1. Cours : Fonctions trigonométriques

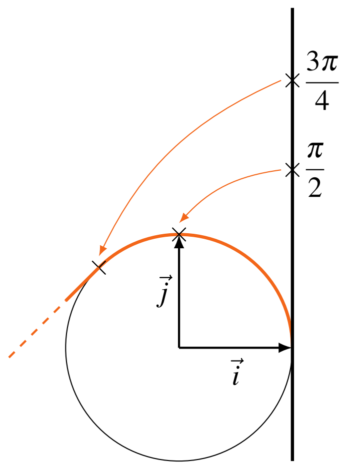
Dans tout ce chapitre, on se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé.

1 Rappels

1.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 1 : On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1 que l'on parcourt dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Ce sens est appelé sens trigonométrique.

On trace la droite des réels à droite de ce cercle trigonométrique, parallèlement à l'axe des ordonnées, puis on l'enroule autour d'une cercle trigonométrique. A chaque point x sur cette droite des réels, on associe ainsi un unique point $M(x)$ sur le cercle.

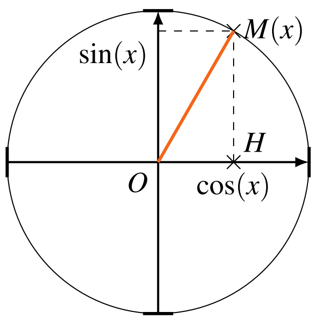


Propriété 1 : Deux réels dont la différence est le produit de 2π et d'un nombre entier ont la même image par M.

1.2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Définition 2 : Soit x un réel et $M(x)$ son image sur le cercle trigonométrique. On appelle :

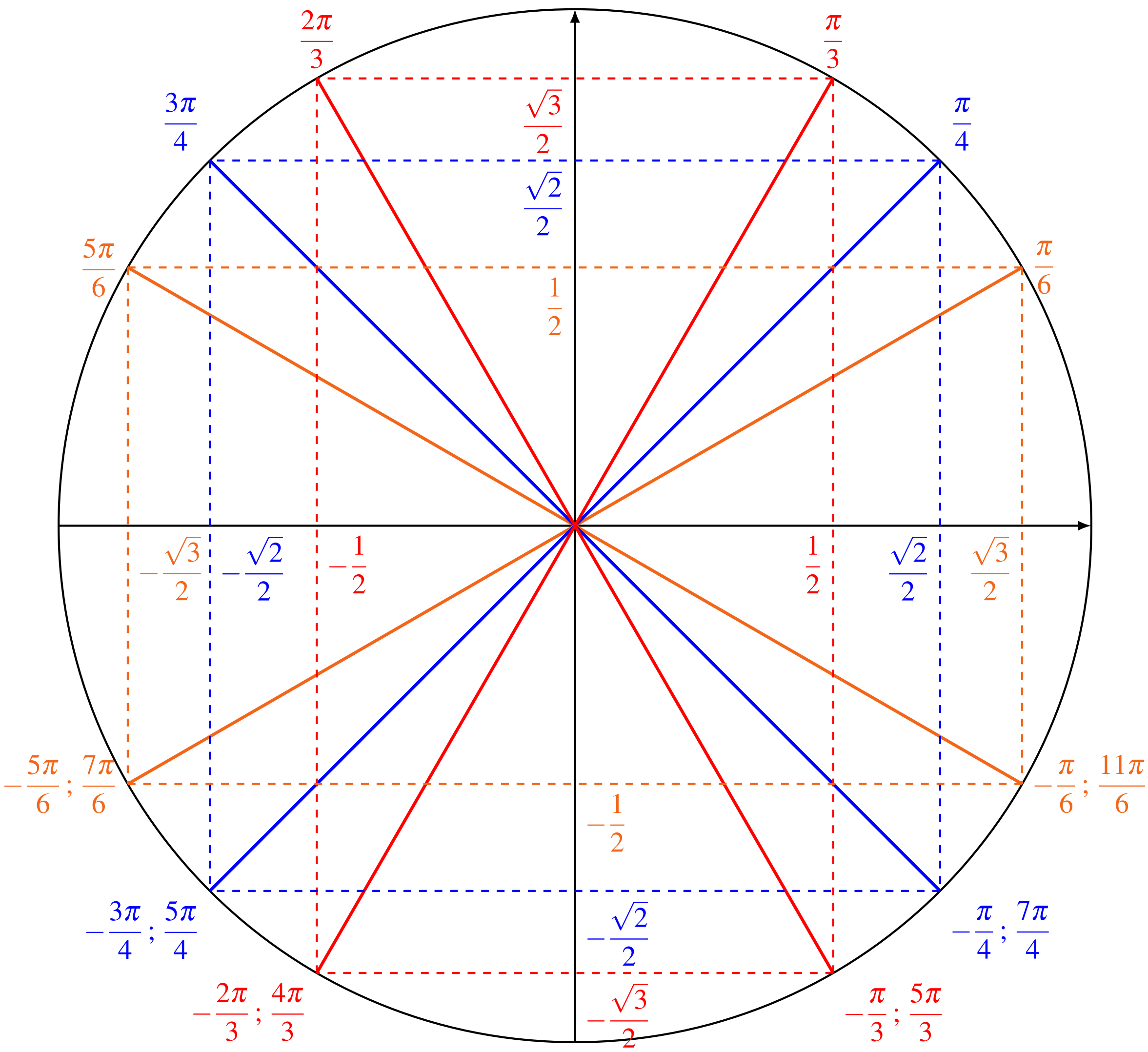
- Cosinus de x, noté $\cos(x)$, l'abscisse de $M(x)$;
- Sinus de x, noté $\sin(x)$, l'ordonnée de $M(x)$.



■ **Exemple 1 :** On retiendra en particulier les valeurs remarquables suivantes.

Degré	0	30	45	60	90	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

■



Propriété 2 : Pour tout réel x,

$$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \qquad \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1+x}{2+\sin(x)}$.

Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \geqslant \sin(x) \geqslant -1$, alors $3 \geqslant 2+\sin(x) \geqslant 1 > 0$. f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, la fonction inverse étant décroissante sur $]0;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2+\sin(x)} \leqslant 1$ et donc, en multipliant par $1+x$ qui est strictement positif sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1+x}{3} \leqslant f(x)$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{3}\right) = +\infty$. Par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. ■

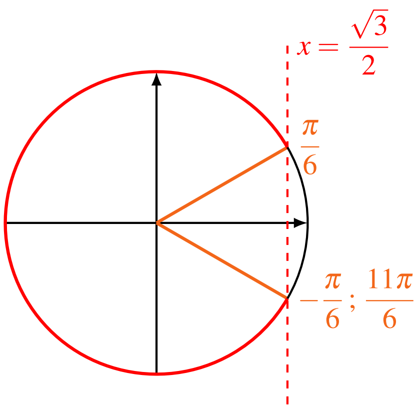
1.3 Résolution d'équation et d'inéquation

■ **Exemple 3 :** Les solutions de l'équation $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[-\pi;\pi]$ sont $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$. ■

■ **Exemple 4 :** Le solutions de l'équation $\cos(x) = 0$ sur $[0;2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. ■

■ **Exemple 5 :** L'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;2\pi]$ est l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right]$.

Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$ l'ensemble des solutions de cette inéquation est $\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{6};\pi\right]$. ■

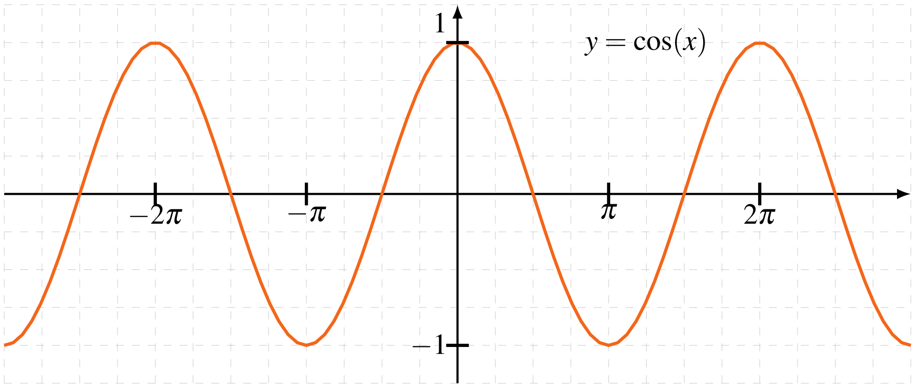


Il faut donc faire attention à l'intervalle de résolution.. Dans tous les cas, le cercle trigonométrique sera votre plus précieux allié.

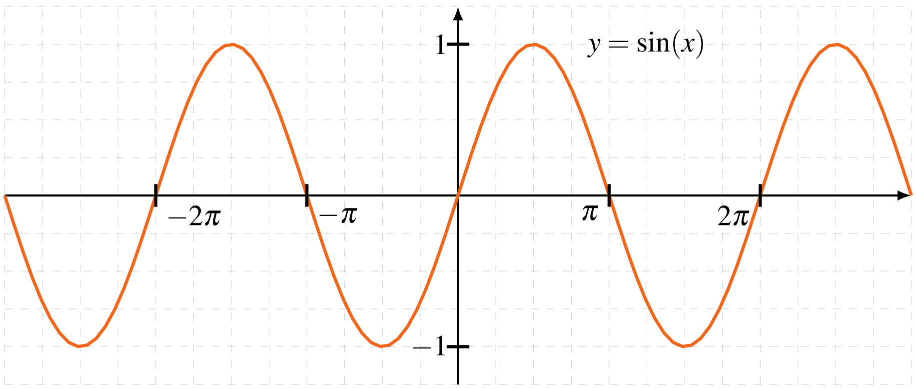
2 Fonctions trigonométriques

2.1 Définition et variations

Définition 3 : La fonction cosinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$\cos(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	



x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\sin(x)$	0		$-$		0		$+$		0

Propriété 3 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(-x) = \cos(x)$, la fonction cosinus est paire.
- $\sin(-x) = -\sin(x)$; la fonction sinus est impaire.

Cela se traduit graphiquement par le fait que la courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées alors que la courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

■ **Exemple 6 :** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Propriété 4 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$;
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

On dit que les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

■ **Exemple 7 :** $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(4 \times 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. ■

2.2 Dérivée des fonctions trigonométriques

Propriété 5 : Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour tout réel x,

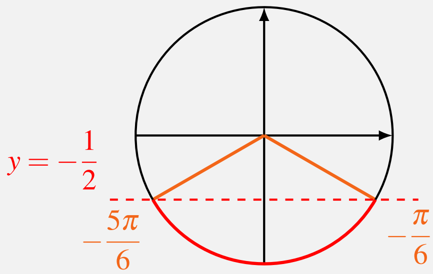
$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \cos'(x) = -\sin(x)$$

■ **Exemple 8 :** On considère la fonction $g : x \mapsto 2\cos(x) - x$ définie sur $I = [-\pi; \pi]$. g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = -2\sin(x) - 1$.

Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.

Pour résoudre cette inéquation on peut utiliser le cercle trigonométrique.

Ainsi, $g'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$.
Pour résoudre cette inéquation on peut utiliser le cercle trigonométrique.
L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(x) \leqslant -\frac{1}{2}$ sur $[-\pi; \pi]$ est $\left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$. On peut alors construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$



x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		π
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$\pi - 2$	↘	$\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗	$\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$	↘	$-2 - \pi$

■

Il est également possible de dérivée des fonctions composées avec le cosinus ou le sinus.

Propriété 6 : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors $\sin(u)$ et $\cos(u)$ sont également dérivables sur cet intervalle I et on a

$$(\sin(u))' = u' \times \cos(u) \qquad \text{et} \qquad (\cos(u))' = -u' \times \sin(u)$$

■ **Exemple 9 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sin(3x^2 - 4x + 5)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (6x - 4)\sin(3x^2 - 4x + 5)$. ■

Propriété 7 : Soit a un réel non nul.

- Une primitive de $x \mapsto \cos(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{a}$.
- Une primitive de $x \mapsto \sin(ax)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -\dfrac{\cos(ax)}{a}$.

Démonstration 1 : Il suffit de dériver. Attention au signe ! □

■ **Exemple 10 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(9x)$. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2x) + \dfrac{5}{9}\cos(9x)$. ■

■ **Exemple 11 :** Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \cos(x)\sin(x)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \sin'(x) \times \sin(x)$.
Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie pour tout réel x par $G(x) = \dfrac{1}{2}\sin^2(x)$. ■

■ **Exemple 12 :** On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $I = \displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

D'une part, pour tout réel x,

$$f(x) = \sin(x) \times \sin^2(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x)) = \sin(x) - \sin(x)\cos^2(x).$$

Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi (-\sin(x)\cos^2(x))\,\mathrm{d}x$. D'une part,

$$\int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2.$$

D'autre part, pour tout réel $x \in [0;\pi]$, on a $-\sin(x)\cos^2(x) = \cos'(x) \times \cos^2(x)$.
Une primitive de la fonction $x \mapsto -\sin(x)\cos^2(x)$ sur $[0;\pi]$ est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos^3(x)}{3}$. Ainsi,

$$\int_0^\pi (-\sin(x)\cos^2(x))\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^\pi = \frac{\cos^3(\pi)}{3} - \frac{\cos^3(0)}{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Finalement, $I = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$. ■