
exercise-1==geo01||exercise-2==geo01||exercise-3==geo01||exercise-4==geo01||exercise-5==geo02||exercise-6==geo02||exercise-7==geo02||exercise-8==geo02||exercise-9==geo03||exercise-10==geo03||exercise-11==geo03||exercise-12==geo03||exercise-13==geo03||exercise-14==geo03||exercise-15==geo03||exercise-16==geo03||exercise-17==geo04||exercise-18==geo04||exercise-19==geo04||exercise-20==geo04||exercise-21==geo04||exercise-22==geo05||exercise-23==geo05||exercise-24==geo05||exercise-25==geo05 exercise-1||exercise-2||exercise-3||exercise-4 exercise-5||exercise-6||exercise-7||exercise-8 exercise-9||exercise-10||exercise-11||exercise-12||exercise-13||exercise-14||exercise-15||exercise-16 exercise-17||exercise-18||exercise-19||exercise-20||exercise-21 exercise-22||exercise-23||exercise-24||exercise-25

1. Géométrie dans l'espace

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Vecteurs et translations

Définition 1 : Un vecteur de l'espace est un objet mathématique caractérisé par une direction de l'espace, un sens et une longueur, également appelée norme.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, la même norme et le même sens.

Définition 2 : Soit \vec{u} un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur \vec{u} la transformation de l'espace qui, à tout point M , associe l'unique point M' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

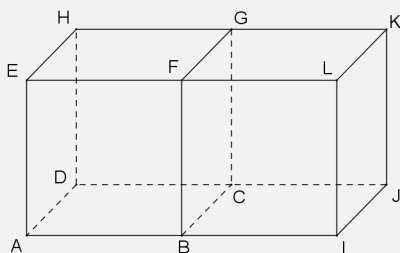
Toutes les notions vues en géométrie plane sur les vecteurs s'étendent dans l'espace : égalité de vecteurs, somme de vecteurs, produit d'un réel par un vecteur, relation de Chasles, vecteur nul, etc...

Il est donc fortement conseillé de revoir ces notions de la classe de Seconde avant de passer à la suite de ce chapitre.

Définition 3 : Soit $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels.

Le vecteur \vec{u} défini par $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$.

■ **Exemple 1 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCLK$ placés côte à côte.



On a les égalités de vecteurs suivantes

- $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IJ}$;
- $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{HB}$;
- $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EI}$.

Définition 4 : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace.

On dit que \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

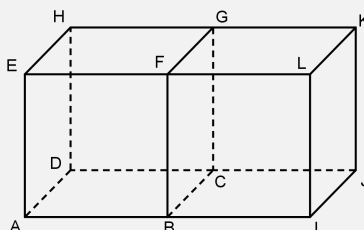
Le vecteur nul est ainsi colinéaire à tout vecteur de l'espace.

■ **Exemple 2 :** Sur la figure précédente, on a $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{HG}$. Les vecteurs \overrightarrow{AI} et \overrightarrow{HG} sont donc colinéaires. ■

Définition 5 : Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace tels que \vec{v} et \vec{w} **ne sont pas colinéaires**.

On dit que \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires s'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

■ **Exemple 3 :** Sur la configuration suivante...



Les vecteurs \vec{AC} , \vec{EL} et \vec{FG} sont coplanaires. En effet, on a $\vec{EL} = 2\vec{AC} - 2\vec{FG}$. ■

2 Droites et plans de l'espace

2.1 Droites de l'espace

Définition 6 : Soit \vec{u} un vecteur non nul et A un point de l'espace. La droite de vecteur directeur \vec{u} passant par A est l'ensemble des points M tels que \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires.

Une droite est donc entièrement déterminée par un point et un vecteur non nul. On dit que $(A; \vec{u})$ est un repère de la droite passant par A dirigée par \vec{u} . Une droite peut également être déterminée par deux points distincts.

La définition d'une droite à l'aide des vecteurs permet d'exploiter la colinéarité pour résoudre des problèmes d'alignement de points ou de parallélisme de droites.

Propriété 1 : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} sont parallèles si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Propriété 2 : Soit A , B et C trois points de l'espace. Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.

2.2 Plans de l'espace

Définition 7 : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires et A un point du plan.

Le plan passant par A et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est l'ensemble des points M pour lesquels le vecteur \vec{AM} s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Autrement dit, M appartient au plan passant par A , dirigé par \vec{u} et \vec{v} si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\vec{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

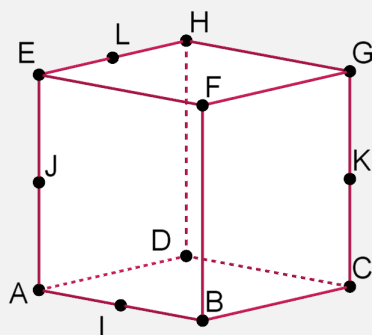
On dit que (\vec{u}, \vec{v}) est une **base** de ce plan et que $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un **repère** de ce plan.

Cette définition implique que par trois points **non alignés** de l'espace passe un unique plan.

Définition 8 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. On dit que A, B, C et D sont coplanaires s'il existe un plan de l'espace passant par ces quatre points.

Propriété 3 : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs \vec{AB}, \vec{AC} et \vec{AD} sont coplanaires.

■ **Exemple 4 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi que les points I, J, K et L , milieux respectifs des segments $[AB], [AE], [CG]$ et $[EH]$



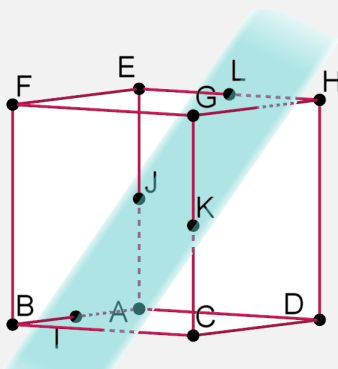
D'après la relation de Chasles, $\vec{AH} = \vec{AE} + \vec{EH}$. Or, J étant le milieu de $[AE]$, on a $\vec{AE} = 2\vec{JE}$.

De même, $\vec{EH} = 2\vec{EL}$. Ainsi, $\vec{AH} = 2\vec{JE} + 2\vec{EL} = 2\vec{JL}$. Les vecteurs \vec{AH} et \vec{JL} sont colinéaires. Les droites (AH) et (JL) sont donc parallèles.

De la même manière, on montre que $\vec{EB} = 2\vec{JI}$.

On a $\vec{JK} = \vec{EG}$ D'après la relation de Chasles, on a donc $\vec{JK} = \vec{EH} + \vec{HC} = \vec{EH} + \vec{EB}$.

En utilisant les points précédents, on a donc que $\vec{JK} = 2\vec{JL} + 2\vec{JI}$. Les vecteurs \vec{JK}, \vec{JI} et \vec{JL} sont donc coplanaires. Les points I, J, K et L sont donc coplanaires : ces quatre points appartiennent à un même plan.



■

2.3 Positions relatives

Positions relatives de deux droites

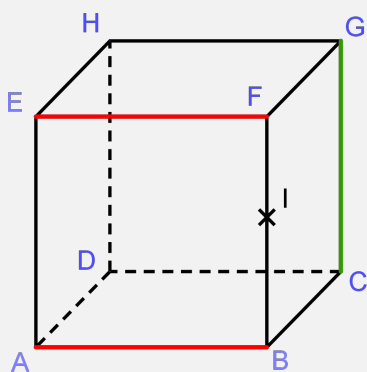
Définition 9 : Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Les droites (AB) et (CD) sont dites coplanaires si les points A, B, C et D sont coplanaires.

Autrement dit, il existe un plan qui contiennent les droites (AB) et (CD) .

Propriété 4 : Deux droites de l'espace coplanaires sont...

- parallèles ou confondues si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires,
- sécantes en un unique point sinon.

■ **Exemple 5 :** On considère un cube $ABCDEFGH$ ainsi qu'un point I sur le segment $[BF]$.



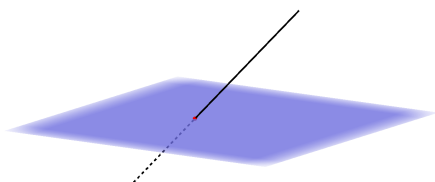
- Les droites (AB) et (EF) sont parallèles.
- Les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires.
- Les droites (HI) et (BD) sont coplanaires mais pas parallèles : elles sont donc sécantes.

Positions relatives d'une droite et d'un plan

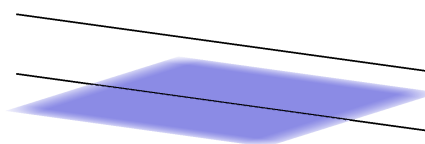
Propriété 5 : Une droite est...

- parallèle ou contenue dans un plan si tout vecteur de la droite est aussi un vecteur directeur du plan,
- sécante au plan en un unique point sinon.

Droite sécante à un plan



Droite parallèle à un plan



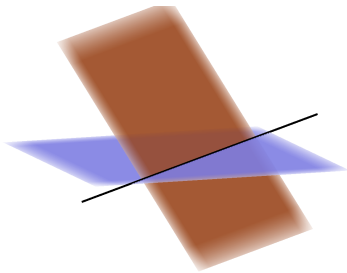
■ **Exemple 6 :** Dans le cube précédent, la droite (AE) est parallèle au plan (BDH) . En revanche, cette droite est sécante au plan (IGH) .

Positions relatives de deux plans

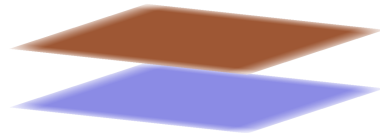
Propriété 6 : Deux plans de l'espace sont...

- parallèles ou confondus si les vecteurs directeurs de l'un sont aussi directeurs de l'autre,
- sécants sinon. L'intersection de ces deux plans est alors une droite.

Plans sécants selon une droite

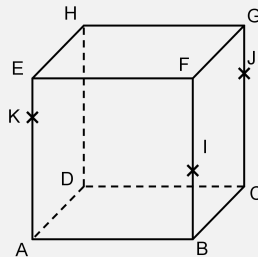


Plans parallèles

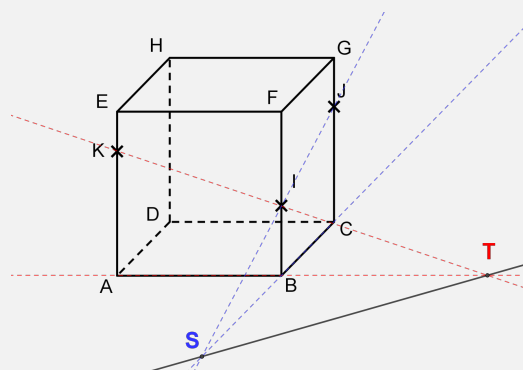


Il suffit donc de connaître deux points d'intersection A et B de deux plans pour déterminer toute leur intersection qui n'est autre que la droite (AB) .

■ **Exemple 7 :** On considère le cube $ABCDEFGH$ suivant ainsi que trois points : I sur le segment $[BF]$, J sur le segment $[CG]$ et K sur le segment $[AE]$ de telles sorte que les droites (IK) et (AB) sont sécantes en un point T et que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes en un point S .



- Puisque la droite (IJ) est dans le plan (IJK) et la droite (BC) est dans le plan (ABC) , le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK) .
- Puisque la droite (IK) est dans le plan (IJK) et la droite (AB) est dans le plan (ABC) , le point d'intersection de ces deux droites se trouve dans l'intersection des plans (ABC) et (IJK) .
- L'intersection de deux plans sécants étant une droite, l'intersection des plans (ABC) et (IJK) est la droite (ST) .



Propriété 7 : Pour montrer que deux plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes non confondues (d_1) et (d_2) de \mathcal{P} et deux droites sécantes non confondues (δ_1) et (δ_2) de \mathcal{P}' telles que (d_1) est parallèle à (δ_1) et (d_2) est parallèle à (δ_2) .

3 Repère de l'espace

Définition 10 : Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où

- O est un point de l'espace ;
- \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont des vecteurs non coplanaires.

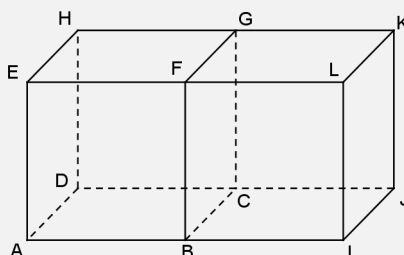
On dit que les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} forment une base de l'espace.

Propriété 8 : Soit \vec{u} un vecteur de l'espace et $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

Il existe un unique triplet de réel $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x, y et z sont appelés les coordonnées du vecteur \vec{u} . On notera $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 8 :** On considère deux cubes $ABCDEFGH$ et $BIJCFLKG$ placés côte à côte.



Les coordonnées du vecteur \vec{AG} dans le repère $(A; \vec{AI}, \vec{AD}, \vec{AE})$ sont $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a en effet $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AI} + \vec{AD} + \vec{AE}$. ■

Définition 11 : Soit M un point de l'espace et $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Les coordonnées du point

M sont les réels $(x; y; z)$ tels que le vecteur \vec{OM} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On notera $M(x; y; z)$.

■ **Exemple 9 :** Dans la figure précédente, on a $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE}$

Le point K a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE})$. ■

Propriété 9 : Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.

- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- Le point I , milieu de $[AB]$, a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Démonstration 1 : On a $\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k}$. Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k} - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}) = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j} + (z_B - z_A) \vec{k}.$$

On retrouve bien le résultat attendu. Par ailleurs, si $I(x_I, y_I, z_I)$ est le milieu de $[AB]$, alors $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

On a donc, en regardant la première coordonnée de ces deux vecteurs, $x_I - x_A = x_B - x_I$ d'où $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$.

En faisant de même avec les deuxièmes et troisièmes coordonnées, on retrouve la formule attendue. \square

■ **Exemple 10 :** On se place dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 3; -4)$ et $B(2; 7; -1)$. On note I le milieu du segment $[AB]$.

- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 7 - 3 \\ -1 - 4 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.
- Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1+2}{2}; \frac{3+7}{2}; \frac{-4+(-1)}{2}\right)$ soit $\left(\frac{3}{2}; 5; -\frac{5}{2}\right)$.

■

Propriété 10 : Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Soit λ et μ des réels. Le vecteur $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$.

■ **Exemple 11 :** On se place dans un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. En effet, $\vec{v} = -3\vec{u}$. ■

■ **Exemple 12 :** Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont-ils coplanaires ? D'une part, les vecteurs \vec{v} et \vec{w} ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$. Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu \\ 4\lambda + \mu \\ -7\lambda + 5\mu \end{pmatrix}$.

Nous sommes donc amenés à résoudre le système $\begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ 4\lambda + \mu = 6 \\ -7\lambda + 5\mu = 3 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = 0 \\ 4\lambda + \mu = 6 \\ -7\lambda + 5\mu = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda \\ 4\lambda + 2\lambda = 6 \\ -7\lambda + 10\lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda \\ 6\lambda = 6 \\ 3\lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Le fait d'avoir deux fois la même ligne n'est pas anormal : nous avons trois équations pour deux inconnues. Si les résultats de ces deux lignes sont différents, cela signifie que les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Vérifions que les valeurs trouvées pour λ et μ conviennent.

Les coordonnées de $\vec{v} + 2\vec{w}$ sont en effet $\begin{pmatrix} 2 + 2 \times (-1) \\ 4 + 2 \times 1 \\ -7 + 2 \times 5 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a donc $\vec{u} = \vec{v} + 2\vec{w}$. Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont donc coplanaires. ■

4 Représentation paramétrique de droite

Propriété 11 : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.

On note (d) la droite passant par le point A et dirigée par \vec{u} .

Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite (d) si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$.

Démonstration 2 : Le point M appartient à la droite (d) si et seulement si les vecteurs \vec{AM} et \vec{u} sont colinéaires. Puisque \vec{u} est non nul, cela revient à dire qu'il existe un réel t tel que $\vec{AM} = t\vec{u}$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$. □

Définition 12 : Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace et (d) la droite passant par le point A et dirigée par \vec{u} .

Le système $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique de la droite (d) .

Attention ! Une représentation paramétrique de droite n'est pas unique !

■ **Exemple 13 :** La droite passant par le point $A(2;1;3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$ ■

■ **Exemple 14 :** On considère la droite admettant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 8 - 4t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Cette droite passe par le point $A(5,8,3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. En prenant $t = 2$, on obtient que cette droite passe par le point de coordonnées $(1,0,5)$.

Le point $B(-1; -4; 5)$ appartient-il à cette droite ?

Supposons que ce soit le cas. Il existe alors un réel t tel que $5 - 2t = -1$, $8 - 4t = -4$ et $3 + t = 5$.

La résolution de ces équations donne successivement $t = 3$, $t = 3$ et $t = 2$.

Il n'y a pas une unique valeur de t qui est trouvée : le point B n'appartient donc pas à la droite considérée. ■

■ **Exemple 15 :** On considère les droites $(d) : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 11 - 3t \\ z = 9 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(d') : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 6 + 4k \\ z = -2 - 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$

On souhaite déterminer, s'il existe, le point d'intersection de ces droites. Il faut donc trouver deux paramètres t et k qui correspondent à un même point pour ces deux droites. Cela nous amène à résoudre le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4 - t = 2 + k \\ 11 - 3t = 6 + 4k \\ 9 - 2t = -2 - 5k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - t = k \\ 11 - 3t = 6 + 4(2 - t) \\ 9 - 2t = -2 - 5(2 - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - t = k \\ 11 - 3t = 6 + 8 - 4t \\ 9 - 2t = -2 - 10 + 5t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - t = k \\ t = 3 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 - 3 = -1 \\ t = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

La solution que l'on trouve est unique, les droites sont donc sécantes en un point. Pour trouver les coordonnées de ce point, on remplace le paramètre t ou k dans la représentation paramétrique de la droite correspondante (le mieux étant de le faire pour les deux pour contrôler nos calculs).

En prenant $t = 3$ dans la représentation paramétrique de (d) , on obtient le point de coordonnées $(1;2;3)$. De même, en prenant $k = -1$ dans la représentation paramétrique de (d') , on aboutit également au point de coordonnées $(1;2;3)$. Ce point est le point d'intersection des droites (d) et (d') . ■