\dfrac{9}{5};+\infty\right[$. Si l'on note α cette solution, ceci signifie que la tangente à $\mathscr{C}_f$ à l'abscisse α est parallèle à $\mathscr{T}$. L'équation $f'(x)=-5$ admet également une unique solution sur $\left]-\infty;\dfrac{9}{5}\right]$, mais cette solution n'est autre que $x=1$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

On a $f(1)=-5<0$ et $f(2)=24>0$. La fonction f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c\in[1;2]$ tel que $f(c)=0$.

- Calculons alors $f(1.5)$: On a $f(1.5)\simeq 0.59$. Ainsi, il existe un réel $c\in[1;1.5]$ tel que $f(c)=0$.
- Calculons alors $f(1.25)$: On a $f(1.25)\simeq -3.45<0$. Ainsi, il existe un réel $c\in[1.25;1.5]$ tel que $f(c)=0$.

- Calculons alors $f(1.375)$: On a $f(1.375) \simeq -1.84 < 0$. Ainsi, il existe un réel $c \in [1.375; 1.5]$ tel que $f(c) = 0$.

En poursuivant ainsi, on trouve que $c \simeq 1.47$

► Correction 20 – Voir l'énoncé

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = e^x - xe^x + 1$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} = 1$.
   f est par ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (-1)\times e^x + (1-x)e^x = -xe^x$, qui est donc du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	↗	2	↘	$-\infty$

2. Pour tout réel $x < 0$, $f'(x) > 1$ et en particulier, $f'(x) > 0$. Par ailleurs, f est continue sur $[0; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; 2]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, un tel réel est unique. En utilisant la calculatrice, on trouve $x \simeq 1.28$.
3. Pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{1\times(e^x+1) - x\times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.
4. Puisque pour tout réel x, $(1+e^x)^2 > 0$, $g'(x)$ est du signe de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		↗		↘	

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Puisque f est strictement croissante sur $[a,b]$, on en déduit que $f(a) < 0$ et que $f(b) > 0$.

Dans les algorithmes B et C, la valeur de m n'est pas mise à jour à l'intérieur de la boucle while. Ils ne peuvent donc pas être les bons algorithmes.

Si $f(m) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(m)$ sont du même signe, il faut donc remplacer la valeur de a par celle de m. Le bon algorithme est l'algorithme D.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0; 1]$. De plus, $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque $f(1) \in [0; 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) - c = 0$ ou encore $f(c) = c$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

Partie A

1. (a) Pour tout entier naturel n, $c_{n+1}-c_n = b_{n+1}-a_{n+1}-(b_n-a_n) = b_{n+1}-b_n-(a_{n+1}-a_n)$. Or, (b_n) est décroissante et donc $b_{n+1}-b_n \leqslant 0$. (a_n) est croissante et donc $-(a_{n+1}-a_n) \leqslant 0$.
   Ainsi, $c_{n+1}-c_n \leqslant 0$. La suite (c_n) est décroissante.
   (b) La suite (c_n) est décroissante et de limite 0. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geqslant 0$ et donc $a_n \leqslant b_n$.
2. Pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_n$. Or, (b_n) est décroissante et donc, pour tout entier naturel n, $b_n \leqslant b_0$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n \leqslant b_0$. Un raisonnement similaire permet de conclure que, pour tout entier naturel n, $b_n \geqslant a_0$. La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b_0, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0. Ces deux suites sont donc convergentes.
3. Notons l_1 la limite de (a_n) et l_2 la limite de (b_n). On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n)=0$.
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n - \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l_1-l_2$. Ainsi, $l_1-l_2=0$ et donc $l_1=l_2$.

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $a_n \leqslant b_n$ » .
   - Pour $n=0$, on a $a_0=a$, $b_0=b$, et on a bien $a_0 \leqslant b_0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $a_n \leqslant b_n$.
     – En ajoutant a_n et en divisant par 2, on obtient que $a_n \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2}$.
       Dans le cas où $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, on a donc encore $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$
     – En ajoutant b_n et en divisant par 2, on obtient que $\dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$.
       Dans le cas où $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, on a donc encore $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$

     Dans tous les cas, on a donc $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. Soit n un entier naturel.
   Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$ alors $a_{n+1}-a_n = a_n-a_n = 0$ et $b_{n+1}-b_n = \dfrac{b_n+a_n}{2}-b_n = \dfrac{a_n-b_n}{2} \leqslant 0$.
   Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $a_{n+1}-a_n = \dfrac{b_n+a_n}{2}-a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \geqslant 0$ et $b_{n+1}-b_n = b_n-b_n = 0$.
   Dans tous les cas, on a $a_{n+1}-a_n \geqslant 0$ et $b_{n+1}-b_n \leqslant 0$. (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
3. Soit n un entier naturel.
   - Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geqslant k$, alors $b_{n+1}-a_{n+1} = \dfrac{b_n+a_n}{2}-a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2}$
   - Si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < k$, alors $b_{n+1}-a_{n+1} = b_n-\dfrac{b_n+a_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$

   Dans tous les cas, $b_{n+1}-a_{n+1} = \dfrac{b_n-a_n}{2}$
4. Ainsi, la suite (b_n-a_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{2}$. Pour tout entier naturel n, $b_n-a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$. Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. d'après la partie 1, elles sont donc convergentes et de même limite.
5. D'après la définition des suites (a_n) et (b_n), on a que pour tout entier naturel n, $f(a_n) \leqslant k \leqslant f(b_n)$.
6. On note l la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient que $f(l) \leqslant k \leqslant f(l)$ et donc que $f(l)=k$.