

1. Cours : Combinatoire et dénombrement

1 Cardinal d'ensembles

1.1 Union d'ensembles

Définition 1 : Un **ensemble** A est une collection d'objets distincts que l'on appelle ses éléments.

- On dit qu'un objet x appartient à A si x est un élément de A . On note $x \in A$.
- On dit qu'un ensemble B est inclus dans A si tout élément de B est aussi un élément de A .
On note $B \subset A$.

■ **Exemple 1 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 2; 7; 9; 44\}$. On a $1 \in A$ mais $3 \notin A$.

L'ensemble $B = \{2; 9\}$ est inclus dans A : on a $B \subset A$.

En revanche, l'ensemble $C = \{1; 2; 4; 7\}$ n'est pas inclus dans A puisque 4 est un élément de l'ensemble C mais pas de l'ensemble A .

Par ailleurs, il ne faut pas confondre 2 et $\{2\}$: 2 désigne l'élément alors que $\{2\}$ désigne l'ensemble qui contient un seul élément, 2. On a ainsi $2 \in A$ et $\{2\} \subset A$. ■

Définition 2 : Soit A un ensemble ayant un nombre fini d'éléments.

On appelle **Cardinal** de A , noté $\text{Card}(A)$, $\#A$ ou $|A|$ le nombre d'éléments de A .

■ **Exemple 2 :** Le cardinal de l'ensemble $A = \{1; 3; \pi; 5; \sqrt{2}\}$ est 5. ■

Définition 3 : Soit A et B deux ensembles.

- L'**union** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ qui contient tous les éléments qui sont au moins dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B .
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B .
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'ils n'ont aucun élément en commun, c'à d $A \cap B = \emptyset$.

■ **Exemple 3 :** On considère les ensemble $A = \{1; 3; 4; 5; 8\}$ et $B = \{1; 2; 4; 6; 7\}$.

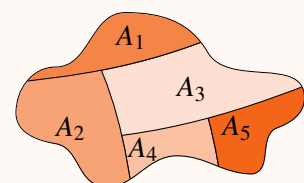
Alors $A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8\}$ et $A \cap B = \{1; 4\}$.

En particulier, les ensembles A et B ne sont pas disjoints. ■

Définition 4 :

Soit Ω un ensemble et A_1, A_2, \dots, A_n des sous-ensembles de Ω .

On dit que les ensembles A_1, \dots, A_n forment une **partition** de Ω si ces ensembles sont deux à deux disjoints et si $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.



Propriété 1 : Soit n un entier naturel non nul et A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$$

Une approche possible du dénombrement est d'établir une disjonction de cas pour découper le problème que l'on étudie en d'autres problèmes plus petits que l'on sait dénombrer. Ceci rappelle naturellement la **formule des probabilités totales**.

■ **Exemple 4 :** Un tournoi de mathématiques est organisé entre 256 joueurs. A chaque manche du tournoi, les participants sont répartis en groupes de 4 candidats et chaque groupe se voit alors attribuer une épreuve à l'issue de laquelle un seul candidat parmi les 4 du groupe pourra se qualifier. A la fin de ce tournoi, il n'y a qu'un seul vainqueur. Combien d'épreuves auront lieu au total ?

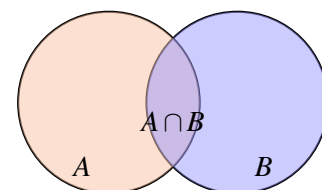
Tout ce raisonnement peut vous sembler inutilement compliqué pour une situation aussi simpliste que celle-là, mais il faut parfois savoir préciser à outrance les objets et les ensembles que l'on manipule pour être certains que les outils mathématiques que nous utilisons sont les bons.

Propriété 2 — Formule du crible : Soit A et B des ensembles finis

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Si l'on compte le nombre d'éléments de A et que l'on ajoute le nombre d'éléments de B , certains éléments ont alors été compté deux fois : ceux communs à A et B (c'est-à-dire les éléments de $A \cap B$).

En retirant le nombre d'éléments de cette intersection à notre compte, on obtient alors le nombre d'éléments de l'union.



Encore une fois, la liaison est à faire avec les probabilités et la formule $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

■ **Exemple 5 :** Pour accompagner leurs frites à la cantine, 150 élèves choisissent leur sauce entre ketchup et mayonnaise (éventuellement les deux). On suppose que tous les élèves ont pris au moins une sauce. Par ailleurs, 92 élèves ont pris du ketchup et 97 ont pris de la mayonnaise. Combien ont pris les deux sauces ?

1.2 Produit cartésien

Définition 5 : Soit A et B deux ensembles.

- On appelle **produit cartésien** de A et B , noté $A \times B$ (A "croix" B), l'ensemble composé des couples $(a; b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
- Le produit cartésien $A \times A$ est également noté A^2 .

■ **Exemple 6 :** On considère les ensembles $A = \{2; 5; 9\}$; et $B = \{3; 5\}$.

- Les éléments de $A \times B$ sont
- Les éléments de $B \times A$ sont
- Les éléments de B^2 sont

On remarque sur cet exemple que le produit cartésien n'est pas commutatif !

Définition 6 : La notion de **produit cartésien** s'étend naturellement à plus de deux ensembles.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. le produit cartésien de n ensembles A_1, A_2, \dots, A_n est l'ensemble des n -uplets $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ avec $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.
- Le produit cartésien $A \times A \times \dots \times A$ où A apparaît n fois est noté A^n . Ses éléments sont appelés les n -uplets de A .

■ **Exemple 7 :** On considère les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$.

- $(1; 7; 3) \in A \times B \times C$ puisque $1 \in A, 7 \in B$ et $3 \in C$.
- $(3; 7; 7; 3; 14) \in B^5$ puisque 3, 7 et 14 sont dans l'ensemble B .

Propriété 3 : Soit A et B des ensembles finis.

- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.
- Plus généralement, soit n un entier naturel, A_1, A_2, \dots, A_n des ensembles finis.

$$\text{Card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \dots \times \text{Card}(A_n).$$

- En particulier, pour tout entier naturel n , on a $\text{Card}(A^n) = [\text{Card}(A)]^n$.

■ **Exemple 8 :** On reprend les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 7; 14\}$ et $C = \{1; 3\}$. On a

- $\text{Card}(A \times B) =$
- $\text{Card}(A \times B \times C) =$
- $\text{Card}(A^4) =$
- $\text{Card}(C^{10}) =$

Propriété 4 : Le produit cartésien est utilisé pour dénombrer des situations où l'ordre des symboles (chiffres, lettres, signes...) est important et où ces symboles peuvent être utilisés plusieurs fois.

■ **Exemple 9 :** A l'entrée d'un bâtiment est installé un digicode. Pour composer le code, on utilise 4 chiffres compris entre 1 et 6 suivis de deux lettres parmi les lettres A, B, C et D. Un chiffre ou une lettre peuvent être utilisés plusieurs fois. Combien de codes sont possibles ? ■

2 Arrangements et permutations

Définition 7 : Soit n un entier naturel non nul. On note $n!$ (**factorielle** de n) le produit de tous les entiers de 1 à n . Ainsi, $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

Par ailleurs, on convient que $0! = 1$.

Il est également possible de définir la factorielle par récurrence, en stipulant que $0! = 1$ et que, pour tout entier naturel n , $(n+1)! = (n+1) \times n!$. Cette version de la factorielle a notamment été rencontrée par les élèves suivant la spécialité NSI lors de leur premier contact avec la récursivité.

■ **Exemple 10 :** $5! = \frac{8!}{6!} =$ ■

Définition 8 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n .

Un k -**arrangement** de A est un k -uplet d'éléments distincts de A .

Lorsque $k = n$, on parle de **permutation** de A .

■ **Exemple 11 :** On considère l'ensemble $A = \{1; 3; 4; 5; 7; 10\}$.

- $(7; 10; 3)$ est un 3-arrangement de A .
- $(10; 5; 4; 1)$ est un 4-arrangement de A .
- En revanche, $(7; 10; 1; 7)$ n'est pas un arrangement de A car l'élément 7 y apparaît deux fois.
- $(3; 7; 4; 5; 1; 10)$ est par ailleurs une permutation de A puisque tous les éléments de A y apparaissent. ■

Propriété 5 : Soit A un ensemble fini de cardinal n et k un entier inférieur ou égal à n .

Le nombre de k -arrangements de A vaut $\frac{n!}{(n-k)!}$.

En particulier, le nombre de permutation de A vaut $n!$.

Démonstration 1 : Pour construire un k -uplet d'éléments distincts de A , on a

- n choix pour le premier élément
- $n-1$ choix pour le deuxième
- ...
- $n-(k-1)$ pour le k -ième

Le nombre de k arrangements de A vaut donc $n \times (n-1) \times \dots \times n - (k+1)$, ce que l'on peut réécrire en

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

d'où

$$n \times (n-1) \times \dots \times (n-(k-1)) \times \frac{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

■ **Exemple 12 :** On considère l'ensemble $A = \{1;3;4;5;7;9;11\}$, de cardinal 7.

Le nombre de 3-arrangements de A vaut

■

Propriété 6 : Les arrangements sont utilisés pour dénombrer des situations où l'ordre des objets (chiffres, nombres, lettres, signes,...) est important mais où chaque objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 13 :** Une course hippique réunit 8 jockeys et leurs chevaux. Le "quarté dans l'ordre" est un pari qui consiste à deviner les quatre premiers chevaux arrivés dans l'ordre. Combien de paris différents est-il possible de réaliser ?

■

3 Combinaisons d'un ensemble fini

Définition 9 : Une **partie** ou **combinaison** d'un ensemble fini A est un ensemble inclus dans A . L'ensemble des parties de A est noté $\mathcal{P}(A)$.

■ **Exemple 14 :** Soit $A = \{1;2;3\}$. Les parties de A sont \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$ et $\{1;2;3\}$. Elles sont au nombre de 8

Attention à ne pas oublier l'ensemble vide \emptyset et l'ensemble complet A lui-même en établissant cette liste. ■

Propriété 7 : Soit A un ensemble fini de cardinal n . Le nombre de parties de A est 2^n .

Démonstration 2 : Nous allons montrer qu'il y a autant de parties de A que de n -uplets de l'ensemble $\{0;1\}^n$. Puisque $\{0;1\}$ possède 2 éléments, le cardinal de $\{0;1\}^n$ vaut donc 2^n .

Pour cela, à chaque partie de A , on fait correspondre un élément de $\{0;1\}^n$ de telle sorte que deux parties différentes de A sont associées à deux n -uplets différents de $\{0;1\}^n$. On dit qu'on réalise une bijection entre $\mathcal{P}(A)$ et $\{0;1\}^n$.

L'idée : Pour chaque élément de A , on a deux choix pour construire une partie de A : soit cet élément appartient à la partie que l'on construit, soit il ne lui appartient pas.

On a donc

- 2 choix pour le premier élément de A
- 2 choix pour le deuxième élément...
- ...
- 2 choix pour le n -ième élément de A .

Ainsi, le cardinal de $\mathcal{P}(A)$ vaut $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$.

De manière formelle : Notons a_1, a_2, \dots, a_n les éléments de A . Soit B une partie de A . On construit un n -uplet $(b_0; b_1; \dots; b_n)$ de $\{0; 1\}$ comme suit : pour tout entier naturel i entre 1 et n

- $b_i = 1$ si $a_i \in B$
- $b_i = 0$ sinon.

Chaque partie de A est ainsi associée de manière unique à un n -uplet de $\{0; 1\}$ et réciproquement. Les cardinaux de $\mathcal{P}(A)$ et $\{0; 1\}^n$ sont donc égaux. \square

Définition 10 : Soit A un ensemble fini à n éléments et k un entier naturel n .

Le nombre de combinaisons à k éléments de A est noté $\binom{n}{k}$ et se lit " k parmi n ".

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux

■ **Exemple 15 :** Soit $A = \{1 : 2 : 3 : 4 : 5\}$.

Les parties à deux éléments de A sont

Il y en a : ainsi, $\binom{5}{2} =$ ■

Attention, l'ordre n'a pas d'importance lorsque l'on parle de partie d'un ensemble : le sous-ensemble $\{1; 2\}$ est le même que le sous-ensemble $\{2; 1\}$.

Propriété 8 : Soit n et k deux entiers naturels.

- Si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$;
- Sinon, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Démonstration 3 : On sait qu'il y a $\frac{n!}{(n-k)!}$ k -arrangements de A .

Cependant, plusieurs k -arrangements utilisent les mêmes éléments de A (par exemple, les couples $(1; 2)$ et $(2; 1)$ utilisent les nombres 1 et 2).

Étant donnée une partie de A à k éléments, on peut construire $k!$ arrangements différents : on a k choix pour le premier élément, $k-1$ pour le deuxième, etc.

Ainsi, le nombre de k -arrangements est $k!$ fois plus grand que la nombre de combinaisons à k éléments. Ainsi, le nombre de combinaisons à k éléments est égale au nombre de k -arrangements divisé par $k!$, soit $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. \square

■ **Exemple 16 :** Soit $A = \{1; 2; 3; 4\}$.

Le nombre de parties de A à deux éléments vaut

Ces parties sont

■

Propriété 9 : Soit n un entier naturel non nul.

$$\text{Pour tout entier naturel } k \leq n, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}. \quad \left| \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.\right.$$

$$\text{Si } n \geq 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n. \quad \left| \quad \text{Si } n \geq 2, \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}.\right.$$

Démonstration 4 : (Avec la formule) :

- Pour tout entier naturel $k \leq n$, $\binom{n}{n-k} =$.
- D'après le premier point, on a bien $\binom{n}{0} = \binom{n}{n-0} = \binom{n}{n}$. Or, $\binom{n}{0} =$
- D'après le premier point, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$. Or, $\binom{n}{1} =$
- D'après le premier point, $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$.
Or, $\binom{n}{2} =$

□

Démonstration 5 : (Démonstration combinatoire)

- Choisir k objets parmi n revient à exclure $n - k$ objets parmi ces n objets. Ainsi, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- Il n'existe qu'un seul ensemble à 0 élément, il s'agit de l'ensemble vide \emptyset . De la même manière, si A est un ensemble à n éléments, la seule partie de A ayant n éléments est l'ensemble A lui-même.
Ainsi, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- Si A est un ensemble fini $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ de cardinal supérieur ou égal à 1, les parties à 1 élément de A sont simplement les singletons $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$.
Ainsi, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.
- Soit A un ensemble de cardinal $n \geq 2$. Pour construire une partie à 2 éléments de A , on choisit un premier élément (n choix possibles) puis un second ($n - 1$ choix). En faisant ainsi, on peut construire $n(n - 1)$ couples d'éléments de A . Or, l'ordre n'ayant pas d'importance, il est possible d'inverser l'ordre dans lequel on choisit les éléments de A .
Le nombre de combinaisons de A à 2 éléments vaut donc $\frac{n(n-1)}{2}$

□

■ **Exemple 17 :** $\binom{100}{98} =$ ■

Propriété 10 : Les combinaisons sont utilisées pour dénombrer les situations où l'ordre des objets n'est pas important - lorsque l'on tire simultanément plusieurs personnes ou objets au hasard par exemple - et qu'un objet ne peut être utilisé qu'une seule fois.

■ **Exemple 18 :** A la belote, on utilise un jeu de 32 cartes. Chaque carte est déterminé par sa couleur (Pique, Trèfle, Carreau, Cœur) et sa valeur (As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7). Pour le premier tour de distribution, chaque joueur reçoit 5 cartes, que l'on appelle une main.

Quelle est la probabilité qu'une main contienne exactement deux as ?

Propriété 11 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et k un entier tel que $1 \leq k \leq n-1$. On a alors

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Cette relation s'appelle la relation de Pascal.

Démonstration 6 — Avec la formule : On a

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} =$$

□

Démonstration 7 — Combinatoire : Soit A un ensemble fini à n éléments et $a \in A$. Soit k un entier naturel compris entre 1 et $n - 1$.

□

Propriété 12 : La relation de Pascal permet de construire récursivement les coefficients binomiaux. Ces coefficients peuvent être arrangés en triangle et forment ce que l'on appelle le triangle de Pascal.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Dans ce triangle, on démarre avec un 1 en haut à gauche. Pour compléter chaque cellule, on ajoute alors le nombre au-dessus avec le nombre en haut à gauche. Les cases vides se voient assigner la valeur 0. On peut alors lire les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ dans ce triangle.