Cours : Rappels de probabilité

Avant de s'engager sur le programme de terminale, faisons quelques rappels de probabilités de l'année de Première.

Dans tout ce chapitre, on note Ω l'univers non vide d'une expérience aléatoire.
On rappelle que pour deux événements A et B de Ω, l'événement $A \cap B$ est l'événement qui est réalisé lorsque « à la fois A et B sont réalisés ».
De plus, l'événement $\bar{A}$, appelé contraire de A, est réalisé si et seulement si A ne l'est pas.

$\mathbb{P}(A)$ désignera la probabilité de l'événement A. On a alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

1 Probabilité conditionnelle

Définition 1 — Probabilité conditionnelle : Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la quantité

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

■ **Exemple 1 :** On considère l'univers $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. On tire un nombre uniformément au hasard sur Ω. On considère les événements

- A : le nombre est pair ;
- B : le nombre est supérieur ou égal à 3.

Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, on a alors $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Par ailleurs, $A \cap B = \{4;6\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Appliquant la définition, on trouve donc

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

■

Cette probabilité s'interprète comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé.

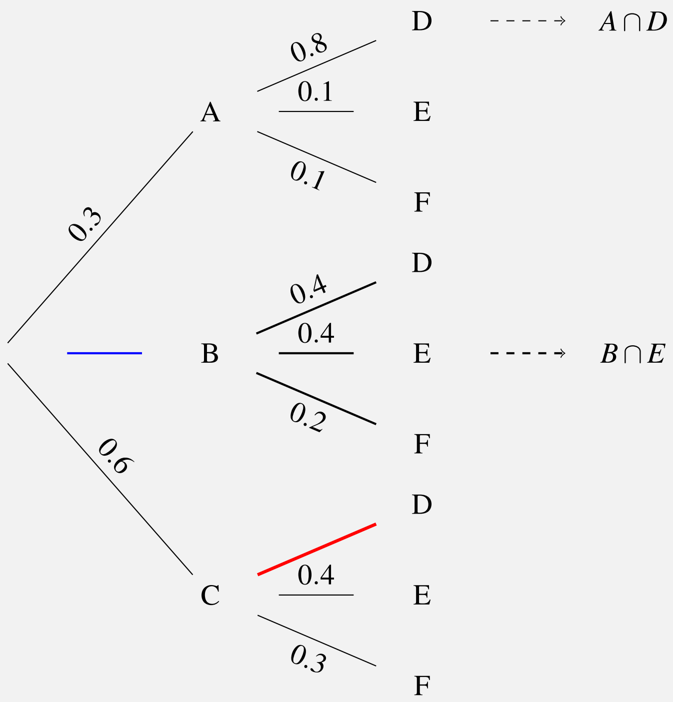
■ **Exemple 2 :** Une entreprise commande à une société de sondage une enquête sur la satisfaction de ses clients. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité qu'un client réponde est de 0,25. Si le client répond à l'appel, la probabilité qu'il réponde au questionnaire de la société est de 0,3. On note R l'événement « la personne répond à l'appel » et Q l'événement « la personne répond au questionnaire ».

D'après l'énoncé, on a $\mathbb{P}(R) = 0{,}25$ et $\mathbb{P}_R(Q) = 0{,}3$. Ainsi, la probabilité qu'une personne prise au hasard réponde à l'appel puis au questionnaire vaut $\mathbb{P}(R \cap Q) = \mathbb{P}(R) \times \mathbb{P}_R(Q) = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075$. ■

1.1 Construction d'un arbre pondéré

Propriété 1 — Règle de la somme : Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités issues d'un nœud est égale à 1.

■ **Exemple 3 :** On considère une succession de deux expériences aléatoires dont l'arbre pondéré associé est représenté ci-dessous.



- Sur cet arbre, on voit que $\mathbb{P}(A) = 0.3$ et $\mathbb{P}(C) = 0.6$.
- Puisque la somme des probabilités issues d'une branche vaut 1, on a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$, soit $\mathbb{P}(B) = 0.1$.
- La probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_A(D)$ se lit sur la branche qui relie A à D. Ainsi, $\mathbb{P}_A(D) = 0.8$.
- La somme des probabilités issues du nœud C doit valoir 1.
  On a donc $\mathbb{P}_C(D) + \mathbb{P}_C(E) + \mathbb{P}_C(F) = 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_C(D) = 0.3$.

■

Cette règle traduit le fait que l'on construit l'arbre en découpant l'univers selon des événements disjoints. Ici, $A \cap B = \varnothing$.

Propriété 2 — Règle du produit : Dans un arbre pondéré la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités du chemin aboutissant à cette issue

■ **Exemple 4 :** Pour obtenir l'issue $A \cap D$, on passe par les sommets A puis D.

On a alors $\mathbb{P}(A \cap D) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$. ■

On retrouve la relation $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D)$.

1.2 Formule des probabilités totales

Définition 2 — Partition : Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de Ω lorsque

- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont non vides ;
- Les ensembles A_1, A_2, ..., A_n sont deux à deux disjoints ;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

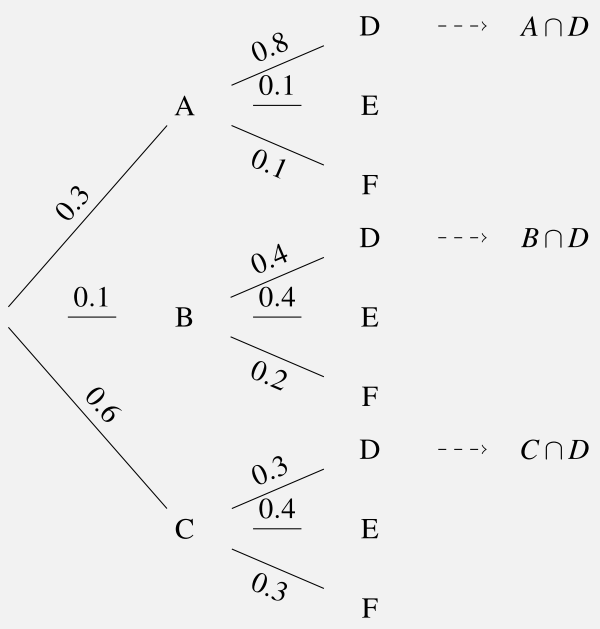
Dans le cadre des probabilités, on parle également de **système complet d'événements**.

■ **Exemple 5 :** On considère $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$ ainsi que les événements $A_1 = \{1;3\}$, $A_2 = \{2;4;5;6;7\}$ et $A_3 = \{8\}$. A_1, A_2 et A_3 forment une partition de Ω. ■

Propriété 3 — Formule des probabilités totales : On considère un événement B et une partition A_1, A_2, ..., A_n de l'univers Ω. Alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \ldots + \mathbb{P}(B \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

■ **Exemple 6 :** On reprend l'exemple de la partie précédente. On souhaite calculer la probabilité $\mathbb{P}(D)$. Pour cela, on regarde l'ensemble des branches qui contiennent l'événement D.



- A, B et C forment une partition de Ω.
- On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) + \mathbb{P}(C \cap D)$. De plus,
  - $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}_A(D) \times \mathbb{P}(A) = 0.8 \times 0.3 = 0.24$;
  - $\mathbb{P}(B \cap D) = \mathbb{P}_B(D) \times \mathbb{P}(B) = 0.4 \times 0.1 = 0.04$;
  - $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}_C(D) \times \mathbb{P}(C) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$.
- Ainsi, $\mathbb{P}(D) = 0.24 + 0.04 + 0.18 = 0.46$. ■

2 Variable aléatoire réelle

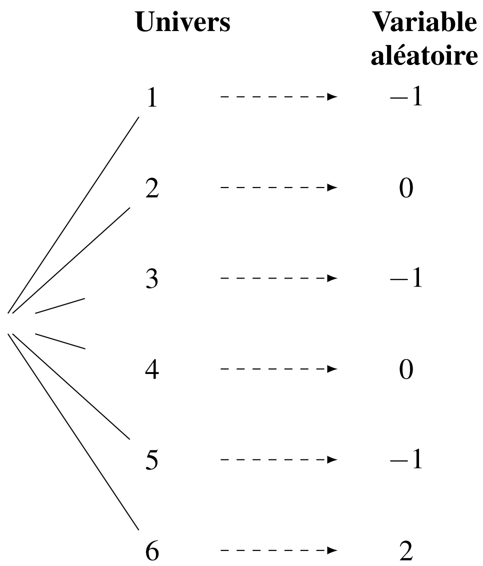
2.1 Variable aléatoire

Définition 3 : On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Les variables aléatoires sont en général notées X.

Exemple 7 : On choisit un nombre entier au hasard entre 1 et 6 compris. L'univers de l'expérience aléatoire est donc l'ensemble $\{1;2;3;4;5;6\}$.
Si le nombre obtenu est 6, on gagne 2 points. Si le nombre est impair, on perd 1 point. Dans les autres cas, on ne gagne ni ne perd aucun point.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés selon le résultat.

- Si on obtient le nombre 1, on perd 1 point.
  On a ainsi $X(1) = -1$.
- Si on obtient le nombre 6, on gagne 2 points.
  On a ainsi $X(6) = 2$.
- On a également $X(2) = 0$, $X(3) = -1$, $X(4) = 0$ et $X(5) = -1$.

■



Définition 4 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers Ω et a un réel.
On note $\{X = a\}$ l'événement qui regroupe toutes les issues ω de Ω telle que $X(\omega) = a$.
On peut définir de la même manière les événements $\{X < a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $\{X \geqslant a\}$...

Exemple 8 : On reprend l'exemple précédent.

- L'événement $\{X = -1\}$ correspond aux issues qui font perdre un point, soit les issues 1, 3 et 5.
- L'événement $\{X \geqslant 0\}$ correspond aux issues qui font gagner 0 point ou plus, soit les issues 2, 4 et 6.

■

2.2 Loi d'une variable aléatoire

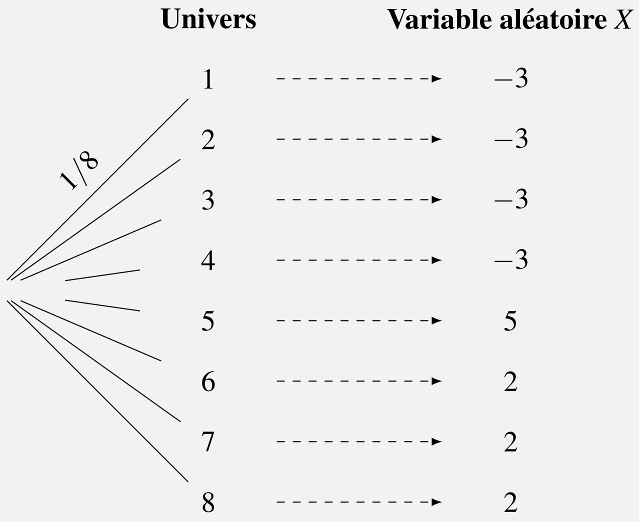
Définition 5 : Soit X une variable aléatoire réelle sur un univers fini Ω.
La loi de probabilité de X est la fonction qui, à chaque réel k, associe la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

On rappelle que **la somme des probabilités doit valoir 1** !

Exemple 9 : On choisit uniformément au hasard un nombre entier entre 1 et 8 compris.

- Si le nombre obtenu est supérieur ou égal à 6, on gagne 2 points.
- Si le nombre obtenu est inférieur ou égal à 4, on perd 3 points.
- Si le nombre obtenu est 5, on gagne 5 points.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points gagnés après l'expérience.



X peut donc prendre trois valeurs : -3, 2 ou 5. Pour déterminer la loi de X, il faut donc déterminer $\mathbb{P}(X = -3)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 5)$.

- L'événement $\{X = -3\}$ est composé des issues 1, 2, 3 et 4.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.
- L'événement $\{X = 2\}$ est composé des issues 6, 7 et 8.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{3}{8}$.
- L'événement $\{X = 5\}$ est composé de l'issue 5.
  Puisque l'on est en situation d'équiprobabilité, $\mathbb{P}(X = -3) = \dfrac{1}{8}$.

On peut résumer la loi de la variable aléatoire X dans un tableau.

k	-3	2	5
$\mathbb{P}(X = k)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

■

2.3 Espérance d'une variable aléatoire réelle

Définition 6 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par X.
Pour i allant de 1 à n, on note p_i la probabilité $\mathbb{P}(X = x_i)$. L'espérance de X, notée $E[X]$, est la valeur

$$E[X] = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Il s'agit en quelque sorte de la moyenne des valeurs prises par la variable aléatoire X, pondérées par leurs probabilités. Nous verrons dans un prochain chapitre que le terme de moyenne prendra tout son sens...

■ **Exemple 10 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-1	2	3	8
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

L'espérance de la variable aléatoire X vaut :

$$E[X]=\frac{1}{3}\times(-1)+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{4}\times 8=\frac{8}{3}.$$

« En moyenne », la variable aléatoire X vaut $\frac{8}{3}$. ■

2.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire réelle

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire. On note x_1, x_2, ..., x_n les valeurs prises par la variable aléatoire X. La variance X, notée $V(X)$, est la valeur

$$V(X)=p_1(x_1-E[X])^2+p_2(x_2-E[X])^2+\ldots+p_n(x_n-E[X])^2=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E[X])^2.$$

Cette quantité mesure la dispersion de la variable aléatoire autour de l'espérance.

Remarque : On a en fait $V(X)=E[(X-E[X])^2]$.

■ **Exemple 11 :** On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par le tableau suivant.

k	-3	1	4	9
$\mathbb{P}(X=k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Dans un premier temps, on calcule l'espérance de la variable aléatoire X.

$$E[X]=-3\times 0.6+1\times 0.2+4\times 0.15+9\times 0.05=-0.55.$$

Pour calculer la variance,

- Pour chaque valeur de la variable aléatoire, on retire l'espérance. On dit que l'on centre la variable aléatoire ;
- On met chaque nombre obtenu au carré ;
- Chaque nombre est multiplié par sa probabilité ;
- On ajoute alors chacun des nombres obtenus.

Dans ce cas,

x_i	-3	1	4	9
$x_i - E[X]$	-2.45	1.55	4.55	9.55
$(x_i - E[X])^2$	6.0025	2.4025	20.7025	91.2025
p_i	0.6	0.2	0.15	0.05
$p_i(x_i - E[X])^2$	3.6015	0.4805	3.105375	4.560125

La variance de X vaut donc

$$V(X) = 3.6015 + 0.4805 + 3.105375 + 4.560125 = 11.7475.$$

■

Propriété 4 — Formule de König-Huygens : Soit X une variable aléatoire. On a alors

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2.$$

■ **Exemple 12 :** Reprenons l'exemple précédent. Pour déterminer la loi de X^2, il suffit de mettre les valeurs prises par la variable aléatoire au carré. On a alors

k	9	1	16	81
$\mathbb{P}(X^2 = k)$	0.6	0.2	0.15	0.05

Ainsi, $E[X^2] = 9 \times 0.6 + 1 \times 0.2 + 16 \times 0.15 + 81 \times 0.05 = 12.05$.
On a donc $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 12.05 - (-0.55)^2 = 11.7475$. On retrouve bien la valeur précédente.

■

Définition 8 : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle écart-type de X, noté $\sigma(X)$ (sigma), la valeur

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

L'écart-type mesure la "variation moyenne" de la variable aléatoire autour de l'espérance.

■ **Exemple 13 :** Dans l'exemple précédent, l'écart-type était donc $\sigma(X) = \sqrt{11.7475} \simeq 3.42$. ■

Exercices

Probabilités conditionnelles

► Exercice 1 (Polynésie 2021) – Voir le corrigé

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays. Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7% des habitants sont infectés par cette maladie. Parmi les individus infectés, 20% sont déclarés négatifs. Parmi les individus sains, 1% sont déclarés positifs. Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note

- M l'événement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'événement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation.
2. (a) Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée et que son test soit positif ?
   (b) Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.
3. On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ? On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

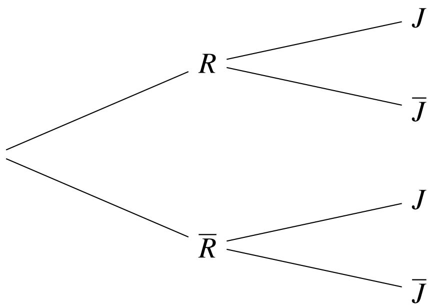
► Exercice 2 (Centres étrangers 2021) – Voir le corrigé

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17% de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32% sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

On interroge une personne au hasard et on note :

- R : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun » ;
- J : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré modélisant cette situation.



2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11% de la population française. Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun. On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

► Exercice 3 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

Dans une école de statistiques, le recrutement se fait de deux façons :

- 10% des candidats sont sélectionnés sur leur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60% d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20% d'entre eux sont admis à l'école.

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On note

- D l'événement : « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement : « le candidat a été admis à l'école ».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité qu'un candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné initialement ?

► Exercice 4 – Voir le corrigé

D'année en année, les professeurs doivent rivaliser d'imagination pour inventer des sujets de bac blanc à leurs élèves. Certains sujets comportent des exercices sur les suites et d'autres pas. On s'intéresse à la probabilité de présence d'un exercice sur les suites pour une année donnée et on fait les hypothèses suivantes :

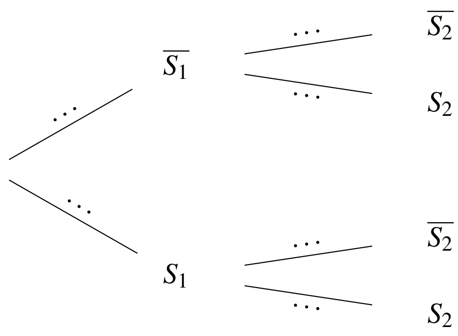
- Le bac blanc de l'année 2021 comporte un exercice sur les suites ;
- Si le bac blanc d'une année comporte un exercice sur les suites, la probabilité que celui de l'année suivante en ait également un est de 0,7 ;
- Si le bac blanc de d'une année ne comporte pas d'exercice sur les suites, la probabilité que celui de l'année suivante en ait un est de 0,9.

Pour tout entier naturel n, on note S_n l'événement "le bac blanc de l'année 2021 + n comporte un exercice sur les suites" et on note $p_n = \mathbb{P}(S_n)$. D'après l'énoncé, on a alors $p_0 = \mathbb{P}(S_0) = 1$. **Dans cet exercice, les résultats seront si nécessaires arrondis à 10^{-3} près.**

Partie A : D'ici à 2023...

On s'intéresse dans un premier temps aux sujets qui tomberont en 2022 et 2023.

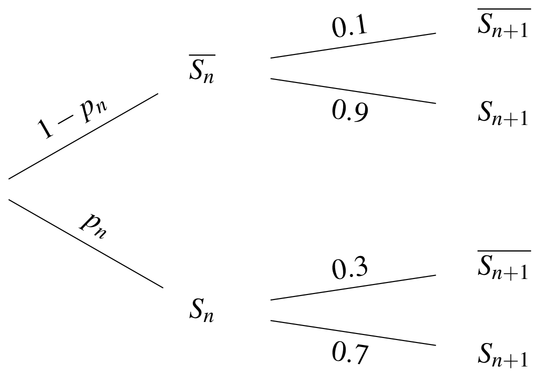
1. A l'aide des informations de l'énoncé, recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant.



2. Que représente p_2 ? Montrer que $p_2 = 0{,}76$.
3. Des élèves venus du futur affirment que le bac blanc de l'an 2023 comportait bien un exercice sur les suites. Quelle est la probabilité que celui de l'an 2022 en comportait un également ?

Partie B : Comportement général

On rappelle que pour tout entier n, $p_n = \mathbb{P}(S_n)$ désigne la probabilité que le sujet comporte un exercice sur les suites l'année 2021 + n et que $p_0 = 1$. On peut alors construire l'arbre de probabilités suivant.



1. Montrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = -0{,}2p_n + 0{,}9$.
2. Pour tout entier naturel n, on note alors $u_n = p_n - 0{,}75$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   (c) Montrer alors que pour tout entier naturel n, $p_n = 0.75 + 0.25 \times (-0.2)^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (p_n) en $+\infty$ et interpréter cette limite dans le cadre de l'exercice.

► Exercice 5 – Voir le corrigé

Une étude a montré que, pour la bonne santé mentale des lycéens, il était nécessaire que des frites figurent au menu de la cantine au moins 2 semaines sur 3 en moyenne. Dans les cuisines d'un certain lycée, le menu est élaboré de la manière suivante :

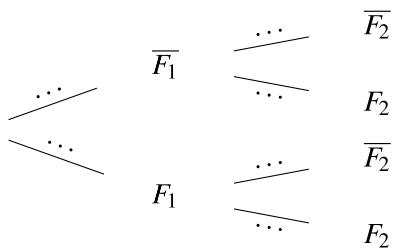
- La probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la première semaine est de $\frac{4}{5}$.
- Si des frites sont au menu d'une semaine, la probabilité qu'il y en ait la suivante vaut $\frac{2}{5}$.
- S'il n'y a pas de frites au menu, la probabilité qu'il y en ait la semaine suivante est de $\frac{4}{5}$.
- Ces affirmations restent vraies même s'il y a des vacances entre les semaines concernées, peu importe l'année étudiée.

Pour tout entier naturel non nul n, on note F_n l'événement « il y a des frites à la cantine lors de la semaine n » et on note $p_n = \mathbb{P}(F_n)$. On aura ainsi que $p_1 = \frac{4}{5}$.

Partie A : Sur deux semaines...

On s'intéresse dans un premier temps aux deux premières semaines d'ouvertures de la cantine.

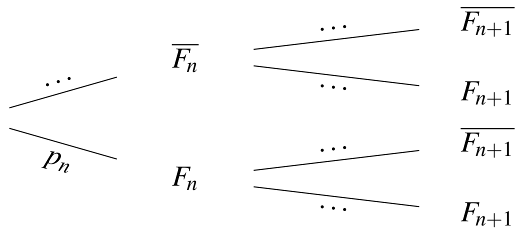
1. A l'aide des informations de l'énoncé, recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.
2. Que représente p_2 ? Montrer que $p_2 = \dfrac{12}{25}$.
3. Le menu de la deuxième semaine a fuité et des frites figurent sur ce menu. Quelle est la probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la première semaine ? On exprimera cette probabilité sous la forme d'une fraction irréductible.



Partie B : Comportement général

On rappelle que pour tout entier non nul n, $p_n = \mathbb{P}(F_n)$ désigne la probabilité des frites soient au menu de la cantine lors de la semaine n et que $p_1 = 0{,}8$.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant, traduisant la situation.



2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} = -\dfrac{2}{5}p_n + \dfrac{4}{5}$.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on note alors $u_n = p_n - \dfrac{4}{7}$.
   (a) Montrer la suite (u_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.
   (b) Montrer alors que pour tout entier naturel non nul n, $p_n = \dfrac{4}{7} + \dfrac{8}{35} \times \left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$.
4. Déterminer la limite de la suite (p_n) en $+\infty$. La bonne santé mentale des élèves de cet établissement est-elle assurée ?

Notion de variable aléatoire

► Exercice 6 – Voir le corrigé

On considère une variable aléatoire X dont la loi est résumée dans un tableau.

k	-2	0	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.3	p	0.2

1. Déterminer la valeur du réel p pour que l'on ait effectivement une loi de probabilité.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$

► Exercice 7 – Voir le corrigé

Dans une urne, on place 7 boules vertes, 3 boules rouges et 2 boules bleues. On tire une boule au hasard : si la boule est bleue, on gagne 3 euros. Si elle est rouge, on gagne 1 euro, sinon, on perd un euro. On note X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique de ce tirage. Donner la loi de probabilité de la variable X.

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et on regarde le résultat à chaque fois.

1. Construire un arbre de probabilités de cette expérience. Combien a-t-on d'issues ?
2. On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de Pile. Donner la loi de probabilité de X.
3. Reprendre ces deux questions si la pièce est truquée et que la probabilité d'obtenir Pile est de 0,6.

► Exercice 9 – Voir le corrigé

On lance deux dés cubiques équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note X le plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

▶ Exercice 10 – Voir le corrigé

Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X, dont la loi est résumée dans le tableau suivant.

k	-3	1	2	5
$\mathbb{P}(X=k)$	0.4	0.2	0.1	0.2

▶ Exercice 11 – Voir le corrigé

Paul se rend à la gare en voiture. On note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous. Déterminer l'espérance de la variable T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\mathbb{P}(T=k)$	0.14	0.13	0.13	0.12	0.12	0.11	0.10	0.08	0.07

▶ Exercice 12 – Voir le corrigé

On place 1 boule blanche et n boules noires dans une urne. On tire au hasard une boule dans cette urne. Si elle est blanche, on gagne 10 euros. Sinon, on perd 1 euro. On note X la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur, positif ou négatif.

1. Construire le tableau résumant la loi de probabilité de X en fonction de n.
2. Exprimer $E[X]$ en fonction de n.
3. On dit que le jeu est équitable si $E[X]=0$. Pour quelle valeur de n le jeu est-il équitable ?

▶ Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère un entier naturel n strictement positif. On choisit un nombre uniformément au hasard entre 1 et n inclus et note X le résultat obtenu. Calculer $E[X]$.

▶ Exercice 14 – Voir le corrigé

Une urne contient n jetons ($n \geqslant 9$) indiscernables au toucher, dont sept sont noirs et les autres sont blancs. On tire successivement et sans remise deux jetons de cette urne et on note X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes obtenues lors du tirage. Déterminer la valeur de n pour laquelle l'espérance de X est maximale.

Exercices de synthèse

▶ Exercice 15 (Centres étrangers 2022) – Voir le corrigé

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.
   (a) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
   (b) Calculer la probabilité de perdre 9 euros sur une partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
   (a) Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
   (b) Résoudre l'inéquation pour x réel : $-x^2+30x-81>0$
   (c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
   (d) Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

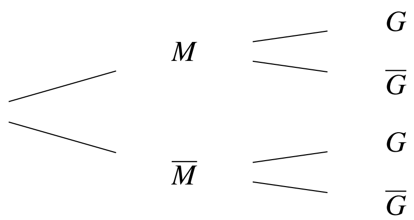
► Exercice 16 (Métropole 2022) – Voir le corrigé

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte. Une étude a montré que 70% des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60% visitent la grotte. Cette étude montre aussi que 6% des clients de l'hôtel ne font aucune visite. On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

- M l'évènement : « le client visite le musée » ;
- G l'évènement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'évènement contraire de M, $\overline{G}$ l'évènement contraire de G, et pour tout évènement E, on note $p(E)$ la probabilité de E. Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p(M\cap G)=0.06$.

1. (a) Vérifier que $p_{\overline{M}}(\overline{G})=0.2$, où $p_{\overline{M}}(\overline{G})$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.
   (b) L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation. Compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



   (c) Quelle est la probabilité de l'évènement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?
   (d) Montrer que $p(G)=0{,}66$.
2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?
3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :
   - visite du musée : 12 euros ;
   - visite de la grotte : 5 euros.

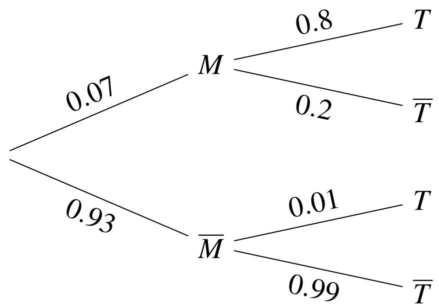
   On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.
   (a) Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de T.
   (c) Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour. Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.
4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros. Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

Corrigés

Probabilités conditionnelles

► Correction 1 – Voir l'énoncé

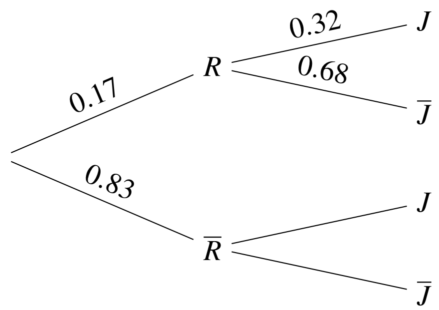
1. On construit l'arbre pondéré suivant.



2. (a) La probabilité pour que la personne soit infectée et que son test soit positif est $\mathbb{P}(M\cap T)$.
   Cette probabilité vaut $\mathbb{P}(M)\times\mathbb{P}_M(T)$ soit 0.07×0.8 soit 0.056.
   (b) $(M;\overline{M})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales
   $$\mathbb{P}(T)=\mathbb{P}(M\cap T)+\mathbb{P}(\overline{M}\cap T)=0.056+0.93\times 0.01=0.0653.$$
3. On a $\mathbb{P}_T(M)=\dfrac{\mathbb{P}(M\cap T)}{\mathbb{P}(T)}=\dfrac{0.056}{0.0653}\simeq 0.86$. La probabilité qu'une personne dont le test est positif soit infectée est d'environ 0,86.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

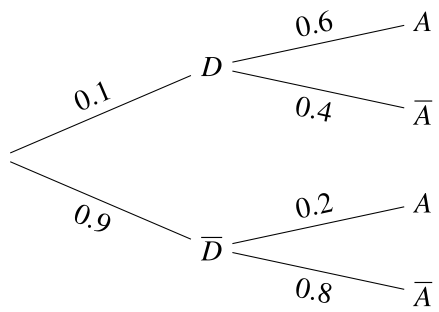
1. On complète l'arbre pondéré modélisant cette situation.



2. On a $\mathbb{P}(R\cap J)=\mathbb{P}(R)\times\mathbb{P}_R(J)=0.17\times 0.32=0.0544$.
3. L'énoncé dit que $P(J)=11$. Or, $(R,\overline{R})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(J)=\mathbb{P}(R\cap J)+\mathbb{P}(\overline{R}\cap J)$. Ainsi, $0.11=0.0544+\mathbb{P}(\overline{R}\cap J)$ d'où $\mathbb{P}(\overline{R}\cap J)=0.11-0.0544=0.0556$. soit environ 0.056 à 10^{-3} près.
4. On a $\mathbb{P}_{\overline{R}}(J)=\dfrac{\mathbb{P}(\overline{R}\cap J)}{\mathbb{P}(\overline{R}}=\dfrac{0.056}{0.83}\simeq 0.068$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

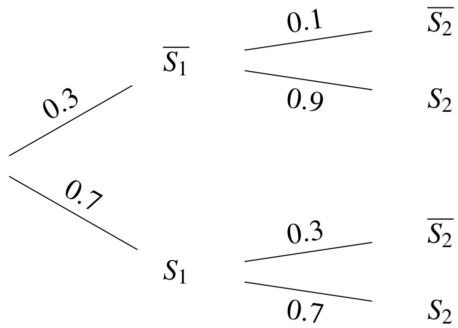


2. On a $\mathbb{P}(D\cap A)=\mathbb{P}(D)\times\mathbb{P}_D(A)=0.1\times 0.6=0.06$.
3. $(D,\overline{D})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(D\cap A)+\mathbb{P}(\overline{D}\cap A)=0.06+0.9\times 0.2=0.24.$$
4. On a $\mathbb{P}_A(\overline{D})=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap\overline{D})}{\mathbb{P}(A)}=\dfrac{0.9\times 0.2}{0.24}=0.75$. Il y a 75% de chances que cette élève n'ait pas été admis sur dossier.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

Partie A : D'ici à 2023...

1. A l'aide des informations de l'énoncé, on complète l'arbre de probabilité suivant.



2. p_2 représente la probabilité d'avoir un exercice sur les suites en 2023. $(S_1,\overline{S_1})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,
$$p_2=\mathbb{P}(S_2)=\mathbb{P}(S_1\cap S_2)+\mathbb{P}(\overline{S_1}\cap S_2)=0.7\times 0.7+0.3\times 0.9=0.49+0.27=0.76.$$
3. On cherche $\mathbb{P}_{S_2}(S_1)$. $\mathbb{P}_{S_2}(S_1)=\dfrac{\mathbb{P}(S_2\cap S_1)}{\mathbb{P}(S_2)}=\dfrac{0.7\times 0.7}{0.76}\simeq 0.644$. La probabilité que celui de l'an 2022 comportait un exercice sur les suites est de 0,644 environ.

Partie B : Comportement général

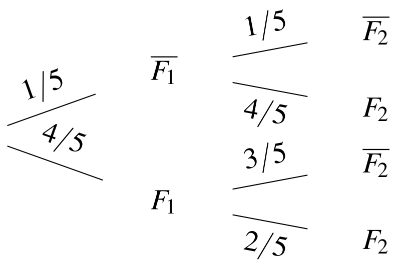
1. $(S_n,\overline{S_n})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a donc $p_{n+1}=\mathbb{P}(S_n\cap S_{n+1})+\mathbb{P}(\overline{S_n}\cap S_{n+1})=p_n\times 0.7+(1-p_n)\times 0.9=-0.2p_n+0.9$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0.75 = -0.2p_n + 0.9 - 0.75 = -0.2(u_n + 0.75) + 0.15 = -0.2u_n$.
   (b) La suite (u_n) est géométrique de raison -0.2 et de premier terme $u_0 = p_0 - 0.75 = 0.25$.
   (c) Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = 0.25 \times (-0.2)^n$ et $p_n = u_n + 0.75 = 0.75 + 0.25 \times (-0.2)^n$.
3. Puisque $-1 < -0.2 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0.2)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0.75$. À terme, il y a 75% de chance que le bac blanc comporte un exercice sur les suites.

► Correction 5 – Voir l'énoncé

Partie A : Sur deux semaines...

1. On a complété l'arbre de probabilités ci-dessous.



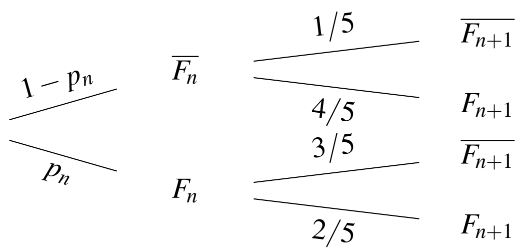
2. p_2 est la probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la deuxième semaine. $(F_1;\overline{F_1})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$p_2 = \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \times \mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}_{\overline{F_1}}(F_2) \times \mathbb{P}(\overline{F_1}) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}.$$

3. On a $\mathbb{P}_{F_2}(F_1) = \dfrac{\mathbb{P}(F_2 \cap F_1)}{\mathbb{P}(F_2)} = \dfrac{\frac{4}{5} \times \frac{2}{5}}{\frac{12}{25}} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{3}{4}$. La probabilité qu'il y ait des frites à la cantine la première semaine est de $\dfrac{3}{4}$.

Partie B : Comportement général

1. L'arbre pondéré suivant traduit la situation.



2. $(F_n;\overline{F_n})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$p_{n+1} = \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) \times \mathbb{P}(F_n) + \mathbb{P}_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \times \mathbb{P}(\overline{F_n}) = p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}p_n + \frac{4}{5}.$$

3. Pour tout entier naturel non nul n, on note alors $u_n = p_n - \dfrac{4}{7}$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+1}=p_{n+1}-\frac{4}{7}=-\frac{2}{5}p_n+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}=-\frac{2}{5}\left(u_n+\frac{4}{7}\right)+\frac{8}{35}=-\frac{2}{5}u_n.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison $-\frac{2}{5}$ et de premier terme $u_1=p_1-\frac{4}{7}=\frac{4}{5}-\frac{4}{7}=\frac{8}{35}$.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n=\frac{8}{35}\times\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ et $p_n=u_n+\frac{4}{7}=\frac{4}{7}+\frac{8}{35}\times\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

4. Puisque $-1<-\frac{2}{5}<1$, il en vient que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{4}{7}$. Or, $\frac{4}{7}<\frac{2}{3}$. La bonne santé mentale des élèves de cet établissement n'est donc pas assurée.

Notion de variable aléatoire

► Correction 6 – Voir l'énoncé

On doit avoir $0.1+0.3+p+0.2=1$ et donc $p=0.4$.

On a $\mathbb{P}(X\leqslant 3)=\mathbb{P}(X=-2)+\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=3)=0.1+0.3+0.4=0.8$. On aurait également pu passer par l'événement contraire.

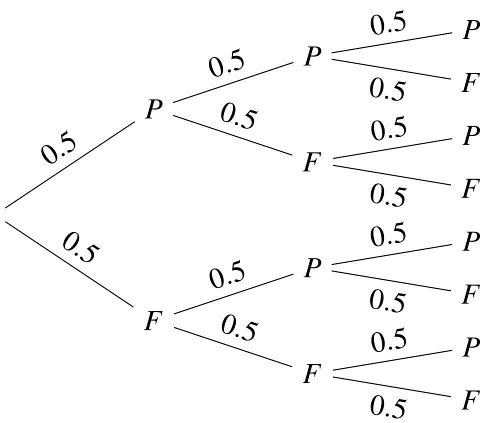
► Correction 7 – Voir l'énoncé

La loi de X est résumée dans le tableau suivant.

k	-1	1	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

► Correction 8 – Voir l'énoncé

On peut modéliser cette expérience par l'arbre suivant, on a alors 8 issues : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF



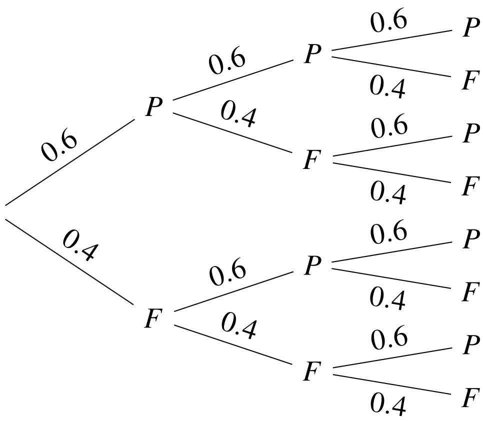
Le tableau suivant donne la probabilité de chaque issue ainsi que le nombre de piles dans cette issue.

Issue	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
Nb piles	3	2	2	1	2	1	1	0
Probabilité	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125

On peut alors en déduire le tableau qui résume la loi de X en sommant les probabilités des issues qui compte le même nombre de piles.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	0.125	0.375	0.375	0.125

On peut alors refaire le même travail lorsque la probabilité d'obtenir Pile vaut 0,6.



Le tableau suivant donne la probabilité de chaque issue ainsi que le nombre de piles dans cette issue (il suffit de multiplier les probabilités rencontrées sur chaque branche).

Issue	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
Nb piles	3	2	2	1	2	1	1	0
Probabilité	0.216	0.144	0.144	0.096	0.144	0.096	0.096	0.064

On peut alors en déduire le tableau qui résume la loi de X en sommant les probabilités des issues qui compte le même nombre de piles.

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	0.064	0.3288	0.432	0.216

► Correction 9 – Voir l'énoncé

La loi de la variable aléatoire X peut être résumée dans le tableau ci-dessous.

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

► Correction 10 – Voir l'énoncé

L'espérance de X vaut $-3\times 0.4+1\times 0.2+2\times 0.1+5\times 0.2=0.2$. Sa variance vaut

$$V(X)=0.4\times(-3-0.2)^2+0.2\times(1-0.2)^2+0.1\times(2-0.2)^2+0.2\times(5-0.2)^2=9.156$$

L'écart-type vaut alors $\sigma(X)=\sqrt{9.156}\simeq 3.026$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

On a $E[T] = 0.14 \times 10 + 0.13 \times 11 + 0.13 \times 12 + 0.12 \times 13 + 0.12 \times 14 + 0.11 \times 15 + 0.1 \times 16 + 0.08 \times 17 + 0.07 \times 18 = 13.5$. Paul met en moyenne 13 minutes et 30 secondes pour se rendre à la gare.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

La loi de la variable aléatoire X peut être résumée dans le tableau suivant.

k	-1	10
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{n+1}$

L'espérance de X vaut alors $-\dfrac{n}{n+1} + 10 \times \dfrac{1}{n+1}$ soit $\dfrac{10-n}{n+1}$. Le jeu est équitable lorsque $n = 10$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

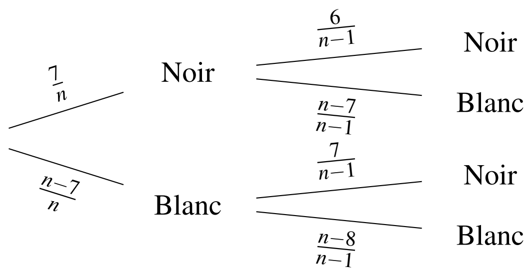
Les issues sont 1, 2, 3, ..., n.

Chaque issue a une probabilité $\dfrac{1}{n}$. L'espérance de X vaut donc $\dfrac{1}{n}(1+2+3+\cdots+n)$.

Or, $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Ainsi, $E(X) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n+1}{2}$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

L'urne contient 7 jetons noirs et $n-7$ jetons blancs. L'arbre suivant permet de modéliser la situation.



La variable aléatoire peut prendre les valeurs 1 (deux jetons noirs ou deux jetons blancs) et 2 (un jeton noir et un jeton blanc). On a par ailleurs,

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{n-7}{n} \times \frac{n-8}{n-1} + \frac{7}{n} \times \frac{6}{n-1} = \frac{(n-7)(n-8)+42}{n(n-1)} = \frac{n^2-15n+98}{n^2-n}.$$

Par ailleurs, on a

$$\mathbb{P}(X=2) = 1 - \mathbb{P}(X=1) = 1 - \frac{n^2-15n+98}{n^2-n} = \frac{14n-98}{n^2-n}$$

Finalement,

$$E(X) = 1 \times \mathbb{P}(X=1) + 2 \times \mathbb{P}(X=2) = \frac{n^2-15n+98}{n^2-n} + 2 \times \frac{14n-98}{n^2-n} = \frac{n^2+13n-98}{n^2-n}$$

On définit alors la fonction f pour tout réel $x \geqslant 9$ par $f(x) = \dfrac{x^2+13x-98}{x^2-x}$.

La fonction f est dérivable sur $[9;+\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 9$, on a

$$f'(x) = \frac{(2x+13)(x^2-x)-(x^2+13x-98)(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{2x^3-2x^2+13x^2-13x-2x^3+x^2-26x^2+13x+196x-98}{(x^2-x)^2}$$

$$= \frac{-14x^2+196x-98}{(x^2-x)^2} = \frac{-14(x^2-14x+7)}{(x^2-x)^2}.$$

Puisque $-14<0$ et que pour tout réel $x \geqslant 9$, $(x^2-x)^2>0$, $f'(x)$ est du signe opposé à de $x^2-14x+7$.

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont $7-\sqrt{42}$ et $7+\sqrt{42}$. On peut alors construire le tableau de signes de $f'(x)$.

x	9		$7+\sqrt{42}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

La fonction f atteint donc son maximum en $7+\sqrt{42}$ soit environ 13,48.

Or, nous recherchons un entier. On teste alors les valeurs $n=13$ et $n=14$ et on calcule l'espérance dans chacun des cas.

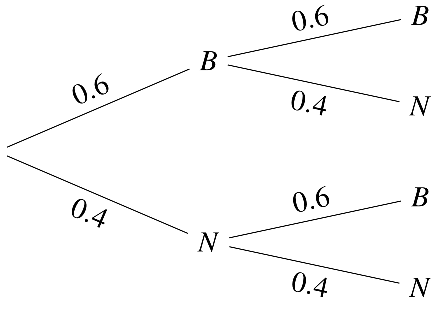
- Si $n=13$, on a $E[X]=\frac{20}{13}$.
- Si $n=14$, on a $E[X]=\frac{20}{13}$.

L'espérance de X est donc maximale si l'on place 6 ou 7 jetons dans l'urne.

Exercices de synthèse

▶ Correction 15 – Voir l'énoncé

1. (a) On modélise la situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant



(b) La probabilité de perdre 9 euros sur une partie correspond au fait de tirer 2 jetons blancs. Ceci arrive avec une probabilité de 0.6×0.6 soit 0.36.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.
   (a) Il y a alors 3 jetons blancs, N jetons noirs et donc $N+3$ jetons au total. La probabilité de tirer deux jetons blancs vaut $\dfrac{9}{(N+3)^2}$.
   La probabilité de tirer deux jetons noirs vaut $\dfrac{N^2}{(N+3)^2}$. La probabilité de tirer deux jetons de couleurs différentes vaut $\dfrac{6N}{(N+3)^2}$: on tire blanc puis noir ou noir puis blanc : la première possibilité à une probabilité de $\dfrac{3}{N+3} \times \dfrac{N}{N+3}$ et la deuxième a une probabilité de $\dfrac{N}{N+3} \times \dfrac{3}{N+3}$.
   On peut alors résumer la loi de X sous la forme d'un tableau.

k	-9	-1	5
$\mathbb{P}(X=k)$	$\dfrac{9}{(N+3)^2}$	$\dfrac{N^2}{(N+3)^2}$	$\dfrac{6N}{(N+3)^2}$

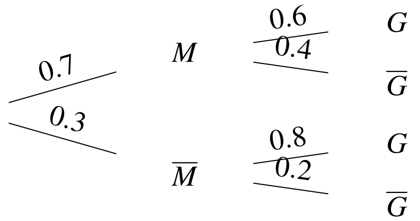
   (b) Le polynôme $-x^2+30x-81>0$ possède deux racines qui sont 3 et 27. Le coefficient dominant de ce polynôme est négatif, ainsi, $-x^2+30x-81>0$ si et seulement si $x \in]3;27[$.
   (c) On a $E(X) = -9 \times \dfrac{9}{(N+3)^2} - 1 \times \dfrac{N^2}{(N+3)^2} + 5 \times \dfrac{6N}{(N+3)^2} = \dfrac{-N^2+30N-81}{(N+3)^2}$. Cette quantité est du signe de $-N^2+30N-81$, qui est strictement positif si et seulement si $3<N<27$. N étant un entier, le jeu est favorable au joueur si le jeu présente entre 4 et 26 boules noirs (4 et 26 inclus).
   (d) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x^2+30x-81}{(x+3)^2}$, définie sur $[0;+\infty[$. f est dérivable sur cet intervalle et, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{(-2x+30)(x+3)^2 - 2(x+3)(-x^2+30x+81)}{((x+3)^2)^2} = \frac{-2x^2-6x+30x+90+2x^2-60x+162}{(x+3)^4}$$

   Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-36x+252}{(x+3)^4}$. $f'(x)$ est du signe de $-36x+252$.
   Or, $-36x+252>0$ si et seulement si $x<7$. Ainsi, f est croissante sur $[0;7]$ puis décroissante sur $[7;+\infty[$. Elle admet donc un maximum en 7. L'espérance de gain du joueur est donc maximal lorsqu'il y a 7 boules noires dans l'urne.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

1. (a) On a $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = \dfrac{p(\overline{M} \cap \overline{G})}{p(\overline{M})}$. Or, 6% des clients ne font aucune visite. Ainsi, $p(\overline{M} \cap \overline{G}) = 0.06$.
   De plus, 70% des clients visitent le musée. Ainsi, $p(M) = 0.7$ et $p(\overline{M}) = 1-0.7 = 0.3$.
   Finalement, $p_{\overline{M}}(\overline{G}) = \dfrac{0.06}{0.3} = 0.2$.
   (b) L'arbre pondéré ci-dessous modélise la situation.



   (c) On a $p(\overline{M} \cap G) = p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(G) = 0.3 \times 0.8 = 0.24$.

(d) $(M,\overline{M})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, $p(G) = p(\overline{M}\cap G) + p(M\cap G) = 0.24 + 0.7\times 0.6 = 0.66$.

2. On a $p_G(M) = \dfrac{p(G\cap M)}{p(G)} = \dfrac{0.42}{0.66} \simeq 0.64 > 0.5$. L'affirmation du responsable de l'hôtel est exacte.

3. (a) La loi de probabilité de T est la suivante.

Événement	$M\cap G$	$\overline{M}\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
Dépense	17	5	12	0
$\mathbb{P}(X=k)$	0.42	0.24	0.28	0.06

(b) On a $E(T) = 17\times 0.42 + 5\times 0.24 + 12\times 0.28 + 0\times 0.06 = 11.7$.

(c) Chaque visiteur dépense en moyenne 11.7 euros. Il faut donc que le nombres x de visiteurs doit tel que $11.7x \geqslant 700$, soit $x \geqslant \dfrac{700}{11.7} \simeq 59.8$. Il faut donc atteindre au moins 60 visiteurs.

4. Notons x le prix de la visite de la grotte. La loi de T est alors la suivante.

Événement	$M\cap G$	$\overline{M}\cap G$	$M\cap\overline{G}$	$\overline{M}\cap\overline{G}$
Dépense	$12+x$	x	12	0
$\mathbb{P}(X=k)$	0.42	0.24	0.28	0.06

Son espérance vaut alors $E(T) = (12+x)\times 0.42 + x\times 0.24 + 12\times 0.28 + 0\times 0.06 = 0.66x + 8.4$. Or, $8.4x + 0.66 \geqslant 15$ si et seulement si $x \geqslant 10$. Le prix de la visite de la grotte doit être fixée à 10 euros.