1. Cours : Rappels de probabilité

Avant de s'engager sur le programme de terminale, faisons quelques rappels de probabilités de l'année de Première.

Dans tout ce chapitre, on note Ω l'univers non vide d'une expérience aléatoire.
On rappelle que pour deux événements A et B de Ω, l'événement $A \cap B$ est l'événement qui est réalisé lorsque « à la fois A et B sont réalisés ».
De plus, l'événement $\bar{A}$, appelé contraire de A, est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

$\mathbb{P}(A)$ désignera la probabilité de l'événement A. On a alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 1 — Probabilité conditionnelle : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

■ **Exemple 1 :** On considère l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. On tire un nombre uniformément au hasard sur Ω. On considère les événements

- A : le nombre est pair ;
- B : le nombre est supérieur ou égal à 3.

Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors $\mathbb{P}(A) =$ et $\mathbb{P}(B) =$
Par ailleurs, $A \cap B =$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) =$
Appliquant la définition, on trouve donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} =$$

■

Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

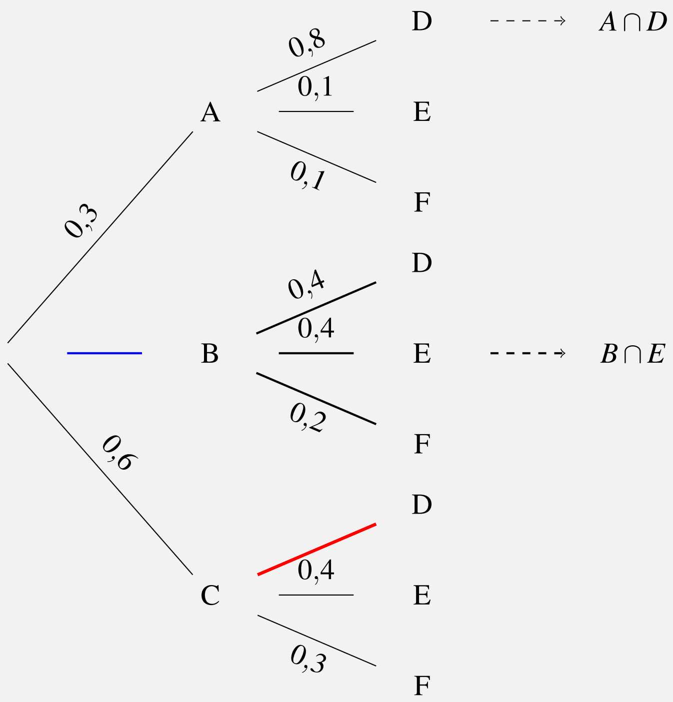
■ **Exemple 2 :** Une entreprise commande à une société de sondage une enquête sur la satisfaction de ses clients. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité qu'un client réponde est de 0,25. Si le client répond à l'appel, la probabilité qu'il réponde au questionnaire de la société est de 0,3. On note R l'événement « la personne répond à l'appel » et Q l'événement « la personne répond au questionnaire ».

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(R) =$ et $\mathbb{P}_R(Q) =$. Ainsi, la probabilité qu'une personne prise au hasard réponde à l'appel puis au questionnaire vaut $\mathbb{P}(R \cap Q) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(Q) =$ ■

1.1 Construction d'un arbre pondéré

Propriété 1 — Règle de la somme : Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

■ **Exemple 3 :** On considère une succession de deux expériences aléatoires dont l'arbre pondéré associé est représenté ci-dessous.



- Sur cet arbre, on voit que $\mathbb{P}(A) =$ et $\mathbb{P}(C) =$
- Puisque la somme des probabilités issues d'une branche vaut 1, on a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$, soit $\mathbb{P}(B) =$
- La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(D)$ se lit sur la branche qui relie A à D. Ainsi, $\mathbb{P}_A(D) =$.
- La somme des probabilités issues du nœud C doit valoir 1.
  On a donc $\mathbb{P}_C(D) + \mathbb{P}_C(E) + \mathbb{P}_C(F) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_C(D) =$

■

Propriété 2 — Règle du produit : Dans un arbre pondéré la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette issue

■ **Exemple 4 :** Pour obtenir l'issue $A \cap D$, on passe par les sommets A puis D.

On a alors $\mathbb{P}(A \cap D) =$ ■

On retrouve la relation $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$.

1.2 Formule des probabilités totales

Définition 2 — Partition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de Ω lorsque

- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont non vides ;
- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux disjoints ;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

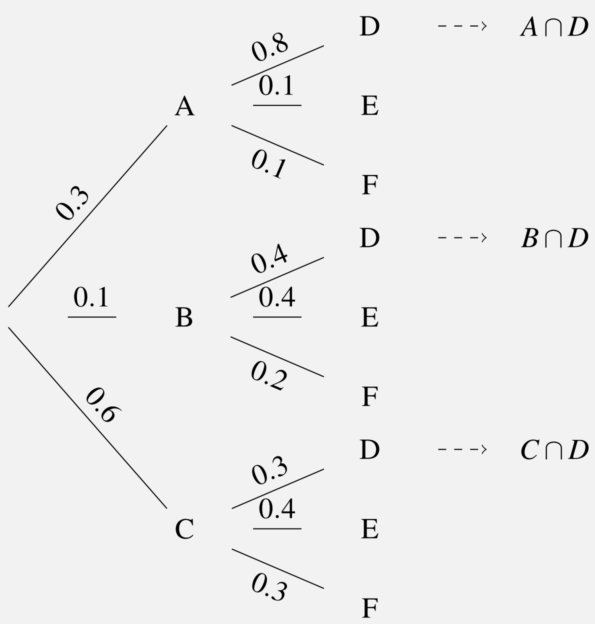
Dans le cadre des probabilités, on parle également de **système complet d'événements**.

Exemple 5 : On considère $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ ainsi que les événements $A_1 = \{1;3\}$, $A_2 = \{2;4;5;6;7\}$ et $A_3 = \{8\}$. A_1, A_2 et A_3 forment une partition de Ω. ∎

Propriété 3 — Formule des probabilités totales : On considère un événement B et une partition A_1, A_2, ..., A_n de l'univers Ω. Alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Exemple 6 : On reprend l'exemple de la partie précédente. On souhaite calculer la probabilité $\mathbb{P}(D)$. Pour cela, on regarde l'ensemble des branches qui contiennent l'événement D.



- A, B et C forment une partition de Ω.
- On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$. De plus,
  - $\mathbb{P}(A \cap D) =$
  - $\mathbb{P}(B \cap D) =$
  - $\mathbb{P}(C \cap D) =$
- Ainsi, $\mathbb{P}(D) =$

∎

2 Variable aléatoire réelle

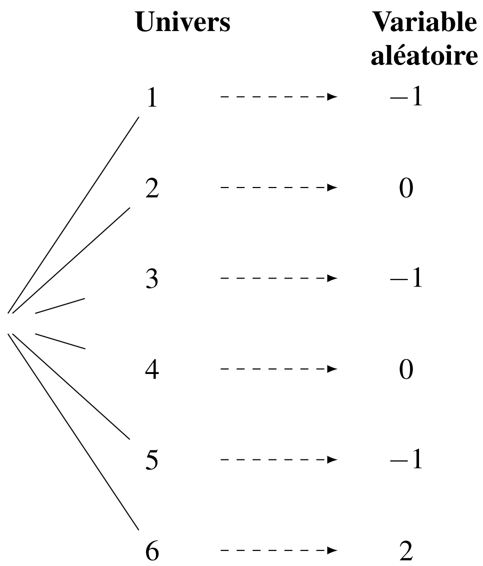
2.1 Variable aléatoire

Définition 3 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les variables aléatoires sont en général notées X.

■ **Exemple 7 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 compris. L'univers de l'expérience aléatoire est donc l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$.
Si le nombre obtenu est 6, on gagne 2 points. Si le nombre est impair, on perd 1 point. Dans les autres cas, on ne gagne ni ne perd aucun point.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés selon le résultat.

- Si on obtient le nombre 1, on perd 1 point.
  On a ainsi $X(1) =$.
- Si on obtient le nombre 6, on gagne 2 points.
  On a ainsi $X(6) =$.
- On a également $X(2) =$, $X(3) =$, $X(4) =$ et $X(5) =$.

■



Définition 4 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et a un réel.
On note $\{X = a\}$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.
On peut définir de la même manière les événements $\{X < a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $\{X \geqslant a\}$...

■ **Exemple 8 :** On reprend l'exemple précédent.

- L'événement $\{X = -1\}$ correspond aux issues qui font perdre un point, soit les issues
- L'événement $\{X \geqslant 0\}$ correspond aux issues qui font gagner 0 point ou plus, soit les issues

■

2.2 Loi d'une variable aléatoire

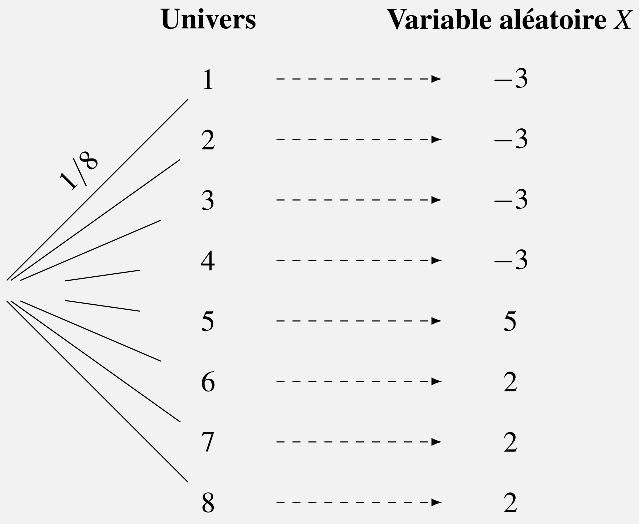
Définition 5 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω.
La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel k, associe la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

On rappelle que **la somme des probabilités doit valoir 1** !

■ **Exemple 9 :** On choisit uniformément au hasard un nombre entier entre 1 et 8 compris.

- Si le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6, on gagne 2 points.
- Si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4, on perd 3 points.
- Si le nombre obtenu est 5, on gagne 5 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés après l'expérience.



X peut donc prendre trois valeurs : -3, 2 ou 5.

Pour déterminer la loi de X, il faut donc déterminer $\mathbb{P}(X=-3)$, $\mathbb{P}(X=2)$ et $\mathbb{P}(X=5)$.

- L'événement $\{X=-3\}$ est composé des issues 1, 2, 3 et 4.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X=-3)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.
- L'événement $\{X=2\}$ est composé des issues 6, 7 et 8.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{3}{8}$.
- L'événement $\{X=5\}$ est composé de l'issue 5.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X=-3)=\dfrac{1}{8}$.

On peut résumer la loi de la variable aléatoire X dans un tableau.

k	-3	2	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

■

2.3 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par X.
Pour i allant de 1 à n, on note p_i la probabilité $\mathbb{P}(X=x_i)$. L'espérance de X, notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X]=p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i.$$

Il s'agit en quelque sorte de la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X, pondérées par leurs probabilités. Nous verrons dans un prochain chapitre que le terme de moyenne prendra tout son sens...

■ **Exemple 10 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$E[X] =$

« En moyenne », la variable aléatoire X vaut ■

2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X. La variance X, notée $V(X)$, est la valeur

$$V(X) = p_1(x_1 - E[X])^2 + p_2(x_2 - E[X])^2 + \ldots + p_n(x_n - E[X])^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E[X])^2.$$

Cette quantité mesure la dispersion de la variable aléatoire autour de l'espérance.

Remarque : On a en fait $V(X) = E[(X - E[X])^2]$.

■ **Exemple 11 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-3	1	4	9
$\mathbb{P}(X=k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Dans un premier temps, on calcule l'espérance de la variable aléatoire X.

$E[X] =$

Pour calculer la variance,

- Pour chaque valeur de la variable aléatoire, on retire l'espérance. On dit que l'on centre la variable aléatoire ;
- On met chaque nombre obtenu au carré ;
- Chaque nombre est multiplié par sa probabilité ;
- On ajoute alors chacun des nombres obtenus.

Dans ce cas,

x_i	-3	1	4	9
$x_i - E[X]$				
$(x_i - E[X])^2$				
p_i	0.6	0.2	0.15	0.05
$p_i(x_i - E[X])^2$				

La variance de X vaut donc

$$V(X) =$$

■

Propriété 4 — Formule de König-Huygens : Soit X une variable aléatoire. On a alors

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

■ **Exemple 12 :** Reprenons l'exemple précédent. Pour déterminer la loi de X^2, il suffit de mettre les valeurs prises par la variable aléatoire au carré. On a alors

k				
$\mathbb{P}(X^2 = k)$				

Ainsi, $E[X^2] =$

On a donc $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 =$

On retrouve bien la valeur précédente.

■

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X, noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type mesure la "variation moyenne" de la variable aléatoire autour de l'espérance.

■ **Exemple 13 :** Dans l'exemple précédent, l'écart-type était donc $\sigma(X) =$ ■