Matrices

1 Notion de matrices

Définition 1 : Une **matrice** de dimension $n \times p$ est la données de np nombres (réels, complexes, entiers...) présentés sous la forme d'un tableau composé de n lignes et p colonnes.

■ **Exemple 1 :** $\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ est une matrice d'entiers relatifs de dimension 2×3.

$\begin{pmatrix} 1+5i & 3-i \\ 2 & i \end{pmatrix}$ est une matrice complexe de dimension 2×2. ■

Définition 2 : Quelques **matrices particulières**...

- Une matrice composée d'une seule ligne est appelée **matrice ligne**.
- Une matrice composée d'une seule colonne est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice composée d'autant de lignes que de colonnes est appelée **matrice carrée**.

■ **Exemple 2 :** $\begin{pmatrix} 7 \\ 1{,}2 \\ -3{,}8 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne de dimension 3×1.

$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est une matrice ligne de dimension 1×4.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & \pi & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de dimension 3×3 (ou simplement matrice carrée de taille 3). ■

Définition 3 : Soit A une matrice de dimension $n \times p$, i un entier compris entre 1 et n et j un entier compris entre 1 et p.

On appelle **coefficient** (i,j) de la matrice A le nombre situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

Lorsque la matrice est désigné par une lettre majuscule, ses coefficients sont en général désignés par la lettre minuscule associée.

On écrira alors $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant p}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 3 :** Dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$, pour laquelle le coefficient (i,j) est noté $a_{i,j}$, on a $a_{1,1} = 7$, $a_{2,1} = 1$ et $a_{2,3} = 9$. ■

■ **Exemple 4 :** On considère la matrice A de dimension 2×3 dont le coefficient (i,j) vaut $a_{i,j} = ij^2$.

On a alors

- $a_{1,1} = 1 \times 1^2 = 1$
- $a_{1,2} = 1 \times 2^2 = 4$
- $\ldots$
- $a_{2,3} = 2 \times 3^2 = 18$

Finalement, on obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & 18 \end{pmatrix}$ ■

Définition 4 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ deux matrices de même dimension.

Les matrices A et B sont égales si et seulement si, pour tout entier i entre 1 et n et tout entier j entre 1 et p, on a $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Autrement dit, deux matrices sont égales si leurs coefficients sont égaux...

Définition 5 : Quelques matrices particulières...

- On appelle **matrice nulle** de dimension $n \times p$ la matrice notée $0_{n,p}$ dont tous les coefficients valent 0.
- On appelle **matrice identité** de dimension n la matrice carrée notée I_n dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres valent 0.

■ **Exemple 5 :** $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■

2 Opérations sur les matrices

2.1 Produit d'une matrice par un réel

Définition 6 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une matrice et λ un complexe. La matrice λA est la matrice de taille $n \times p$ dont les coefficients sont égaux aux coefficients de A multipliés par λ. Autrement dit,

$$\lambda A = (\lambda\, a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \lambda\, a_{1,2} & \cdots & \cdots & \lambda\, a_{1,p} \\ \lambda\, a_{2,1} & \lambda\, a_{2,2} & \cdots & \cdots & \lambda\, a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \lambda\, a_{n,2} & \cdots & \cdots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 6 :** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, alors $9A = \begin{pmatrix} 9 & 45 & -18 \\ 27 & -72 & 81 \end{pmatrix}$. ■

2.2 Somme de matrices

Définition 7 : Soit $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}$ et $B=(b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}$ deux matrices de même dimension.

La matrice $A+B$ est la matrice de dimension $n\times p$ dont le coefficient (i,j) vaut $a_{i,j}+b_{i,j}$.

$$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n,\,1\leqslant j\leqslant p}=\begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 7 :** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Alors $A+B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 5 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. ■

Propriété 1 : Soit A, B et C deux matrices de dimension $n\times p$, λ et μ deux complexes.

- $A+B=B+A$: l'addition de matrice est **commutative**.
- $A+0_{n,p}=A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$: l'addition de matrices est **associative**.
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Pour le moment, tout se passe pour le mieux.

2.3 Produit de matrices

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 8 : Soit $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ une matrice ligne de dimension $1\times p$ et $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de dimension $p\times 1$.

Le produit AB est la matrice de dimension 1×1 qui vaut

$$AB=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p \end{pmatrix}=\left(\sum_{i=1}^{p} a_ib_i\right)$$

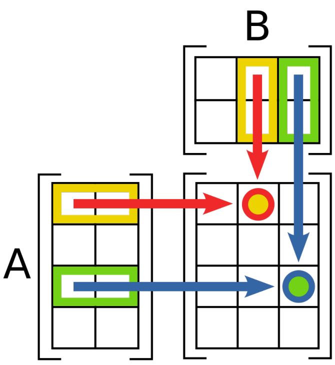
■ **Exemple 8 :** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. $AB=(1\times 8+3\times(-2)+(-5)\times 3)=(-13)$ ■

Produit de deux matrices

Définition 9 : Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times q$.

Le produit AB est la matrice de dimension $n \times q$ dont le coefficient (i, j) est égal au coefficient du produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B.

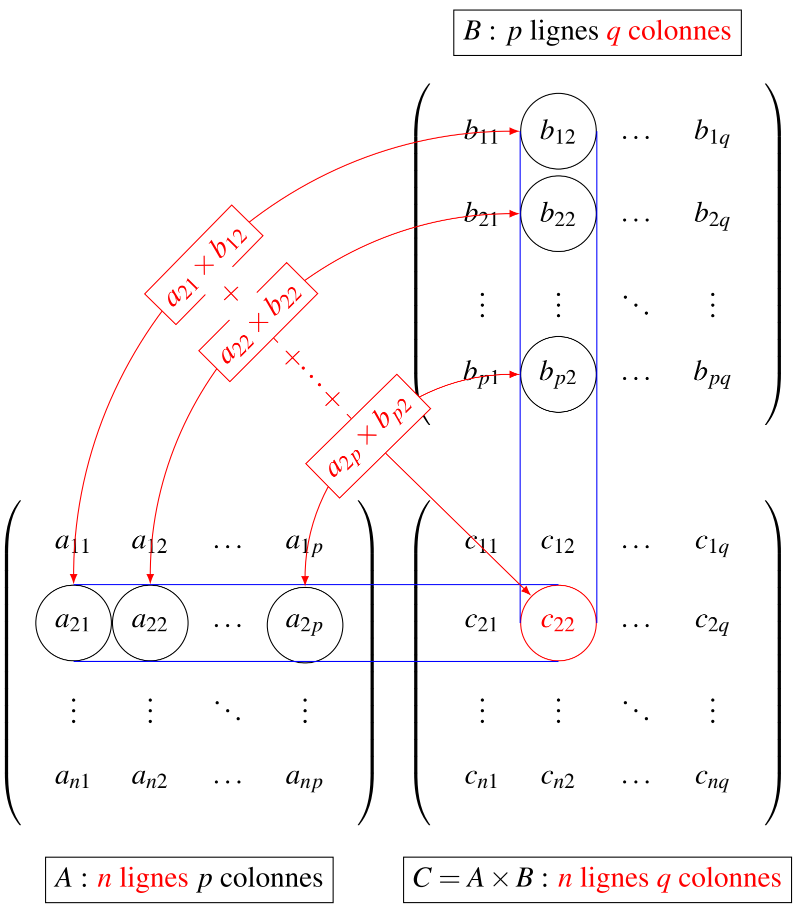
$$AB = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} + \cdots + a_{1,p}b_{p,1} & \dots & a_{1,1}b_{1,q} + a_{1,2}b_{2,q} + \cdots + a_{1,p}b_{p,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}b_{1,1} + a_{n,2}b_{2,1} + \cdots + a_{n,p}b_{p,1} & \dots & a_{n,1}b_{1,q} + a_{n,2}b_{2,q} + \cdots + a_{n,p}b_{p,q} \end{pmatrix}$$



Important
Il n'est pas possible de multiplier n'importe quels matrices entre elles. Deux matrices peuvent être multipliées si et seulement si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

Illustration
Pour ne pas se perdre dans le calcul du produit de deux matrices, il peut être utile de se les représenter sous cette forme. La première matrice est à gauche et la deuxième matrice est au-dessus de la matrice produit à obtenir.

À retenir : (Matrice $N \times$ **P**) $\times$ (Matrice **P** $\times Q$) = Matrice $N \times Q$



■ **Exemple 9 :** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A est de dimension 2×3 et B est de dimension 3×4. Il est donc possible de calculer le produit AB : ce produit sera de dimension 2×4.

- Le coefficient $(1,1)$ de AB est égal au coeff du produit de la ligne 1 de A et de la colonne 1 de B.
  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 \times 1 + 2 \times 7 + 5 \times 2) = (25)$.
  Le coefficient $(1,1)$ de AB vaut donc 25.
- Le coefficient $(2,1)$ de AB vaut $3 \times 1 + 1 \times 7 + 2 \times 2 = 14$
- ...
- Le coefficient $(2,3)$ de AB vaut $3 \times 6 + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 19$

En faisant ainsi tous les calculs, on obtient

$$AB = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 8 & -1 \\ 14 & 17 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

■

R Attention ! La multiplication des matrices n'est pas commutative, même lorsque les matrices sont de même taille.

■ **Exemple 10 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors,

- $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times (-1) & 1 \times 0 + 2 \times 3 \\ 0 \times 2 + 1 \times (-1) & 0 \times 0 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
- $BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 0 \times 0 & 2 \times 1 + 0 \times 1 \\ -1 \times 1 + 3 \times 2 & -1 \times 2 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
  Ainsi, $AB \neq BA$. On dit que les matrices A et B ne commutent pas.

■

Propriétés de calcul

Propriété 2 : Soit A une matrice de dimension $n \times p$.

- $0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$ et $A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}$.
- $I_n \times A = A \times I_p = A$

La seule difficulté ici se trouve dans les dimensions des matrices.

Attention : ce n'est pas parce que l'on a deux matrices A et B qui vérifient $AB = 0$ que l'on a forcément $A = 0$ ou $B = 0$!

■ **Exemple 11 :** Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ■

Propriété 3 : Soit A et B deux matrices de dimension $n \times p$, C et D deux matrices de taille $p \times q$, λ et μ deux complexes.

- $(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$
- $A(\lambda C + \mu D) = \lambda AC + \mu AD$

■ **Exemple 12 :**

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \times 3I_2 \\
&= 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

■

Attention, on rappelle que la multiplication de matrices n'est pas commutative ! Il faut, lorsque l'on factorise, que la matrice soit à chaque fois « du bon côté ».

Par exemple, on ne factorisera par par $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans l'expression $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Propriété 4 : Soit A une matrice de dimension $m \times n$, B une matrice de dimension $n \times p$ et C une matrice de dimension $p \times q$. Alors $(AB)C = A(BC)$.

2.4 Puissance d'une matrice carrée

Définition 10 : Soit A une matrice carrée de dimension p et n un entier naturel.

On définit par A^n la matrice égale à $A \times A \times \cdots \times A$ où la matrice A apparaît n fois.

Par ailleurs, $A^0 = I_n$.

■ **Exemple 13 :** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Alors

- $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 3\times 2 & 1\times 3 + 3\times -1 \\ 2\times 1 + (-1)\times 2 & 2\times 3 + (-1)\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = 7I_2$
- $A^3 = A^2 \times A = 7I_2 \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 21 \\ 14 & -7 \end{pmatrix}$

On pourrait d'ailleurs montrer que pour tout entier naturel n, $A^{2n} = 7^n I_2$ et $A^{2n+1} = 7^n A$... ■

Propriété 5 : Soit A une matrice carrée, k et ℓ deux entiers naturels. On a $A^k \times A^\ell = A^{k+\ell}$ et $(A^k)^l = A^{kl}$.

En revanche, si A et B sont deux matrices carrées de même dimension et k un entier naturel, on n'a pas toujours $(AB)^k = A^k B^k$.

3 Matrices inversibles

3.1 Inverse d'une matrice

Définition 11 : Soit A une matrice carré de dimension n. On dit que A est inversible s'il existe une matrice carrée B de dimension n telle que $AB = BA = I_n$.

Si une telle matrice existe, elle est unique et est appelée inverse de A. On la note alors A^{-1}.

Démonstration 1 : Supposons qu'il existe deux matrices B et B' telles que $AB = BA = I_n$ et $AB' = B'A = I_n$. Alors $B' = I_nB = (BA)B' = B(AB') = BI_n = B$. On a donc $B' = B$. □

Propriété 6 : Soit A et B deux matrices carrées de dimension n. Alors $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$.

Dans les faits, pour montrer qu'une matrice B est l'inverse d'une matrice A, il suffit seulement de vérifier que $AB = I_n$.

■ **Exemple 14 :** L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice $\begin{pmatrix} 2{,}5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2{,}5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2{,}5+4\times(-1) & 2\times(-2)+4\times 1 \\ 2\times 2{,}5+5\times(-1) & 2\times(-2)+5\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

■

■ **Exemple 15 :** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On souhaite déterminer si la matrice A est inversible et, si c'est le cas, calculer son inverse. Soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ 3a+4c & = & 0 \\ 3b+4d & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & -\dfrac{3}{4} \\ d & = & \dfrac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ainsi, l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ■

3.2 Matrice de dimension 2×2

Propriété 7 : Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice de dimension 2×2. Alors A est inversible si et seulement si $ac-bc\neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$$

Démonstration 2 : On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & -ac+ac \\ bd-bd & -bc+ad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=(ad-bc)I_2$$

- Si $ad-bc\neq 0$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\times\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}=I_2$, et on obtient le résultat voulu
- Si $ad-bc=0$, supposons que A est inversible. Notons A^{-1} son inverse et B la matrice $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}$

$$B=I_2B=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}\times(ad-bc)I_2=A^{-1}\times 0_{2,2}=0_{2,2}$$

Ainsi, $B=0_{2,2}$ et tous ses coefficients sont nuls. On a alors $a=b=c=d=0$. C'est absurde, car on a supposé la matrice A inversible. La matrice A n'est donc pas inversible.

□

■ **Exemple 16 :** Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4\end{pmatrix}$. A est inversible et son inverse est $A^{-1}=-\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -2 & 1\end{pmatrix}$. ■

3.3 Application : systèmes linéaires

Propriété 8 : Soit A une matrice carrée de dimension n, X et B deux matrices colonnes de dimension $n\times 1$. Si A est inversible, alors $AX=B$ si et seulement si $X=A^{-1}B$.

■ **Exemple 17 :** On considère le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y-z & = & 1 \\ 3x-y+z & = & 3 \\ 4x-2y+z & = & 5\end{array}\right.$

Ce système peut se traduire par l'écriture matricielle $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5\end{pmatrix}$

Or, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse, $\dfrac{1}{7}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 16 & -11\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\times\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & -5 \\ -2 & 16 & -11\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3\end{pmatrix}$

■

Matrices

Notion de matrices

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 7 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

1. Quelle est la dimension de la matrice A ?
2. Que valent $a_{1,2}$, $a_{3,3}$ et $a_{2,4}$?

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

Écrire sous la forme d'un tableau de nombres la matrice 3×3 dont le coefficient (i,j) vaut i^j.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Écrire les matrices suivantes sous la forme d'un tableau de nombres.

- $A = (i+j)_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$
- $B = (\max(i,j))_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 4}$
- $C = \left(\dfrac{np}{n+p}\right)_{1 \leqslant n \leqslant 3, 1 \leqslant p \leqslant 2}$
- $D = (i+1)_{1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 2}$
- $E = (i^{n+p})_{1 \leqslant n \leqslant 4, 1 \leqslant p \leqslant 4}$ où i désigne ici un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit A une matrice de dimension $n \times p$. On appelle transposée de A, notée A^T, la matrice de dimension $p \times n$ dont le coefficient (i,j) vaut $a_{j,i}$.

Déterminer la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$ une matrice carrée de dimension n. On appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de la matrice A. On a donc $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$. Determiner la trace des matrices suivantes.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = (ij)_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$ $\quad C = I_n$ $\quad D = (i+j)_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$

Opérations sur les matrices

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$, $3A-2B$ et $\dfrac{2}{3}A + \dfrac{1}{4}B$.

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Effectuer les calculs suivants.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1-2i & i & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1+i \\ i-5 \end{pmatrix}$

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Déterminer la valeur du réel x pour que $\begin{pmatrix}3x & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\x\\3\end{pmatrix}=(12)$.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\2 & 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\0 & 1 & 0\\-2 & 1 & 0\\-1 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 7\end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$.

Parmi les produits suivants, déterminer ceux qui ont un sens et déterminer le résultat.

AB	AC	BC	CA	CB
AD	CD	DC	BD	DB

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Déterminer les valeurs des réels a, b, c et d pour que $\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -7\\-2 & 10\end{pmatrix}$.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & 2 & 0\\-3 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Montrer que $A^2=2A$ et en déduire A^n pour tout entier naturel non nul n.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & -1\end{pmatrix}$ et $B=A-I_2$.

1. Calculer B puis B^2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n=I_2+nB$.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$. Montrer par récurrence que pour tout entier $n\geqslant 1$, $A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & -2^{n-1}\\-2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Conjecturer une expression de A^n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Soit a, b et c trois réels et $A=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Conjecturer une expression de A^n en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 3\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Déterminer deux réels α et β tels que $A^2+\alpha A+\beta I_2=0$.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}$. Montrer que $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=0$.

▶ Exercice 18 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. Calculer A^{2025}.

▶ Exercice 19 – Voir le corrigé

Soit $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Pour tous réels a, et b, on note $M(a,b)=aI_2+bB$.

1. Calculer $M(0,1)^2$.
2. Soit a, b, a' et b' quatre réels. Exprimer les produits $M(a,b)\times M(a,-b)$ et $M(a,b)\times M(a',b')$.
3. Quel ensemble de nombres les différents résultats trouvés ici vous rappellent-ils ?

Matrices inversibles

▶ Exercice 20 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Vérifier que $A^2+A=2I_3$.
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

▶ Exercice 21 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Vérifier que $A^3-A^2-2A=4I_3$
3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

▶ Exercice 22 – Voir le corrigé

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse.

$\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}6&9\\8&12\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}i&2\\1+i&1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

▶ Exercice 23 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel, A et B deux matrices carrées de dimension n et $C=AB$.

1. On suppose que la première ligne de A est uniquement composée de 0. Calculer $c_{1,1}$.
2. La matrice A peut-elle être inversible ?
3. Généraliser : une matrice peut-elle être inversible si une de ses lignes ou colonnes est nulle ?

▶ Exercice 24 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel et M une matrice de dimension n.

On dit que M est nilpotente de rang p si $M^p=0_n$ et $M^{p-1}\neq 0_n$.

1. Soit B une matrice nilpotente de rang p
   (a) Calculer le produit $(I_3-B)(I_3+B+B^2+...+B^{p-1})$.
   (b) En déduire que I_3-B est inversible et déterminer son inverse.
2. Soit $A=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Montrer que A est nilpotente puis déterminer l'inverse de I_3-A.

► Exercice 25 – Voir le corrigé

Soit $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $Q=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}1&-2&-2\\0&3&5\\0&0&-2\end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ.
2. On note $B=PAQ$. Calculer B puis B^n pour tout entier naturel n.
3. En déduire une expression de A^n pour tout entier naturel n.

► Exercice 26 – Voir le corrigé

Traduire les systèmes suivants sous forme matricielle.

$$\begin{cases}4x-5y&=&1\\2x+3y&=&0\end{cases}\qquad\begin{cases}2x+3y-z&=&2\\3x+y-z&=&5\\5x+2y+4z&=&1\end{cases}\qquad\begin{cases}x-z+3t&=&1\\y-z+t&=&5\\2x+3y-4z+2t&=&3\end{cases}$$

► Exercice 27 – Voir le corrigé

Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\-1&2&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit AB.
2. Traduire sous forme matricielle puis résoudre les système suivants.

$$\begin{cases}x-y+z&=&2\\-x+2y-z&=&0\\-x+2y-2z&=&3\end{cases}\qquad\begin{cases}2x+z&=&1\\x+y&=&3\\y-z&=&6\end{cases}$$

► Exercice 28 – Voir le corrigé

Soit a, b et c trois réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=ax^2+bx+c$.

On souhaite déterminer les valeurs des réels a tels que $f(-1)=15$, $f(1)=2$ et $f(2)=6$.

1. Justifier que ce problème revient à résoudre le système matriciel $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\2\\6\end{pmatrix}$.
2. On admet que l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}$ est de la forme $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}1&\alpha&2\\\beta&3&0\\\gamma&6&\delta\end{pmatrix}$.
   Déterminer les valeurs manquantes.
3. En déduire les valeurs des réels a, b et c solutions du problème.

► Exercice 29 – Voir le corrigé

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\4&2&1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $M^3=M^2+8M+6I_3$.
2. En déduire que M est inversible et déterminer son inverse.
3. On cherche à déterminer trois entiers tels que la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points $A(1;1)$, $B(-1;-1)$ et $C(2;5)$.
   (a) Traduire matriciellement le problème.
   (b) Déterminer les valeurs des entiers a, b et c.

1. Corrigés

Notion de matrices

► Correction 1 – Voir l'énoncé

La matrice A est de dimension 3×4.

On a $a_{1,2} = 5$, $a_{3,3} = -4$ et $a_{2,4} = 0$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} -1 & -i & 1 & i \\ -i & 1 & i & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ i & -1 & -i & 1 \end{pmatrix}$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

Il s'agit de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

- $tr(A) = 1 + 3 + 4 = 8$.
- La matrice B est de taille 3×3 et le coefficient (i,i) vaut i^2. Ainsi, $tr(B) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.
- La matrice I_n est de taille $n \times n$ et le coefficient (i,i) vaut 1. Ainsi, $tr(I_n) = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$.
- La matrice D est de taille $n \times n$ et le coefficient (i,i) vaut $2i$. Ainsi,

$$tr(D) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

Opérations sur les matrices

► Correction 6 – Voir l'énoncé

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & -1+0 & 2+3 \\ 5+2 & -1+1 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3\times 3 - 2 \times 1 & 3 \times (-1) - 2 \times 0 & 3 \times 2 - 2 \times 3 \\ 3 \times 5 - 2 \times 2 & 3 \times (-1) - 2 \times 1 & 3 \times 3 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 11 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}A+\frac{1}{4}B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{4}\times 1 & \frac{2}{3}\times(-1)+\frac{1}{4}\times 0 & \frac{2}{3}\times 2+\frac{1}{4}\times 3\\ \frac{2}{3}\times 5+\frac{1}{4}\times 2 & \frac{2}{3}\times(-1)+\frac{1}{4}\times 1 & \frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{4}\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{25}{12}\\ \frac{23}{6} & -\frac{5}{12} & 3\end{pmatrix}$$

► Correction 7 – Voir l'énoncé

$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}=(1\times(-2)+3\times 3+2\times 0)=(7)$

$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-5\\-7\end{pmatrix}=(-1\times 2+3\times(-5)+(-5)\times(-7)=(18)$

$\begin{pmatrix}1-2i & i & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2+3i\\1+i\\i-5\end{pmatrix}=((1-2i)(2+3i)+i(1+i)+3(i-5))=((1-2i)(2+3i)+i(1+i)+3(i-5))=$
$(2+3i-4i+6+i-1+3i-15)=(-8+3i)$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

$\begin{pmatrix}3x & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\x\\3\end{pmatrix}=(3x\times(-5)+2x-3)=(-13x-3).$

Or, $-13x-3=12\Leftrightarrow x=-\frac{15}{13}$. Le réel recherché est donc $-\frac{15}{13}$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Le produit AB a du sens, le résultat est une matrice 2×3.

$$AB=\begin{pmatrix}1\times 1+3\times 0+(-1)\times(-2)+2\times(-1) & 1\times 3+3\times 1+(-1)\times 1+2\times 3 & 1\times(-1)+3\times 0+(-1)\times 0+2\times 0\\ 2\times 1+3\times 0+0\times(-2)+(-3)\times(-1) & 2\times 3+3\times 1+0\times 1+(-3)\times 3 & 2\times(-1)+3\times 0+0\times 0+(-3)\times 0\end{pmatrix}$$

soit $AB=\begin{pmatrix}1 & 11 & -1\\5 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

Les produits AC, BC et CA n'ont pas de sens.

Le produit CB a du sens. Le résultat est une matrice 1×3.

$$CB=\begin{pmatrix}3\times 1+(-2)\times 0+1\times(-2)+7\times(-1) & 3\times 3+(-2)\times 1+1\times 1+7\times 3 & 3\times(-1)+(-2)\times 0+1\times 0+7\times 0\end{pmatrix}$$

soit $CB=\begin{pmatrix}-6 & 29 & -3\end{pmatrix}$.

Les produit AD et CD n'ont pas de sens.

Le produit DC a un sens. Le résultat est une matrice 3×4

$$DC=\begin{pmatrix}3\times 3 & 3\times(-2) & 3\times 1 & 3\times 7\\ -1\times 3 & -1\times(-2) & -1\times 1 & -1\times 7\\ 5\times 3 & 5\times(-2) & 5\times 1 & 5\times 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -6 & 3 & 21\\ -3 & 2 & -1 & -7\\ 15 & -10 & 5 & 35\end{pmatrix}.$$

Le produit BD a un sens. Le résultat est une matrice 4×1.

$$BD = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + 3 \times (-1) + (-1) \times 5 \\ 0 \times 3 + 1 \times (-1) + 0 \times 5 \\ -2 \times 3 + 1 \times (-1) + 0 \times 5 \\ -1 \times 3 + 3 \times (-1) + 0 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Le produit DB n'a pas de sens.

▶ Correction 10 – Voir l'énoncé

On a $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ -a-4c & -b-4d \end{pmatrix}$. Nous sommes donc amenés à résoudre un système.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+3c & = & 1 \\ -a-4c & = & -2 \\ b+3d & = & -7 \\ -b-4d & = & 10 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+3c & = & 1 \\ -c & = & -1 \\ b+3d & = & -7 \\ -d & = & 3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ \\ (L_4 \leftarrow L_4 + L_3) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+3 & = & 1 \\ c & = & 1 \\ b+-9 & = & -7 \\ d & = & -3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ c & = & 1 \\ b & = & 2 \\ d & = & -3 \end{array} \right.$$

La matrice recherchée est donc $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

▶ Correction 11 – Voir l'énoncé

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1) \times (-1) + 2 \times 0 + 1 \times (-3) & (-1) \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 2 & -1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 3 \\ 0 \times (-1) + 2 \times 0 + 0 \times (-3) & 0 \times 2 + 2 \times 2 + 0 \times 2 & 0 \times 1 + 2 \times 0 + 0 \times 3 \\ -3 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times (-3) & -3 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2 & -3 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 2A.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$A^n = 2^n A = \begin{pmatrix} -2^n & 2^{n+1} & 2^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ -3 \times 2^n & 2^{n+1} & 3 \times 2^n \end{pmatrix}.$$

▶ Correction 12 – Voir l'énoncé

On a $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $A^n = I_2 + nB$ »

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I_2 = I_2 + 0B$. $P(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$ vraie. On a alors $A^n = I_2 + nB$. Ainsi,

$$A^{n+1} = A^n \times A = (I_2 + nB)A = I_2 \times A + nBA = A + nBA.$$

Or, $B = A - I_2$ d'où $A = B + I_2$. Ainsi,

$$A^{n+1} = I_2 + B + nB(B + I_2) = I_2 + B + nB + nB^2 = I_2 + (n+1)B$$

puisque $B^2 = 0_2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la proposition $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ »

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, on $\begin{pmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$. $P(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons $P(n)$ vraie. On a alors $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.
  Ainsi,

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.$$

  Ainsi,

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \times 2^{n-1} - 1 \times (-2^{n-1}) & 1 \times (-2^{n-1}) - 1 \times 2^{n-1} \\ -1 \times 2^{n-1} + 1 \times (-2^{n-1}) & -1 \times (-2^{n-1}) + 1 \times 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

  et donc,

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1} & -2 \times 2^{n-1}) \\ -2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

  et finalement,

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & -2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

  $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(1)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times 1 + 2 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons $P(n)$ vraie. On a alors $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Ainsi, $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + n \times 0 & 1 \times n + 1 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 1 & 0 \times n + 1 \times 1 \end{pmatrix}$ et donc, $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la proposition $P(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, on a $\begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & b^1 & 0 \\ 0 & 0 & c^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = A$. $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons $P(n)$ vraie. On a alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}.$$

  $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times -2 & 1 \times 2 + 2 \times 3 \\ -2 \times 1 + 3 \times -2 & -2 \times 2 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

Supposons qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0_2$. On a alors

$$\begin{pmatrix} -3 + \alpha + \beta & 8 + 2\alpha \\ -8 - 2\alpha & 5 + 3\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'égalité sur le coefficient (1,2) donne $8 + 2\alpha = 0$ et donc $\alpha = -4$. En substituant α par -4 dans le coefficient (1,1), on a alors $-3 - 4 + \beta = 0$ et donc $\beta = 7$.

Réciproquement, on vérifie facilement que $A^2 - 4A + +7I_2 = 0_2$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc-(a+d)a+ad-bc & ac+cd-(a+d)c \\ ab+bd-(a+d)b & d^2+bc-(a+d)d+ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

► Correction 18 – Voir l'énoncé

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = I_3$. Ainsi, $A^{2025} = A^{3\times 675} = (A^3)^{675} = I_3^{675} = I_3$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

On a $M(0,1)^2 = B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M(-1,0)$.

On a $M(a,b) \times M(a,-b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix} = M(a^2+b^2,0)$.

Enfin, $M(a,b) \times M(a',b') = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -(ab'+a'b) \\ ab'+a'b & aa'-bb' \end{pmatrix} = M(aa'-bb',ab'+a'b)$.

Ces propriétés rappellent celles des nombres complexes (a et b correspondant aux parties réelles imaginaires).

Matrices inversibles

► Correction 20 – Voir l'énoncé

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\times(-1)+1\times 1+1\times 1 & -1\times 1+1\times(-1)+1\times 1 & -1\times 1+1\times 1+1\times(-1) \\ 1\times(-1)+(-1)\times 1+1\times 1 & 1\times 1+(-1)\times(-1)+1\times 1 & 1\times 1+(-1)\times 1+1\times(-1) \\ 1\times(-1)+1\times 1+(-1)\times 1 & 1\times 1+1\times(-1)+(-1)\times 1 & 1\times 1+1\times 1+(-1)\times(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^2+A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

On a donc $A(A+I_3)=2I_3$ et donc $A\times\dfrac{1}{2}(A+I_3)=I_3$. A est donc inversible et

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)=\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

► Correction 21 – Voir l'énoncé

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 8\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$A^3-A^2-2A=\begin{pmatrix}8-2-2\times1 & 4-0-2\times2 & 8-6-2\times1\\ 2-2-2\times0 & 3-1-2\times(-1) & 4-0-2\times2\\ 4-2-2\times1 & 2-2-2\times0 & 8-2-2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}=4I_3.$$

Ainsi, $A(A^2-A-2I_3)=4I_3$ et donc $A\times\dfrac{1}{4}(A^2-A-2I_3)=I_3$. Finalement, A est inversible et

$$A^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-A-2I_3)=\begin{pmatrix}-1/4 & -1/2 & 5/4\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ 1/4 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}.$$

► Correction 22 – Voir l'énoncé

$1\times1-2\times3=-5$. A est donc inversible et $A^{-1}=-\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$.

$6\times12-8\times9=72-72=0$. B n'est donc pas inversible.

$i\times1-2(1+i)=-2-i\neq0$. C est donc inversible et $C^{-1}=\dfrac{1}{-2-i}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1-i & i\end{pmatrix}$.

Mettons $\dfrac{1}{-2-i}$ sous forme algébrique.

$$\frac{1}{-2-i}=\frac{-2+i}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{-2+i}{2^2-i^2}=-\frac{2}{5}+\frac{i}{5}$$

Ainsi, $C^{-1}=\left(-\dfrac{2}{5}+\dfrac{i}{5}\right)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1-i & i\end{pmatrix}$.

Puisque $I_3\times I_3=I_3$, D est inversible et $D^{-1}=I_3$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

$c_{1,1}$ est également au produit matriciel de la première ligne de A et de la première colonne de B. Or, la première ligne de A étant nulle, on a $c_{1,1} = 0$. La matrice A ne peut donc pas être inversible : si tel était le cas, il existerait une matrice B telle que $AB = I_n$. Or, le coefficient $(1,1)$ de I_n vaut 1 et celui de AB vaut 0.

De la même manière, si la k-ième ligne de A est nulle, alors le coefficient (k,k) du produit AB est égal à 0. A fortiori, il est différent de 1 et un tel produit ne peut donc mener à la matrice identité.

On peut raisonner de même sur les colonnes : si la colonne k de la matrice B est nulle, alors le coefficient (k,k) du produit AB vaut 0 pour toute matrice A. Il ne vaut donc jamais 1 et ce produit n'est donc jamais égal à la matrice identité.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

En développant, on obtient

$$(I_n - B)(I_n + B + B^2 + \ldots + B^{p-1}) = I_n - B + B - B^2 + B^2 + \cdots - B^{p-1} + B^{p-1} + B^p.$$

Or, $B^p = 0_n$. Il en vient que

$$(I_n - B)(I_n + B + B^2 + \ldots + B^{p-1}) = I_n.$$

Ainsi, $I_n - B$ est inversible, d'inverse $(I_n + B + B^2 + \ldots + B^{p-1})$. On a par ailleurs

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A est donc nilpotente d'ordre 3. D'après la question précédente, $I_3 - A$ est inversible, d'inverse $I_3 + A + A_2$.

$$(I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

► Correction 25 – Voir l'énoncé

On a $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ P est donc inversible et $P^{-1} = Q$ et réciproquement.

Par ailleurs $B = PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

D'après un exercice précédent, pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

Or, puisque $B = PAQ$, on a donc, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par Q^{-1}

$$P^{-1}BQ^{-1} = P^{-1}PAQQ^{-1} = I_3AI_3 = A.$$

et donc $A = QBP$. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$A^n = QBP \times QBP \times \ldots \times QBP.$$

Les produits PQ se simplifient car ces matrices sont inverses l'une de l'autre. On a donc

$$A^n = QB^nP = \begin{pmatrix} 1 & 1-3^n & 1-3^n \\ 0 & 3^n & 3n-(-2)^n \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

► Correction 26 – Voir l'énoncé

On a les systèmes suivants.

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

► Correction 27 – Voir l'énoncé

On a $AB = I_3$. A est donc inversible et B est son inverse et réciproquement.

Le premier système se traduit par $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Le second système se traduit par $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

► Correction 28 – Voir l'énoncé

On a $f(-1) = a-b+c$, $f(1) = a+b+c$ et $f(2) = 4a+2b+c$. On cherche donc à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} a-b+c & = & 15 \\ a+b+c & = & 2 \\ 4a+2b+c & = & 6 \end{array}\right.$ soit $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

On a alors $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \beta & 3 & 0 \\ \gamma & 6 & \delta \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -\beta+\gamma+1 & \alpha+3 & \delta+2 \\ \beta+\gamma+1 & \alpha+9 & \delta+2 \\ 2\beta+\gamma+4 & 4\alpha+12 & \delta+8 \end{pmatrix}$.

Cette matrice doit valoir I_3. En utilisant la deuxième colonne, on a alors $\alpha = -3$. En utilisant la troisième colonne, on a $\delta = -2$.

Enfin, d'après la première colonne, on a $-\beta+\gamma+1 = 6$ (ne pas oublier qu'il y a un facteur $\frac{1}{6}$ devant la matrice) et $\beta+\gamma+1 = 0$. En additionnant ces deux équations, on a alors $2\gamma+2 = 6$ soit $\gamma = 2$. On a alors $\beta+2+1 = 0$ soit $\beta = -3$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -13/2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

► Correction 29 – Voir l'énoncé

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $M^2 + 8M + 6I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix} = M^3$.

Ainsi, $M^3 = M^2 + 8M + 6I_3$ d'où $M^3 - M^2 - 8M = 6I_3$ et donc $M \times \dfrac{1}{6}(M^2 - M - 8I_3) = I_3$.

M est donc inversible, d'inverse $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Le problème revient à résoudre le système $\begin{cases} 1 = a + b + c \\ -1 = a - b + c \\ 5 = 4a + 2b + c \end{cases}$ c'est-à-dire $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On a donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.