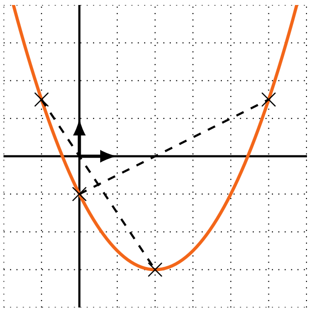
1. Cours : Convexité

1 Convexité, concavité

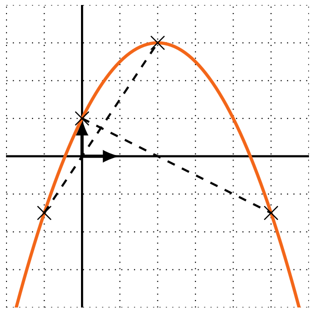
Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- On dit que f est *convexe* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.
- On dit que f est *concave* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.

Fonction convexe

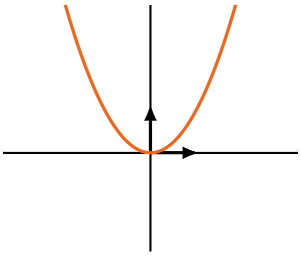


Fonction concave

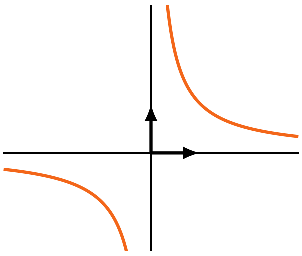


Rappel de certaines courbes représentatives

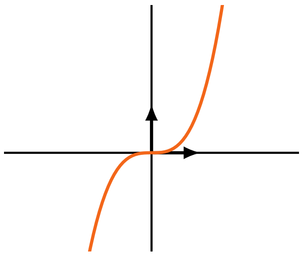
$x \mapsto x^2$



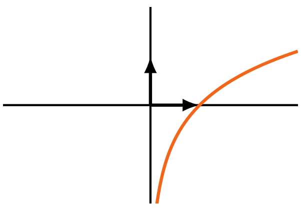
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



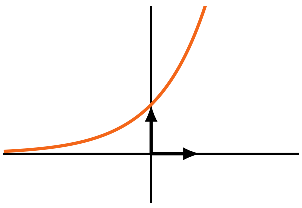
$x \mapsto x^3$



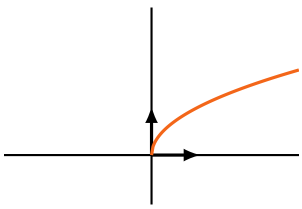
$x \mapsto \ln(x)$



$x \mapsto \mathrm{e}^x$

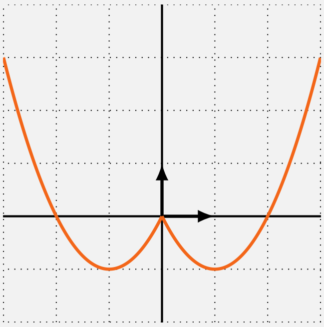


$x \mapsto \sqrt{x}$



■ **Exemple 1 :** Les fonction $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$. ■

■ **Exemple 2 :** Attention : on parle bien de convexité sur un intervalle. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ que f est aussi convexe sur $[a,c]$.



La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[0;3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3,3]$. ■

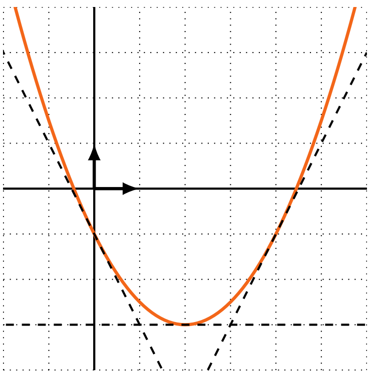
2 Fonctions dérivables

2.1 Caractérisation des fonctions convexes

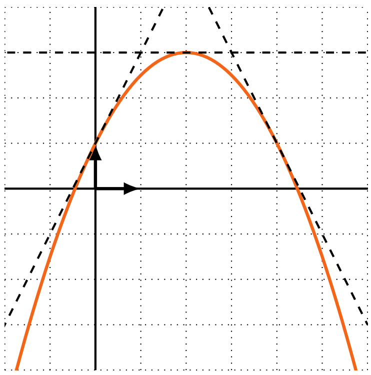
Propriété 1 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- f est convexe sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



■ **Exemple 3 :** Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a un réel.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
- La tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = 2ax - 2a^2 + a^2$ ou encore $y = 2ax - a^2$.

- Pour tout réel x,

$$f(x)-(2ax-a^2)=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2\geqslant 0.$$

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de sa tangente à l'abscisse a, et ce, peu importe le réel a choisi. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

■

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

De cette propriété vient naturellement la suivante...

Propriété 3 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$.
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f''(x)\leqslant 0$.

L'étude de la convexité d'une fonction revient à l'étude de signe de sa dérivée seconde (si celle-ci existe, bien entendu).

Démonstration 1 : Si $f''\geqslant 0$, alors f est convexe : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$.

Soit $a\in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Pour tout $x\in I$, posons alors $g(x)=f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))$. g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x\in I$, on $g'(x)=f'(x)-f'(a)$ et $g''(x)=f''(x)$.

Ainsi, puisque pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$, on a aussi $g''(x)\geqslant 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a)=0$. Résumons toutes ces informations dans un tableau.

x		a	
$g''(x)$		$+$	
g'	↗	0	↗
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	↘	0	↗
$g(x)$	$+$	0	$+$

Finalement, pour tout $x\in I$, $g(x)\geqslant 0$, ce qui signifie que $f(x)\geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$: la courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a. □

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel pair $n \geqslant 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En effet, la dérivée seconde de cette fonction est la fonction $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$.
Or, n étant pair, $n-2$ l'est aussi, et pour tout réel x, on a donc $x^{n-2} \geqslant 0$. ■

■ **Exemple 5 :** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$, qui est positif si et seulement si x l'est aussi. ■

2.2 Point d'inflexion

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

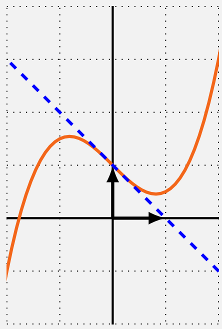
Un *point d'inflexion* est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

Propriété 4 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si f présente un point d'inflexion à l'abscisse a, alors $f''(a) = 0$.
- Réciproquement, si $f''(a) = 0$ et f'' **change de signe** en a, alors f présente un point d'inflexion en a.

Cela rappelle naturellement le cas des extremum locaux. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Cependant, si $f'(a) = 0$, f admet un extremum local en a seulement si f' change de signe en a.

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - x + 1$.



f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 1$ et $f''(x) = 3x$.

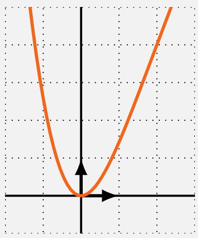
Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.

f est donc concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

La courbe de f présente un point d'inflexion à l'abscisse 0. ■

Attention : l'annulation de la dérivée seconde n'est pas une condition suffisante de présence d'un point d'inflexion !

■ **Exemple 7 :** Pour tout réel x, on pose $g(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2$.



La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$g'(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ et $g''(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
Ainsi, pour tout réel x, $g''(x) \geqslant 0$. g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
Puisqu'il n'y a pas de changement de convexité, g ne présente pas de point d'inflexion, et ce, même si $g''(2) = 0$. ■

3 Inégalités de convexité

3.1 Inégalités de milieux

Propriété 5 : Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

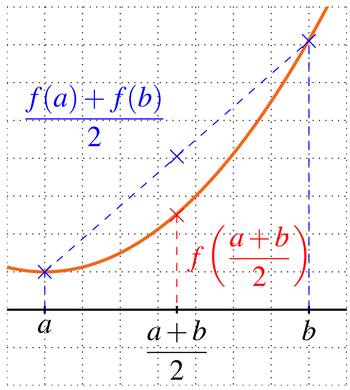
Démonstration 2 : On considère les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.

Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right), \frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$

Or, la fonction f étant convexe sur I, le segment $[AB]$ se situe au-dessus de la courbe représentative de f. En particulier,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



□

■ **Exemple 8 :** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b, $\exp\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{e^a+e^b}{2}$. ■

Propriété 6 : Soit f une fonction concave sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

■ **Exemple 9 :** La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

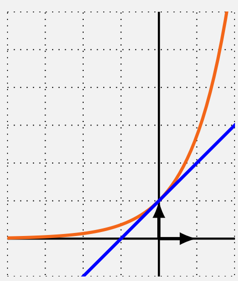
Ainsi, pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. ■

3.2 Inégalités avec les tangentes

La convexité des fonctions dérivables permet d'établir des inégalités en utilisant les équations des tangentes.

■ **Exemple 10 :** Montrons que pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x-0)+\exp(0)$, c'est-à-dire $y = x+1$.
Puisque la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe de la fonction exponentielle est donc au-dessus de toutes ses tangentes et donc, en particulier, la tangente au point d'abscisse 0. On a donc, pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.



■