1. Cours : Suites et récurrence

1 Démonstration par récurrence

Exemple introductif, tiré de l'épreuve de spécialité de Polynésie 2022 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

A l'aide de cette expression, il est possible de calculer les termes de la suite de proche en proche.

- $u_1 = \dfrac{u_0}{1+u_0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.
- $u_2 = \dfrac{u_1}{1+u_1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{1+u_2} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$.
- ...

Toutefois, il n'est pas possible de calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents... On souhaiterait donc déterminer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

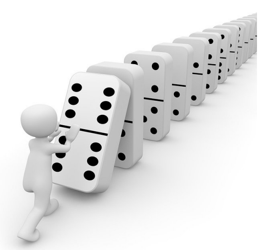
D'après les premiers termes de notre suite, il semblerait que pour tout entier naturel n, on ait $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Cette formule fonctionne pour les rangs 0, 1, 2 et 3 mais qu'en est-il pour le reste ?

Un moyen de s'assurer que cette formule fonctionne pour tous les rangs est de la démontrer par récurrence.

Définition 1 : Lorsque l'on souhaite démontrer une proposition mathématique qui dépend d'un entier n, il est parfois possible de démontrer cette proposition par récurrence.

Pour tout entier n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition qui nous intéresse. La démonstration par récurrence comporte trois étapes :

- **Initialisation** : On montre qu'il existe un entier n_0 pour lequel $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie ;
- **Hérédité** : on montre que, si pour un entier $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également ;
- **Conclusion** : on en conclut que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie.



Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, peu importe lequel, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est **l'hérédité**. Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est **l'initialisation**.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre **conclusion**.

■ **Exemple 1 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{0+1} = \dfrac{1}{1} = 1$. On a donc bien $u_0 = \dfrac{1}{0+1}$.
  La propriété $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. A partir de ce résultat, on souhaite démontrer que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1} = \dfrac{1}{n+2}$.
  Nous avons donc $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

  On trouve bien que $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1+1}$: $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Nous avons montré que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. ■

Une propriété utile qui peut être démontrée par récurrence est la suivante. Souvenez-vous en, elle reviendra dans un prochain chapitre !

Propriété 1 — Inégalité de Bernoulli : Soit a un réel strictement positif.
Pour tout entier naturel n, on a $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

Démonstration 1 : Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Fixons-nous un réel a strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note alors $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ ».

- **Initialisation** : Prenons $n = 0$.
  - D'une part, $(1+a)^0 = 1$.
  - D'autre part, $1+0\times a = 1$.

  On a bien $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
  En multipliant des deux côtés de l'inégalité par $(1+a)$, qui est strictement positif, on obtient alors que

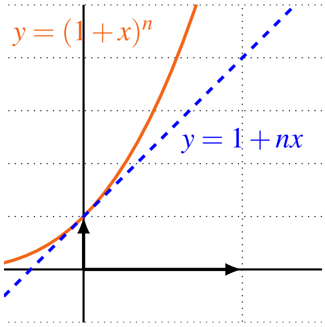
$$(1+a)^{n+1} \geqslant (1+na)(1+a).$$

  Or,

$$(1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2 \geqslant 1+(n+1)a.$$

  Ainsi, $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathscr{P}(0)$ est vraie et, si pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie, $\mathscr{P}(n+1)$l'est aussi. Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

On a bien montré que, pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$. □



Une interprétation graphique de cette inégalité est possible. La droite d'équation $y = 1+nx$ n'est autre que la tangente à la courbe d'équation $y = (1+x)^n$ à l'abscisse 0. L'inégalité de Bernoulli dit donc que la courbe se trouve au-dessus de la tangente lorsque $x > 0$.

Nous verrons, lorsque la dérivation n'aura plus de secret pour vous, que cette remarque nous fournira une autre démonstration de l'inégalité de Bernoulli.

2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2 — Suites majorées, minorées, bornées : Soit (u_n) une suite réelle. On dit que...

- ...(u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
  Un tel réel M est alors appelé *majorant* de la suite (u_n).
- ...(u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
  Un tel réel m est alors appelé *minorant* de la suite (u_n).
- ...(u_n) est *bornée* si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

Les majorants et minorants sont indépendants de n ! Bien que pour tout $n > 0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite (u_n) définie par $u_n = n$ est majorée. Cette indépendance se traduit dans l'ordre des quantificateurs employés dans la définition précédente (le majorant y apparaît avant l'entier n).

■ **Exemple 2 :** Pour tout n, on pose $u_n = \cos(n)$.

La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. ■

■ **Exemple 3 :** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n^2 + 1$. La suite (v_n) est minorée puisque pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$. En revanche, elle n'est pas majorée. ■

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (-1)^n n$. Cette suite n'est ni majorée, ni minorée. ■

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration de cette suite peut elle-même être démontrée par récurrence.

■ **Exemple 5 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant 4$ ».

- **Initialisation** : On a bien $u_0 \geqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant 4$.
  En multipliant cette inégalité par 0,5, on en déduit que $0{,}5u_n \geqslant 2$.
  En ajoutant 2, on en déduit que $0{,}5u_n + 2 \geqslant 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 4$.
  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire.
  D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

Si l'on se donne une fonction f définie sur un ensemble I et une suite (u_n) à valeurs dans I telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, l'étude de la fonction f pourra également nous fournir des informations sur la suite (u_n) étudiée.

■ **Exemple 6 :** On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f		↗	3	↘	0	↗	

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ ».

- **Initialisation** : On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.
  La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-1;3]$, lequel contient l'intervalle $[0;3]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (attention, la fonction étant décroissante, l'inégalité sera alors renversée).
  Ainsi, on a $f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$. On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$ et que $f(3) = 0$.
  Enfin, d'après les variations de f, on sait également que $f(-1) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire que $3 \geqslant f(0)$.
  Ainsi, $3 \geqslant f(0) \geqslant f(u_n) \geqslant f(3)$, c'est-à-dire $3 \geqslant f(0) \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$.
  On en conclut en particulier que $3 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■

3 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 3 — Variations d'une suite : Soit (u_n) une suite réelle et n_0 un entier naturel.

- On dit que (u_n) est *croissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Étudier la croissance ou la décroissance d'une suite revient donc souvent à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

■ **Exemple 7 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$.

Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 - 1 = 2n \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante. ■

Propriété 2 : Soit (u_n) une suite **strictement positive** et n_0 un entier naturel.

- (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

■ **Exemple 8 :** On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}.$$

Or, si $n \geqslant 1$, on a, en ajoutant n aux deux membres de l'inégalité, $2n \geqslant n+1$ et donc $\dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. La suite (u_n) est donc croissante. ■

Encore une fois, lorsqu'une suite est définie par récurrence, ses variations peuvent également être étudiées par récurrence.

■ **Exemple 9 :** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$.

Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Montrer que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n démontrera que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, un résultat qui nous intéressera fortement dans un prochain chapitre...

- **Initialisation :** $u_0 = 4$, $u_1 = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors

  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

  En ajoutant 5 à chaque membre, on obtient

  $$5 \leqslant u_{n+1} + 5 \leqslant u_n + 5.$$

  On souhaite "appliquer la racine carrée" à cette inégalité. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, l'appliquer ne changera pas le sens de l'inégalité. On a donc bien

  $$\sqrt{5} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + 5} \leqslant \sqrt{u_n + 5}.$$

  D'une part, $\sqrt{5} \geqslant 0$. D'autre part, $\sqrt{u_{n+1} + 5} = u_{n+2}$ et $\sqrt{u_n + 5} = u_{n+1}$. Ainsi,

  $$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

  La proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

■

Comme précédemment, si l'on dispose d'une fonction f que l'on sait étudier et d'une suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$, il est sans doute possible d'utiliser les informations que nous avons sur la fonction pour en déduire des informations sur notre suite.

Attention ! Ce n'est pas parce que la fonction f est croissante que la suite le sera également !

■ **Exemple 10 :** On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		-1	3	5		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$ 2 $\nearrow$	5	$\searrow$	

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On souhaite montrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée par -1 et 5. Pour tout entier naturel n, on considère alors la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 3$ et $u_1 = f(u_0) = f(3) = 2$. On a bien $-1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 5$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$.
  La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1;5]$. Il est alors possible d'appliquer cette fonction à notre inégalité (la fonction étant croissante, le sens de l'inégalité est conservée).
  Ainsi, on a $f(-1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(5)$.
  On sait par ailleurs que $f(u_n) = u_{n+1}$, que $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$, que $f(5) = 5$ et enfin que $f(-1) = 1 \geqslant -1$.
  On en conclut donc que $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 5$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et la proposition $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on en conclut que pour tout entier naturel n, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

■