1. Cours : Primitives et équations différentielles

1 Notion d'équation différentielle

Définition 1 — Équation différentielle : Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction notée y et qui fait intervenir les dérivées de cette fonction.

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{4x-2}$.
f est solution de l'équation différentielle $y' = 4y$.
En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 4\mathrm{e}^{4x-2}$, c'est-à-dire $f'(x) = 4f(x)$. ■

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$.
f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. En effet :

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$u'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

- Pour tout réel x, on pose $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \times \mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. ■

2 Primitive d'une fonction continue

Définition 2 : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une fonction dérivable sur cet intervalle. On dit que F est une *primitive* de f sur I si $F' = f$.

Autrement dit, F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 6x^2 + 4x + 3$ et $F(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 7$. On a bien pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. ■

Théorème 1 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Ce résultat sera démontré (en partie) dans un prochain chapitre. Patience !

Propriété 1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F_1 et F_2 deux primitives de f sur I.

Alors $F_1 - F_2$ est constante : deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration 2 : Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur I. $F_1 - F_2$ est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables sur I. De plus, pour tout réel x dans I

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi, $F_1 - F_2$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I, $F_1 - F_2$ est donc constante sur I. □

Propriété 2 : Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = y_0$.

L'équation différentielle $y' = f$ ayant pour condition initiale $y(x_0) = y_0$ possède une unique solution.

■ **Exemple 4 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ et $F(x) = \ln(x^2+1)$.

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

On cherche alors l'unique primitive F_0 de f qui vaut 5 en 0. Puisque toutes les primitives d'une fonction diffèrent seulement d'une constante, il existe un réel c tel que $F_0 = F + c$ et donc, pour tout réel x,

$$F_0(x) = \ln(x^2+1) + c.$$

Puisque $F_0(0) = 5$, on a alors $\ln(0^2+1) + c = 5$, soit $c = 5$. Pour tout réel x, on a donc

$$F_0(x) = \ln(x^2+1) + 5.$$

■

Propriété 3 : Primitives usuelles

Fonction f	**UNE** Primitive F	Intervalle I
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0;+\infty[$

Le conseil de la leçon : Une fois que vous avez détermine une primitive, dérivez-la ! Vous devez obtenir la fonction de départ. Il est bien plus facile de dériver que de primitiver.

Propriété 4 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, λ, F une primitive de f et G une primitive de g. Alors,

- $F+G$ est une primitive de $f+g$;
- λF est une primitive de λf.

■ **Exemple 5 :** Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x-1} + 5x^2 + \dfrac{3}{x^2}$ sur $I =]0;+\infty[$ est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{x}.$$

■

Propriété 5 : L'essentiel : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telle que pour tout réel $x \in J$, $g(x) \in I$.

$f \circ g$ est une primitive de $g' \times (f' \circ g)$ sur J.

Certaines "formes" de fonction sont à reconnaître pour en calculer les primitives.

- Une primitive d'une fonction de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ où u est une fonction qui ne s'annule pas est $\dfrac{1}{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où u est une fonction strictement positive est $\sqrt{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est une fonction strictement positive est $\ln(u)$.

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-2}$.

Posons, pour tout réel x, $u(x) = x^2+x-2$. On remarque alors que $f(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{x^2+x-2}$. ■

■ **Exemple 7 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$. Posons, pour tout réel x, $u(x) = 1+\mathrm{e}^{2x}$.

Pour tout réel x, $u(x) > 0$. Par ailleurs, on remarque alors que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(1+\mathrm{e}^{2x})$. ■

Malheureusement, certaines fonctions n'admettent pas de primitive pouvant être exprimées à l'aide de fonctions usuelles : il s'agit là d'un théorème démontré par Liouville dans les années 1830.

L'exemple le plus notable est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, très utilisée en probabilités et dont les applications dans d'autres domaines se comptent par centaines (citons ainsi la balistique, l'évaluation du quotient intellectuel, le traitement du signal, le cours de la bourse...).

3 Equation différentielle du premier ordre

3.1 Equations différentielles homogènes $y'+ay=0$

Définition 3 : Soit a un réel. L'équation $y'+ay=0$ ayant pour inconnue une fonction dérivable y sur $\mathbb{R}$ s'appelle "équation différentielle **homogène** du premier ordre, à coefficients constants".

Propriété 6 : Soit a un réel.

Les solutions l'équation $y'+ay=0$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x)=C\mathrm{e}^{-ax}$ où C est un réel quelconque.

De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation différentielle telle que $f(x_0)=y_0$.

Démonstration 3 : Soit C un réel. Pour tout réel x, on pose alors $f(x)=C\mathrm{e}^{-ax}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=-a\times C\mathrm{e}^{-ax}=-af(x)$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x)+af(x)=-af(x)+af(x)=0.$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $y'+ay=0$.

Réciproquement, soit f une solution de l'équation $y'+ay=0$. On a alors, pour tout réel x, $f'(x)+af(x)=0$.

Pour tout réel x, posons alors $g(x)=f(x)\mathrm{e}^{ax}$. g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x)=f'(x)\mathrm{e}^{ax}+af(x)\mathrm{e}^{ax}=\mathrm{e}^{ax}(f'(x)+af(x))=0.$$

Ainsi, g est constante : il existe un réel C telle que, pour tout réel x, $g(x)=C$, c'est-à-dire $f(x)\mathrm{e}^{ax}=C$ et donc $f(x)=C\mathrm{e}^{-ax}$. □

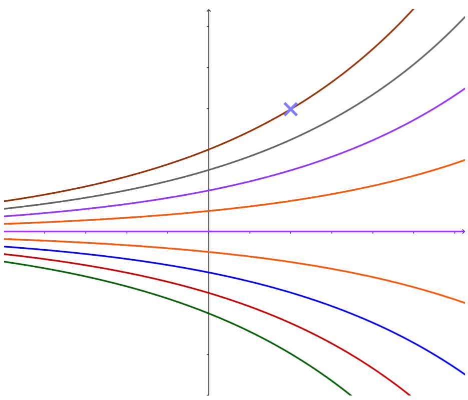
■ **Exemple 8 :** Les solutions de l'équation $y'-2y=0$ sont les fonctions $f:x\mapsto C\mathrm{e}^{2x}$ où C est un réel.

Cherchons l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(3)=1$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x)=C\mathrm{e}^{2x}$.

On a alors $f_0(3)=C\mathrm{e}^{6}$ d'une part et $f_0(3)=1$ d'autre part. Ainsi, $C=\dfrac{1}{\mathrm{e}^6}=\mathrm{e}^{-6}$.

Finalement, pour tout réel x, on a $f_0(x)=\mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x-6}$. ■

Ce théorème signifie que si l'on regarde l'ensemble des courbes des fonctions solutions de l'équation $y'=ay$ et que l'on s'intéresse à un point du plan, il existe une unique courbe qui passe par ce point. En particulier, toute fonction solution qui s'annule n'est autre que la fonction nulle.



3.2 Equation différentielle $y' + ay = b$, avec b réel

Définition 4 : Soit a et b deux réels. L'équation $y' + ay = b$ ayant pour inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ s'appelle "équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants et à second membre constant".

Propriété 7 : Soit a et b deux réels.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$ où C est un réel quelconque.

De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(x_0) = y_0$.

Démonstration 4 : Cherchons tout d'abord une solution constante φ à cette équation. Soit k le réel tel que pour tout réel x, $\varphi(x) = k$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\varphi'(x) = 0$.

Puisque φ est solution de l'équation $y' + ay = b$, on a alors $ak = b$ c'est-à-dire $k = \frac{b}{a}$.

Soit maintenant f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si $f' + af = b$. Or, φ étant également une solution de cette équation, on a donc $b = \varphi' + a\varphi$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si $f' + af = \varphi + a\varphi'$, ce qui équivaut à $f' - \varphi' + a(f - \varphi) = 0$, ou encore $(f - \varphi)' + a(f - \varphi) = 0$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$.

Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $(f - \varphi)(x) = Ce^{-ax}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = Ce^{-ax} + \varphi(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$.

□

■ **Exemple 9 :** On cherche à résoudre l'équation $y' - 5y = -2$.

- On détermine les solutions de l'équation homogène associée $y' - 5y = 0$.
  Ce sont les fonctions $x \mapsto Ce^{5x}$ où C est un réel.
- On cherche une solution constante (égale à k) à l'équation de départ $y' - 5y = -2$.
  La dérivée d'une fonction constante étant nulle, on a alors $-5k = -2$ et donc $k = \frac{2}{5}$.
- Les fonctions solutions de l'équation $y' = 5y - 2$ sont donc les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = Ce^{-5x} + \frac{2}{5}$ où C est un réel.

On souhaite déterminer l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(7) = 12$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = Ce^{-5x} + \frac{2}{5}$.

On a alors $f_0(7) = Ce^{-35} + \frac{2}{5} = 12$ et donc $C = \frac{58}{5}e^{+35}$. Ainsi, pour tout réel x, $f_0(x) = \frac{58}{5}e^{-5x+35} + \frac{2}{5}$. ■

Propriété 8 — Formule magique : Pour résoudre une équation du type $y' + ay = b$...

SOLUTION GÉNÉRALE = SOLUTION HOMOGÈNE + SOLUTION CONSTANTE

3.3 Equation différentielle $y' + ay = g$, où g est une fonction

Définition 5 : Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'équation $y' = ay + g$ s'appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre".

Propriété 9 : Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Soit φ une solution particulière de cette équation. Alors f est solution de l'équation $y' + ay = g$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$.

Autrement dit, toute solution de l'équation $y' + ay = g$ est de la forme $f + \varphi$, où f est solution de l'équation $y' + ay = 0$ et φ est **UNE** solution de l'équation $y' + ay = g$.

Démonstration 5 : La démonstration est en tout point semblable à celle qui a conduit à l'ensemble des fonctions solutions de l'équation $y' + ay = b$. Faisons-la donc à nouveau. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f' + af = b$. Or, φ étant également une solution de cette équation, on a donc $g = \varphi' + a\varphi$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f' + af = \varphi + a\varphi'$, ce qui équivaut à $f' - \varphi' + a(f - \varphi) = 0$, ou encore $(f - \varphi)' + a(f - \varphi) = 0$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$.

Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $(f - \varphi)(x) = Ce^{-ax}$ et donc $f(x) = Ce^{-ax} + \varphi(x)$. □

■ **Exemple 10 :** On considère l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$.

- Les solutions de l'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- La fonction $\varphi : x \mapsto 3x^2 + 3x - 5$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$. En effet, φ est dérivable et pour tout réel x,

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) + 6x^2 - 13 = 6x + 3 - 2(3x^2 + 3x - 5) + 6x^2 - 13 = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = Ce^{2x} + 3x^2 + 3x - 5$, où C est un réel. ■

Propriété 10 — Formule magique : Pour résoudre une équation du type $y' + ay + g$...

SOLUTION GÉNÉRALE = SOLUTION HOMOGÈNE + SOLUTION PARTICULIÈRE

Il existe de nombreux types d'équations différentielles : linéaires, quadratiques, d'ordre divers... Et parmi toutes celles-ci, il en existe peu que l'on sait résoudre.

On compte par exemple les équations de Navier-Stokes qui décrivent les mouvements des fluides newtoniens. Il s'agit d'équation dites "aux dérivées partielles". Les fonctions en jeu utilisent en effet plusieurs variables (de temps et d'espace en l'occurrence) et on dérive alors selon l'une ou l'autre des variables.

Ces équations sont particulières puisque depuis l'an 2000, leur résolution est mise à prix : quiconque permettra une avancée significative dans leur étude recevra, en plus d'un certain prestige auprès de la communauté mathématique, la coquette somme d'un million de dollars.

6 autres problèmes ont été mis à pris par l'Institut Clay cette même année. Depuis, un seul d'entre eux a été résolu.