1. Cours : Limites de suite

1 Limite d'une suite

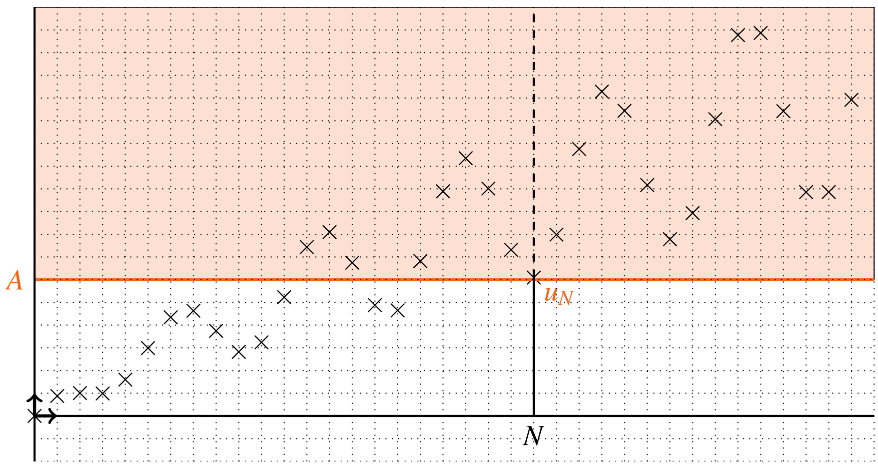
1.1 Limite infinie

Définition 1 — Limite infinie : Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, l'intervalle $]-\infty;A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant A$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

La première définition traduit le fait que la suite dépasse n'importe quel seuil donné sans jamais repasser en dessous par la suite. Attention, cela ne signifie pas que les termes de la suite sont de plus en plus grands ; une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.

Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous. On se fixe un seuil $A = 6$.



On remarque que $u_{12} \geqslant 6$. Cependant, certains des termes suivants sont inférieurs à 6 : pour qu'une suite tende vers $+\infty$, il faut que **tous les termes** à partir d'un certain rang soient au-dessus du seuil A, et ce, peu importe le seuil A. On voit ainsi que, pour tout $n \geqslant 22$, il semblerait qu'on ait bien $u_n \geqslant 6$.

Le raisonnement que nous venons de tenir pour $A = 6$ tient pour toutes les valeurs de A, aussi grandes soient-elles : la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Naturellement, plus la valeur de A est grande, plus la valeur à partir de laquelle tous les termes de la suite sont tous plus grands que A sera lointaine.

Il faut par ailleurs remarquer et insister **lourdement** sur le fait qu'une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante. Cette suite ici représentée en est un exemple. Il est également faux de dire qu'une suite qui est strictement croissante tend forcément vers $+\infty$.

■ **Exemple 1 :** Pour tout n, on pose $u_n = n^2$. u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. ■

Il y a une différence entre une suite qui tend vers $+\infty$ et une suite non majorée. : évidemment, toute suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée, puisque pour tout réel A, il y a des termes de la suite supérieurs à A.

La réciproque est en revanche fausse sans davantage d'hypothèse sur la suite. Considérons par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (1+(-1)^n)n$. La suite (u_n) n'est pas majorée : elle a des termes arbitrairement grands. Cependant, elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ puisqu'un terme sur deux de cette suite vaut 0. Elle ne reste donc pas supérieure à n'importe quel réel donné à partir d'un certain rang (elle est en particulier en dessous de 1 tous les termes impairs).

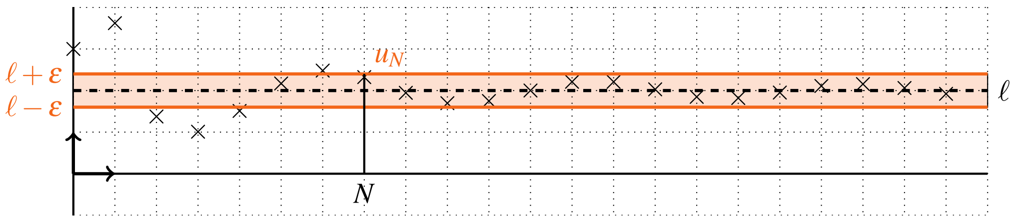
1.2 Limite finie : suite convergente

Définition 2 : Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

On dit que u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, dès que $n \geqslant N$, on a $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

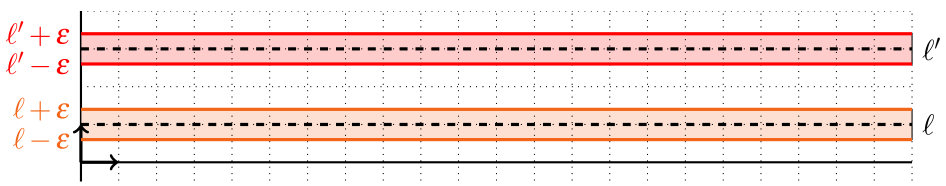
Illustration : On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous.



La suite (u_n) semble tendre vers 2. Par exemple, pour $\varepsilon = 0{,}4$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$, soit $]1{,}6; 2{,}4[$ à partir du rang 7. Ce raisonnement vaut pour n'importe quel ε, aussi petit soit-il.

Propriété 1 : Soit (u_n) une suite réelle, ℓ et ℓ' deux réels. Si u_n tend vers ℓ et u_n tend vers ℓ' lorsque n tend vers $+\infty$, alors $\ell = \ell'$.

L'idée de la démonstration suivante est assez simple : elle consiste à montrer l'impossibilité d'être à la fois très proche de ℓ et de ℓ' si ces deux valeurs sont différentes. Pour cela, on va trouver une valeur de ε pour lesquels les intervalles $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ et $]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$ sont disjoints, ce qui contredira le fait que ces deux intervalles doivent tous deux contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Démonstration 1 : Supposons que $\ell \neq \ell'$, par exemple que $\ell > \ell'$. Soit ε un réel strictement positif.

- Puisque u_n tend vers ℓ en $+\infty$, l'intervalle $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. En particulier, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à $\ell-\varepsilon$
- Puisque u_n tend vers ℓ' en $+\infty$, l'intervalle $]\ell'-\varepsilon, \ell'+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, à partir d'un certain rang N', tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à $\ell'+\varepsilon$

Ainsi, à partir de la plus grande valeur entre N et N', les termes de la suite sont à la fois strictement supérieurs à $\ell-\varepsilon$ et strictement inférieurs à $\ell'+\varepsilon$. Autrement dit, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell-\varepsilon < u_n < \ell'+\varepsilon$.

Puisque cela vaut pour n'importe quelle valeur de ε, cela reste vrai en prenant par exemple $\varepsilon = \dfrac{\ell-\ell'}{2}$ (ce réel est bien strictement positif puisque $\ell > \ell'$).

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant \max(N,N')$, on a $\ell - \dfrac{\ell-\ell'}{2} < u_n < \ell' + \dfrac{\ell-\ell'}{2}$ et donc $\dfrac{\ell+\ell'}{2} < u_n < \dfrac{\ell+\ell'}{2}$ et en particulier $\dfrac{\ell+\ell'}{2} < \dfrac{\ell+\ell'}{2}$. C'est impossible : notre supposition de départ, qui était que $\ell \neq \ell'$ était donc erroné. Par conséquent, on a $\ell = \ell'$.

Le raisonnement que nous venons d'appliquer, qui consiste, en supposant une proposition vraie, à aboutir à une conclusion fausse et à en déduire que la proposition de départ devait donc également être fausse s'appelle le **raisonnement par l'absurde**. □

Cette propriété nous permet de définir sans ambiguïté la notion de limite d'une suite.

Définition 3 — Limite finie, suite convergente : Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

Si u_n tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$, on dit que ℓ est **LA** *limite* de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$. On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Une suite qui admet une limite finie est dite *convergente*.

Dans le cas contraire, on parle de suite *divergente* : cela regroupe les suites qui ont une limite infinie mais aussi les suites qui n'admettent pas de limite.

■ **Exemple 2 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{4n+5}$.
Pour se faire une idée de la limite, il est possible de calculer quelques termes de la suite.

Pour le prouver formellement, repassons pas la définition : pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, il faut trouver un rang N à partir duquel, pour tout $n > N$, on ait $u_n \in \left]\dfrac{1}{2}-\varepsilon ; \dfrac{1}{2}+\varepsilon\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \frac{1}{2} =$$

Cette quantité est négative. On a alors

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| =$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$. Ainsi,

$$\left|u_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n >$, on a $u_n \in \left]\frac{1}{2} - \varepsilon ; \frac{1}{2} + \varepsilon\right[$.

La suite (u_n) est bien convergente et sa limite vaut $\frac{1}{2}$.

Par exemple, si $\varepsilon = 0.001$, on a $\frac{3}{8\varepsilon} - \frac{5}{4} = 374.99$.

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 375$, on a $0.499 \leqslant u_n \leqslant 0.501$. ■

Nous verrons très bientôt des résultats qui nous permettront de passer outre cet aspect formel. Même si une telle démonstration de la convergence d'une suite n'est que rarement demandée en classe de terminale, comprendre les bases de ce raisonnement constituera un avantage certain dans les études supérieures.

Propriété 2 : Si une suite est convergente, elle est bornée. Par contraposée, si une suite n'est pas bornée, elle ne peut être convergente.

La réciproque est fausse : toute suite bornée n'est pas convergente.

Par exemple, pour tout n, prenons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$. En revanche, elle n'est pas convergente : ses termes de rangs pairs valent tous 1 et ses termes de rangs impairs valent tous -1. Une limite étant unique, la suite (u_n) ne peut être convergente.

1.3 Limites de suites usuelles

Propriété 3 : Les limites suivantes sont à connaître.

$$\lim_{n\to+\infty} n = \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} =$$

Plus généralement, pour tout entier naturel non nul α, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} =$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} =$$

Les suites $(\cos(n))$, $(\sin(n))$ et $((-1)^n)$ n'admettent quant à elles pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2 Opérations sur les limites

2.1 Limite de la somme

Propriété 4 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels ℓ_1 et ℓ_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	ℓ_1	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$						

Démonstration 2 : Bien qu'elles ne soient pas explicitement au programme, les démonstrations de ces résultats permettent de manipuler et comprendre les définitions des différentes limites de suite.

On s'intéresse ici au cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Les autres démonstrations pourront être traitées en guise d'exercice.

□

■ **Exemple 3 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n^2 + \mathrm{e}^{-n} - 4$.

■

Les cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ n'obéissent à aucune règle précise : il faut les traiter séparément. L'expression "Forme indéterminée" ne signifie pas qu'il est impossible de déterminer une éventuelle limite : il précise simplement qu'il nous est impossible d'appliquer directement les règles de calcul sur les limites de suite.

La limite de la somme peut alors aussi bien être 0, 1, $+\infty$, $-\infty$ ou peut même ne pas exister du tout !

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = n$, $v_n = 1 - n$ et $w_n = n^2 + n$.

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$.

Il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite $(u_n + v_n)$ avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel n, $u_n + v_n =$ et on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n =$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$.

Là encore, il n'est pas possible de conclure sur l'éventuelle limite de la suite $(v_n + w_n)$ avec ces seules informations.

Or, pour tout entier naturel n, $v_n + w_n =$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n+w_n) =$.

Nous avons là deux exemples où la somme de limites "$\infty - \infty$" produit des résultats totalement différents. ■

2.2 Limite du produit

Propriété 5 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels ℓ_1 et ℓ_2.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	$\ell_1 \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ_2	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n)$				

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 5 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \left(\frac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.

■

■ **Exemple 6 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \frac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $u_n v_n =$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n =$. Par ailleurs, pour tout entier naturel non nul n, $u_n w_n =$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$.

On voit sur cet exemple que le produit d'une limite infinie et d'une limite qui vaut 0 peut aboutir à plusieurs résultats différents. ■

2.3 Limite du quotient

Définition 4 : Soit (u_n) une suite réelle et a un réel.

- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^+$ si u_n tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \geqslant a$.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a^-$ si u_n tend vers a lorsque n tend vers $+\infty$ ET s'il existe un entier N tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \leqslant a$.

■ **Exemple 7 :** On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Or, pour tout entier naturel non nul n, $1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$.

On pourra alors écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$. ■

Cette petite subtilité nous est notamment utile lorsque l'on étudie la limite de quotients dans certains cas...

Propriété 6 : On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels l_1 et l_2, avec $l_2 \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ_1	ℓ_1	$\ell_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell_2 \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	l_2, 0^+ ou 0^-	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$						

r.s. : Règle des signes

■ **Exemple 8 :** Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{3+n}$.

■

■ **Exemple 9 :** Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \dfrac{1-n}{\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n}}$.

■

3 Formes indéterminées

3.1 Factorisation par le terme dominant

■ **Exemple 10 :** Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = 4n^2+2n+3$ et $v_n = 3n^2+7n-1$.

On cherche à déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$. Or, en utilisant les règles sur les calculs de limites, on trouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. On se retrouve dans le cas "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Il est toutefois possible de factoriser u_n et v_n par leur terme de plus haut degré (ici, n^2 dans les deux cas).

■

Il est à noter qu'avant de se lancer dans la factorisation par le terme dominant, il faut s'assurer que celle-ci est nécessaire : en voulant lever une forme indéterminée inexistante, on peut très vite se retrouver à en créer une involontairement.

3.2 Quantité conjuguée

La partie suivante s'intéresse aux formes indéterminées faisant intervenir des racines carrées.

Propriété 7 : Soit (u_n) une suite réelle positive et a un réel positif.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = +\infty$.

■ **Exemple 11 :** Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}}{n}$.

■

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

L'objectif est ici d'utiliser l'identité remarquable $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$. En particulier, dans le cas des racines carrées, cela entraîne que, pour tous réels strictement positifs a et b,

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = \sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2 = a-b.$$

■ **Exemple 12 :** Pour tout entier naturel non nul n, on note $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$. Il s'agit de la différence de deux termes qui tendent vers $+\infty$, il n'est pas possible de conclure directement sur sa limite.

■