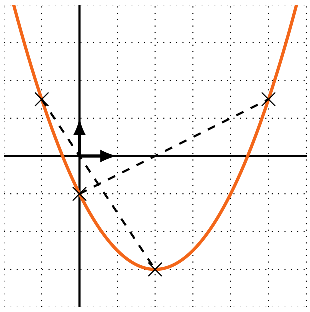
1. Cours : Convexité

1 Convexité, concavité

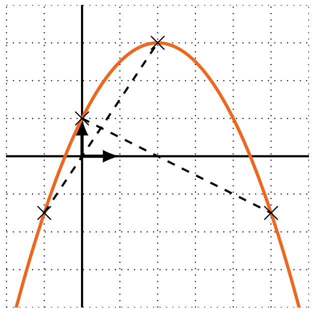
Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- On dit que f est *convexe* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a<b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.
- On dit que f est *concave* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a<b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.

Fonction convexe

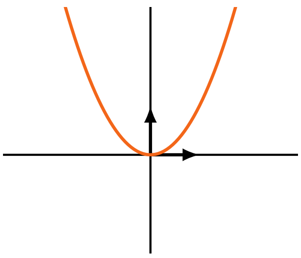


Fonction concave

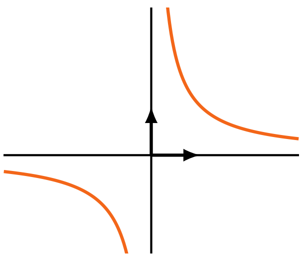


Rappel de certaines courbes représentatives

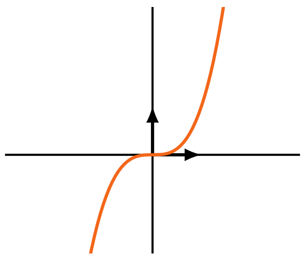
$x \mapsto x^2$



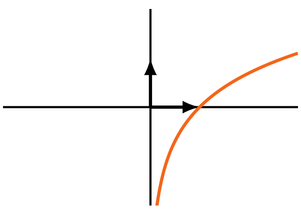
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



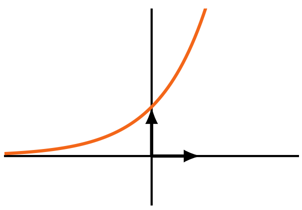
$x \mapsto x^3$



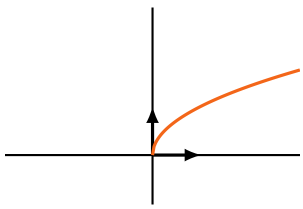
$x \mapsto \ln(x)$



$x \mapsto \mathrm{e}^x$

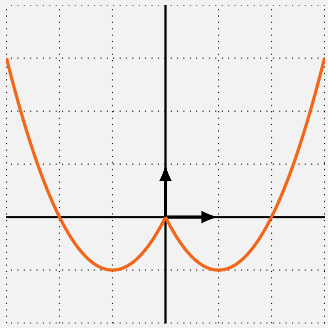


$x \mapsto \sqrt{x}$



■ **Exemple 1 :** Les fonction $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto x^3$ est concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$. ■

■ **Exemple 2 :** Attention : on parle bien de convexité sur un intervalle. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ que f est aussi convexe sur $[a,c]$.



La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[0;3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3,3]$. ■

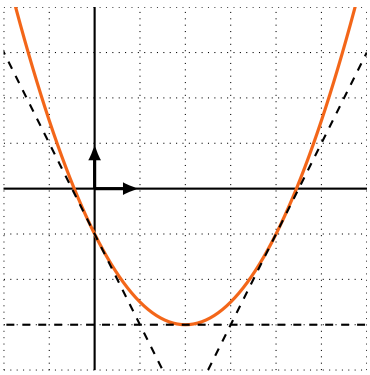
2 Fonctions dérivables

2.1 Caractérisation des fonctions convexes

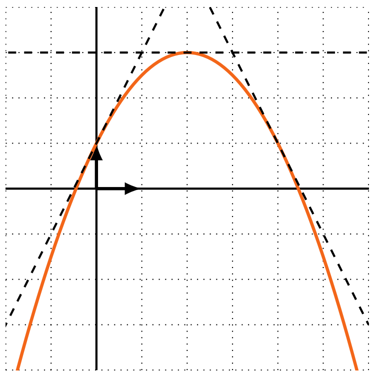
Propriété 1 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- f est convexe sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



■ **Exemple 3 :** Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit a un réel.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
- La tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire $y = 2ax - 2a^2 + a^2$ ou encore $y = 2ax - a^2$.

- Pour tout réel x,

$$f(x)-(2ax-a^2)=x^2-2ax+a^2=(x-a)^2\geqslant 0.$$

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de sa tangente à l'abscisse a, et ce, peu importe le réel a choisi. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

■

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

De cette propriété vient naturellement la suivante...

Propriété 3 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$.
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f''(x)\leqslant 0$.

L'étude de la convexité d'une fonction revient à l'étude de signe de sa dérivée seconde (si celle-ci existe, bien entendu).

Démonstration 1 : Si $f''\geqslant 0$, alors f est convexe : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$.

Soit $a\in I$. La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Pour tout $x\in I$, posons alors $g(x)=f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))$. g est deux fois dérivable sur I, et pour tout $x\in I$, on $g'(x)=f'(x)-f'(a)$ et $g''(x)=f''(x)$.

Ainsi, puisque pour tout $x\in I$, $f''(x)\geqslant 0$, on a aussi $g''(x)\geqslant 0$. g' est donc croissante sur I. Or, $g'(a)=0$. Résumons toutes ces informations dans un tableau.

x		a	
$g''(x)$		$+$	
g'	$\nearrow$	0	$\nearrow$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$
$g(x)$	$+$	0	$+$

Finalement, pour tout $x\in I$, $g(x)\geqslant 0$, ce qui signifie que $f(x)\geqslant f'(a)(x-a)+f(a)$: la courbe de f est au-dessus de la tangente à cette courbe au point d'abscisse a. □

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel pair $n \geqslant 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En effet, la dérivée seconde de cette fonction est la fonction $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$.
Or, n étant pair, $n-2$ l'est aussi, et pour tout réel x, on a donc $x^{n-2} \geqslant 0$. ■

■ **Exemple 5 :** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$, qui est positif si et seulement si x l'est aussi. ■

2.2 Point d'inflexion

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

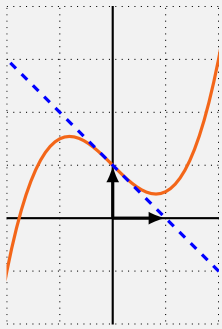
Un *point d'inflexion* est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

Propriété 4 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si f présente un point d'inflexion à l'abscisse a, alors $f''(a) = 0$.
- Réciproquement, si $f''(a) = 0$ et f'' **change de signe** en a, alors f présente un point d'inflexion en a.

Cela rappelle naturellement le cas des extremum locaux. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Cependant, si $f'(a) = 0$, f admet un extremum local en a seulement si f' change de signe en a.

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - x + 1$.



f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 1$ et $f''(x) = 3x$.

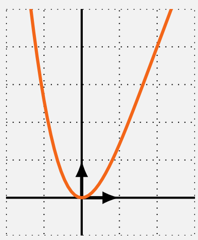
Ainsi, $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 0$.

f est donc concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

La courbe de f présente un point d'inflexion à l'abscisse 0. ■

Attention : l'annulation de la dérivée seconde n'est pas une condition suffisante de présence d'un point d'inflexion !

■ **Exemple 7 :** Pour tout réel x, on pose $g(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2$.



La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$g'(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$ et $g''(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.
Ainsi, pour tout réel x, $g''(x) \geqslant 0$. g est donc convexe sur $\mathbb{R}$.
Puisqu'il n'y a pas de changement de convexité, g ne présente pas de point d'inflexion, et ce, même si $g''(2) = 0$. ■

3 Inégalités de convexité

3.1 Inégalités de milieux

Propriété 5 : Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

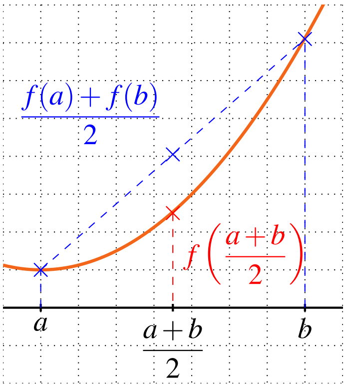
Démonstration 2 : On considère les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.

Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\left(\frac{a+b}{2}\right),\frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$

Or, la fonction f étant convexe sur I, le segment $[AB]$ se situe au-dessus de la courbe représentative de f. En particulier,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



□

■ **Exemple 8 :** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b, $\exp\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{e^a+e^b}{2}$. ■

Propriété 6 : Soit f une fonction concave sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

■ **Exemple 9 :** La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

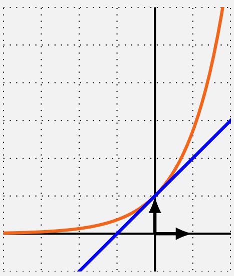
Ainsi, pour tous réels a et b positifs, $\sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqslant \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. ■

3.2 Inégalités avec les tangentes

La convexité des fonctions dérivables permet d'établir des inégalités en utilisant les équations des tangentes.

■ **Exemple 10 :** Montrons que pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

La tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x-0)+\exp(0)$, c'est-à-dire $y = x+1$.
Puisque la fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$, la courbe de la fonction exponentielle est donc au-dessus de toutes ses tangentes et donc, en particulier, la tangente au point d'abscisse 0. On a donc, pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

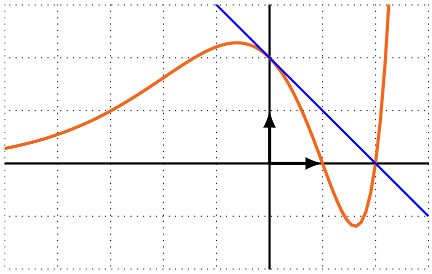


■

Convexité

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la fonction f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous. On a également tracé la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.



1. Déterminer graphiquement $f'(0)$.
2. Donner une équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer graphiquement le signe de $f'(-3)$.
4. La fonction f semble-t-elle convexe ou concave sur $[-5\,;-2]$? sur $[-2\,;1]$? sur $[1\,;2]$?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		0		3
f	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

On sait de plus que f est convexe sur $[-5;-2]$ puis concave sur $[-2;3]$. Tracer une courbe représentative compatible avec ces données.

► Exercice 3 – Voir le corrigé

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$ dans ce repère.

1. **Cas particulier** : On considère les points A et B de coordonnées respectives $(-2;4)$ et $(3;9)$.
   (a) Justifier que ces points appartiennent bien à la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) Vérifier que l'équation réduite de la droite (AB) est $y = x+6$.
   (c) Étudier le signe de $x^2-(x+6)$ sur l'intervalle $[-2;3]$ et conclure.
2. **Cas général** Soit a et b deux réels avec $a<b$, $A(a\,,a^2)$ et $B(b\,,b^2)$ deux points de la courbe $\mathscr{C}$.
   (a) Montrer que l'équation réduite de la droite (AB) est $y=(a+b)x-ab$.
   (b) Étudier le signe de $x^2-((a+b)x-ab)$ sur $[a;b]$ et conclure.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

En vous inspirant du cas général de l'exercice précédent, montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]0;+\infty[$.

Convexité des fonctions dérivables

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit $a > 0$.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif x,
$$f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) = \frac{(a-x)^2}{a^2x}.$$
2. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?

▶ Exercice 6 (Polynésie 2022) – Voir le corrigé

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2;2]$. Le tableau de variations de la fonction f', dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2;2]$ est donné par :

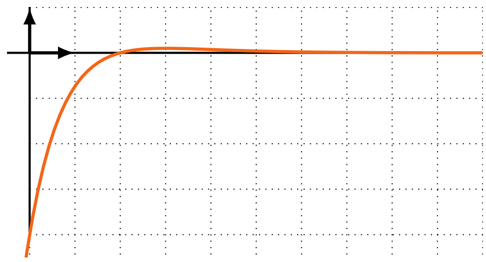
x	2	-1	0	2
f'	1 ↘	0 ↘	-2 ↗	-1

Parmi les affirmations suivantes, laquelle est exacte ?

a. f est convexe sur $[-2;-1]$.
b. f est concave sur $[0;1]$.
c. f est convexe sur $[-1;2]$.
d. f est concave sur $[-2;0]$.

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

On donne la représentation graphique de la **fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Parmi les affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

- f est concave sur $]0;+\infty[$.
- f est convexe sur $]0;+\infty[$.
- f est convexe sur $[0;2]$.
- f est convexe sur $[2;+\infty[$.

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est également convexe sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

Montrer que la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1$

1. Pour tout réel x, déterminer $f''(x)$.
2. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe.
3. La fonction f possède-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3x + 1$. La fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Soit a, b, c et d des réels avec $a \neq 0$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet un point d'inflexion.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
2. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x
$$f''(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$
5. Construire le tableau de signes de f'' et en déduire les intervalles lesquels f est convexe/concave.
6. Donner les équations des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et -1.
7. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de f ainsi que ses tangentes aux points d'abscisse 1 et -1.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Justifier que pour tout réel x, $0 < f(x) < 1$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,
$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})^3}.$$
6. En déduire les intervalles sur lesquels f est convexe/concave.

► Exercice 15 (Amérique du Nord 2022) – Voir le corrigé

Vrai ou faux ? On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^x(1-x^2)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Soit f une fonction dérivable, convexe et croissante sur un intervalle $[a;+\infty[$.
Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Inégalités de convexité

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $[0;+\infty[$.

1. Pour tout réel $x > 0$, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$.
2. f est-elle convexe ou concave sur $]0;+\infty[$?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
4. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$. Représenter graphiquement cette inégalité.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$.

1. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $[0;+\infty[$?
2. En utilisant la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0, montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
3. Quelle inégalité a-t-on redémontré ?

► Exercice 19 – Voir le corrigé

En utilisant la tangente à la courbe de la fonction ln en 1, montrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x-1$.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln(x))^2$.

1. Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe/concave.
2. En utilisant une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e, montrer que pour tout réel x dans $]0;e]$,

$$(\ln(x))^2 \geqslant \frac{2}{e}x - 1.$$

► Exercice 21 – Voir le corrigé

En utilisant l'inégalité des milieux appliqué à la fonction ln, montrer que pour tous réels strictement positif a et b, on a

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité arithmético-géométrique.

► Exercice 22 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Montrer que la fonction f est croissante sur D.
3. Montrer que la fonction f est concave sur D.
4. En utilisant l'inégalité des points milieux, montrer que pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercices de synthèse

► Exercice 23 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal sera notée $\mathscr{C}_f$.

1. Construire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On y inclura les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x,

$$f''(x) = (16x^2 - 32x + 12)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$

3. En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des points d'inflexion ?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en chacun des points d'inflexion.
5. Montrer que pour tout réel x, $f(2-x) = f(x)$. Comment interpréter cette propriété ?
6. Représenter l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.

► Exercice 24 (Centres étrangers 2022) – Voir le corrigé

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. (a) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0;+\infty[$ et les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) \in]0;1[$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \geqslant x.$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

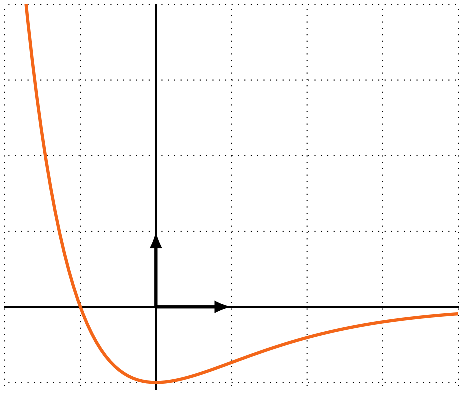
$$u_{n+1} = f(u_n).$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n < 1$.
   (b) Déduire de la question **3.c.** la croissance de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

▶ Exercice 25 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

Partie A

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



A l'aide de cette courbe, donner, en justifiant

1. Le sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$;
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

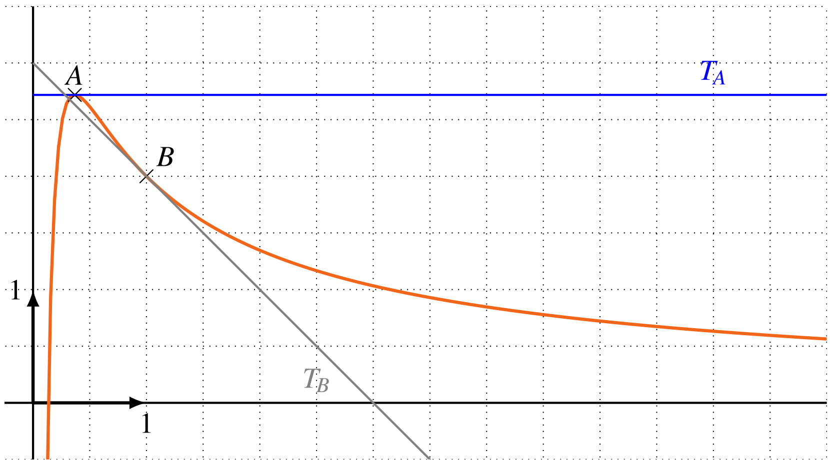
1. Montrer que, pour tout nombre réel x,
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2}{\mathrm{e}^x}.$$
En déduire la limite de f en $+\infty$.
Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
(b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
(c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f. Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

► Exercice 26 (Sujet zéro 2021) – Voir le corrigé

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe C_f au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\,;e\right)$;
- la tangente T_B à la courbe C_f au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;3)$.



Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ et $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie B

On suppose maintenant que la fonction f est définie pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe C_f passe par les points A et B et coupe l'axe des abscisses en un unique point que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$
$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
5. On note f'' la dérivée seconde de f.
   (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$,
   $$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$
   (b) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

3. Corrigés

Convexité

▶ Correction 1 – Voir l'énoncé

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f à l'abscisse 0. Ce coefficient directeur vaut -1. Ainsi, $f'(0) = -1$.

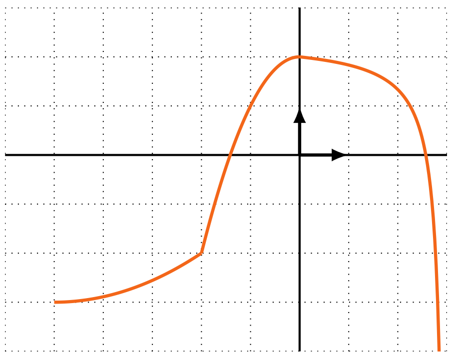
La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur -1 et pour ordonnée à l'origine 2. L'équation réduite de cette tangente est donc $y = -x+2$.

f est dérivable et croissante sur $[2;4]$. Ainsi, pour tout réel $x \in [2;4]$, $f'(x) \geqslant 0$. En particulier, $f'(3) \geqslant 0$.

La fonction f semble convexe $[-5\,;\,-2]$, concave sur $[-2\,;\,1]$ et convexe sur $[1\,;2]$.

▶ Correction 2 – Voir l'énoncé

La fonction suivante convient :



▶ Correction 3 – Voir l'énoncé

1. (a) Puisque $(-2)^2 = 4$ et que $3^2 = 9$, les points A et B appartiennent bien à la courbe $\mathscr{C}$.
   (b) Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $\dfrac{9-4}{3-(-2)}$, c'est-à-dire 1. L'équation réduite de la droite (AB) est donc de la forme $y = x+p$. Par ailleurs, le point A appartient à cette droite, ses coordonnées en vérifient donc l'équation. Ainsi, $4 = -2+p$ et donc $p = 6$. L'équation réduite de la droite (AB) est $y = x+6$.
   (c) $x^2-(x+6)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont -2 et 3 (ce sont les abscisses des points A et B, qui sont les points d'intersection de la courbe de f et de la droite (AB)). Ainsi, $x^2-(x+6)$ est négatif pour $x \in [-2;3]$, ce qui signifie que sur cet intervalle, $x^2 \leqslant x+6$: la courbe de la fonction f se situe sous la droite (AB).
2. (a) Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $\dfrac{b^2-a^2}{b-a} = \dfrac{(b-a)(b+a)}{b-a} = a+b$. L'équation réduite de la droite (AB) est donc de la forme $y = (a+b)x+p$. Par ailleurs, le point A appartient à cette droite, ses coordonnées en vérifient donc l'équation. Ainsi, $a^2 = (a+b)a+p$ et donc $p = a^2-a(a+b) = -ab$. L'équation réduite de la droite (AB) est $y = (a+b)x-ab$.

(b) $x^2-((a+b)x-ab)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont a et b (ce sont les abscisses des points A et B, qui sont les points d'intersection de la courbe de f et de(AB)).
Ces racines peuvent par ailleurs se trouver en utilisant les relations entre coefficients et racines. Ainsi, $x^2-((a+b)x-ab)$ est négatif pour $x\in[a;b]$, ce qui signifie que sur cet intervalle, $x^2\leqslant(a+b)x-ab$: la courbe de la fonction f se situe sous la droite (AB). Ceci valant peu importe les valeurs de a et b, on trouve bien que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

▶ Correction 4 – Voir l'énoncé

Soit a et b deux réels tels que $0<a<b$. On considère les points $A\left(a;\dfrac{1}{a}\right)$ et $B\left(b;\dfrac{1}{b}\right)$. Ces points se trouvent sur la courbe de la fonction inverse.

Le coefficient directeur de la droite (AB) vaut $\dfrac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}$, c'est-à-dire $\dfrac{(a-b)(ab)}{b-a}$ et donc vaut $-\dfrac{1}{ab}$. L'équation réduite de la droite (AB) est donc de la forme $y=-\dfrac{1}{ab}x+p$. Par ailleurs, le point A appartient à cette droite, ses coordonnées en vérifient donc l'équation. Ainsi, $\dfrac{1}{a}=-\dfrac{a}{ab}+p$ et donc $p=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$. L'équation réduite de la droite (AB) est $y=-\dfrac{1}{ab}x+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.
Soit donc $x\in[a;b]$. On a

$$\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{ab}{xab}+\frac{x^2}{xab}-\frac{bx}{xab}-\frac{ax}{xab}=\frac{x^2-(a+b)x+ab}{xab}$$

Or, $xab>0$. De plus, $x^2-((a+b)x-ab)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont a et b (ce sont les abscisses des points A et B, qui sont les points d'intersection de la courbe de la fonction inverse et de la droite (AB)). Ces racines peuvent par ailleurs se trouver en utilisant les relations entre coefficients et racines. Ainsi, $x^2-((a+b)x-ab)$ est négatif pour $x\in[a;b]$. On a donc $\dfrac{1}{x}\leqslant-\dfrac{1}{ab}x+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$: la courbe de la fonction inverse se situe sous la droite (AB), peu importe les valeurs de a et b. La fonction inverse est donc convexe sur $]0;+\infty[$.

Convexité des fonctions dérivables

▶ Correction 5 – Voir l'énoncé

Pour tout réel strictement positif x,

$$f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))=\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{x}+\frac{x}{a^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{a}$$

d'où

$$f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))=\frac{1}{x}+\frac{x}{a^2}-\frac{2}{a}=\frac{a^2}{xa^2}+\frac{x^2}{xa^2}-\frac{2ax}{xa^2}=\frac{a^2-2ax+x^2}{xa^2}=\frac{(a-x)^2}{xa^2}.$$

Or, puisque $x>0$, cette quantité est positive. Il en vient que pour tout $x>0$, $f(x)-(f'(a)(x-a)+f(a))\geqslant 0$ et donc que $f(x)\geqslant(f'(a)(x-a)+f(a)$. Cela se traduit par le fait que sur $]0;+\infty[$, la courbe de la fonction inverse est au-dessus de toutes ses tangentes : cette fonction est donc convexe sur $]0;+\infty[$.

▶ Correction 6 – Voir l'énoncé

Attention à bien remarquer qu'il s'agit des variations de la dérivée ! La fonction f' est décroissante sur $[-2;0]$. f est donc concave sur cet intervalle.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Attention à bien remarquer qu'il s'agit là de la représentation graphique de la dérivée ! La fonction f' est croissante sur $[0;2]$, f est donc convexe sur cet intervalle.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x, $f'(x) = a\mathrm{e}^{ax+b}$ et $f''(x) = a^2\mathrm{e}^{ax+b} \geqslant 0$. Cette fonction est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$. Il en vient que la fonction ln est concave sur $]0;+\infty[$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f'(x) = 9x^2 + 6x - 4$ et $f''(x) = 18x + 6$.

On a $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant -\frac{1}{3}$. f est donc convexe sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

La convexité de f change à l'abscisse $-\frac{1}{3}$. La courbe de f présente donc un point d'inflexion à cette abscisse.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 12x^2 + 4$ qui est strictement positif. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$. Sa convexité ne change pas, la courbe de f ne possède donc pas de point d'inflexion.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $f''(x) = 6ax + 2b$. Ainsi, f'' change de signe en $-\frac{b}{3a}$. f admet donc un point d'inflexion.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

1. La fonction $u : x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Or $f = \ln(u)$. f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = \frac{u'}{u}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.
2.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Soit x un réel,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(1+x^2) = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = e \Leftrightarrow x^2 = e - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{e-1} \text{ ou } x = -\sqrt{e-1}.$$

4. f' est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour

tout réel x,

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)2}.$$

Or, $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1;1]$. f est donc convexe sur $[-1;1]$ et concave sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$.

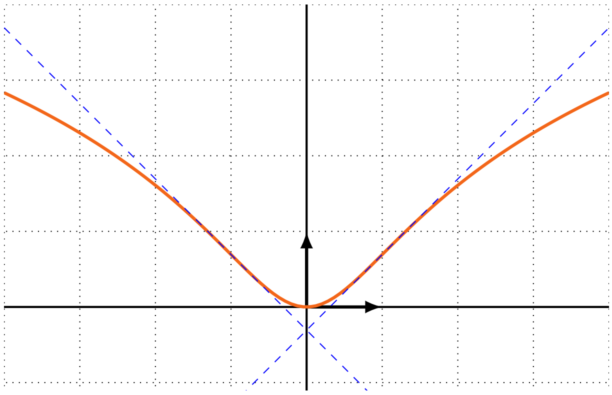
5. La tangente à la courbe de$f$ à l'abscisse -1 a pour équation réduite

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -(x+1) + \ln(2) = -x + \ln(2) - 1.$$

La tangente à la courbe de$f$ à l'abscisse 1 a pour équation réduite

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1 + \ln(2).$$

6. On trace la courbe de f dans un repère orthonormé.



▶ Correction 14 – Voir l'énoncé

1. D'une part, pour tout réel x, $1+\mathrm{e}^{-x} > 0$. Il en vient que $f(x) > 0$ comme quotient de deux nombres strictement positifs. Par ailleurs, pour tout réel x, $1+\mathrm{e}^{-x} > 1$, et donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, on a $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} < 1$.
2. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. En utilisant les règles d'opération sur les limites, on en conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3 + 3\mathrm{e}^{-x} = 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -x = \ln(\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3).$$

5. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout réel x, on pose $u(x) = (1+\mathrm{e}^{-x})^2$. On a alors, pour tout réel x, $u'(x) = 2 \times (-\mathrm{e}^{-x}) \times (1+\mathrm{e}^{-x})$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{-\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x})^2 - \mathrm{e}^{-x} \times (-2\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x}))}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4} = \frac{\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{-x})(-(1+\mathrm{e}^{-x}) + 2\mathrm{e}^{-x})}{(1+\mathrm{e}^{-x})^4}$$

et donc

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-x} - 1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})^3}.$$

6. Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et $(1+e^{-x})^3 > 0$. Ainsi, $f''(x)$ est du signe de $e^{-x}-1$. Or, $e^{-x}-1 \geqslant 0$ si et seulement si $e^{-x} \geqslant 1$ soit $-x \geqslant 0$ et donc $x \leqslant 0$. Ainsi, f est convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[+;+\infty[$.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $h'(x) = e^x(1-x^2)+e^x(-2x) = e^x(1-2x-x^2)$ puis $h''(x) = e^x(1-2x-x^2)+e^x(-2-2x) = e^x(-1-4x-x^2) = -e^x(x^2+4x+1)$. Pour tout réel x, $e^x > 0$. Par ailleurs, x^2+4x+1 est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut 12. Il admet donc deux racines réelles qui correspond aux changements de signes du polynôme x^2+4x+1. En particulier, la courbe de h admet deux points d'inflexion.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Puisque f est dérivable est strictement croissante sur $[a;+\infty[$, il existe donc un réel c dans cet intervalle tel que $f'(c) > 0$.

Or, f est convexe sur $[a;+\infty[$, la courbe de f est donc au-dessus de ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier au-dessus de la tangente en c.

Une équation réduite de cette tangente est de la forme $y = f'(c)x - cf'(c) + f(c)$.

Ainsi, pour tout $x \in [a;+\infty[$, on a $f(x) \geqslant f'(c)x - cf'(c) + f(c)$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f'(c)x - cf'(c) + f(c)) = +\infty$, et il en vient que, par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Inégalités de convexité

► Correction 17 – Voir l'énoncé

f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Puisque pour tout $x > 0$, $f''(x) \leqslant 0$, f est concave sur $]0;+\infty[$.

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x-1)+f(1) = \frac{1}{2}(x-1)+1 \quad \text{soit} \quad y = \frac{x}{2}+\frac{1}{2}.$$

Puisque f est concave, elle est sous toutes ses tangentes. Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et
$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$. Puisque $x \geqslant 0$, alors $f''(x) \geqslant 0$ et f est donc convexe sur $[0;+\infty[$.

De plus, la tangente à l'abscisse 0 à la courbe de f a pour équation $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ soit $y = 1+nx$.

f étant convexe sur $[0;+\infty[$, sa courbe se trouve au-dessus de toutes ses tangente sur cet intervalle. En particulier, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx.$$

On retrouve ici l'inégalité de Bernoulli.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

La tangente à la courbe du logarithme népérien à l'abscisse 1 a pour équation

$$y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x - 1.$$

Le logarithme népérien est concave : sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ qui est négative sur $]0;+\infty[$. Ainsi, la courbe représentative de la fonction ln se situe sous ses tangentes.

En particulier, pour tout réel x, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$ et $f''(x) = \dfrac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln(x) \times 1}{x^2} = \dfrac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$.

Or, $x^2 > 0$, $f''(x)$ est donc du signe de $2 - 2\ln(x)$. Soit donc $x > 0$, $2 - 2\ln(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\ln(x) \leqslant 1$ soit $x \leqslant e$. f est donc convexe sur $]0;e]$ et concave sur $[e;+\infty[$.

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse e a pour équation $y = f'(e)(x-e) + f(e)$.
Or, $f'(e) = \dfrac{2\ln(e)}{e} = \dfrac{2}{e}$ et $f(e) = \ln(e)^2 = 1$.
Ainsi, cette tangente a pour équation $y = \dfrac{2}{e}(x-e) + 1$ soit $y = \dfrac{2}{e}x - 2 + 1$ et donc $y = \dfrac{2}{e}x - 1$.

Or, f étant convexe sur $]0;e]$, la courbe représentative de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle, et en particulier, elle est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse e.
Ainsi, pour tout $x \in]0;e]$, on a $(\ln(x))^2 \geqslant \dfrac{2}{e}x - 1$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

La fonction ln étant concave sur $]0;+\infty[$, on a, pour tous réels a et b, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$.

En appliquant la fonction exponentielle, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \exp\left(\dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right)$.

Or, $\exp\left(\dfrac{\ln(a)}{2} + \dfrac{\ln(b)}{2}\right) = \exp(\ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{b})) = \exp(\ln(\sqrt{a})) \times \exp(\ln(\sqrt{b})) = \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Ainsi, pour tous réels strictement positif a et b, on a $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

f est définie sur l'ensemble des réels x tels que $ln(x) > 0$, c'est-à-dire $]1;+\infty[$.

f est dérivable sur $]1;+\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ qui est strictement positif sur l'intervalle étudié. f est donc strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

f' est dérivable sur $]1;+\infty[$. Pour tout réel $x > 1$, on pose $u(x) = x\ln(x)$. u est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$,

$$u'(x) = \ln(x) + 1.$$

Ainsi, f' est dérivable sur $]1;+\infty[$ et pour tout réel $x > 1$

$$f''(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{1 + ln(x)}{x^2\ln(x)^2}$$

Or, pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ et donc $f''(x) < 0$. f est donc concave sur $]1;+\infty[$.

f étant concave, on a, pour tous réels x et y strictement supérieurs à 1,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

soit

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geqslant \frac{\ln(\ln(x))+\ln(\ln(y))}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\ln(x)\times\ln(y)\right) = \ln\left(\sqrt{\ln(x)\ln(y)}\right).$$

En appliquant la fonction exponentielle qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient alors

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercices de synthèse

► Correction 23 – Voir l'énoncé

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^2+4x-\frac{3}{2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2+4x-\frac{3}{2}\right) = -\infty$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions dérivables. Pour tout réel x,

   $$f'(x) = (-4x+4)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$

   Par ailleurs, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-4x+4$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

2. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions dérivables. Pour tout réel x,

   $$f''(x) = -4\times\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} + (-4x+4)\times(-4x+4)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} = (16x^2-32x+12)\mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}}.$$

3. $f''(x)$ est du signe de $16x^2-32x+12$. C'est un polynôme du second degré de discriminant $(-32)^2 - 4\times 12\times 16 = 256$. Ses racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. f est convexe sur $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$. La fonction admet des points d'inflexion aux abscisses $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.
4. Les équations des tangentes...

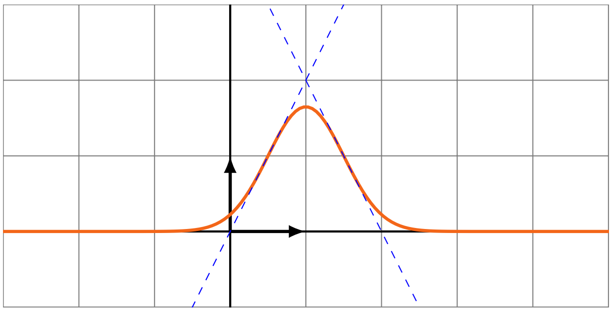
- A l'abscisse $\frac{1}{2}$: $y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $y = 2x$.
- A l'abscisse $\frac{3}{2}$: $y = f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$ soit $y = -2x + 4$.

5. Pour tout réel x,

$$f(2-x) = \mathrm{e}^{-2(2-x)^2+4(2-x)-\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{-2(4-4x+x^2)+8-4x-\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{-8+8x-2x^2-4x-\frac{3}{2}} = \mathrm{e}^{-2x^2+4x-\frac{3}{2}} = f(x).$$

La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

6. L'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal est la suivante.



▶ Correction 24 – Voir l'énoncé

1. Par croissances comparées, $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$ et donc $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Par ailleurs, par produit, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.
   (b) Soit $x > 0$, on a $\ln(x) + 1 \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant \mathrm{e}^{-1}$.

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) La fonction f est strictement décroissante sur $]0;1[$.
   Ainsi, si $0 < x < 1$, alors $1 > f(x) > \frac{e-1}{e}$ et en particulier, $f(x) \in]0;1[$.
3. (a) La tangente (T) a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = 1x \times (x-1) + 1$ et donc $y = x$.
   (b) f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \frac{1}{x}$. En particulier, $f''(x) > 0$. f est donc convexe sur $]0;+\infty[$.
   (c) Puisque f est convexe sur $]0;+\infty[$, la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle. En particulier, elle se trouve au-dessus de la tangente T. Ainsi, pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geqslant x$.
4. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».
   - On a bien $u_0 \in]0;1($. $P(0)$ est donc vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a donc $0 < u_n < 1$. Or, d'après la question **2.c.**, on a $f(u_n) \in]0;1[$ soit $u_{n+1} \in]0;1[$. $P(n+1)$ est donc vraie.

- Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(b) Pour tout entier naturel n, on a $f(u_n) \geqslant u_n$ d'après la question **3.c.**; Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.

(c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Partie A

1. f' semble positive sur $]-\infty;-1]$ puis négative sur $[-1;+\infty[$. f est donc croissante sur $]-\infty;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$.
2. f' semble décroissante sur $]-\infty;0]$ puis croissante sur $[0;+\infty[$. f est donc concave sur $]-\infty;0]$ puis convexe sur $[0;+\infty($.

Partie B

1. Pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{x+2}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$. Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
2. (a) Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + (x+2) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (-1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

   (b) Pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $-1-x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

   (c) f est continue sur $[-2;-1]$. De plus, $f(-2) = 0$ et $f(-1) = e > 2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une solution sur l'intervalle $[-2;-1]$. De plus, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, cette solution est unique. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq -1.59$.
3. Pour tout réel x, $f''(x) = -1\mathrm{e}^{-x} + (-1-x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = x\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, $f''(x)$ est du signe de x. f est donc concave sur $]-\infty;0]$ puis convexe sur $[0;+\infty($. Le point d'abscisse 0 de la courbe $\mathscr{C}$ est un point d'inflexion de la courbe.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

Partie A

1. $f'\left(\dfrac{1}{e}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$, c'est-à-dire A. On a alors $f'\left(\dfrac{1}{e}\right) = 0$. Par ailleurs, $f'(1) = -1$.
2. La tangente T_B a pour coefficient directeur -1 et pour ordonnée à l'origine 3. Son équation réduite est donc $y = -x+3$.

Partie B

1. On a $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{2+\ln(\mathrm{e}^{-1})}{\frac{1}{e}} = (2-1)e = e$ et $f(1) = \dfrac{2+\ln(1)}{1} = 2$. La courbe C_f passe par les points A et B. De plus, pour $x > 0$, $f(x) = 0$ si et seulement si $2+\ln(x) = 0$ soit $x = \mathrm{e}^{-2}$. La courbe C_f coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\mathrm{e}^{-2}; 0)$.
2. En utilisant les règles de calcul sur les limites, on a que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Par ailleurs, pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ et, par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times 1 - (2+\ln(x))\times 1}{x^2} = \dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$.
4. Soit $x > 0$. Alors $-1-\ln(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\ln(x) \leqslant -1$ soit $x \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

5. (a) Pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2 - (-1-\ln(x))2x}{x^4} = \dfrac{x(-1+2+2\ln(x))}{x^4} = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^4}$.

   (b) Soit $x > 0$. On a $f''(x) \geqslant 0$ si et seulement si $1+2\ln(x) \geqslant 0$ soit $\ln(x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et $x \geqslant \mathrm{e}^{-1/2}$. f est convexe sur $[\mathrm{e}^{-1/2}; +\infty($.