1. Exercices : Suites et récurrence

Principe

► Exercice 1 – Voir le corrigé

Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Soit donc (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = u_0 + rn$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (b) Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

► Exercice 2 – Voir le corrigé

Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$.
Soit donc (u_n) une suite géométrique de raison q.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
2. **Application :** On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = -2$.
   (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (b) Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

► Exercice 3 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

1. Calculer u_2 et u_3
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel non nul n.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}.$$

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel non nul et

$$u_n = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1).$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

Soit q un réel différent de 1, n un entier naturel et $S = 1+q+q^2+\ldots+q^n$.
L'objectif de cet exercice est de rappeler la valeur de S, déjà vue en classe de première.

1. Que vaut $(1-q)S$? En déduire la valeur de S.
2. Redémontrer ce résultat par récurrence.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies comme suit.

$$\begin{cases} x_0 = -4 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 0.8x_n - 0.6y_n \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 3 \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = 0.6x_n + 0.8y_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n^2 + y_n^2 = 25$. Interpréter géométriquement cette propriété.

► Exercice 10 (Asie 2025) – Voir le corrigé

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2mL d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme un représente la quantité de médicament, exprimée en mL présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament. On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n$.

1. En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9mL.
   (a) Calculer la valeur de u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$.
   (c) Soit N un entier naturel strictement positif. L'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
   (d) Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.
   Justifier votre démarche.
2. En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps. On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

   $$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}.$$

   On admet que la suite (S_n) est croissante.
   (a) Calculer S_2.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

   $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

(c) On donne la fonction mystère suivante, écrite en langage Python

```python
def mystere(k):
    n = 1
    s = 2
    while s < k:
        n = n + 1
        s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
    return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie **mystere(9)** ?

(d) Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Suites majorées, minorées, bornées

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

a. $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \neq 0$

b. $u_n = \cos(n) + \sin(n)$

c. $u_n = -3\cos(n) + 2\sin(n)$

d. $u_n = 2\cos(n) - n$

e. $u_n = \cos(n) + 3$

f. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$.

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

▶ Exercice 15 – Voir le corrigé

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$.

1. Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $f(x) = 4x - 4x^2$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0;1]$.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[0;1]$.
3. En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

Suites croissantes, suites décroissantes

► Exercice 16 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 8$.
2. Montrer que pour entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$.
3. Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

► Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 7$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

► Exercice 19 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ et que (u_n) est décroissante.

► Exercice 20 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

► Exercice 21 (Centres étrangers 2022) – Voir le corrigé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = \dfrac{1}{10}$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1.$$

Pour aller plus loin...

► Exercice 22 (Suites arithmético-géométriques) – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels, avec a différent de 0 et 1. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a u_n + b.$$

1. Résoudre l'équation $x = ax + b$, d'inconnue réelle x. On note r la solution de cette équation.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r.$$

3. On propose de montrer ce résultat par une autre méthode. On considère pour cela la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par $c_n = u_n - r$.
   (a) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n pour tout entier naturel n.
   (b) Quelle est la nature de la suite (c_n) ?
   (c) En déduire une expression de c_n puis de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

► Exercice 23 – Voir le corrigé

On rappelle que pour tout entier naturel n, la fonction $f_n : x \mapsto x^n$, définie sur $\mathbb{R}$, est dérivable, de dérivée $f_n' : x \mapsto n x^{n-1}$. Nous allons le démontrer par récurrence.

1. Montrer, à l'aide du taux de variation, que les fonctions $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et donner leur fonctions dérivées.
2. Soit u et v deux fonctions dérivables. Rappeler la formule de la dérivée de uv.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition « f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_n'(x) = n x^{n-1}$ ». Démontrer cette proposition par récurrence.

► Exercice 24 – Voir le corrigé

La suite de Fibonacci est la suite (F_n) définie par $F_0 = F_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Pour tout entier naturel n, on note $\Delta_n = F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2$.

Conjecturer une expression de Δ_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

► Exercice 25 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel non nul n, on note $n!$ l'entier défini par $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$.
On convient par ailleurs que $0! = 1$.

Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x \geqslant 0$, on a

$$\exp(x) \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

2. Correction des exercices

► Correction 1 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 + rn$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 + r \times 0 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 + rn$. Or, $u_{n+1} = u_n + r$. Ainsi, $u_{n+1} = u_0 + rn + r = u_0 + r(n+1)$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

D'après la question 1, , pour tout entier naturel n, on a $u_n = 4 + 8n$. Ainsi, $u_{18} = 4 + 8 \times 18 = 144$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 \times q^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 \times q^n$. Or, $u_{n+1} = q u_n$. Ainsi, $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times (-2)^n$. Ainsi, $u_{12} = 3 \times (-2)^{12} = 12288$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = 4 + 8 \times 3^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $4 + 8 \times 3^0 = 4 + 8 \times 1 = 12 = u_0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 4 + 8 \times 3^n$. Or, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Ainsi, $u_{n+1} = 3(4 + 8 \times 3^n) - 8 = 3 \times 4 + 3 \times 8 \times 3^n - 8 = 4 + 8 \times 3^{n+1}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

On a

- $u_2 = \dfrac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $u_3 = \dfrac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ».

- **Initialisation** : $\dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1 = u_1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}$ ».

- **Initialisation** : On a $\dfrac{9-8\times 0}{3+8\times 0} = \dfrac{9}{3} = 3 = u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{9-8n}{3+8n}$. On cherche à établir

$$u_{n+1} = \frac{9-8(n+1)}{3+8(n+1)} = \frac{9-8n-8}{3+8n+8} = \frac{1-8n}{11+8n}.$$

Or, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$. Ainsi, $u_{n+1} = \dfrac{\dfrac{9-8n}{3+8n} - 2}{2\times \dfrac{9-8n}{3+8n} + 5} = \dfrac{\dfrac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n}}{\dfrac{2(9-8n)+5(3+8n)}{3+8n}}$.

On a alors

$$u_{n+1} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n} \times \frac{3+8n}{2(9-8n)+5(3+8n)} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{2(9-8n)+5(3+8n)}.$$

et donc

$$u_{n+1} = \frac{9-8n-6-16n}{18-16n+15+40n} = \frac{3-24n}{33+24n}.$$

En factorisant par 3, on obtient finalement $u_{n+1} = \dfrac{3(1-8n)}{3(11+8n)} = \dfrac{1-8n}{11+8n}$, qui est bien le résultat voulu. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie, $\mathscr{P}$ est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

- D'une part, la somme de tous les entiers entre 1 et 1 vaut évidemment 1. Par ailleurs, $\dfrac{1\times(1+1)}{2} = 1$. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$1+2+3+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

- $\mathscr{P}(1)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

On a $u_1 = 1$, $u_2 = 1+3 = 4$, $u_3 = 1+3+5 = 9$, $u_4 = 1+3+5+7 = 16$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = n^2$ ».

- **Initialisation** : $1^2 = 1 = u_1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = n^2$. Or,
  $$u_{n+1} = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = u_n+(2n+1).$$
  Ainsi, puisque $u_n = n^2$ par hypothèse de récurrence,
  $$u_{n+1} = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$$
  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

On a

$$(1-q)S = (1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n = 1-q+q-q^2+q^3-q^3+\ldots-q^n+q^n-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$$

Ainsi, $(1-q)S = 1-q^{n+1}$. Puisque $q \neq 1$, on peut diviser cette égalité par $(1-q)$ et on obtient $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Montrons désormais cette égalité par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ».

- **Initialisation** : Pour $n=0$, la première somme vaut 1 et $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = 1$. $(P(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $1+q+q^2+\ldots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
  En ajoutant q^{n+1} aux deux membres de cette égalité, on a alors
  $$1+q+q^2+\ldots+q^n+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$
  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Ainsi, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $x_n^2+y_n^2 = 25$ ».

- **Initialisation :** Pour $n=0$, on a bien $x_0^2+y_0^2 = (-4)^2+3^2 = 16+9 = 25$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $x_n^2+y_n^2 = 25$. Alors,
  $$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2 = (0{,}8x_n-0{,}6y_n)^2+(0{,}6x_n+0{,}8y_n)^2.$$
  En développant, on a
  $$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2 = 0{,}64x_n^2-0{,}96x_ny_n+0{,}36y_n^2+0{,}36x_n^2+0{,}96x_ny_n+0{,}64y_n^2.$$
  En simplifiant, on a donc
  $$x_{n+1}^2+y_{n+1}^2 = x_n^2+y_n^2 = 25.$$
  $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Si l'on se place dans un repère orthonormé, pour tout entier naturel n, le point de coordonnées $(x_n;y_n)$ est sur le cercle de centre l'origine et de rayon 5.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $u_2 = 2+0{,}8\times u_1 = 2+0{,}8\times 2 = 3{,}6$.
   (b) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $P(n)$: « $u_n = 10-8\times 0{,}8^{n-1}$.
   - Initialisation : pour $n=1$, on a $u_1 = 2$ et $10-8\times 0{,}8^{1-1} = 10-8 = 2$. $P(1)$ est donc vraie.
   - Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n = 10-8\times 0{,}8^{n-1}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = 2+0{,}8u_n = 2+0{,}8(10-8\times 0{,}8^{n-1}) = 2+0{,}8\times 10-0{,}8\times 8\times 0{,}8^{n-1} = 2+8-8\times 0{,}8\times 0{,}8^{n-1}.$$

     Finalement,

$$u_{n+1} = 10-8\times 0{,}8^{n-1+1}.$$

     Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
   - Conclusion : $P(1)$ est vraie et P est héréditaire. Ainsi, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n.

   (c) Soit N un entier naturel non nul. On sait que $-8\times 0{,}8^{N-1} < 0$. Ainsi, $10-8\times 0{,}8^{N-1} < 10$. Il n'est donc pas possible d'avoir $10-8\times 0{,}8^{N-1} \geqslant 10$. Cela signifie que la quantité de médicament présente dans l'organisme est toujours inférieure à 10 mL.
   (d) On remarque que $u_{10} \simeq 8{,}9$ et $u_{11} \simeq 9{,}1$. Ainsi, la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est supérieure à 9mL à la 11ème injection.
2. (a) On a $S_2 = \dfrac{u_1+u_2}{2} = \dfrac{2+3{,}6}{2} = 2{,}8$.
   (b) On a

$$u_1+\ldots+u_n = 10-8\times 0{,}8^{1-1}+10-8\times 0{,}8^{2-1}+\ldots+10-8\times 0{,}8^{3-1}$$

   La somme des 10 vaut alors $10n$. Pour les autres termes, on factorise la somme par 8. On a donc

$$u_1+\ldots+u_n = 10n-8\times(0{,}8^0+0{,}8^1+0{,}8^2+\ldots 0{,}8^{n-1})$$

   Or, $0{,}8^0+0{,}8^1+0{,}8^2+\ldots 0{,}8^{n-1} = \dfrac{1-0{,}8^{n-1+1}}{1-0{,}8} = \dfrac{1-0{,}8^n}{0{,}2} = 5(1-0{,}8^n)$. Voir deux exercices au-dessus pour un petit rappel de cette formule. Finalement,

$$u_1+\ldots+u_n = 10n-8\times 5(1-0{,}8^n) = 10n-40+40\times 0{,}8^n$$

   (c) La saisie **mystere(9)** renvoie la plus petite valeur de n telle que $S_n \geqslant 9$.
   (d) D'après la question **1d)**, les 10 premiers termes de la suite (u_n) sont strictement inférieurs à 9. Leur moyenne l'est donc également : la valeur renvoyée par **mystere(9)** est donc strictement supérieure à 10. Il est aussi possible de faire tourner ce programme sur la calculatrice pour obtenir la valeur renvoyée ou calculer les 10 premiers termes de la suite (S_n).

► Correction 11 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. Ainsi, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 2$. La suite (u_n) est bornée.

b. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$. Ainsi, $-2 \leqslant \cos(n)+\sin(n) \leqslant 2$. La suite (u_n) est bornée.

c. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $3 \geqslant -3\cos(n) \geqslant -3$, soit $-3 \leqslant -3\cos(n) \leqslant 3$. Par ailleurs, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et donc $-2 \leqslant 2\sin(n) \leqslant 2$. Ainsi, $-5 \leqslant -3\cos(n)+2\sin(n) \leqslant 5$. La suite (u_n) est bornée.

d. Pour tout entier naturel n, $-2 \leqslant \cos(n) \leqslant 2$ et $-n \leqslant 0$. Ainsi, $2\cos(n) - n \leqslant 2$. La suite (u_n) est majorée. En revanche, elle n'est pas minorée.

e. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$. Ainsi, $2 \leqslant \cos(n) + 4 \leqslant 4$. La suite (u_n) est bornée.

f. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant n \leqslant n+1$ et donc $0 \leqslant \dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$. La suite (u_n) est bornée.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n \leqslant 10$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et donc $u_0 \leqslant 10$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 10$. Ainsi, $\dfrac{1}{5} \times 10 \leqslant \dfrac{1}{5} \times 10$ et $\dfrac{1}{5}u_n + 8 \leqslant \dfrac{1}{5} \times 10 + 8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 10$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $3 \leqslant u_n \leqslant 5$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et donc $3 \leqslant u_0 \leqslant 5$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.
  Ainsi, $3 + 3 \leqslant u_n + 3 \leqslant 5 + 3$ et $\dfrac{3+3}{2} \leqslant \dfrac{u_n+3}{2} \leqslant \dfrac{5+3}{2}$, c'est-à-dire $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.
  Or, puisque $4 \leqslant 5$, on a donc bien $3 \leqslant u_{n+1} \leqslant 5$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
  Ainsi, $\dfrac{1}{2} + 1 \leqslant u_n + 1 \leqslant 1 + 1$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n + 1 \leqslant 2$. On applique alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à cette inégalité. Cette fonction étant décroissante sur $]0; +\infty[$, l'inégalité est alors renversée.
  On a donc $\dfrac{2}{3} \geqslant \dfrac{1}{1+u_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$. Or, $\dfrac{2}{3} \leqslant 1$. On a donc bien $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Soit n un entier naturel. On a

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 24(n+1) + 3 = 2(n^2 + 2n + 1) - 24n - 24 + 3$$

et donc

$$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 - 24n - 24 + 3 = 2n^2 - 20n - 19.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 - 20n - 19 - (2n^2 - 24n + 3) = 4n - 22.$$

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$, c'est-à-dire le signe de $4n - 22$. On a $4n - 22 \geqslant 0$ si et seulement si $n \geqslant 5{,}5$. Ainsi, (u_n) est décroissante jusqu'au rang 5 puis croissante à partir du rang 6. On a par ailleurs $u_5 = -67$ et

$u_6 = -69$. Ainsi, (u_n) est en fait décroissante jusqu'au rang 6 puis croissante à partir de ce rang. Une autre méthode consiste simplement à étudier les variations de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 24x + 3$.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \leqslant 8$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et donc $u_n \leqslant 8$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leqslant 8$.
  On a donc $\frac{1}{2}u_n + 4 \leqslant \frac{1}{2} \times 8 + 4$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant 8$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 4 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$.

Puisque pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 8$, on a donc $-\frac{1}{2}u_n \geqslant -\frac{1}{2} \times 8$ et $-\frac{1}{2}u_n + 4 \geqslant -\frac{1}{2} \times 8 + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$. Or, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + u_n}$. u_{n+1} est donc le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc strictement positif lui aussi. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. On peut donc déterminer les variations de la suite (u_n) en étudiant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Or, pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{2 + u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{2}{2 + u_n}.$$

Or, puisque $u_n > 0$, il en vient que $2 + u_n > 2$ et donc que $\frac{2}{2 + u_n} < 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et donc $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -21$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 - 7 = -\frac{17}{3}$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant -21$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant -21$.
  On a donc $\frac{2}{3}u_n - 7 \geqslant \frac{2}{3}u_{n+1} - 7 \geqslant -21 \times \frac{2}{3} - 7$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant -21$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n=0$, on a $u_0=2=5$ et $u_1=\sqrt{2\times 5-1}=\sqrt{9}=3$. On a bien $u_0\geqslant u_1\geqslant 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n\geqslant u_{n+1}\geqslant 1$.
On a donc $2u_n-1\geqslant 2u_{n+1}-1\geqslant 2\times 1-1$. On applique alors la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ à l'inégalité. Cette fonction étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, le sens de l'inégalité ne change pas.
Ainsi, $\sqrt{2u_n-1}\geqslant\sqrt{2u_{n+1}-1}\geqslant\sqrt{2\times 1-1}$, c'est-à-dire $u_{n+1}\geqslant u_{n+2}\geqslant 1$.
$P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel positif x,

$$f'(x)=\frac{5\times(x+2)-1\times(5x+4)}{(x+2)^2}=\frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2}=\frac{6}{(x+2)^2}.$$

Ainsi, pour tout réel positif x, $f'(x)>0$. f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$ ».

- **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $u_0=1$ et $u_1=\dfrac{5\times 1+4}{1+2}=\dfrac{9}{3}=3$ et donc $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant 4$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 4$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

$$f(0)\leqslant f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})\leqslant f(4).$$

Or, $f(0)=2$, qui est supérieur à 0, $f(u_n)=u_{n+1}$, $f(u_{n+1})=u_{n+2}$ et $f(4)=4$. Il en vient que

$$0\leqslant u_{n+1}\leqslant u_{n+2}\leqslant 4.$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie. $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n=0$, on a $a_0=\dfrac{1}{10}$, $b_0=1$, $a_1=\mathrm{e}^{-b_0}=\mathrm{e}^{-1}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $b_1=\mathrm{e}^{-a_0}=\mathrm{e}^{-0,1}$.
D'une part, puisque $10\geqslant\mathrm{e}$, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que $\dfrac{1}{10}\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, c'est-à-dire $a_0\leqslant a_1$.
Par ailleurs, la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^x$ étant croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc que $\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{e}^{-0,1}\leqslant\mathrm{e}^0$, c'est-à-dire $a_1\leqslant b_1\leqslant b_0$.
Finalement, on a bien que $0<a_0\leqslant a_1\leqslant b_1\leqslant b_0\leqslant 1$. $P(0)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0<a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n\leqslant 1$. La fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-x}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on a alors

$$\mathrm{e}^0>\mathrm{e}^{-a_n}\geqslant\mathrm{e}^{-a_{n+1}}\geqslant\mathrm{e}^{-b_{n+1}}\geqslant\mathrm{e}^{-b_n}\geqslant\mathrm{e}^{-1}.$$

Ainsi, puisque $\mathrm{e}^{-1}>0$, on a, en lisant cette inégalité dans l'autre sens,

$$0<a_{n+1}\leqslant a_{n+2}\leqslant b_{n+2}\leqslant b_{n+1}\leqslant 1.$$

$P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

On a $x = ax + b$ si et seulement si $x - ax = b$ si et seulement si $x(1-a) = b$ si et seulement si $x = \dfrac{b}{1-a}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $u_n = a^n(u_0 - r) + r$ ».

- **Initialisation** : $a^0 \times (u_0 - r) + r = u_0 - r + r = u_0$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = a^n(u_0 - r) + r$. Or,

$$u_{n+1} = au_n + b = a \times (a^n(u_0 - r) + r) + b = a^{n+1}(u_0 - r) + ar + b.$$

  Or, r est solution de l'équation $x = ax + b$. Ainsi, $ar + b = r$. Il en vient que

$$u_{n+1} = a^{n+1}(u_0 - r) + r.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n,

$$c_{n+1} = u_{n+1} - r = au_n + b - r$$

Or, r est solution de l'équation $x = ax + b$. Ainsi,

$$c_{n+1} = au_n + b - (ar + b) = a(u_n - r) = a \times c_n.$$

La suite (c_n) est une suite géométrique de raison a.

D'après la question précédente, la suite (c_n) est une suite géométrique de raison a. Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$c_n = c_0 \times a^n = (u_0 - r) \times a^n.$$

Or, pour tout entier naturel n, $c_n = u_n - r$ et donc $u_n = c_n + r$. On en conclut que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r.$$

► Correction 23 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x et tout réel non nul h,

$$\frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Ainsi, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_1'(x) = 1$. Par ailleurs, pour tout réel x et tout réel h non nul,

$$\frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

Ainsi, f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_2'(x) = 2x$.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors uv est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on considère la proposition $\mathscr{P}(n)$: « la fonction $f_n : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f_n' : x \mapsto nx^{n-1}$ ».

- **Initialisation** : D'après la question 1., f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f_2'(x) = 2x = 2x^{2-1}$. $\mathscr{P}(2)$ est donc vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Pour tout réel x

  $$f_{n+1}(x) = x^{n+1} = x \times x^n = f_1(x) \times f_n(x).$$

  Or, f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ (question 1.) et f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

  $$f_{n+1}' = f_1' \times f_n + f_1 \times f_n'.$$

  Pour tout réel x,

  $$f_{n+1}'(x) = 1 \times x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n = (n+1)x^{n+1-1}.$$

  $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $\mathscr{P}(2)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2