

1. Exercices

Continuité d'une fonction

► Exercice 1 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

► Exercice 2 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & \text{si } x \leq -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} .

1. Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2 .
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

► Exercice 3 – Voir le corrigé

Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.
Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

► Exercice 4 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x , $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.
Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

► Exercice 5 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x , $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

Suites et fonction continue

► Exercice 6 – Voir le corrigé

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4n^2+1}{n^2+3n+2}}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right)$, en énonçant bien les propriétés utilisées.

► Exercice 7 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie par $f(0) = 1$ et pour tout réel non nul x , $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Pour tout entier naturel non nul n , on pose $u_n = \frac{1}{2n\pi}$.

1. Que vaut $f(u_n)$ pour tout entier naturel n ?
2. Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$ et $f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$. La fonction f est-elle continue en 0 ?

► Exercice 8 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{3}{u_n + 1} + 3$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq 2$ et que la suite (u_n) est croissante.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la limite de la suite (u_n) .

► Exercice 9 – Voir le corrigé

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

1. Supposons que (u_n) converge : quelle peut-être sa limite ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 3$ et que la suite u_n est croissante.
3. Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?

► Exercice 10 (Amérique du Nord 2021) – Voir le corrigé

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0,6 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = 0,75x(1 - 0,15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0, 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
(c) Déterminer la limite l de la suite (u_n) .
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
(a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
(b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace() ci-dessous.

```
1 def menace() :
2     U = 0.6
3     N = 0
4     while U > 0.02 :
5         U = 0.75 * U * (1 - 0.15 * U)
6         N = N + 1
7     return N
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace(). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Théorème des valeurs intermédiaires

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1; 2]$.

► Exercice 12 (Amérique du Nord 2023) – Voir le corrigé

On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2; 4]$ telle que $h(-1) = 0$, $h(1) = 4$ et $h(3) = -1$. Parmi les affirmations suivantes, quelle est l'unique affirmation correcte ?

- La fonction h est croissante sur $[-1; 1]$;
- la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1; 1]$;
- il existe au moins un nombre réel α dans l'intervalle $[1; 2]$ tel que $h(\alpha) = 1$;
- l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-2; 4]$.

► Exercice 13 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x$, définie sur \mathbb{R} .

1. Justifier que f est continue et dérivable sur \mathbb{R} et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
2. Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1; 0]$?
3. Que vaut $f(0)$? Quel est le signe de $f(-1)$?
4. En déduire que l'équation $e^x + x = 0$ admet exactement une solution sur $[-1; 1]$.

► Exercice 14 – Voir le corrigé

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 60x + 3$, définie sur \mathbb{R} .

1. Étudier les variations de la fonction f .
2. En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur \mathbb{R} .

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$ admet exactement trois solutions réelles.

► Exercice 16 (Métropole 2021) – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et donner une expression de sa dérivée.
2. Construire le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$. On précisera les limites en 0 et en $+\infty$.
3. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ en fonction de la valeur de m .

► Exercice 17 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0.5t^2 + t + 2}$, où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous. Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

► Exercice 18 – Voir le corrigé

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x + 1$. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation réduite de \mathcal{T} , la tangente à \mathcal{C}_f à l'abscisse 1.
2. Montrer qu'il existe une unique autre tangente à \mathcal{C}_f qui soit parallèle à \mathcal{T} .

► Exercice 19 – Voir le corrigé

Pour tout réel x , on pose $f(x) = x^5 - 2x - 4$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2. En déduire que l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$ possède au moins une solution sur $[1; 2]$.
3. Écrire les 3 premières étapes de l'algorithme de dichotomie et donner un intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ qui contient une solution de l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$.
4. Donner une solution de cette équation au centième près.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

Soit f et g les fonction définies pour tout réel x par $f(x) = (1 - x)e^x + 1$ et $g(x) = \frac{x}{e^x + 1}$.

1. Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
2. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} et en donner une valeur à 10^{-2} près. On note α ce réel.
3. Montrer que pour tout réel x , $g'(x) = \frac{f(x)}{(1 + e^x)^2}$.
4. Construire le tableau de variations de g .

► Exercice 21 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

Soit deux réels a et b avec $a < b$. On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$ et qui s'annule en un réel α . Parmi les propositions suivantes, quelle est la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à 0.001 près ?

1 #Algorithme A	1 #Algorithme B	1 #Algorithme C	1 #Algorithme D
2	2	2	2
3 def racine(a,b) :	3 def racine(a,b) :	3 def racine(a,b) :	3 def racine(a,b) :
4 while abs(b-a)	4 m = (a+b) / 2	4 m = (a+b)/2	4 while abs(b-a)
5 >= 0.001 :	5 while abs(b-a)	5 while abs(b-a)	5 >= 0.001 :
6 m = (a+b)/2	6 >= 0.001 :	6 <= 0.001 :	6 m = (a+b)/2
7 if f(m) < 0	7 if f(m) < 0	7 if f(m) < 0	7 if f(m) < 0
8 :	8 :	8 :	8 :
9 b = m	9 a = m	9 a = m	9 a = m
10 else :	10 else :	10 else :	10 else :
a = m	b = m	b = m	b = m
return m	return m	return m	return m

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $f(x) \in [0; 1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0; 1]$.

► **Exercice 23 – Voir le corrigé**

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 9x - 3$.

1. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} . Que vaut $f'(x)$ pour tout réel x ?
2. Construire le tableau de variations de la fonction f . On y inclura les limites et extremums de f .
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution réelle. On note α cette solution.
4. Donner une valeur approchée de α au centième.

On considère désormais la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2}$ ainsi que la suite (u_n)

définie par $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$.

On **admet** que la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
7. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
8. Montrer que pour tout réel x , $g(x) - x = -\frac{f(x)}{1 + 4x^2}$ où f est la fonction définie plus tôt.
9. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► **Exercice 24 – Voir le corrigé**

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$.

On notera C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On admet que la fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On notera alors g' sa fonction dérivée et g'' sa fonction dérivée seconde.

1. Vérifier que pour tout réel x , on a $g'(x) = (3 - x^2)e^{-x}$.
2. Déterminer l'équation de T , la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.

On souhaite désormais déterminer s'il existe des tangentes à la courbe C_g qui soient parallèles à T . On rappelle que pour tout réel x , $g'(x) = (3 - x^2)e^{-x}$.

3. Justifier que les solutions de ce problème correspondent aux solutions de l'équation $g'(x) = 3$.
4. (a) Déterminer la limite de $g'(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
(b) Déterminer la limite de $g'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x , on a $g''(x) = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$.
(b) Construire le tableau de variations de g' .
On inclura dans ce tableau les limites en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que des valeurs approchées à 10^{-2} près des extremums de la fonction g' .
6. Montrer que l'équation $g'(x) = 3$ possède exactement deux solutions sur \mathbb{R} .
7. On note α la solution strictement négative de cette équation.
Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

► **Exercice 25 (Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires) – Voir le corrigé**

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires... Mais pour commencer, nous avons besoin de résultats supplémentaires sur les suites.

Partie A

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles. On dit que (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$.

L'objectif de cette première partie est de démontrer que deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

1. Pour tout entier naturel n , on pose $c_n = b_n - a_n$.
 - (a) Montrer que la suite (c_n) est décroissante.
 - (b) Montrer que pour tout entier naturel n , $c_n \geq 0$ et en déduire que $a_n \leq b_n$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_n \leq b_0$ et $b_n \geq a_0$.
Que peut-on en déduire sur les suites (a_n) et (b_n) ?
3. Montrer que (a_n) et (b_n) ont même limite.

Partie B

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On suppose que $f(a) < k < f(b)$. On considère alors les suites (a_n) et (b_n) définies par

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_0 = a \text{ et, pour tout entier naturel } n, a_{n+1} &= \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{cases} \\ \bullet \quad b_0 = b \text{ et, pour tout entier naturel } n, b_{n+1} &= \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \end{cases} \end{aligned}$$

Le but est évidemment de montrer que ces suites sont adjacentes. Dans l'ensemble des questions suivantes, il faudra raisonner par disjonction de cas, suivant la valeur de $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $a_n \leq b_n$.
2. Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$.
4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n)$. Que peut-on en conclure sur les suites (a_n) et (b_n) ?
5. Montrer que pour tout entier naturel n , $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$.
6. On note ℓ la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a, b]$.
Montrer que $f(\ell) = k$.

2. Corrigés

► Correction 1 – Voir l'énoncé

Continuité en -1 ? : D'une part, $f(-1) = 6 \times (-1) + 8 = 2$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -3 \times (-1) + 7 = 10$.

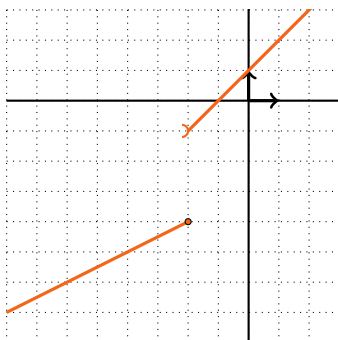
Ainsi, f n'est pas continue en -1 .

Continuité en 2 ? : D'une part, $f(2) = 2 - 1 = 1$. D'autre part, $\lim_{x \rightarrow 2^-} = -3 \times 2 + 7 = 1$. Enfin, $\lim_{x \rightarrow 2^+} = 2 - 1 = 1$

La fonction f est continue en 2 .

► Correction 2 – Voir l'énoncé

$f(-2) = \frac{1}{2} \times (-2) - 3 = -4$. Or, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} = -2 + 1 = -1$. La fonction f n'est pas continue en -2 .



► Correction 3 – Voir l'énoncé

f est continue sur $] -\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Il reste à déterminer si elle est continue en 1 .

- $f(1) = 1^2 + a \times 1 + b = 1 + a + b$;
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a \times 1^2 + b \times 1 + 1 = a + b + 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + a + b$.

Ainsi, f est continue en 1 . Finalement, f est continue sur \mathbb{R} .

► Correction 4 – Voir l'énoncé

La fonction f est continue sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$. Or, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. De la même manière, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$. f est donc continue en 0 .

► Correction 5 – Voir l'énoncé

La fonction f est continue sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, on a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ et donc $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

De même, on montre que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Ainsi, la fonction f est aussi continue en 0.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel non nul n ,

$$\frac{4n^2 + 1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 4$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 4.

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \sqrt{4} = 2.$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. De plus, la fonction exponentielle est continue en 0.

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{n}\right) = e^0 = 1.$$

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n , $f(u_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = 0$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) \neq f(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n)$. La fonction f n'est donc pas continue en 0.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

- $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$ et on a bien $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Ainsi, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$, d'où $2 \leq u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1 \leq 3$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur \mathbb{R}_+ , on a alors, $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n + 1} \geq \frac{1}{u_{n+1} + 1} \geq \frac{1}{3}$, puis, en multipliant

par -3 qui est négatif, $-\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{u_n + 1} \leq -\frac{3}{u_{n+1} + 1} \leq -1$.

Finalement, on a $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$. En particulier, puisque $\frac{3}{2} > 1$, on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$.

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

- Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

La fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{x+1} + 3$ est continue sur $] -1; +\infty[$ et, pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \in] -1; +\infty[$.

Ainsi, la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\ell = -\frac{3}{\ell+1} + 3$.

Ainsi, on trouve $\frac{\ell(2-\ell)}{\ell+1} = 0$ et donc $\ell = 0$ ou $\ell = 2$. Puisque pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$, le cas $\ell = 0$ est impossible. On a donc $\ell = 2$.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Si (u_n) converge vers un réel ℓ , puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{6+x}$ est continue sur $[-6; +\infty[$, ce réel ℓ vérifie $\ell = \sqrt{6+\ell}$. Ainsi, $\ell^2 = 6 + \ell$ ou encore $\ell^2 - \ell - 6 = 0$. On trouve alors deux solutions qui sont $\ell = -2$ et $\ell = 3$.

Pour tout entier naturel n , on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

- $u_1 = \sqrt{6+0} = \sqrt{6}$. On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Ainsi, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
Alors, $6 \leq 6 + u_n \leq 6 + u_{n+1} \leq 9$. Par ailleurs, la fonction Racine carrée étant croissante sur \mathbb{R}_+ , on a $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. Or, puisque $\sqrt{6} \geq 0$, on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- $\mathcal{P}(0)$ est vraie et \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. De plus, elle n'a que deux limites possibles qui sont -2 et 3 . -2 est impossible puisque pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

1. On a $u_1 = 0.75 \times 0.6 \times (1 - 0.75 \times 0.6) = 0.4095$ et $u_2 = 0.75 \times 0.4095 \times (1 - 0.75 \times 0.4095) \simeq 0.2882$. Ainsi, il y aura environ 410 individus en 2021 et 288 en 2022.
2. f est dérivable sur $[0; 1]$ et pour tout réel $x \in [0; 1]$, $f'(x) = 0.75 \times (1 - 0.15x) + 0.75x \times (-0.15) = 0.75 - 0.225x$.
Or, si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 0.225x \leq 0.225$ d'où $0 \geq -0.225x \geq -0.225$ et $0.75 \geq 0.75 - 0.225x \geq 0.525$.
En particulier, pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	0	0.6375

3. Soit $x \in [0; 1]$. $f(x) = x$ si et seulement si $0.75x(1 - 0.15x) = x$ soit $0.75x(1 - 0.15x) - x = 0$. En factorisant par x , ceci est équivalent à $x(0.75(1 - 0.15x) - 1) = 0$, c'est-à-dire $x(-0.25 - 0.1125x) = 0$.
Ainsi, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$ ou $-0.25 - 0.1125x = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -\frac{0.25}{0.1125}$. Or, $-\frac{0.25}{0.1125} < 0$. L'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0; 1]$ est donc $x = 0$.
4. (a) Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ».
 - On a $u_0 = 0.6$ et $u_1 = 0.4095$. On a donc bien $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$. $P(1)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. En appliquant la fonction f qui est strictement croissante sur $[0; 1]$, on a alors $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$, soit $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 0.6375$. Puisque $0.6375 < 1$, on a bien $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$. $P(n+1)$ est donc vraie.
 - Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
- (b) La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente vers un réel ℓ .
- (c) La fonction f étant continue sur $[0; 1]$, on a $f(\ell) = \ell$. Or, l'unique solution de cette équation sur $[0; 1]$ est 0. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
5. (a) D'après les questions précédentes, le nombre d'individus en milliers dans la population étudiée décroît et tend vers 0 : il arrivera donc un moment où cette population sera inférieure à 20 individus.
(b) L'algorithme renvoie la valeur 11 : l'espace sera menacée d'extinction en 2031.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

On a $f(1) \simeq 1.7$ et $f(2) \simeq 6.9$.

De plus, f est continue sur $[1; 2]$. Or, $2 \in [f(1); f(2)]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1; 2]$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

L'affirmation correcte est l'affirmation 3 : il s'agit d'une simple application du théorème des valeurs intermédiaires.

Les images de -1 et de 1 par h ne nous donnent aucune information sur le comportement de h entre -1 et 1 : on pourrait très bien avoir $h(0) = -5$ par exemple, ce qui contredirait les affirmations 1 et 2. L'affirmation 4 est fausse : on pourrait avoir $h(0) = h(2) = h(4) = 1$. En revanche, si la fonction h était strictement monotone sur les intervalles $[-1; 1]$ et $[1; 3]$, on aurait alors en effet exactement deux solutions à l'équation $h(x) = 1$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

f est dérivable comme somme de fonctions dérivables (et est donc continue). Pour tout réel x , $f'(x) = e^x + 1$. Puisque pour tout réel x , $e^x > 0$, il en vient que f' est strictement positive sur \mathbb{R} (et en particulier sur $[-1; 0]$). La fonction f est donc strictement croissante sur $[-1; 2]$. Par ailleurs, $f(0) = 1$ et $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$.

Reprenons les informations des questions précédentes : La fonction f est continue sur $[-1; 0]$. On a $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-1; 0]$. De plus, la fonction f étant strictement croissante sur cet intervalle, une telle solution est unique.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , $f'(x) = 6x^2 + 18x - 60 = 6(x^2 + 3x - 10)$. Ainsi, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -5$. On a par ailleurs $f(2) = -65$ et $f(-5) = 278$. En outre, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Le tableau de variations de f est le suivant.

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	\nearrow	278	\searrow	-65	\nearrow	$+\infty$

On peut en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Par exemple, sur $] -\infty; -5[$:

- La fonction f est continue et strictement monotone ;
- $f(-5) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;
- Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $] -\infty; -5[$.

De la même manière, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $] -5; 2[$ puis une unique solution sur $] 2; +\infty[$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ possède exactement 3 solutions sur \mathbb{R} .

► Correction 15 – Voir l'énoncé

f est dérivable (et donc continue) sur \mathbb{R} . De plus, pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

Les racines peuvent aussi se calculer à l'aide de la méthode du discriminant. On peut alors dresser le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow \frac{4}{27}$	$\searrow -8$	$\nearrow +\infty$	

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones sur chacun des intervalles $]-\infty; \frac{1}{3}[, [\frac{1}{3}; 3]$ et $[3; +\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement 3 solutions.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

Puisque pour tout $x > 0$, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$. Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Enfin, par opérations sur les limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$+\infty$	e	$+\infty$

Ainsi,

- si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ ne possède aucune solution sur $]0; +\infty[$.
- si $m = e$, l'équation $f(x) = m$ possède une unique solution sur $]0; +\infty[$: il s'agit de $x = 1$.
- si $m > e$, l'équation $f(x) = m$ possède deux solutions sur $]0; +\infty[$: l'une sur l'intervalle $]0; 1[$, l'autre sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

- **Faux** : f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et, pour tout réel $t > 0$,

$$f'(t) = -(-t+1)e^{-0.5t^2+t+2} = (t-1)e^{-0.5t^2+t+2}$$

$f'(t)$ est du signe de $t - 1$. On peut alors construire le tableau de variations de f .

t	0	1	$+\infty$		
$f'(t)$		-	0	+	
f	$e^3 - e^2$	\searrow	$e^3 - e^{2.5}$	\nearrow	e^3

En particulier, $f(1) < f(0)$. La population ne fait pas qu'augmenter en permanence.

- **Faux** : On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = e^3 \simeq 20.08$. Par ailleurs, la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$. Ainsi, pour tout $t > 1$, $f(t) \leq 20.08$. En particulier, la population ne dépasse 21000 bactéries.
- **Vrai** : La fonction f est continue sur $[0; 1]$. Par ailleurs, $f(0) = e^3 - e^2 > 10$ et $f(1) = e^3 - e^{2.5} < 10$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t \in]0; 1[$ tel que $f(t) = 10$. La fonction f étant strictement décroissante sur cet intervalle, une telle solution est unique. De même, il existe un unique réel $t_2 \in [1; +\infty[$ tel que $f(t_2) = 10$. Finalement, 10 possède exactement deux antécédents par la fonction f : la population de bactéries aura donc un effectif de 10000 à deux reprises.

► Correction 18 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 2$. Ainsi, $f'(1) = -5$. Par ailleurs, $f(1) = 1$. Ainsi, l'équation réduite de \mathcal{T} est $y = -5(x - 1) + 1$ soit $y = -5x + 6$.

La deuxième question revient à montrer que l'équation $f'(x) = -5$ possède exactement deux solutions sur \mathbb{R} (l'une de ces solutions étant $x = 1$). Pour tout réel x , $f''(x) = 20x^3 - 36x^2 = x^2(20x - 36)$. Ainsi, pour tout réel x , $f''(x)$ est du signe de $20x - 36$. Par ailleurs, par opérations sur les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = x^4 \left(5 - \frac{12}{x} + \frac{2}{x^4} \right)$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Ceci nous permet de dresser le tableau de variations de f' .

x	$-\infty$	$9/5$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$+\infty$	$-\frac{1937}{125}$	$+\infty$

Or, f' est continue sur $\left[\frac{9}{5}; +\infty \right[$. Par ailleurs, $-5 \in \left[f\left(\frac{9}{5}\right); +\infty \right[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f'(x) = -5$ possède une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{9}{5}; +\infty \right[$. Si l'on note α cette solution, ceci signifie que la tangente à \mathcal{C}_f à l'abscisse α est parallèle à \mathcal{T} . L'équation $f'(x) = -5$ admet également une unique solution sur $\left] -\infty; \frac{9}{5} \right]$, mais cette solution n'est autre que $x = 1$.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

On a $f(1) = -5 < 0$ et $f(2) = 24 > 0$. La fonction f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [1; 2]$ tel que $f(c) = 0$.

- Calculons alors $f(1.5)$: On a $f(1.5) \simeq 0.59$. Ainsi, il existe un réel $c \in [1; 1.5]$ tel que $f(c) = 0$.
- Calculons alors $f(1.25)$: On a $f(1.25) \simeq -3.45 < 0$. Ainsi, il existe un réel $c \in [1.25; 1.5]$ tel que $f(c) = 0$.
- Calculons alors $f(1.375)$: On a $f(1.375) \simeq -1.84 < 0$. Ainsi, il existe un réel $c \in [1.375; 1.5]$ tel que $f(c) = 0$.

En poursuivant ainsi, on trouve que $c \simeq 1.47$

► Correction 20 – Voir l'énoncé

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^x = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Par ailleurs, pour tout réel x , $f(x) = e^x - xe^x + 1$. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

f est par ailleurs dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = (-1) \times e^x + (1-x)e^x = -xe^x$, qui est donc du signe de $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	1	2	$-\infty$

2. Pour tout réel $x < 0$, $f'(x) > 1$ et en particulier, $f'(x) > 0$. Par ailleurs, f est continue sur $[0; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; 2]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, un tel réel est unique. En utilisant la calculatrice, on trouve $x \simeq 1.28$.

3. Pour tout réel x , $g'(x) = \frac{1 \times (e^x + 1) - x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(1-x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{f(x)}{(1+e^x)^2}$.

4. Puisque pour tout réel x , $(1+e^x)^2 > 0$, $g'(x)$ est du signe de f .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g			

► Correction 21 – Voir l'énoncé

Puisque f est strictement croissante sur $[a, b]$, on en déduit que $f(a) < 0$ et que $f(b) > 0$.

Dans les algorithmes B et C, la valeur de m n'est pas mise à jour à l'intérieur de la boucle while. Ils ne peuvent donc pas être les bons algorithmes.

Si $f(m) < 0$, cela signifie que $f(a)$ et $f(m)$ sont du même signe, il faut donc remplacer la valeur de a par celle de m . Le bon algorithme est l'algorithme D.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x , on pose $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0; 1]$. De plus, $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ puisque $f(1) \in [0; 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) - c = 0$ ou encore $f(c) = c$.

► Correction 23 – Voir l'énoncé

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x^3 - 12x^2 + 9x - 3$.

1. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$.

2. $f'(x)$ est un polynôme du second degré dont les racines sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$.

Par ailleurs, les opérations sur les limites donnent $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. De plus, pour tout réel x non nul,

$$f(x) = x^3 \left(4 - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Par ailleurs, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ et $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3$. On en déduit le tableau suivant.

x	$-\infty$	$1/2$	$3/2$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$-\infty$		-1		-3	$+\infty$

3. Pour tout réel $x \leq \frac{3}{2}$, on a $f(x) \leq -1$ et en particulier, $f(x) \neq 0$.

Par ailleurs, f est continue sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. On a également $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'après

le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ possède donc une solution sur $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$. De plus, la fonction f étant strictement monotone sur cet intervalle, cette solution est unique.

Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur \mathbb{R} .

4. On a $\alpha \simeq 2.10$.

On considère désormais la fonction g définie pour tout réel x par

$$g(x) = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2}$$

ainsi que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

On **admet** que la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

5. Pour tout réel non nul x ,

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{12 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 4} = \frac{12 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 4}$$

Il en vient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{12}{4} = 3$

6. Pour tout entier naturel n , on pose $P(n) : \left\langle \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 \right\rangle$

• On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. On a bien $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$

• Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. La fonction g étant croissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, il en vient que $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(3)$. Or, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \geq \frac{1}{2}$ et $g(3) = \frac{87}{37} \leq 3$.

Il en vient que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. $P(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

7. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

8. Pour tout réel x ,

$$g(x) - x = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2} - x = \frac{12x^2 - 8x + 3}{1 + 4x^2} - \frac{x(1 + 4x^2)}{1 + 4x^2}$$

Ainsi,

$$g(x) - x = \frac{12x^2 - 8x + 3 - x - 4x^3}{1 + 4x^2} = \frac{-4x^3 + 12x^2 - 9x + 3}{1 + 4x^2} = -\frac{f(x)}{1 + 4x^2}$$

$$g(x) - x = -\frac{f(x)}{1 + 4x^2} \text{ où } f \text{ est la fonction définie plus tôt.}$$

9. Notons l la limite de la suite (u_n) . Puisque pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$ et que la fonction g est continue sur \mathbb{R} , il en vient que $g(l) = l$, ou encore que $g(l) - l = 0$. D'après la question précédente, cela signifie que $-\frac{f(l)}{1 + 4l^2} = 0$ et donc que $f(l) = 0$. Or, l'unique solution de cette équation est α . Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

- Pour tout réel x , $g'(x) = (2x + 2)e^{-x} + (x^2 + 2x - 1) \times (-e^{-x}) = (2x + 2 - x^2 - 2x + 1)e^{-x} = (3 - x^2)e^{-x}$
- L'équation de T , la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0 est $y = g'(0)(x - 0) + g(0)$. Or, $g'(0) = 3$ et $g(0) = -1$. La tangente T a pour équation $y = 3x - 1$.

On souhaite désormais déterminer s'il existe des tangentes à la courbe C_g qui soient parallèles à T . On rappelle que pour tout réel x ,

$$g'(x) = (3 - x^2)e^{-x}$$

- Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Or, le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x vaut $g'(x)$. On cherche donc les réels x tels que $g'(x) = 3$.
- (a) Par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x^2) = -\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -\infty$.
(b) Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$.
- (a) Pour tout réel x , $g''(x) = -2xe^{-x} + (3 - x^2) \times (-e^{-x}) = (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$.
(b) Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$. $g''(x)$ est donc du signe de $x^2 - 2x - 3$ qui est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 3 .

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	5.44	-0.30	0	

6. La fonction g' est continue sur $] -\infty; -1[$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = -\infty$ et $g'(-1) \simeq 5.44$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in] -\infty; -1[$ tel que $g'(c) = -3$. Par ailleurs, la fonction g' étant strictement croissante sur $] -\infty; -1[$, ce réel est unique. De même, il existe un unique réel dans l'intervalle $d \in [-1; 3]$ tel que $g'(d) = 3$ (ce réel n'est autre que 0). Enfin, l'équation $g'(x) = 3$ ne possède pas de solution sur $]3; +\infty[$. Ainsi, l'équation $g'(x) = 3$ possède également deux solutions sur \mathbb{R} .
Montrer que l'équation $g'(x) = 3$ possède exactement deux solutions sur \mathbb{R} .
7. On trouve $\alpha \simeq -1.53$.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Partie A

- (a) Pour tout entier naturel n , $c_{n+1} - c_n = b_{n+1} - a_{n+1} - (b_n - a_n) = b_{n+1} - b_n - (a_{n+1} - a_n)$. Or, (b_n) est décroissante et donc $b_{n+1} - b_n \leq 0$. (a_n) est croissante et donc $-(a_{n+1} - a_n) \leq 0$.
Ainsi, $c_{n+1} - c_n \leq 0$. La suite (c_n) est décroissante.
(b) La suite (c_n) est décroissante et de limite 0. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \geq 0$ et donc $a_n \leq b_n$.
- Pour tout entier naturel n , $a_n \leq b_n$. Or, (b_n) est décroissante et donc, pour tout entier naturel n , $b_n \leq b_0$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $a_n \leq b_0$. Un raisonnement similaire permet de conclure que, pour tout entier naturel n , $b_n \geq a_0$. La suite (a_n) est donc croissante et majorée par b_0 , la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_0 . Ces deux suites sont donc convergentes.
- Notons l_1 la limite de (a_n) et l_2 la limite de (b_n) . On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = 0$.
Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l_1 - l_2$. Ainsi, $l_1 - l_2 = 0$ et donc $l_1 = l_2$.

Partie B

- Pour tout entier naturel n , on pose $P(n) : \ll a_n \leq b_n \gg$.
 - Pour $n = 0$, on a $a_0 = a$, $b_0 = b$, et on a bien $a_0 \leq b_0$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $a_n \leq b_n$.
 - En ajoutant a_n et en divisant par 2, on obtient que $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2}$.
Dans le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$, on a donc encore $a_{n+1} \leq b_{n+1}$.
 - En ajoutant b_n et en divisant par 2, on obtient que $\frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$.
Dans le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$, on a donc encore $a_{n+1} \leq b_{n+1}$.
 - Dans tous les cas, on a donc $a_{n+1} \leq b_{n+1}$.
Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .
 - Soit n un entier naturel.
Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$ alors $a_{n+1} - a_n = a_n - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{b_n + a_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$.
Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$, alors $a_{n+1} - a_n = \frac{b_n + a_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0$.
Dans tous les cas, on a $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n \leq 0$. (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
 - Soit n un entier naturel.
 - Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n + a_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$
 - Si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k$, alors $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \frac{b_n + a_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2}$
- Dans tous les cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$

-
4. Ainsi, la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$. Pour tout entier naturel n , $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$. Il en vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = 0$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. d'après la partie 1, elles sont donc convergentes et de même limite.
 5. D'après la définition des suites (a_n) et (b_n) , on a que pour tout entier naturel n , $f(a_n) \leq k \leq f(b_n)$.
 6. On note l la limite commune de (a_n) et (b_n) et on rappelle que f est continue sur $[a, b]$. Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient que $f(l) \leq k \leq f(l)$ et donc que $f(l) = k$.