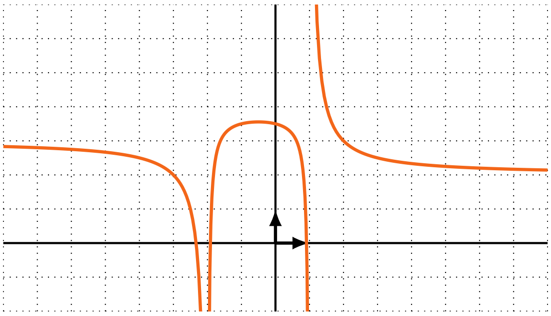
1. Exercices

Notion de limite

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

On a représenté ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f dans un repère orthonormé.

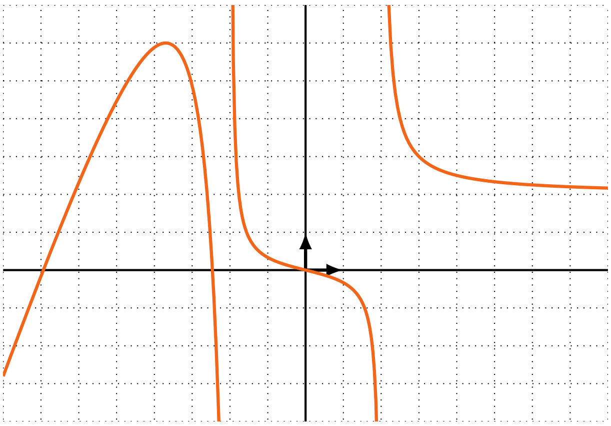


A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe $\mathscr{C}_f$?

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donnée ci-dessous. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$		-4		2		5		7		$+\infty$
f	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3	↗	1

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à $\mathscr{C}_f$?
3. Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

Opérations sur les limites

► Exercice 4 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x-3)$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x-3)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+x^2-3)$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\right)$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

l. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$

m. $\lim\limits_{x\to+\infty}((1-2x)\mathrm{e}^x)$

n. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+1\right)$

o. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+1\right)$

p. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-x^2+7x-3}\right)$

q. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

r. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right)$

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-12}{2x^2+x-3}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$, $-\dfrac{3}{2}^+$, $-\dfrac{3}{2}^-$, 1^-, 1^+ et $+\infty$.
3. Justifier que f est dérivable sur D et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x de D.
4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur D.
5. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1}$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$, $+\infty$, -1^+ et -1^-.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Une autre forme indéterminée...

1. Trouver trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $2x^3+6x^2-9x+1=(x-1)(ax^2+bx+c)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}$.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On rappelle qu'une fonction f est dérivable en x si le taux de variation $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

1. Écrire le taux de variations de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ entre 0 et h.
2. Que vaut $f'(0)$? En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$

Comparaison de limites

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x + \sin(x))$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right)$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right)$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}$

g. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right)$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right)$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right)$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}$

k. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sin(x)+3}$

l. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-3x+\sin(4x)$

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$

g. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}$

h. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{28x}$

j. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x-3x^2+5x-1)$

k. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^x-3x^2+5x-1)$

l. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

m. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

n. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

o. $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{x}$

p. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2+\cos(x))\mathrm{e}^x}{x}$

q. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2+\cos(x))\mathrm{e}^x}{x}$

r. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2\mathrm{e}^{-x}-x)$

► Exercice 11 – Voir le corrigé

La fonction tangente hyperbolique est la fonction notée th et définie pour tout réel x par

$$th(x) = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} th(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x)$.
2. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
$$th'(x) = \frac{4}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}.$$
3. En déduire le tableau de variations de th.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction th à l'abscisse 0.
5. Dans un repère orthonormé, tracer l'allure de la courbe th ainsi que sa tangente à l'abscisse . 0.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$. Étudier la fonction f (domaine de définition, variation, signe et limites). Esquisser sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Approfondissement et synthèse

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq -1$ par

$$f(x) = \frac{x^2+3x-4}{2x+2}.$$

1. Étudier la fonction f : variations, signe, limites.
2. Pour tout réel $x \neq -1$, on pose $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)$.
   (a) Montrer que, pour tout réel $x \neq 2$, $g(x) = -\frac{6}{2x+2}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$. On dit que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+1$ est une asymptote oblique à la courbe de f.
3. Dans un même repère orthonormé, tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+1$ et la courbe représentative de la fonction f.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$,
$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}.$$
2. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ dont on déterminera l'équation.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$.

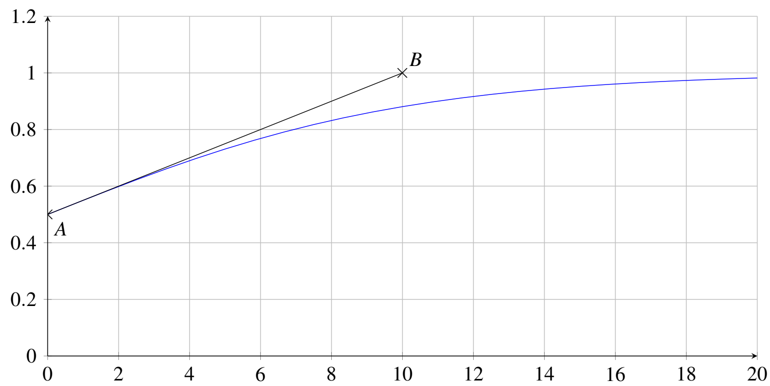
1. Donner le domaine de définition D de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Étudier les variations de f sur D.
4. Écrire le polynôme x^2-3x+2 sous forme canonique.
5. En déduire que la droite d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et que la droite d'équation $y = \frac{3}{2} - x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.
6. Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

► Exercice 16 (Antilles - Guyane 2019) – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. On considère une fonction f définie pour tout réel x sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}.$$

La courbe C_f représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe passe par le point $A(0\,;0{,}5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10\,;1)$.



1. Déterminer graphiquement $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Justifier que $a = 1$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Vérifier que pour tout réel $x \geqslant 0$

$$f'(x) = \frac{be^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2}.$$

4. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0;+\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+e^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en années, depuis le 1er janvier 2020.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2020, $p(3{,}5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2023.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier. 2030 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. (a) Déterminer le sens de variations de la fonction p sur $[0;+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, $p(x) < 1$. En revenant au contexte étudié, ce résultat vous semble-t-il cohérent ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)$ Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

► Exercice 17 (Amérique du Sud 2018) – Voir le corrigé

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.

Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètres de la queue du lézard en fonction du nombre de jours. Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = -\exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

On admet que les fonctions u et f sont dérivables sur $[0\,;+\infty[$ et on note u' et f' leurs fonctions dérivées respectives.

1. (a) Vérifier que pour tout réel x positif, on a
$$u'(x) = -\frac{1}{10}u(x).$$
   (b) En déduire que pour tout réel positif x, on a
$$f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$
   (c) Quel est le sens de variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$?

2. (a) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que, pour tout réel x positif :
$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}(1+u(x)).$$
   (a) Déterminer les variations de f' sur $[0\,;+\infty[$.
   (b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

2. Corrigés

► Correction 1 – Voir l'énoncé

D'après cette représentation graphique, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

De plus,

- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

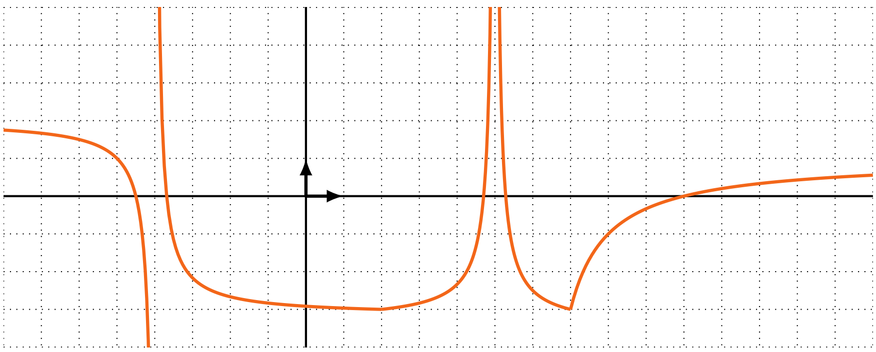
Par ailleurs,

- La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f.
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to(-4)^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Les droites d'équation $x = -4$ et $x = 5$ sont asymptotes verticales à la courbe de f. La droite d'équation $y = 2$ en est une asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ l'est en $+\infty$.



► Correction 4 – Voir l'énoncé

a. Puisque $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a $\lim_{x\to+\infty} (x^3+x-3) = +\infty$.

b. Puisque $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, on a $\lim_{x\to-\infty} (x^3+x-3) = -\infty$.

c. Puisque $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a alors $\lim_{x\to+\infty} (x^3+x^2-3) = +\infty$.

d. On a $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 1$.

e. On a que $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$.

f. On a que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}\right) = 0$.

g. $\lim_{x\to0+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{x\to0+} \sqrt{x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to0+} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right) = +\infty$.

h. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^3}+4\sqrt{x}\right) = +\infty$.

i. $\lim_{x\to1^+} (1-x) = 0^-$. Ainsi, $\lim_{x\to1^+} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -\infty$.

j. $\lim_{x\to1^-} f(x) = 0^+$. Ainsi, $\lim_{x\to1^-} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = +\infty$.

k. Pour tout réel $x \neq 1$ et $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x}-1}$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$.

l. Le même raisonnement permet d'établir que $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2x}{1-x}\right) = -2$.

m. $\lim_{x\to+\infty} (1-2x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

n. Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^2\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \left(x^2-3x+1\right) = +\infty$.

o. On a $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} (-3x) = +\infty$. Par somme, $\lim_{x\to-\infty} \left(x^2-3x+1\right) = +\infty$.

p. On a $\lim_{x\to-\infty} (-x^2+7x-3) = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2+7x-3}\right) = 0$.

q. Pour tout réel non nul x,

$$\frac{1-x^4}{2+x+x^3} = \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}-1\right)}{x^3\left(\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+1\right)} = x \times \frac{\frac{1}{x^4}-1}{\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+1}.$$

Ainsi, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} = +\infty$.
Or, $\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty$. Finalement, $\lim_{x\to-\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right) = +\infty$.

r. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1-x^4}{2+x+x^3} - +\infty$. Or, $\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$. Finalement, $\lim_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\dfrac{1-x^4}{2+x+x^3}\right)\right) = 0$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

1. Les racines du polynôme $2x^2+x-3$ sont 1 et $-\dfrac{3}{2}$; Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2};1\right\}$.
2. Pour tout réel x différent de 0, 1 ou $-\dfrac{3}{2}$, on a $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2}\times\dfrac{1-\dfrac{4}{x}-\dfrac{12}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{1-\dfrac{4}{x}-\dfrac{12}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}$.

   On a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\frac{1}{2}$. Par ailleurs, le tableau de signes de $2x^2+x-3$ est le suivant .

x	$-\infty$		$-3/2$		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}(2x^2+x-3)=0^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}(x^2-4x-12)=-\frac{15}{4}$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}f(x)=-\infty$.

   Puis $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(2x^2+x-3)=0^-$ et $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}(x^2-4x-12)=-\frac{15}{4}$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+}f(x)=+\infty$.

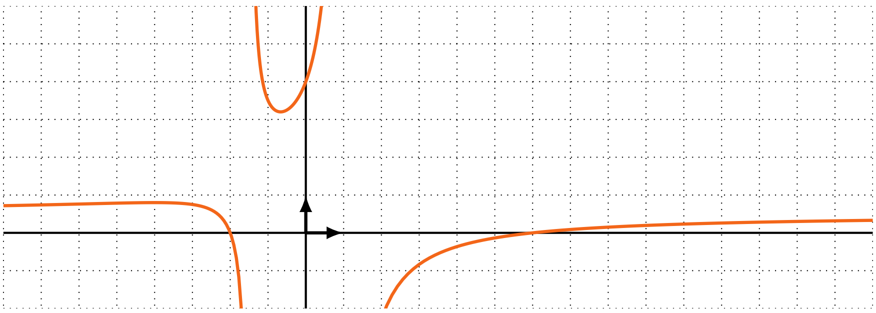
   Par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to(1)^-}(2x^2+x-3)=0^-$ et $\displaystyle\lim_{x\to(1)^-}(x^2-4x-12)=-15$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to(1)^-}f(x)=+\infty$.

   Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to(1)^+}(2x^2+x-3)=0^+$ et $\displaystyle\lim_{x\to(1)^+}(x^2-4x-12)=-15$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to(1)^+}f(x)=-\infty$.
3. f est le quotient de deux fonctions dérivables sur chaque intervalle de D, et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D. f est donc dérivable sur chaque intervalle de D. Pour tout réel $x\in D$, on a alors

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(2x^2+x-3)-(x^2-4x-12)(4x+1)}{(2x^2+x-3)^2}=\frac{9x^2+42x+24}{(2x^2+x-3)^2}.$$

4. Pour tout $x\in D$, $(2x^2+x-3)^2>0$. $f'(x)$ est donc du signe de $9x^2+42x+24$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -4 et $-\dfrac{2}{3}$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		-4		$-3/2$		$-2/3$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{4}{5}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{16}{5}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$



► Correction 6 – Voir l'énoncé

$\sqrt{x^2-3x+2}$ existe si et seulement si $x^2-3x+2 \geqslant 0$. Or, x^2-3x+2 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $\sqrt{x^2-3x+2}$ existe pour $x \in]-\infty;1] \cup [2;+\infty[$. Par ailleurs, -1 est une valeur interdite puisqu'elle annule le dénominateur de f. Ainsi, le domaine de définition de f est $(]-\infty;1]\cup[2;+\infty[) \setminus \{-1\}$.

Pour tout réel $x>2$, $\sqrt{x^2}=x$ et donc $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$.

Ainsi, pour tout $x>2$, $f(x)=\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Il en vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

Par ailleurs, pour tout réel $x<-1$, $\sqrt{x^2}=-x$! Il faut bien faire attention au signe ici.

Ainsi, pour tout réel $x<-1$, $f(x)=\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

Il en vient que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$.

Puis, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2-3x+2)=\sqrt{6}>0$. De plus, si $x<-1$, alors $1+x<0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(1+x)=0^-$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-3x+2)=\sqrt{6}>0$. De plus, si $x>-1$, alors $1+x>0$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(1+x)=0^+$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On développe l'expression de droite. Pour tout réel x,

$$(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$

On identifie alors les coefficients de $2x^3+6x^2-9x+1$ et $ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Il suffit de trouver a, b et c tel que $a=2$, $b-a=6$, $c-b=-9$ et $-c=1$. On a donc $a=2$, $c=-1$ puis $b-a=6$ et $c-b=-9$.

En prenant $a=2$, $b=8$ et $c=-1$, on a alors $(x-1)(2x^2+8x-1)(x-1)=2x^3+6x^2-9x+1$.

Les racines du polynôme $3x^2-x-2$ sont 1 et $-\dfrac{2}{3}$. Ainsi, pour tout réel x, $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$.

Alors, pour tout réel x différent de 1 et $-\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}=\dfrac{(x-1)(2x^2+8x-1)}{3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}=\dfrac{2x^2+8x-1}{3x+2}$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+6x^2-9x+1}{3x^2-x-2}=\dfrac{2\times1^2+8\times1-1}{3\times1+2}=\dfrac{9}{5}$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Ce taux vaut $\dfrac{e^h - e^0}{h-0}$ soit $\dfrac{e^h-1}{h}$.

$f'(0) = e^0 = 1$. Ainsi, par définition de la dérivée, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

a. Pour tout réel x, $e^x + \sin(x) \geqslant e^x - 1$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$.
Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + \sin(x)) = +\infty$.

b. Pour tout réel $x > 0$, $x^2 + \dfrac{3}{x} \geqslant x^2$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$. Il est évidemment possible de faire une simple somme de limites.

c. Pour tout réel $x > 0$, $x^2+1 \geqslant x^2$, d'où $\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2}$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant x$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$.

d. Pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(4x) \leqslant 1$. Ainsi, $-4 \leqslant \cos(4x) - 3 \leqslant -2$. En particulier, pour $x > 0$, $f(x) \leqslant -2x^3$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$. Ainsi, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right) = -\infty$.

e. Par ailleurs, pour $x < 0$, on a $\left((\cos(4x)-3)x^3\right) \geqslant -4x^3$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-4x^3) = +\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left((\cos(4x)-3)x^3\right) = +\infty$.

f. Pour tout réel $x > 0$, $-3 \leqslant 3\sin(x) \leqslant 3$ et $-2 \leqslant 2\cos(x) \leqslant 2$.
Ainsi, pour tout réel x, $-5 \leqslant 3\sin(x) + 2\cos(x) \leqslant 5$ et donc $-\dfrac{5}{x^3} \leqslant \dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3} \leqslant \dfrac{5}{x^3}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{5}{x^3}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{x^3}\right) = 0$. Par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}\right) = 0$.

g. Pour tout réel $x > 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}\right) = 1$.

h. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + 2\dfrac{\sin(x)}{x}$. Or, pour tout $x > 0$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right) = 1$.

i. Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{x+2\sin(x)}{x} = 1 + 2\dfrac{\sin(x)}{x}$.
Or, pour tout $x < 0$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}$ (x est négatif, attention à bien changer le sens de l'inégalité !). Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+2\sin(x)}{x}\right) = 1$.

j. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}=\dfrac{x}{x}\times\dfrac{1+\dfrac{\cos(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}=\dfrac{1+\dfrac{\cos(x)}{x}}{1+\dfrac{\sin(x)}{x}}$.

Or, pour tout réel $x>0$, $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\cos(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$ et $-\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{\sin(x)}{x}\leqslant\dfrac{1}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cos(x)}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)=0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\cos(x)}{x+\sin(x)}\right)=1$.

k.Pour tout réel $x>0$, $x+\sin(x)+3\geqslant x+2$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, il en vient que $\sqrt{x+\sin(x)+3}\geqslant\sqrt{x+2}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}=+\infty$.

Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sin(x)+3}=+\infty$.

l. Pour tout réel $x>0$, $2x^2-3x+\sin(4x)\geqslant 2x^2-3x-1$.

Or, pour tout réel $x>0$, $2x^2-3x-1=x^2\left(2-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x-1)=+\infty$.

Par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-3x+\sin(4x))=+\infty$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

a. Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}=0$.

b. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}=-\infty$.

c. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}=16\times\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{(4x)^2}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}4x=+\infty$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X^2}=+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{x^2}=+\infty$.

d. Pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=\dfrac{\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^x\left(1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=1$.

e. On a $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x-1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+x)=-\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+x}=0$.

f. Pour tout réel non nul x,

$$\frac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=\frac{x\mathrm{e}^x\left(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}\right)}{\mathrm{e}^2x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}=\frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}=3$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=0$.

g. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x)=-\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^x+3x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+1}=-\infty$.

h. Pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{e^{3x}}{28x} = \dfrac{3}{28} \times \dfrac{e^{3x}}{3x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{3x} = +\infty$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x} = +\infty$.

i. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 28x = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{3x}}{28x} = 0$.

j. Pour tout réel x, $e^x - 3x^2 + 5x - 1 = e^x \left(1 - 3\dfrac{x^2}{e^x} + 5\dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)$ Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3x^2}{e^x} + 5\dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$ par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 3x^2 + 5x - 1) = +\infty$.

k. Par ailleurs, en faisant simplement la règle de somme de limites, on obtient, $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - 3x^2 + 5x - 1) = -\infty$.

l. Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x} > 0$. Ainsi, $e^x + e^{-x} > e^x$ et $\dfrac{e^x + e^{-x}}{x} > \dfrac{e^x}{x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{x} = +\infty$.

m. Pour tout réel $x < 0$, $e^x > 0$. Ainsi, $e^x + e^{-x} > e^{-x}$. En divisant par $-x$ qui est positif, on a alors $-\dfrac{e^x + e^{-x}}{x} > \dfrac{e^{-x}}{-x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$.
Par comparaison, on a donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{e^x + e^{-x}}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{x}\right) = -\infty$.

n. Puisque $\lim\limits_{x\to0}(e^x + e^{-x}) = e^0 + e^0 = 2$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x + e^{-x}}{x} = +\infty$.

o. Puisque $\lim\limits_{x\to0}(e^x + e^{-x}) = e^0 + e^0 = 2$, on a $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^x + e^{-x}}{x} = -\infty$.

p. Pour tout réel x, $e^x \leqslant (2 + \cos(x))e^x \leqslant 3e^x$.
Pour tout réel $x > 0$, on a donc $\dfrac{e^x}{x} \leqslant \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
Par comparaison, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x} = +\infty$.

q. Par ailleurs, pour tout réel $x < 0$, on a $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x} \geqslant \dfrac{3e^x}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$.
Par encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2+\cos(x))e^x}{x}$ existe et vaut 0.

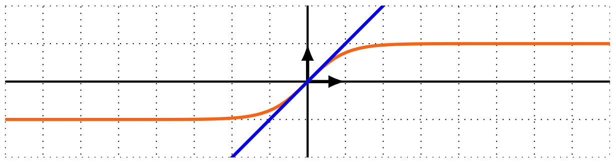
r. Remarquons que pour tout réel x, $x^2e^{-x} - x = \dfrac{x^2}{e^x} - x$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2}{e^x} - x\right) = -\infty$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

1. Pour tout réel $x > 0$, $th(x) = \dfrac{e^x}{e^x} \times \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = 1$.
   Par ailleurs, pour tout réel $x < 0$, $th(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
   Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = -1$.

2. th est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$th'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - (\mathrm{e}^{2x} - 2 - \mathrm{e}^{-2x}}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}.$$

3. th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. L'équation de la tangente à la courbe de la fonction th en 0 est $y = th'(0)(x-0) + th(0)$.
   Or, $th'(0) = \dfrac{4}{(\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0)^2} = 1$ et $th(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^0}{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0} = 0$. Ainsi, l'équation de cette tangente est $y = x$.
5. 

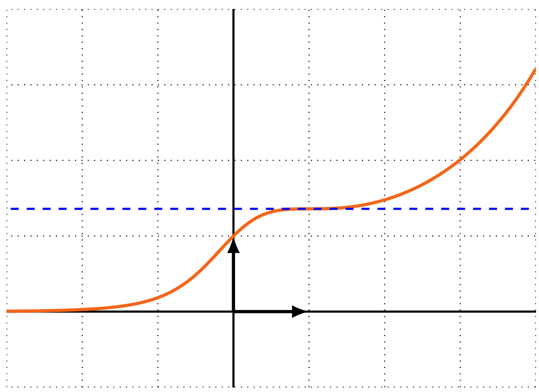
► Correction 12 – Voir l'énoncé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, son dénominateur n'étant jamais nul. De plus, on a, pour tout réel x, $f(x) > 0$. f est de plus dérivable et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times (x^2+1) - \mathrm{e}^x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)^2\,\mathrm{e}^x}{(x^2+1)^2} \geqslant 0.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque sa dérivée est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs. La courbe de f a une tangente horizontale en 1 puisque $f'(1) = 0$. Par ailleurs, pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$. Or, par croissance comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = 0$. f a donc les mêmes limites.

La courbe de la fonction f est la suivante. La tangente horizontale en 1 est également tracée.



► Correction 13 – Voir l'énoncé

f est définie pour tout réel $x \neq -1$.

Etude du signe de f

$2x+2$ s'annule en $x = -1$. $x^2 + 3x - 4$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et -4. On construit alors le tableau de signe de f.

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Étude des limites

Pour tout réel x différent de 0 et -1

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \times \frac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}} = x \times \frac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}}.$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}}{2+\frac{2}{x}} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (2x+2) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} (x^2+3x-4) = (-1)^2+3\times(-1)-4 = -6$. En appliquant la règle des signes, on a alors $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = -\infty$. De la même manière, $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = +\infty$.

Étude des variations

Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2+3x-4$ et $v(x) = 2x+2$. u et v sont dérivables sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ et v ne s'annule pas sur ces intervalles. f est donc dérivable sur ces intervalles et pour tout réel $x \neq -1$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+2)-(x^2+3x-4)\times 2}{(2x+2)^2} = \frac{x^2+2x+7}{(2x+2)^2}.$$

Puisque pour tout réel $x \neq -1$, $(2x+2)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de x^2+2x+7. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut $\Delta = 2^2 - 4\times 7\times 1 = -24 > 0$. Ainsi, pour tout réel $x \neq 2$, $f'(x) > 0$.

Résumé dans un tableau

On met toutes ces informations dans un tableau et on en profite pour vérifier si le tout est cohérent.

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		$\|\|$		$+$		
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

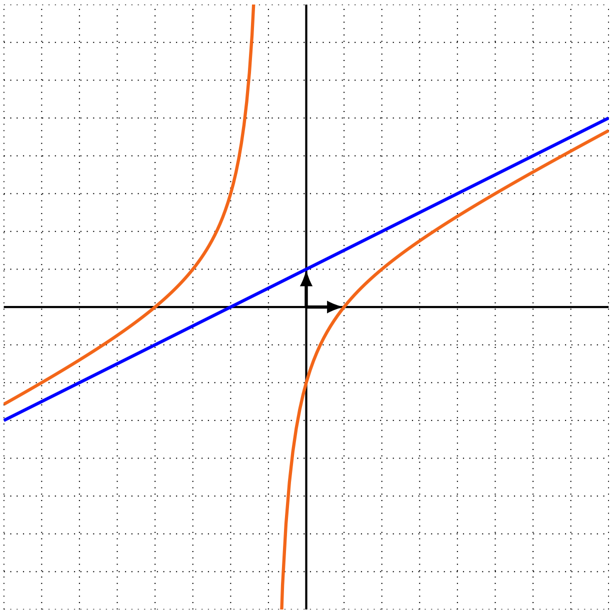
Pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{x^2+3x-4}{2x+2} - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = \frac{x^2+3x-4-\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2)}{2x+2}.$$

Ainsi,

$$g(x) = \frac{x^2+3x-4-x^2-x-2x-2}{2x+2} = -\frac{6}{2x+2}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{2x+2}-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x-4}{2x+2}-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right)=0$.



► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x,

$$ax+b+\frac{c}{x-1} = \frac{ax(x-1)+b(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}.$$

On cherche donc a, b et c tels que $a=1$, $b-a=0$ et $c-b=0$: on trouve $a=b=1$.

Ainsi, pour tout réel x, $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x+1)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$, et de même en $-\infty$. La droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$ et $+\infty$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

1. $f(x)$ existe si et seulement si $x^2-3x+2\geqslant 0$. Or, x^2-3x+2 est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et 2. Ainsi, f est définie sur $]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$.
2. Par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2-3x+2=+\infty$. Par ailleurs, pour tout $x>2$, $x^2-3x+2=x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-3x+2=+\infty$. Or, $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$
3. f est dérivable sur $]-\infty;1[$ et $]2;+\infty[$. Pour tout réel x dans l'un de ces intervalles, $f'(x)=\frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ qui est du signe de $2x-3$.

x	$-\infty$		1		$3/2$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$						$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0				0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Pour tout réel x, $x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.
5. Pour tout réel $x>2$,

$$f(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\times\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}.$$

Or, si $x>2$, alors $x-\frac{3}{2}>0$ et donc $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}=x-\frac{3}{2}$. Ainsi, pour tout $x>2$,

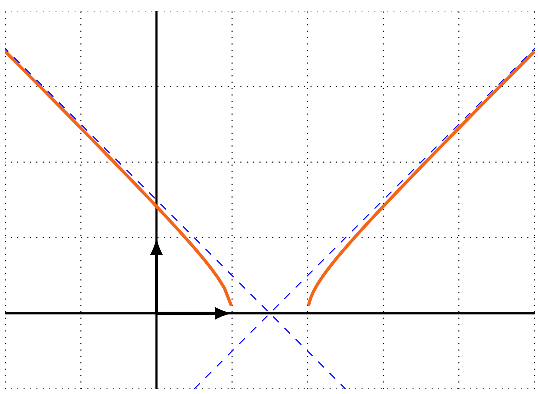
$$f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}-1.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\left(x-\frac{3}{2}\right)\right)=0$. La droite d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Par ailleurs, pour tout $x<1$, $x-\frac{3}{2}<0$ et donc $\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}-x$. Ainsi, pour tout $x<1$,

$$f(x)-\left(\frac{3}{2}-x\right)=\sqrt{1-\frac{1}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}-1.$$

On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\left(\frac{3}{2}-x\right)\right)=0$. La droite d'équation $y=\frac{3}{2}-x$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

6. 

▶ Correction 16 – Voir l'énoncé

Partie A

1. Puisque la courbe de f passe par le point de coordonnées $(0;0{,}5)$, on a donc $f(0)=0{,}5$. Par ailleurs, $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en 0. Cette tangente est la droite (AB), dont le coefficient directeur vaut
$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-0{,}5}{10-0}=\frac{0{,}5}{10}=0{,}05.$$
On a donc $f'(0)=0{,}05$.
2. D'après la lecture graphique, $f(0)=0{,}5$. Or, d'après l'expression de $f(x)$, on a
$$f(0)=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}}=\frac{a}{1+\mathrm{e}^{0}}=\frac{a}{1+1}=\frac{a}{2}.$$
Ainsi, $\frac{a}{2}=0{,}5$, et donc $a=2\times 0{,}5=1$.
3. Pour tout réel x, on pose $u(x)=1+\mathrm{e}^{-bx}$. u est dérivable et pour tout réel x, $u'(x)=-b\mathrm{e}^{-bx}$. Or, $f=\frac{1}{u}$.
Ainsi, $f'=-\frac{u'}{u^2}$ et donc, pour tout réel x,
$$f'(x)=-\frac{-b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}=\frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}$$
Attention, aux deux signes "-" !.
4. D'après la lecture graphique, $f'(0)=0{,}05$. Or, d'après l'expression de f',
$$f'(0)=\frac{b\mathrm{e}^{-b\times 0}}{(1+\mathrm{e}^{-b\times 0})^2}=\frac{b\mathrm{e}^{0}}{(1+\mathrm{e}^{0})^2}=\frac{b}{(1+1)^2}=\frac{b}{4}$$
Ainsi, $\frac{b}{4}=0{,}05$ et donc $b=0{,}05\times 4=0{,}2$.

Partie B

1. $p(10)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2\times 10}}\simeq 0{,}88$. La proportion d'individus équipés au 1er janvier 2030 est d'environ 0,88 (soit 88% de la population totale).
2. (a) D'après la partie A, p est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $p'(x)=\frac{0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2x}}{(1+\mathrm{e}^{-0{,}2x})^2}$. Or, une exponentielle étant toujours strictement positive, on a, pour tout réel x, $p'(x)>0$. La fonction p est donc strictement croissante.
(b) Pour tout réel $x\geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}2x}>0$ et donc $1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}>1$. En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0;+\infty[$, on obtient alors $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0{,}2x}}<1$. Ce résultat est cohérent : une proportion ne peut dépasser 1.
(c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-0.2x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}p(x)=1$. A terme, tous les individus possèderont l'équipement étudié ici.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $u=\exp(v)$ où $v:x\mapsto 2-\frac{x}{10}$. Pour tout réel x positif, on a
$$u'(x)=v'(x)\times\exp(v(x))=-\frac{1}{10}\exp(v(x))=-\frac{1}{10}u(x).$$
(b) Pour tout réel positif x, on a
$$f'(x)=10u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}=10\times\left(-\frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}\right)=-u(x)\mathrm{e}^{u(x)}.$$

(c) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ et $-u(x) = \exp\left(2 - \frac{x}{10}\right) > 0$. f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. (a) $f(20) = \frac{10}{e} \simeq 3.7$. Après 20 jours de repousse, la queue du lézard mesure environ 3.7 cm.
   (b) On a $\lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{x}{10}\right) = -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$ *.Ainsi*, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 10\mathrm{e}^0 = 10$.
   (c) La fonction f est croissante et sa limite en $+\infty$ vaut 10. Elle ne peut donc atteindre 11. La queue du lézard ne peut pas atteindre 11cm selon cette modélisation.
3. (a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ et $\frac{1}{10}u(x) < 0$. f'' est donc du signe opposé à celui de $(1+u(x))$. Or

$$1 + u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \exp\left(2 - \frac{x}{10}\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant \exp\left(2 - \frac{x}{10}\right)$$

   et donc

$$1 + u(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant 2 - \frac{x}{10} \Leftrightarrow 20 \geqslant x.$$

   Ainsi, $f''(x)$ est positive sur $[0;20]$ et négative sur $[20;+\infty[$. f' est donc croissante sur $[0;20]$ et décroissante sur $[20;+\infty[$.
   (b) La vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.