

1. Cours : Rappels de probabilité

Avant de s'engager sur le programme de terminale, faisons quelques rappels de probabilités de l'année de Première.

Dans tout ce chapitre, on note Ω l'univers non vide d'une expérience aléatoire.

On rappelle que pour deux événements A et B de Ω , l'événement $A \cap B$ est l'événement qui est réalisé lorsque « à la fois A et B sont réalisés ».

De plus, l'événement \bar{A} , appelé contraire de A , est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

$\mathbb{P}(A)$ désignera la probabilité de l'événement A . On a alors $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 1 — Probabilité conditionnelle : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

■ **Exemple 1 :** On considère l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. On tire un nombre uniformément au hasard sur Ω . On considère les événements

- A : le nombre est pair ;
- B : le nombre est supérieur ou égal à 3.

Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Par ailleurs, $A \cap B = \{4; 6\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Appliquant la définition, on trouve donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

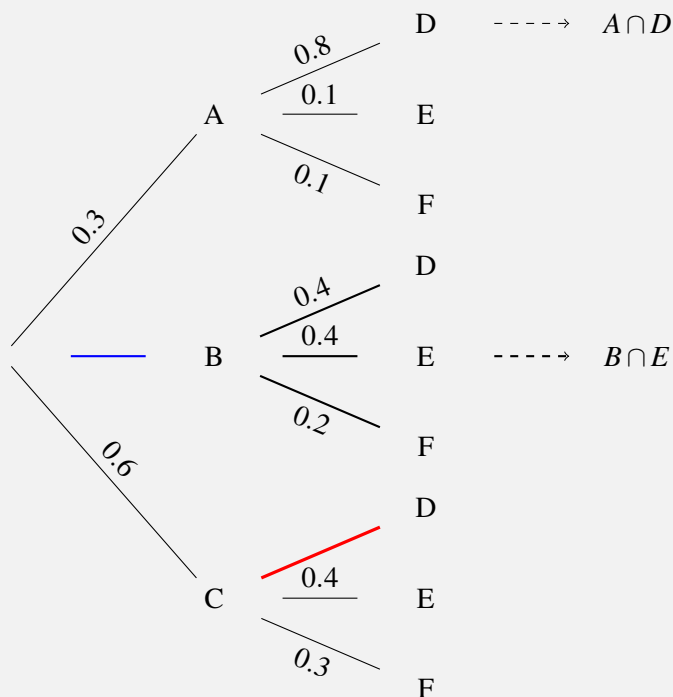
■ **Exemple 2 :** Une entreprise commande à une société de sondage une enquête sur la satisfaction de ses clients. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité qu'un client réponde est de 0,25. Si le client répond à l'appel, la probabilité qu'il réponde au questionnaire de la société est de 0,3. On note R l'événement « la personne répond à l'appel » et Q l'événement « la personne répond au questionnaire ».

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(R) = 0,25$ et $\mathbb{P}_R(Q) = 0,3$. Ainsi, la probabilité qu'une personne prise au hasard réponde à l'appel puis au questionnaire vaut $\mathbb{P}(R \cap Q) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(Q) = 0,3 \times 0,25 = 0,075$. ■

1.1 Construction d'un arbre pondéré

Propriété 1 — Règle de la somme : Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

■ **Exemple 3 :** On considère une succession de deux expériences aléatoires dont l'arbre pondéré associé est représenté ci-dessous.



- Sur cet arbre, on voit que $\mathbb{P}(A) = 0.3$ et $\mathbb{P}(C) = 0.6$.
- Puisque la somme des probabilités issues d'une branche vaut 1, on a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$, soit $\mathbb{P}(B) = 0.1$.
- La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(D)$ se lit sur la branche qui relie A à D . Ainsi, $\mathbb{P}_A(D) = 0.8$.
- La somme des probabilités issues du nœud C doit valoir 1.
On a donc $\mathbb{P}_C(D) + \mathbb{P}_C(E) + \mathbb{P}_C(F) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_C(D) = 0.3$.

■

Cette règle traduit le fait que l'on construit l'arbre en découpant l'univers selon des événements disjoints. Ici, $A \cap B = \emptyset$.

Propriété 2 — Règle du produit : Dans un arbre pondéré la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette issue

■ **Exemple 4 :** Pour obtenir l'issue $A \cap D$, on passe par les sommets A puis D .

On a alors $\mathbb{P}(A \cap D) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$.

■

On retrouve la relation $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$.

1.2 Formule des probabilités totales

Définition 2 — Partition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

On dit que les événements A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de Ω lorsque

- Les ensembles A_1, A_2, \dots, A_n sont non vides ;
- Les ensembles A_1, A_2, \dots, A_n sont deux à deux disjoints ;
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

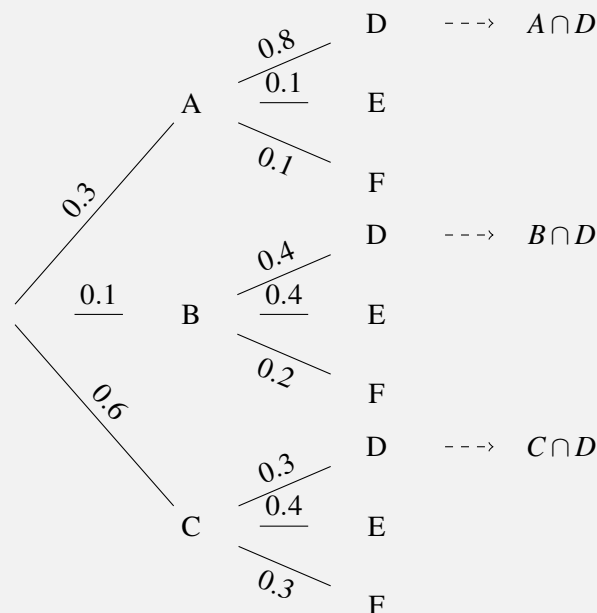
Dans le cadre des probabilités, on parle également de **système complet d'événements**.

■ **Exemple 5 :** On considère $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ainsi que les événements $A_1 = \{1; 3\}$, $A_2 = \{2; 4; 5; 6; 7\}$ et $A_3 = \{8\}$. A_1, A_2 et A_3 forment une partition de Ω . ■

Propriété 3 — Formule des probabilités totales : On considère un événement B et une partition A_1, A_2, \dots, A_n de l'univers Ω . Alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

■ **Exemple 6 :** On reprend l'exemple de la partie précédente. On souhaite calculer la probabilité $\mathbb{P}(D)$. Pour cela, on regarde l'ensemble des branches qui contiennent l'événement D .



- A, B et C forment une partition de Ω .
- On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$. De plus,
 - $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D) \times \mathbb{P}(A) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$;
 - $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D) \times \mathbb{P}(B) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$;
 - $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$.
- Ainsi, $\mathbb{P}(D) = 0.24 + 0.04 + 0.18 = 0.46$. ■

2 Variable aléatoire réelle

2.1 Variable aléatoire

Définition 3 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans \mathbb{R} .

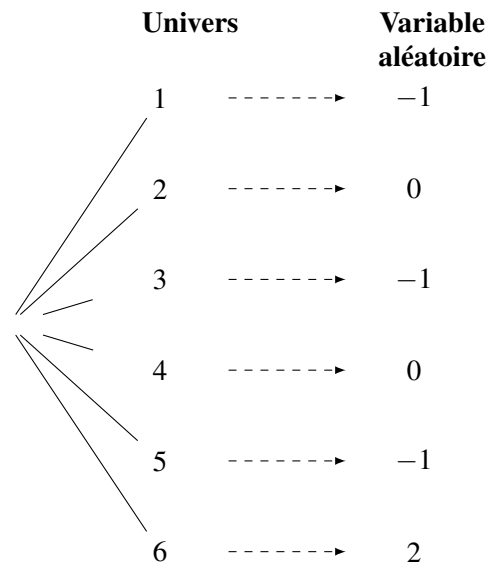
Les variables aléatoires sont en général notées X .

■ **Exemple 7 :** On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 compris. L'univers de l'expérience aléatoire est donc l'ensemble $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Si le nombre obtenu est 6, on gagne 2 points. Si le nombre est impair, on perd 1 point. Dans les autres cas, on ne gagne ni ne perd aucun point.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés selon le résultat.

- Si on obtient le nombre 1, on perd 1 point.
On a ainsi $X(1) = -1$.
- Si on obtient le nombre 6, on gagne 2 points.
On a ainsi $X(6) = 2$.
- On a également $X(2) = 0$, $X(3) = -1$, $X(4) = 0$ et $X(5) = -1$.



Définition 4 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et a un réel.

On note $\{X = a\}$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.

On peut définir de la même manière les événements $\{X < a\}$, $\{X \leq a\}$, $\{X \geq a\}$...

■ **Exemple 8 :** On reprend l'exemple précédent.

- L'événement $\{X = -1\}$ correspond aux issues qui font perdre un point, soit les issues 1, 3 et 5.
- L'événement $\{X \geq 0\}$ correspond aux issues qui font gagner 0 point ou plus, soit les issues 2, 4 et 6.

2.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 5 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω .

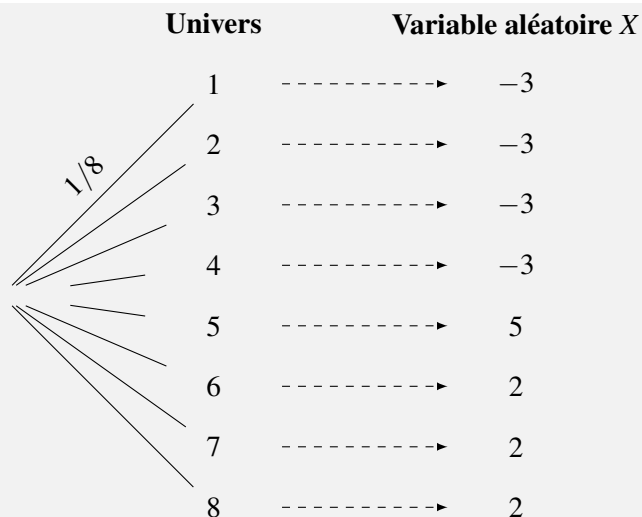
La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel k , associe la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

On rappelle que la somme des probabilités doit valoir 1 !

■ **Exemple 9 :** On choisit uniformément au hasard un nombre entier entre 1 et 8 compris.

- Si le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6, on gagne 2 points.
- Si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4, on perd 3 points.
- Si le nombre obtenu est 5, on gagne 5 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés après l'expérience.



X peut donc prendre trois valeurs : -3 , 2 ou 5 . Pour déterminer la loi de X , il faut donc déterminer $\mathbb{P}(X = -3)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$.

- L'événement $\{X = -3\}$ est composé des issues 1, 2, 3 et 4.
Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
- L'événement $\{X = 2\}$ est composé des issues 6, 7 et 8.
Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8}$.
- L'événement $\{X = 5\}$ est composé de l'issue 5.
Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{8}$.

On peut résumer la loi de la variable aléatoire X dans un tableau.

k	-3	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2.3 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par X . Pour i allant de 1 à n , on note p_i la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$. L'espérance de X , notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_ix_i.$$

Il s'agit en quelque sorte de la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X , pondérées par leurs probabilités. Nous verrons dans un prochain chapitre que le terme de moyenne prendra tout son sens...

■ **Exemple 10 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$$E[X] = \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{4} \times 8 = \frac{8}{3}.$$

« En moyenne », la variable aléatoire X vaut $\frac{8}{3}$. ■

2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, \dots, x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X . La variance $V(X)$, notée $V(X)$, est la valeur

$$V(X) = p_1(x_1 - E[X])^2 + p_2(x_2 - E[X])^2 + \dots + p_n(x_n - E[X])^2 = \sum_{i=1}^n p_i(x_i - E[X])^2.$$

Cette quantité mesure la dispersion de la variable aléatoire autour de l'espérance.

Remarque : On a en fait $V(X) = E[(X - E[X])^2]$.

■ **Exemple 11 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-3	1	4	9
$\mathbb{P}(X = k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Dans un premier temps, on calcule l'espérance de la variable aléatoire X .

$$E[X] = -3 \times 0.6 + 1 \times 0.2 + 4 \times 0.15 + 9 \times 0.05 = -0.55.$$

Pour calculer la variance,

- Pour chaque valeur de la variable aléatoire, on retire l'espérance. On dit que l'on centre la variable aléatoire ;
- On met chaque nombre obtenu au carré ;
- Chaque nombre est multiplié par sa probabilité ;
- On ajoute alors chacun des nombres obtenus.

Dans ce cas,

x_i	-3	1	4	9
$x_i - E[X]$	-2.45	1.55	4.55	9.55
$(x_i - E[X])^2$	6.0025	2.4025	20.7025	91.2025
p_i	0.6	0.2	0.15	0.05
$p_i(x_i - E[X])^2$	3.6015	0.4805	3.105375	4.560125

La variance de X vaut donc

$$V(X) = 3.6015 + 0.4805 + 3.105375 + 4.560125 = 11.7475.$$

■

Propriété 4 — Formule de König-Huygens : Soit X une variable aléatoire. On a alors

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

■ **Exemple 12 :** Reprenons l'exemple précédent. Pour déterminer la loi de X^2 , il suffit de mettre les valeurs prises par la variable aléatoire au carré. On a alors

k	9	1	16	81
$\mathbb{P}(X^2 = k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Ainsi, $E[X^2] = 9 \times 0.6 + 1 \times 0.2 + 16 \times 0.15 + 81 \times 0.05 = 12.05$.

On a donc $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 12.05 - (-0.55)^2 = 11.7475$. On retrouve bien la valeur précédente.

■

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X , noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type mesure la "variation moyenne" de la variable aléatoire autour de l'espérance.

■ **Exemple 13 :** Dans l'exemple précédent, l'écart-type était donc $\sigma(X) = \sqrt{11.7475} \simeq 3.42$.

■