1. Exercices

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = ((-1)^n - 4)n^2$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant -3n^2$.
2. En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \sqrt{n^2+1}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$.
2. En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

À l'aide d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = n + 3 \times (-1)^n$

b. $u_n = n\,(\sin(n) - 3)$

c. $u_n = n + \dfrac{\cos(n)}{n}$ pour $n > 0$

d. $u_n = \sin(3n^2+1) - n^3$

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + n + 2}{2}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

▶ Exercice 5 – Voir le corrigé

À l'aide d'un encadrement par deux suites convergentes, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{3 + \sin(n)}{n^3}$ pour $n > 0$

b. $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour $n > 0$

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

À l'aide d'un encadrement, d'une majoration ou d'une minoration par une autre suite, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{2 + \cos(2n) + 4\sin(n)}{n}$

b. $u_n = \dfrac{18n^3}{2\sin(n) + 3\cos(2n) - 9}$

c. $u_n = n^2 - 2\cos(n) + 3\sin(5n+1)$

d. $u_n = \dfrac{n^2 + 2\cos(n) - 5\sin(n)}{3n^2}$

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{6n+2\times(-1)^n}{3n+4\times(-1)^{n+1}}$. Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

► Exercice 8 (Métropole 2024) – Voir le corrigé

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 1 : La suite (v_n) converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante.

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, on a alors $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

► Exercice 9 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
3. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

► Exercice 10 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}.$$

Dans tout l'exercice, on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont **strictement positives**.

1. (a) Calculer u_1 et v_1.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 1$.
   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n+1$.
   (d) En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On pose pour tout entier naturel n, $r_n = \dfrac{u_n}{v_n}$. On admet que $r_n^2 = 2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{-1}{u_n^2} \leqslant \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \dfrac{1}{u_n^2}$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (r_n^2) puis celle de la suite (r_n).

Suites géométriques

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_n en fonction de n puis déterminer, si elle existe, sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 1.01$ et de premier terme $u_0 = 10^{-54}$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = -\sqrt{2}$ et de premier terme $u_n = 42$.
- (u_n) est la suite géométrique de raison $q = \pi - 3$ et de premier terme $u_0 = -1235$.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Déterminer, si elle existe, la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

b. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

c. $u_n = -2 \times 4^n$

d. $u_n = 3 + 40 \times \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n$

e. $u_n = 3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n$

f. $u_n = \dfrac{3^n}{4^n}$

g.$u_n = 2^n 6^{-n}$

h. $u_n = 3^n - 2^n$

i. $u_n = 2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}$

j. $u_n = 2 + 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

k. $u_n = \dfrac{1 - 2^n}{1 - \dfrac{1}{3^n}}$

l. $u_n = \dfrac{n^n}{18^n}$

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Soit n un entier naturel. On rappelle que pour tout réel q différent de 1,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

A l'aide de cette égalité, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1. $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{3^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$
3. $u_n = 8 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{8}{4^n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{4^k}$

► Exercice 14 (Asie 2024) – Voir le corrigé

L'affirmation suivant est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$. Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels positifs. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = a^n - b^n$. On distinguera les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

Convergence des suites monotones

▶ Exercice 16 – Voir le corrigé

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$.
2. Montrer que la suite (w_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

▶ Exercice 17 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 14$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$.
3. En déduire que (u_n) est convergente.
4. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $\sqrt{\ell + 2} = \ell$. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

▶ Exercice 18 (Métropole 2022) – Voir le corrigé

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

▶ Exercice 19 – Voir le corrigé

Soit a un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]\sqrt{a}; +\infty[$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. On considère la fonction f définie pour tout $x \in [\sqrt{a}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Montrer que f est croissante sur $[\sqrt{a}; +\infty[$.
2. Que vaut $f(\sqrt{a})$?
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
5. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Cette méthode servant à estimer la racine carrée d'un nombre strictement positif se nomme la "Méthode de Héron" et est notamment utilisée dans les calculatrices.

Exercices de synthèse

▶ Exercice 20 (Suite arithmético-géométrique : découverte guidée) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 100$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 10.$$

Partie A : Première approche

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. A l'aide d'un tableur, d'un algorithme ou d'une calculatrice, calculer les premiers termes de cette suite. Quelle semble être sa limite ?

3. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 40$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie B : Déterminer la limite

1. Pour tout entier n, on pose $v_n = u_n - 40$. Soit donc n un entier naturel.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_{n+1}.
   (b) Rappeler la relation qui lie u_{n+1} et u_n.
   (c) Exprimer u_n en fonction de v_n.
   (d) En combinant les résultats des questions précédentes, montrer que $v_{n+1} = 0.75 v_n$.
2. (v_n) est donc une suite géométrique. Quelle est sa raison ? Que vaut v_0 ?
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
4. En rappelant la relation qui lie v_n et u_n, montrer alors que pour tout entier naturel n, $u_n = 40 + 60 \times 0.75^n$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

► Exercice 21 (Suite arithmético-géométrique : moins guidé...) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 6$$

Pour tout entier naturel n, on pose alors $v_n = u_n - 3.6$.

1. Soit n un entier naturel. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? On précisera sa raison et son premier terme v_0.
3. Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

► Exercice 22 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés. Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 25°C.

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur. Ainsi, $T_0 = -19$. On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

Pour tout entier naturel n, $\quad T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, on a $T_{n+1} = 0{,}94 T_n + 1{,}5$.
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \leqslant 25$. En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variations de la suite (T_n).
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   (a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   (c) En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. (a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

(b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10°C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

(c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$. Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

```
def seuil():
    n = 0
    T = ...
    while T ... :
        T = ...
        n = n + 1
    return ...
```

► Exercice 23 (Antilles-Guyane 2018) – Voir le corrigé

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017+n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -0{,}05(u_n - 1520)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
   (d) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
4. On désigne par (a_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $a_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (a_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Recopier et compléter la fonction suivante, écrite en Python, pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
def seuil():
    U = 3000
    N = 0
    while ... :
        N = ...
        U = ...
    return ...
```

6. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

▶ Exercice 24 (Polynésie 2013) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique, de raison 3.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

▶ Exercice 25 (Réunion 2023) – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$.

1. Calculer u_1.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{6x+2}{x+5}.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+5}.$$

   (a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par

$$v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}.$$

   (a) Calculer v_0.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.
   (c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n). En déduire la limite de (u_n).
5. On considère la fonction Python seuil ci-dessous, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2. Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil (2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 8
    while u > A :
        u = (6*u + 2)/(u+5)
        n = n + 1
    return n
```

2. Corrigés

► Correction 1 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.

Ainsi, $-1-4 \leqslant (-1)^n - 4 \leqslant 1-4$, et donc $-5 \leqslant (-1)^n - 4 \leqslant -3$.

En multipliant par n^2 qui est positif, on a $-5n^2 \leqslant u_n \leqslant -3n^2$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n^2) = -\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on a $n^2+1 \geqslant n^2$. En appliquant la fonction Racine carrée qui est croissante sur $[0;+\infty[$, on a alors $\sqrt{n^2+1} \geqslant \sqrt{n^2}$, c'est-à-dire $u_n \geqslant n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel n, $u_n = n + 3 \times (-1)^n$.
Or, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, on a donc $u_n \geqslant n-3$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-3) = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ et donc $-4 \leqslant \sin(n) - 3 \leqslant -2$ et finalement $-4n \leqslant u_n \leqslant -2n$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n) = -\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c. Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ et donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et finalement $n - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant n + \dfrac{1}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n - \dfrac{1}{n}\right) = +\infty$, on a, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. Pour tout entier naturel n, $u_n = \sin(3n^2+1) - n^3$. Or, $\sin(3n^2+1) \leqslant 1$. Ainsi, $u_n \leqslant 1 - n^3$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^3) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

On a $u_1 = \dfrac{u_0+0+2}{2} = \dfrac{2+0+2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $u_2 = \dfrac{u_1+1+2}{2} = \dfrac{2+1+2}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».

- **Initialisation** : On a $u_0 = 1 \geqslant 0$. $P(0)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a alors $u_n \geqslant n$ et donc $u_n + n + 2 \geqslant 2n+2$ soit $u_n + n + 2 \geqslant 2(n+1)$. Finalement, on obtient $\dfrac{u_n+n+2}{2} \geqslant \dfrac{2(n+1)}{2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant n+1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{3+\sin(n)}{n^3}$.

Or, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ d'où $\dfrac{2}{n^3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{4}{n^3}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n^3} = 0$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Or, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ d'où $2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$. Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

a. Pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{2+\cos(2n)+4\sin(n)}{n}$. On a donc $-\dfrac{3}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{7}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{n}\right) = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{18n^3}{2\sin(n)+3\cos(2n)-9}$, on a donc $u_n \leqslant \dfrac{18n^3}{-4} = -\dfrac{9}{2}n^3$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{9}{2}n^3\right) = -\infty$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

c. Puisque pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, et $-1 \leqslant \sin(5n+1) \leqslant 1$, on a alors $n^2 - 5 \leqslant u_n \leqslant n^2 + 5$. En particulier, le fait que $u_n \geqslant n^2 - 5$ nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. Puisque pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, et $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{3} - \dfrac{7}{3n^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{3n^2}$. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n = \dfrac{6 + 2 \times \dfrac{(-1)^n}{n}}{3 + 4 \times \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{6}{3} = 2$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

L'affirmation 1 est fausse. En effet, si l'on pose pour tout entier naturel n, $u_n = -1$, $v_n = (-1)^n$ et $w_n = 1$, alors les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) respectent les conditions de l'énoncé. En revanche, la suite (v_n) ne converge pas (celle-ci vaut successivement -1 puis 1 et n'admet donc pas de limite).

L'affirmation 2 est vraie. En effet, puisque la suite (u_n) est croissante, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2} \geqslant \ldots \geqslant u_1 \geqslant u_0$ et donc, en particulier, $u_n \geqslant u_0$. De la même manière, on peut montrer que, puisque la suite (w_n) est décroissante, on a, pour tout entier naturel n, $w_n \leqslant w_0$.

Finalement, pour tout entier naturel n, on a $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$ et donc, en particulier, $u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$.

▶ Correction 9 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 0 + 1 = \frac{7}{4}$ et
   $u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.
2. Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $n \leqslant u_n \leqslant n+1$ ».
   - **Initialisation** : On a $u_0 = 1$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 0+1$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.
     En multipliant par $\frac{3}{4}$, on obtient $\frac{3}{4}n \leqslant \frac{3}{4}u_n \leqslant \frac{3}{4}(n+1)$.
     On ajoute alors $\frac{1}{4}n+1$ et on obtient $\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leqslant \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$,
     c'est-à-dire, $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n + \frac{7}{4}$. Et puisque $\frac{7}{4} \leqslant 2$, on obtient bien $n+1 \leqslant u_{n+1} \leqslant n+2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant n+1 \leqslant u_{n+1}$ et donc, en particulier, $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante. Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $n \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
   D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
4. Pour tout entier naturel non nul n, on a $n \leqslant u_n \leqslant n+1$. On peut alors diviser cette inégalité par n, et on obtient $\frac{n}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{n+1}{n}$, c'est-à-dire $1 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ existe et vaut 1.

▶ Correction 10 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.
   (b) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 2u_n + v_n - v_n = 2u_n$ Or, d'après l'énoncé, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. La suite (v_n) est donc strictement croissante. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0$ et donc $v_n \geqslant 1$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant n+1$ ».
   - **Initialisation** : On sait que $u_0 = 1$. On a bien $u_0 \geqslant 0+1$. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant n+1$. Mais d'après la question précédente, on a aussi que $v_n \geqslant 1$. Ainsi, en sommant ces deux inégalités, on obtient que $u_n + v_n \geqslant n+1+1$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant (n+1)+1$.$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (d) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Or, d'après la question précédente, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n+1$. D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. (a) $(-1)^{n+1}$ vaut -1 ou 1, selon la parité de l'entier n. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
   En divisant par u_n^2, qui est strictement positif, on obtient que $\frac{-1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}$.
   (b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{u_n^2} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ existe et vaut 0.
   (c) Par somme de limite, on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2 = 2$. Or, la suite (r_n) est strictement positive, puisque

chaque terme est le quotient de deux réels strictement positifs. Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{r_n^2} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2} = \sqrt{2}$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^{-54} \times 1{,}01^n$. Or, $1{,}01 > 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}01^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = 42 \times (-\sqrt{2})^n$. Puisque $-\sqrt{2} < -1$, la suite (u_n) n'admet pas de limite.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -1235 \times (\pi - 3)^n$. Or, $-1 < \pi - 3 < 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\pi-3)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

a. Puisque $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) = 0$.

b. Puisque $-1 < \dfrac{2}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$.

c. Puisque $4 > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

d. Puisque $-1 < -\dfrac{62}{63} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{62}{63}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

e. Puisque $-1 < \dfrac{7}{8} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + 6 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^n\right) = 3$.

f. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Puisque $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

g. Pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n 6^{-n} = \dfrac{2^n}{6^n} = \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

h. Pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2^n = 3^n \times \left(1 - \dfrac{2^n}{3^n}\right) = 3^n \times \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

i. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2^n + 4^n + \dfrac{1}{2^n}\right) = +\infty$.

j. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$, Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + 5 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 2$.

k. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 2^n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

l. Pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\dfrac{n}{18}\right)^n$. Or, pour $n \geqslant 19$, on a $u_n \geqslant \left(\dfrac{19}{18}\right)^n$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{19}{18}\right)^n = +\infty$. Par comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = 1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or, puisque $-1<\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}^{n+1}\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}^{n+1}\right)\right)$$

Or, puisque $-1<\frac{1}{3}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{3}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, $u_n = 8\times\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right) = 8\times\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{32}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

Or, puisque $-1<\frac{1}{4}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{32}{3}$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n, on a $\frac{-9^n+3^n}{7^n} = -\frac{9^n}{7^n}+\frac{3^n}{7^n} = -\left(\frac{9}{7}\right)^n+\left(\frac{3}{7}\right)^n$.

Or, puisque $\frac{9}{7}>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{9}{7}\right)^n=+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\left(\frac{9}{7}\right)^n\right)=-\infty$.

Par ailleurs, puisque $-1<\frac{3}{7}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n=0$.

Ainsi, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-9^n+3^n}{7^n}=-\infty$ et, d'après le théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$. L'affirmation est vraie.

► Correction 15 – Voir l'énoncé

Traitons chacun des cas possibles.

- Si $a=b$, tous les termes de la suites valent 0, la suite converge donc vers 0.
- Si $a>b$ (en particulier, $a\neq 0$), pour tout entier naturel n, $u_n=a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$. Or, puisque $a>b\geqslant 0$, cela signifie que $0\leqslant\frac{b}{a}\leqslant 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)=1$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
- Si $a<b$ (en particulier, $b\neq 0$), pour tout entier naturel n, $u_n=b^n\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-1\right)$. Or, puisque $0\leqslant a<b$, cela signifie que $0\leqslant\frac{a}{b}\leqslant 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^n-1\right)=-1$ et enfin, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $w_n \leqslant \frac{3}{2}$ ».
   - $w_0 = 1 \leqslant \frac{3}{2}$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
   - Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
     Alors, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$. ainsi, $\frac{1}{3}w_n \leqslant \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}u_n + 1 \leqslant \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $w_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
   - Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout entier naturel n, $w_{n+1} - w_n = \frac{1}{3}w_n + 1 - w_n = -\frac{2}{3}w_n + 1$.
   Or, $w_n \leqslant \frac{3}{2}$ d'où $-\frac{2}{3}w_n \geqslant -1$ et $-\frac{2}{3}w_n + 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $w_{n+1} - w_n \geqslant 0$ ou encore $w_{n+1} \geqslant w_n$. La suite (w_n) est donc croissante. On aurait également pu procéder par récurrence.
3. La suite (w_n) est croissante et majorée par $\frac{3}{2}$: elle est donc convergente. De plus, puisque pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 1$, la limite l de la suite (w_n) doit vérifier $l = \frac{1}{3}l + 1$, c'est-à-dire $l = \frac{3}{2}$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \frac{3}{2}$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1 = \sqrt{14+2} = \sqrt{16} = 4$.
2. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 2$ ».
   - **Initialisation :** $u_0 = 16$, $u_1 = 4$. On a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant 2$. $\mathscr{P}(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
     On a $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 2$ et donc $u_n + 2 \geqslant u_{n+1} + 2 \geqslant 4$.
     La fonction Racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\sqrt{u_n+2} \geqslant \sqrt{u_{n+1}+2} \geqslant \sqrt{4}$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant 2$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion :** Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
4. Si $\sqrt{\ell+2} = \ell$, on a $\ell + 2 = \ell^2$ c'est-à-dire $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont 2 et -1. Or, puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 2$, la seule possibilité de limite est 2.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Puisque pour tout entier naturel non nul n, on a $\frac{1}{n} \leqslant 1$, alors, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Elle est donc convergente.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

1. f est dérivable sur $[\sqrt{a};+\infty[$ et, pour tout réel x dans cet intervalle, $f'x) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$.
   Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x^2 > a$. a étant positif et puisque $x \in [\sqrt{a};+\infty[$, on a bien $f'(x) \geqslant 0$.
   La fonction f est croissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$.
2. Par ailleurs, $f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + \sqrt{a}) = \sqrt{a}$.
3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $u_n \geqslant \sqrt{a}$.
   - Par hypothèse, $u_0 \in [\sqrt{a};+\infty[$. en particulier, $u_0 \geqslant \sqrt{a}$.
   - Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie. $u_n \geqslant \sqrt{a}$. La fonction f étant croissante sur

$[\sqrt{a};+\infty[$, on a alors $f(u_n) \geqslant f(\sqrt{a})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - La proposition $\mathscr{P}(1)$ est vraie et $\mathscr{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{u_n} - u_n\right)$.
   Pour tout réel $x \geqslant \sqrt{a}$, on pose alors $g(x) = \dfrac{a}{x} - x$. g est décroissante sur $[\sqrt{a};+\infty[$. De plus, $g(\sqrt{a}) = \dfrac{a}{\sqrt{a}} - \sqrt{a} = \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [\sqrt{a};+\infty[$, $g(x) \leqslant 0$. Or, on a vu que pour tout entier naturel n, $u_n \in [\sqrt{a};+\infty[$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante. Puisqu'elle est minorée, la suite (u_n) est donc convergente.
5. On admet que la limite ℓ le la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$. On a donc $\ell = \dfrac{\ell}{2} + \dfrac{a}{2\ell}$ soit $\ell^2 = a$. ℓ étant forcément positive, on a alors $\ell = \sqrt{a}$.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

Partie A : Première approche

1. On a $u_0 = 100$, $u_1 = \dfrac{3}{4} \times 100 + 10 = 85$ et $u_2 = \dfrac{3}{4} \times 85 + 10 = 73{,}75$. En particulier, $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, la suite (u_n) n'est donc pas arithmétique. De plus $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$. La suite (u_n) n'est donc pas géométrique.
2. Il semblerait que la suite (u_n) soit convergente, de limite 40.
3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition « $u_n \geqslant 40$ ».
   - $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 100 \geqslant 40$.
   - Soit un entier n tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Ainsi, $u_n \geqslant 40$, donc $\dfrac{3}{4}u_n \geqslant 30$ et $\dfrac{3}{4}u_n + 10 \geqslant 40$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 40$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.
   - D'après le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
4. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n}{4} + 10$. Or, $u_n \geqslant 40$ donc $-\dfrac{u_n}{4} + 10 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 40. Elle est donc convergente.

Partie B : Déterminer la limite

1. (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 40$.
   (b) On rappelle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 10$.
   (c) Pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 40$.
   (d) Pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = \frac{3}{4}u_n + 10 - 40 = \frac{3}{4}u_n - 30 = \frac{3}{4}(v_n + 40) - 30 = \frac{3}{4}v_n.$$
2. (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$. De plus, $v_0 = u_0 - 40 = 60$. Pour tout entier naturel n, on a donc $v_n = 60 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 60 \times 0.75^n$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 40$, on a alors que $u_n = 40 + 60 \times 0{,}75^n$.
3. Puisque $-1 < 0{,}75 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 40$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

1. Soit n un entier naturel.
$$v_{n+1}=u_{n+1}-3,6=-\frac{2}{3}u_n+6-3,6=-\frac{2}{3}u_n+2,4=-\frac{2}{3}(v_n+3,6)+2,4=-\frac{2}{3}v_n-2,4+2,4=-\frac{2}{3}v_n.$$
2. La suite (v_n) est géométrique. Son premier terme vaut $v_0=u_0-3,6=16,4$ et sa raison vaut $q=-\dfrac{2}{3}$.
3. Pour tout entier naturel n, $v_n=16,4\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ et $u_n=3,6+16,4\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$.
4. Puisque $-1<-\dfrac{2}{3}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}=3,6$.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

1. Pour tout entier naturel n,$T_{n+1}-T_n=-0,06\times(T_n-25)=-0,06T_n+0,06\times25=0,06T_n+1,5$.
En ajoutant T_n aux deux membres de l'égalité, on trouve $T_{n+1}=0,94T_n+1,5$.
2. $T_1=0,94T_0+1,5=0,94\times(-19)+1,5=-16,36\simeq-16,4$.
$T_2=0,94T_1+1,5=0,94\times(-16,36)+1,5=-13,8784\simeq-13,9$.
Attention à bien arrondir au dixième comme le demande la consigne !
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « $T_n\leqslant 25$ ».
   - **Initialisation** : $T_0=-19$. On a bien $T_0\leqslant25$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $T_n\leqslant25$. En multipliant par 0,94, on a $0,94T_n\leqslant0,94\times25$. On ajoute alors 1,5, ce qui donne $0,94T_n+1,5\leqslant0,94\times25+1,5$, c'est-à-dire $T_{n+1}\leqslant25$. $P(n+1)$ est vraie.
   - **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   Ce résultat est prévisible : la température ambiante est de 25 degrés, le gâteau qui est au départ plus froid ne peut pas dépasser cette température en sortant du congélateur.
4. Pour tout entier naturel n, $T_{n+1}-T_n=-0,06\times(T_n-25)$. Puisque pour tout entier naturel n, $T_n\leqslant25$, on a donc $T_n-25\leqslant0$ et donc $-0,06\times(T_n-25)\geqslant0$, ce qui conduit à $T_{n+1}-T_n\geqslant0$ et finalement $T_{n+1}\geqslant T_n$. La suite (T_n) est donc croissante.
5. Puisque la suite (T_n) est croissante et majorée, elle est convergente.
6. (a) Pour tout entier naturel n
$$U_{n+1}=T_{n+1}-25=0,94T_n+1,5-25=0,94T_n-23,5.$$
Or, puisque $U_n=T_n-25$, on a $T_n=U_n+25$. Ainsi,
$$U_{n+1}=0,94(U_n+25)-23,5=0,94U_n+23,5-23,5=0,94U_n.$$
La suite (U_n) est donc géométrique, de raison 0,94. Son premier terme vaut
$$U_0=T_0-25=-19-25=-44.$$
(b) La suite (U_n) est géométrique : pour tout entier naturel n, $U_n=-44\times0,94^n$. Par ailleurs, $T_n=U_n+25$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $T_n=-44\times0,94^n+25$.
(c) Puisque $-1<0,94<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0,94^n=0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}=25$. A terme, les gâteaux auront une températures de 25 degrés Celsius.
7. (a) $T_{30}=-44\times0,94^{30}+25\simeq18$. Après une demi-heure à température ambiante, les gâteaux auront une température d'environ 18°C.
(b) On a $T_{17}=-44\times0,94^{17}+25\simeq9,63$ et $T_{18}=-44\times0,94^{18}+25\simeq10,55$. Cécile doit déguster son gâteau entre 17 et 18 minutes après la sortie du congélateur.

(c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil():
    n = 0
    T = -19
    while T < 10 :
        T = 0.94 T +1.5
        n = n + 1
    return n
```

► Correction 23 – Voir l'énoncé

1. Au 31 octobre, il y a 3080 cétacés. Leur nombre diminue alors de 5%. $\left(1-\dfrac{5}{100}\right)\times 3080 = 2926$. On a bien $u_1 = 2926$.
2. Chaque année, le nombre de cétacés augmente de 80 puis diminue de 5%. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95(u_n+80) = 0{,}95u_n+76$.
3. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n \geqslant 1520$ ».
   - $u_0 = 3000$. On a bien $u_0 \geqslant 1520$, $P(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n \geqslant 1520$. Ainsi, $0.95u_n \geqslant 0.95\times 1520$ et $0.95u_n+76 \geqslant 0.95\times 1520+76$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant 1520$. $P(n+1)$ est vraie.
   - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b) Pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1}-u_n 0.95u_n+76-u_n = -0.05u_n+76 = -0.05\left(u_n+\frac{76}{-0.05}\right) = -0{,}05(u_n-1520).$$
   (c) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$, on a $-0.05(u_n-1520) \leqslant 0$. Ainsi, pour tout entier n, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.
4. (a) Pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+1} = u_{n+1}-1520 = 0.95u_n+76-1520 = 0.95(a_n+1520)+76-1520 = 0.95a_n.$$
   La suite (a_n) est donc géométrique de raison 0.95 et de premier terme $a_0 = u_0-1520 = 3000-1520 = 1480$.
   (b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $a_n = 1480\times 0.95^n$ et $u_n = a_n+1520 = 1480\times 0{,}95^n+1520$.
   (c) Puisque $-1 < 0.95 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.95^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$.
5.
```
def seuil():
    U = 3000
    N = 0
    while U > 2000 :
        N = N + 1
        U = 0.95 * U + 76
    return N
```
6. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1520$, et que la suite (u_n) est décroissante, il arrivera forcément un rang à partir duquel la suite sera sous 2000. Cela arrive au rang 22 : la réserve fermera donc en 2039.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $u_1 = \dfrac{3\times\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$ et $u_1 = \dfrac{3\times\frac{3}{4}}{1+2\times\frac{3}{4}} = \dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{9}{10}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0 < u_n$ ».
   - **Initialisation** : Pour $n=0$, on a $u_0 = \dfrac{1}{2}$. On a bien $0 < u_0$. $P(0)$ est vraie.
   - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Alors u_{n+1} est le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc lui-même strictement positif. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion** : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
2. (a) Pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3}{1+2u_n}$. Or, puisque $u_n < 1$, on a donc $1+2u_n < 3$ et donc $1 < \dfrac{3}{1+2u_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Les termes de cette suite étant strictement positifs, cela signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc croissante.
   (b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente.
3. (a) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\dfrac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\dfrac{3u_n}{1-2u_n}}{\dfrac{1+2u_n-3u_n}{1-2u_n}} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n.$$

   La suite (v_n) est géométrique de raison 3.
   (b) On a par ailleurs $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 1\times 3^n = 3^n$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on a $v_n(1-u_n) = u_n$ et donc $v_n = u_n + u_n v_n$, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{v_n}{1+v_n}$.
   Finalement, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   (d) Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n} \times \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3^n}}$. Or, puisque $3>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.
   Il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1 = \dfrac{6\times 8+2}{8+5} = \dfrac{50}{13}$.
2. (a) f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{6(x+5)-1(6x+2)}{(x+5)^2} = \frac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2} > 0$$

   La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   (b) La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, alors, pour l $x>2$, on a $f(x) > f(2)$.
   Or, $f(2) = \dfrac{6\times 2+2}{2+5} = \dfrac{14}{7} = 2$. Ainsi, pour tout réel $x>2$, $f(x)>2$.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $u_n > 2$ ».
   - **Initialisation** : $u_0 = 8 > 2$. $P(0)$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. Puisque f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, on a alors $f(u_n) > f(2)$, soit $u_{n+1} > 2$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - **Conclusion :** Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
3. (a) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n > 2$, alors $u_n+1 > 0$, $u_n+5 > 0$ et $2-u_n < 0$. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n < 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
   (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2, elle est donc convergente.

4. (a) On a $v_0 = \dfrac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{8-2}{8+1} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.
   (b) Pour tout entier naturel n,
   $$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5} - 2}{\dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5} + 1} = \frac{\dfrac{6u_n + 2 - 2u_n - 10}{u_n + 5}}{\dfrac{6u_n + 2 + u_n + 5}{u_n + 5}} = \frac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \frac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} = \frac{4}{7} v_n.$$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{4}{7}$.
   (c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^n$.
   Or, puisque $-1 < \dfrac{4}{7} < 1$, il en vient que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{4}{7}\right)^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
   Par ailleurs, pour tout entier naturel n, $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$. Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (qui existe bien d'après les questions précédentes).
   On a alors $0 = \dfrac{\ell - 2}{\ell + 1}$. Ainsi, $\ell - 2 = 0$ et donc $\ell = 2$.
5. Le programme renvoie le premier rang n à partir duquel on a $u_n \leqslant 2.001$. Ce rang vaut 14.