

1. Cours : Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue positive

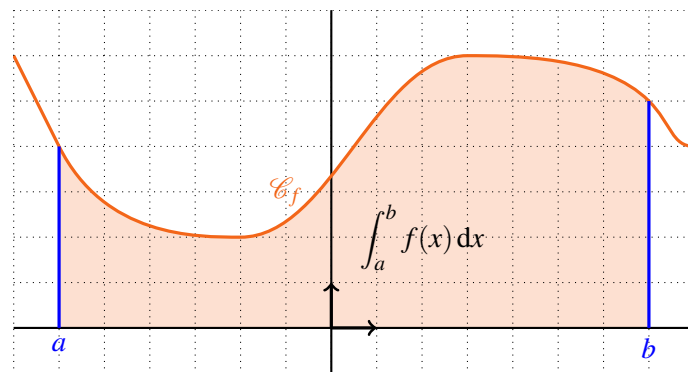
Définition 1 : On considère un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit $I(1;0)$, $K(1;1)$ et $J(0;1)$.

On appelle unité d'aire du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'aire du rectangle $OIKJ$.

Dans tout ce chapitre, on se place désormais dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 2 : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On appelle \mathcal{C}_f la courbe de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'aire délimitée par \mathcal{C}_f , par l'axe des abscisses et par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unité d'aires se note $\int_a^b f(x) dx$ et s'appelle l'intégrale de $f(x)$ pour x allant de a à b .

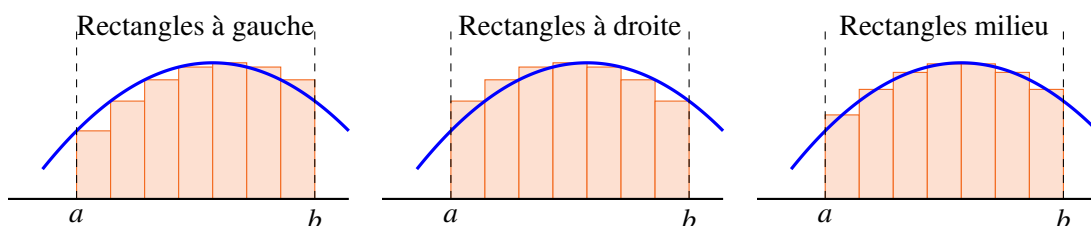


■ **Exemple 1 :** Il est possible d'encadrer l'aire sous la courbe en utilisant le quadrillage.

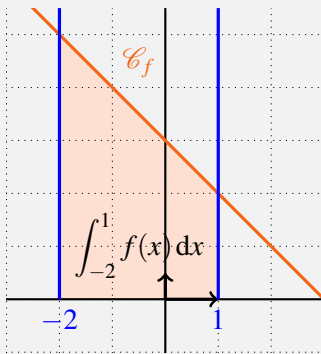
Ici, l'aire sous la courbe est composée de 44 carreaux entiers, l'intégrale est donc supérieure ou égale à 44. Par ailleurs, si on ajoute les 17 carreaux que traverse la courbe, on a alors que l'intégrale est inférieure à 61.

$$\text{On a alors } 44 \leq \int_a^b f(x) dx \leq 61.$$

La notation de l'intégrale est due à Leibniz : pour calculer l'aire sous une courbe, Leibniz l'approchait par des rectangles de largeur de plus en plus petite. La hauteur des rectangles en x était $f(x)$ et leur largeur, notée dx , se rapprochait de 0 : on faisait donc la somme des $f(x) dx$ entre a et b . Le symbole \int de l'intégrale n'est autre qu'un S allongé qui signifie justement "somme".



■ **Exemple 2 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = 6 - 2x$. On cherche la valeur de $\int_{-2}^1 f(x) dx$.



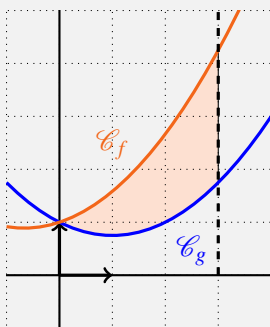
Propriété 1 : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.

On suppose que pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geq g(x)$.

L'aire délimitée par les courbes de f et de g ainsi les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut $\int_a^b (f - g)(x) dx$.

Il est alors possible de déterminer l'aire entre deux courbes sans même savoir l'aire sous chacune de ces deux courbes.

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x , on pose $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 1$.
On souhaite déterminer l'aire entre les courbes de f et g entre les abscisses 0 et 3.



2 Intégrale et primitives

2.1 Théorème fondamental

Théorème 1 : f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

En particulier, toute fonction continue positive admet une primitive.

Démonstration 2 : On se contente de démontrer le cas où f est strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$.

□

Définition 3 : Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

On note également $[F(x)]_a^b$.

Démonstration 3 : On considère la fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. On rappelle que cette fonction est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a .

□

Cette quantité ne dépend donc pas de la primitive choisie !

■ **Exemple 4 :** On cherche à calculer $\int_1^5 x^2 dx$.

■

2.2 Généralisation aux fonctions de signe quelconque

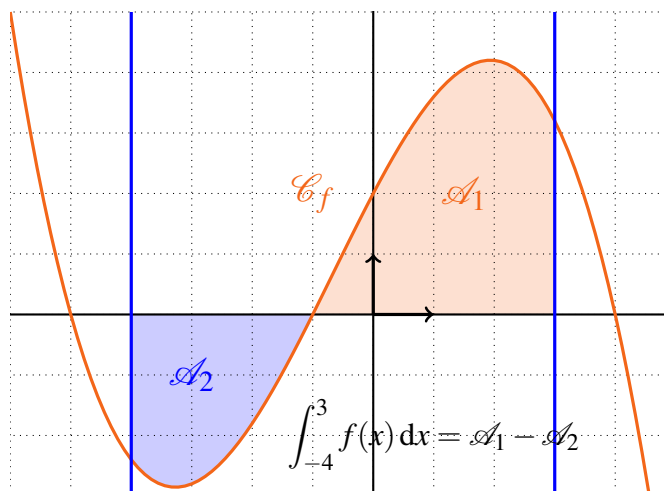
Définition 4 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f sur cet intervalle. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

■ **Exemple 5 :** On cherche à calculer $\int_{-2}^1 x^3 dx$.

■

La quantité ici est négative, il n'est pas possible de l'interpréter directement comme une aire. Il s'agit en réalité de la différence de l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses lorsque la courbe est au-dessus de cet axe et de cette même aire lorsque la courbe est cette fois en-dessous de l'axe des abscisses.



2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriété 2 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et c un réel de l'intervalle $[a, b]$. Soit λ réel.

- $\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$;
- $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$;
- **(Relation de Chasles)** $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.

La relation de Chasles permet notamment de calculer la valeur d'intégrales de fonctions définies par morceaux.

■ **Exemple 6 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \text{ si } x < 0 \\ x^3 + 1 & , \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$.

La fonction f est continue sur $[-2; 3]$. En effet, le seul souci en éventuel se situe en 0.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^2 + 1 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^3 + 1 = 1$ et $f(0) = 1$. Ainsi,

$$\int_{-2}^3 f(x) dx =$$

Or, une primitive de $x \mapsto x^2 + 1$ sur $[-2, 0]$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3} + x$ et une primitive de $x \mapsto x^3 + 1$ sur $[0; 3]$ est $x \mapsto \frac{x^4}{4} + x$. Finalement,

$$\int_{-2}^3 f(t) dt = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_0^3 = \frac{14}{3} + \frac{93}{4} = \frac{335}{12}.$$

■

Propriété 3 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Si pour tout réel x dans $[a, b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Cette propriété est souvent utilisée dans le sens contraposé : si f est une fonction continue et positive d'intégrale nulle, alors f est la fonction nulle.

Propriété 4 : Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout réel x , $f(x) \leq g(x)$.

On a alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Démonstration 4 : La fonction $g - f$ est continue et positive sur $[a, b]$.

Ainsi, d'après la propriété précédente, $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$.

Or, $\int_a^b (g - f)(x) dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$. On a donc $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. \square

■ **Exemple 7 :** Soit f une fonction continue sur $[-2, 5]$ telle que pour tout $x \in [-2, 5]$, on a $x \leq f(x) \leq 7$.

2.4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition 5 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel

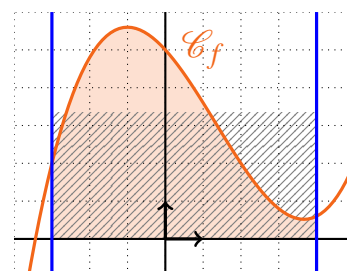
$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

■ **Exemple 8 :** La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ sur $[1; 4]$ vaut

$$\frac{1}{4-1} \int_1^4 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_1^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{4^3}{3} + 4 - \frac{1^3}{3} - 1 \right) = 24.$$

Pourquoi le nom de valeur moyenne ? Si l'on note M la valeur moyenne de la fonction f , alors l'aire sous la courbe de f entre a et b correspond à l'aire du rectangle ayant pour longueur $b - a$ et pour hauteur M .

Dans le cas ci-contre, le rectangle hachuré (qui a pour hauteur la valeur moyenne de la fonction représentée) et le domaine rempli en rouge ont la même aire.



3 Intégration par parties

Propriété 5 : Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ dont la dérivée est continue sur cet intervalle. Alors

$$\int_a^b (uv')(x) dx = [uv]_a^b - \int_a^b (u'v)(x) dx.$$

Démonstration 5 : uv est dérivable sur $[a, b]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. D'après la formule de dérivée d'un produit, $(uv)' = u'v + uv'$, c'est-à-dire $uv' = (uv)' - u'v$. En intégrant cette égalité entre a et b , on obtient le résultat voulu. \square

■ **Exemple 9 :** On souhaite calculer $\int_0^1 xe^{2x} dx$.

L'intégration par parties est pour la première fois abordée par Brook Taylor en 1715, dans son livre *Methodus Incrementorum directa et inversa*. Dans cet ouvrage, Taylor utilise la notation de Newton : les dérivées sont symbolisées par un point et les intégrales par un rectangle qui entoure la fonction.

