1. Cours : Primitives et équations différentielles

1 Notion d'équation différentielle

Définition 1 — Équation différentielle : Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction notée y et qui fait intervenir les dérivées de cette fonction.

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{4x-2}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' = 4y$.

En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 4\mathrm{e}^{4x-2}$, c'est-à-dire $f'(x) = 4f(x)$. ■

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. En effet :

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$. u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$u'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$

- Pour tout réel x, on pose $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \times \mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. ■

2 Primitive d'une fonction continue

Définition 2 : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et F une fonction dérivable sur cet intervalle. On dit que F est une *primitive* de f sur I si $F' = f$.

Autrement dit, F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = 6x^2 + 4x + 3$ et $F(x) = 2x^3 + 2x^2 + 3x - 7$. On a bien pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$. F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. ■

Théorème 1 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Ce résultat sera démontré (en partie) dans un prochain chapitre. Patience !

Propriété 1 : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F_1 et F_2 deux primitives de f sur I.

Alors $F_1 - F_2$ est constante : deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration 2 : Soit F_1 et F_2 deux primitives de f sur I. $F_1 - F_2$ est dérivable sur I comme différence de fonctions dérivables sur I. De plus, pour tout réel x dans I

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Ainsi, $F_1 - F_2$ est de dérivée nulle sur l'intervalle I, $F_1 - F_2$ est donc constante sur I. □

Propriété 2 : Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = y_0$.

L'équation différentielle $y' = f$ ayant pour condition initiale $y(x_0) = y_0$ possède une unique solution.

■ **Exemple 4 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ et $F(x) = \ln(x^2+1)$.

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout réel x, $F'(x) = f(x)$.

On cherche alors l'unique primitive F_0 de f qui vaut 5 en 0. Puisque toutes les primitives d'une fonction diffèrent seulement d'une constante, il existe un réel c tel que $F_0 = F + c$ et donc, pour tout réel x,

$$F_0(x) = \ln(x^2+1) + c.$$

Puisque $F_0(0) = 5$, on a alors $\ln(0^2+1) + c = 5$, soit $c = 5$. Pour tout réel x, on a donc

$$F_0(x) = \ln(x^2+1) + 5.$$

■

Propriété 3 : Primitives usuelles

Fonction f	**UNE** Primitive F	Intervalle I
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{(n+1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{ax+b}}{a}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto \ln(x)$	$]0;+\infty[$

Le conseil de la leçon : Une fois que vous avez détermine une primitive, dérivez-la ! Vous devez obtenir la fonction de départ. Il est bien plus facile de dériver que de primitiver.

Propriété 4 : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, λ, F une primitive de f et G une primitive de g. Alors,

- $F+G$ est une primitive de $f+g$;
- λF est une primitive de λf.

■ **Exemple 5 :** Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x-1} + 5x^2 + \dfrac{3}{x^2}$ sur $I =]0;+\infty[$ est la fonction

$$F : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x-1}}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{x}.$$

■

Propriété 5 : L'essentiel : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et g une fonction dérivable sur un intervalle J telle que pour tout réel $x \in J$, $g(x) \in I$.

$f \circ g$ est une primitive de $g' \times (f' \circ g)$ sur J.

Certaines "formes" de fonction sont à reconnaître pour en calculer les primitives.

- Une primitive d'une fonction de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ où u est une fonction qui ne s'annule pas est $\dfrac{1}{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ où u est une fonction strictement positive est $\sqrt{u}$.
- Une primitive d'une fonction de la forme $u'\mathrm{e}^u$ est e^u.
- Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ où u est une fonction strictement positive est $\ln(u)$.

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-2}$.

Posons, pour tout réel x, $u(x) = x^2+x-2$. On remarque alors que $f(x) = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = \mathrm{e}^{u(x)} = \mathrm{e}^{x^2+x-2}$. ■

■ **Exemple 7 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$. Posons, pour tout réel x, $u(x) = 1+\mathrm{e}^{2x}$.

Pour tout réel x, $u(x) > 0$. Par ailleurs, on remarque alors que pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f est donc la fonction F définie pour tout réel x, par $F(x) = \ln(u(x)) = \ln(1+\mathrm{e}^{2x})$. ■

Malheureusement, certaines fonctions n'admettent pas de primitive pouvant être exprimées à l'aide de fonctions usuelles : il s'agit là d'un théorème démontré par Liouville dans les années 1830.

L'exemple le plus notable est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, très utilisée en probabilités et dont les applications dans d'autres domaines se comptent par centaines (citons ainsi la balistique, l'évaluation du quotient intellectuel, le traitement du signal, le cours de la bourse...).

3 Equation différentielle du premier ordre

3.1 Equations différentielles homogènes $y' + ay = 0$

Définition 3 : Soit a un réel. L'équation $y' + ay = 0$ ayant pour inconnue une fonction dérivable y sur $\mathbb{R}$ s'appelle "équation différentielle **homogène** du premier ordre, à coefficients constants".

Propriété 6 : Soit a un réel.

Les solutions l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$ où C est un réel quelconque.

De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation différentielle telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration 3 : Soit C un réel. Pour tout réel x, on pose alors $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -a \times C\mathrm{e}^{-ax} = -af(x)$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) + af(x) = -af(x) + af(x) = 0.$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

Réciproquement, soit f une solution de l'équation $y' + ay = 0$. On a alors, pour tout réel x, $f'(x) + af(x) = 0$.

Pour tout réel x, posons alors $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{ax}$. g est dérivable comme produit de fonctions dérivables et, pour tout réel x,

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{ax} + af(x)\mathrm{e}^{ax} = \mathrm{e}^{ax}(f'(x) + af(x)) = 0.$$

Ainsi, g est constante : il existe un réel C telle que, pour tout réel x, $g(x) = C$, c'est-à-dire $f(x)\mathrm{e}^{ax} = C$ et donc $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$. □

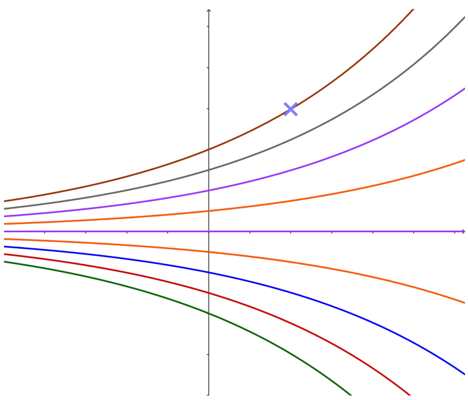
■ **Exemple 8 :** Les solutions de l'équation $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$ où C est un réel.

Cherchons l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(3) = 1$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = C\mathrm{e}^{2x}$.

On a alors $f_0(3) = C\mathrm{e}^6$ d'une part et $f_0(3) = 1$ d'autre part. Ainsi, $C = \dfrac{1}{\mathrm{e}^6} = \mathrm{e}^{-6}$.

Finalement, pour tout réel x, on a $f_0(x) = \mathrm{e}^{-6}\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x-6}$. ■

Ce théorème signifie que si l'on regarde l'ensemble des courbes des fonctions solutions de l'équation $y' = ay$ et que l'on s'intéresse à un point du plan, il existe une unique courbe qui passe par ce point. En particulier, toute fonction solution qui s'annule n'est autre que la fonction nulle.



3.2 Equation différentielle $y' + ay = b$, avec b réel

Définition 4 : Soit a et b deux réels. L'équation $y' + ay = b$ ayant pour inconnue une fonction y dérivable sur $\mathbb{R}$ s'appelle "équation différentielle du premier ordre, à coefficients constants et à second membre constant".

Propriété 7 : Soit a et b deux réels.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a}$ où C est un réel quelconque.

De plus, pour tous réels x_0 et y_0, il existe une unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(x_0) = y_0$.

Démonstration 4 : Cherchons tout d'abord une solution constante φ à cette équation. Soit k le réel tel que pour tout réel x, $\varphi(x) = k$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $\varphi'(x) = 0$.

Puisque φ est solution de l'équation $y' + ay = b$, on a alors $ak = b$ c'est-à-dire $k = \frac{b}{a}$.

Soit maintenant f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si $f' + af = b$. Or, φ étant également une solution de cette équation, on a donc $b = \varphi' + a\varphi$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si $f' + af = \varphi + a\varphi'$, ce qui équivaut à $f' - \varphi' + a(f - \varphi) = 0$, ou encore $(f - \varphi)' + a(f - \varphi) = 0$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = b$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$.

Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $(f - \varphi)(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \varphi(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \frac{b}{a}$.

□

■ **Exemple 9 :** On cherche à résoudre l'équation $y' - 5y = -2$.

- On détermine les solutions de l'équation homogène associée $y' - 5y = 0$.
  Ce sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{5x}$ où C est un réel.
- On cherche une solution constante (égale à k) à l'équation de départ $y' - 5y = -2$.
  La dérivée d'une fonction constante étant nulle, on a alors $-5k = -2$ et donc $k = \frac{2}{5}$.
- Les fonctions solutions de l'équation $y' = 5y - 2$ sont donc les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\mathrm{e}^{-5x} + \frac{2}{5}$ où C est un réel.

On souhaite déterminer l'unique solution f_0 de cette équation telle que $f_0(7) = 12$. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = C\mathrm{e}^{-5x} + \frac{2}{5}$.

On a alors $f_0(7) = C\mathrm{e}^{-35} + \frac{2}{5} = 12$ et donc $C = \frac{58}{5}\mathrm{e}^{+35}$. Ainsi, pour tout réel x, $f_0(x) = \frac{58}{5}\mathrm{e}^{-5x+35} + \frac{2}{5}$. ■

Propriété 8 — Formule magique : Pour résoudre une équation du type $y' + ay = b$...

SOLUTION GÉNÉRALE = SOLUTION HOMOGÈNE + SOLUTION CONSTANTE

3.3 Equation différentielle $y' + ay = g$, où g est une fonction

Définition 5 : Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'équation $y' = ay + g$ s'appelle "équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre".

Propriété 9 : Soit a un réel non nul et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Soit φ une solution particulière de cette équation. Alors f est solution de l'équation $y' + ay = g$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation homogène associée $y' + ay = 0$.

Autrement dit, toute solution de l'équation $y' + ay = g$ est de la forme $f + \varphi$, où f est solution de l'équation $y' + ay = 0$ et φ est **UNE** solution de l'équation $y' + ay = g$.

Démonstration 5 : La démonstration est en tout point semblable à celle qui a conduit à l'ensemble des fonctions solutions de l'équation $y' + ay = b$. Faisons-la donc à nouveau. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f' + af = b$. Or, φ étant également une solution de cette équation, on a donc $g = \varphi' + a\varphi$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f' + af = \varphi + a\varphi'$, ce qui équivaut à $f' - \varphi' + a(f - \varphi) = 0$, ou encore $(f - \varphi)' + a(f - \varphi) = 0$.

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' + ay = g$ si et seulement si $f - \varphi$ est solution de l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$.

Il existe donc un réel C tel que, pour tout réel x, $(f - \varphi)(x) = C\mathrm{e}^{-ax}$ et donc $f(x) = C\mathrm{e}^{-ax} + \varphi(x)$. □

■ **Exemple 10 :** On considère l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$.

- Les solutions de l'équation homogène associée $y' - 2y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{2x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- La fonction $\varphi : x \mapsto 3x^2 + 3x - 5$ est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$. En effet, φ est dérivable et pour tout réel x,

$$\varphi'(x) - 2\varphi(x) + 6x^2 - 13 = 6x + 3 - 2(3x^2 + 3x - 5) + 6x^2 - 13 = 0.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = -6x^2 + 13$ sont les fonctions f définies pour tout réel x par $f(x) = C\mathrm{e}^{2x} + 3x^2 + 3x - 5$, où C est un réel. ■

Propriété 10 — Formule magique : Pour résoudre une équation du type $y' + ay + g$...

SOLUTION GÉNÉRALE = SOLUTION HOMOGÈNE + SOLUTION PARTICULIÈRE

Il existe de nombreux types d'équations différentielles : linéaires, quadratiques, d'ordre divers... Et parmi toutes celles-ci, il en existe peu que l'on sait résoudre.

On compte par exemple les équations de Navier-Stokes qui décrivent les mouvements des fluides newtoniens. Il s'agit d'équation dites "aux dérivées partielles". Les fonctions en jeu utilisent en effet plusieurs variables (de temps et d'espace en l'occurrence) et on dérive alors selon l'une ou l'autre des variables.

Ces équations sont particulières puisque depuis l'an 2000, leur résolution est mise à prix : quiconque permettra une avancée significative dans leur étude recevra, en plus d'un certain prestige auprès de la communauté mathématique, la coquette somme d'un million de dollars.

6 autres problèmes ont été mis à pris par l'Institut Clay cette même année. Depuis, un seul d'entre eux a été résolu.

2. Exercices

Notion d'équation différentielle

▶ Exercice 1 – Voir le corrigé

Montrer que $f : x \mapsto e^{3x} + 1$ est solution de l'équation différentielle $y' = 3y - 3$.

▶ Exercice 2 – Voir le corrigé

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 0$ sur $]-1;+\infty[$.

▶ Exercice 3 – Voir le corrigé

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ est solution de l'équation différentielle $y' = y(1-y)$.

▶ Exercice 4 – Voir le corrigé

Soit λ et μ des réels. Montrer que $f : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{x}$ est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

Primitives

▶ Exercice 5 (Centres étrangers 2023) – Voir le corrigé

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Quelle propriété est vérifiée par H ?

a. H est positive sur $]-\infty;0]$.
b. H est croissante sur $]-\infty;1]$.
c. H est négative sur $]-\infty;1]$.
d. H est croissante sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 6 – Voir le corrigé

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice 7 – Voir le corrigé

Montrer que $F : x \mapsto (2x+1)e^{x^2-1}$ est une primitive de $f : x \mapsto (4x^2+2x+2)e^{x^2-1}$ sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 8 – Voir le corrigé

Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $F : x \mapsto (ax+b)e^{4x+3}$ soit une primitive de la fonction $f : x \mapsto (8x+14)e^{4x+3}$ sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice 9 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = (-3x^2+2x+12)e^{1-3x}$. Déterminer trois réels a, b et c tels que la fonction $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{1-3x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Exercice 10 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(1) = 3$.

► Exercice 11 – Voir le corrigé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et $F(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$.
Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer l'unique primitive F_0 de f telle que $F_0(0) = 0$.

► Exercice 12 – Voir le corrigé

Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur les intervalles donnés.

$f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.

$f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8\mathrm{e}^{4x+2} - \dfrac{1}{x^3}$ sur $]-\infty;0[$

$f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^7}$ sur $]-\infty;0[$

$f_5 : x \mapsto 3\mathrm{e}^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x} + x^4 - \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

$f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{5}{x^4}$ sur $]0;+\infty[$.

$f_8 : x \mapsto \dfrac{2x^5 + 3x^2 + 1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$

► Exercice 13 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivantes, déterminer l'unique primitive de la fonction donnée vérifiant la condition indiquée.

$f_1 : x \mapsto 2x + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F_1(3) = 2$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ avec $F_2(1) = 3$

$f_3 : x \mapsto 2\mathrm{e}^{3x-4} + 1$ sur $\mathbb{R}$ avec $F_3\left(\dfrac{4}{3}\right) = 5$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{3}{x} + x$ sur $]-\infty;0[$ avec $F_4(-1) = 2$

► Exercice 14 – Voir le corrigé

Donner une primitive des fonctions suivantes en reconnaissant la primitive d'une fonction composée.

$f_1 : x \mapsto (4x+1)\mathrm{e}^{2x^2+x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$ sur $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto -\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}}{(3+\mathrm{e}^{2x})^2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_4 : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{x^3}$ sur $\mathbb{R}$.

$f_5 : x \mapsto \dfrac{4x+10}{x^2+5x+7}$ sur $\mathbb{R}$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}$ sur $]0;+\infty[$

$f_7 : x \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$

$f_8 : x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2-5}$ sur $\mathbb{R}$

$f_9 : x \mapsto 3\mathrm{e}^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

$f_{11} : x \mapsto \dfrac{4x^3 - 6x}{x^4 - 3x^2 + 5}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{12} : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1;+\infty[$

$f_{13} : x \mapsto \dfrac{10x}{(5x^2+7)^2}$ sur $\mathbb{R}$

$f_{14} : x \mapsto \dfrac{-2x-5}{x^4 + 10x^3 + 25x^2}$ sur $]0;+\infty[$

► Exercice 15 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui respecte la condition initiale indiquée.

$f : x \mapsto x^2 e^{x^3}$ avec $F(0) = 3$

$f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ avec $F(2) = 7$

$f : x \mapsto \dfrac{8x+4}{2x^2+2x+1}$ avec $F(-1) = 3$

$f : x \mapsto \dfrac{-3x}{(x^2+1)^2}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2$

► Exercice 16 – Voir le corrigé

Pour tout réel x différent de 1 et -3, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;1\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]1;+\infty[$.

► Exercice 17 (Polynésie 2022) – Voir le corrigé

Sélectionner la réponse correcte. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par...

a. $K(x) = H(2x)$ **b.** $K(x) = 2H(2x)$ **c.** $K(x) = \dfrac{1}{2}H(2x)$ **d.** $K(x) = 2H(x)$

Équations différentielles du premier ordre

► Exercice 18 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle donnée telle que $f(x_0) = y_0$.

$y' - 8y = 0$ avec $x_0 = -2$ et $y_0 = -7$

$y' - 2y = 0$ avec $x_0 = 2$, $y_0 = 3$

$y' + 4y = 0$ avec $x_0 = -1$, $y_0 = -5$

$y' = -7y$ avec $x_0 = 0$, $y_0 = 2$

$3y' + 2y = 0$ avec $x_0 = 1$, $y_0 = 3$

$y' - 9y = 0$ avec $x_0 = 47$, $y_0 = 0$

► Exercice 19 (Datation au carbone 14) – Voir le corrigé

Certaines proportions de protons et neutrons dans le noyau d'un atome ne permettent pas la stabilité du noyau. Le noyau est alors dit radioactif. Les noyaux instables se désintègrent spontanément mais on ne peut prévoir à quel instant. Néanmoins, sur des échantillons comportant de très nombreux noyaux radioactifs, on sait que la variations de noyaux radioactifs est proportionnelle au nombre de noyaux présents au temps t.

On note N_0 le nombre initial de noyaux radioactifs d'un échantillon et $N(t)$ le nombre de noyaux au temps t. Il existe alors un réel k tel que pour tout réel $t > 0$, $N'(t) + kN(t) = 0$. Cette constante k dépend de l'élément chimique étudiée.

1. En résolvant cette équation différentielle, déterminer l'expression de $N(t)$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps τ nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs se désintègre.
   (a) Exprimer τ en fonction de k.
   (b) La demi-vie du carbone 14 est de 5730 ans. Donner une valeur approchée de la constante k en années^{-1}.
3. Le 19 septembre 1991, des explorateurs trouvent la momie d'un homme piégée dans la glace à 3000 m d'altitude. A l'aide de mesures, on estime que 47% des atomes de carbone 14 de son corps se sont alors désintégrés. Donner une estimation de la période durant laquelle a vécu Otzi.

► Exercice 20 – Voir le corrigé

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = 4y + 1$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée $y' = 4y$.
2. Déterminer une solution constante de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
4. Déterminer l'unique solution f_0 de (E) telle que $f_0(3) = 5$.

► Exercice 21 – Voir le corrigé

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle donnée telle que $f(x_0) = y_0$.

1. $y' - 3y = 2$ avec $x_0 = 3$ et $y_0 = 1$
2. $2y' = 5y - 1$ avec $x_0 = 0$ et $y_0 = 2$
3. $y' - 4y = 8$ avec $x_0 = 11$ et $y_0 = -2$

► Exercice 22 – Voir le corrigé

Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' - 3 = 0$.

► Exercice 23 (Loi de refroidissement de Newton) – Voir le corrigé

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux de perte de chaleur d'un corps est proportionnel à la différence de température entre ce corps et l'environnement.

On place une tasse de thé bouillant dans une pièce où la température est constante, égale à $20°C$. On note $T(t)$ la température du thé après t minutes.

1. D'après la loi de refroidissement de Newton, on a
$$T' = -\frac{\ln(2)}{7}(T - 20).$$
Résoudre cette équation différentielle sachant que $T(0) = 100$.
2. Quelle est la limite de $T(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
3. Au bout de combien de temps la température du thé sera-t-elle inférieure à $25°C$?

► Exercice 24 (Circuit RC) – Voir le corrigé

Le condensateur est un composant électronique qui peut stocker des charges électriques sur ses armatures.

On considère un condensateur déchargé de capacité C, monté en série avec un conducteur ohmique de résistance R et une différence de potentiel E. R, C et U sont des réels strictement positifs. On note $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur au temps t.

1. On admet que u vérifie l'équation différentielle $u + RCu' = E$. On a par ailleurs $u(0) = 0$.
Exprimer $u(t)$ en fonction de t, R, C et E.
2. Quelle est la limite de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de u à l'abscisse 0.
4. Déterminer le point d'intersection de cette tangente avec la droite d'équation $y = E$. L'abscisse de ce point est appelé "constante de temps" et est notée τ.
5. Montrer que $u(\tau) \simeq 0.63E$.

► Exercice 25 (Métropole 2024) – Voir le corrigé

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1000 L. Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en mg·L^{-1}, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3 mg·L^{-1}.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 mg·L^{-1}. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 mg·L^{-1}.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 mg·L^{-1}.
2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en mg·L^{-1}, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
   On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.
4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction **alerte_chlore** renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```python
def alerte_chlore(s) :
  n = 0
  u = 0.7
  while ... :
    n = ...
    u = ...
  return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction **alerte_chlore(3)** ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en mg·L^{-1}, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = -0{,}08y + \dfrac{q}{50}$ où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = C\mathrm{e}^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$ où C est une constante réelle.
2. (a) Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.
   (b) On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à 0,7 mg·L^{-1}.
   On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de 2 mg·L^{-1}.
   Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

▶ Exercice 26 – Voir le corrigé

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à 225°C. La température ambiante de la boulangerie est quant à elle maintenue à 25°C.

On admet que l'on peut modéliser l'évolution de la température de la baguette à l'aide d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que cette fonction est solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y'+6y=150$.

Pour un réel $t \geqslant 0$, $f(t)$ représente alors la température de la baguette après t heures hors du four.

1. D'après le contexte, quelle est la valeur de $f(0)$?
2. Résoudre l'équation différentielle $y'+6y=150$.
3. En utilisant la condition initiale, montrer que pour réel $t \geqslant 0$, on a $f(t)=200\mathrm{e}^{-6t}+25$.
4. Que vaut $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$? Cette valeur vous semble-t-elle cohérente ?
5. Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger doit attendre que leur température soit inférieure ou égale à 40°C. Donner une valeur arrondie à la minute du temps à attendre.

▶ Exercice 27 – Voir le corrigé

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'=4y+3x-1$.

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (H).
2. Soit φ une solution de (E) et f une fonction. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-\varphi$ est solution de (H).
3. Montrer que $v : x \mapsto -\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}$ est solution de l'équation différentielle $y'=4y+3x-1$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

▶ Exercice 28 – Voir le corrigé

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ y'+y=\mathrm{e}^{-x}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée $(H)\ :\ y'+y=0$.
2. Soit φ une solution de (E) et f une fonction. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-\varphi$ est solution de (H).
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est solution de l'équation (E).
4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

▶ Exercice 29 – Voir le corrigé

On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ 2y'+y=(x+1)\mathrm{e}^{-x/2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène $(H)\ :\ 2y'+y=0$
2. Soit φ une solution de (E) et f une fonction. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-\varphi$ est solution de (H).
3. Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $f : x \mapsto (ax^2+bx)\mathrm{e}^{-x/2}$ soit solution de l'équation (E)
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

▶ Exercice 30 – Voir le corrigé

Soit g_1 et g_2 deux fonctions et a un réel non nul. On considère l'équation $(E)\ :\ y'=ay+g_1+g_2$.

1. Montrer que si f_1 est solution de l'équation $y'=ay+g_1$ et f_2 est solution de l'équation $y'=ay+g_2$, alors f_1+f_2 est solution de (E). C'est le principe de superposition des solutions.
2. **Application** : on souhaite résoudre l'équation $y'=2y+\mathrm{e}^{3x}+2$.
   (a) Donner une solution de l'équation $y'=2y+2$
   (b) Déterminer un réel a pour que la fonction $x \mapsto a\mathrm{e}^{3x}$ soit solution de $y'=2y+\mathrm{e}^{3x}$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Pour aller plus loin...

► Exercice 31 (Variation de la constante) – Voir le corrigé

La méthode de la variation de la constante permet de trouver, dans certains cas, une solution particulière à une équation différentielle. Dans cet exercice, on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = \frac{1}{1+e^x}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée $y' + y = 0$.
2. Soit f une solution de l'équation différentielle $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$. On cherche alors une fonction C définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $f(x) = C(x)e^{-x}$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x.
   (b) On rappelle que f est solution de (E). En déduire que $C'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ pour tout réel x.
   (c) Déterminer une fonction C qui convienne.
   (d) Réciproquement, montrer que la fonction f trouvée est bien solution de (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions (E).

► Exercice 32 – Voir le corrigé

Déterminer les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$.

► Exercice 33 (Modèle de Verhulst) – Voir le corrigé

Le parc Kruger est un parc animalier situé en Afrique du Sud. Fondé à la fin du XIXe siècle, celui-ci accueillit notamment une population d'éléphants africains, une espèce menacée d'extinction à cause du braconnage intensif. Le parc accueillait ainsi 10 éléphants en 1905. Les scientifiques ont estimé que la population P au temps t, exprimé en années, vérifiait l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad P' = \frac{3}{20}P - \frac{P^2}{50000}.$$

1. Montrer que si à un instant t, la population est en-dessous de 7500, alors celle-ci est croissante.
2. On suppose que la fonction P ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$. On pose alors, pour tout $t \geqslant 0$, $F(t) = \dfrac{1}{P(t)}$.
   (a) Exprimer $F'(t)$ en fonction de $P(t)$ et $P'(t)$.
   (b) Montrer que P est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si F est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -\dfrac{3}{20}y + \dfrac{1}{50000}$.
   (c) Résoudre l'équation (E').
   (d) En déduire que l'unique solution de l'équation (E) ayant pour condition initiale $P(0) = 10$ est $P : t \mapsto \dfrac{7500}{1+749e^{-0,15t}}$.
3. Déterminer la population limite d'éléphants dans le parc.
4. On admet que pour tout $t \geqslant 0$, $P''(t)$ est du signe de $1 - 749e^{-0.15t}$.
   (a) Déterminer, si elles existent, les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de P.
   (b) Justifier la phrase suivante : la croissance de la population s'accélère jusqu'à ce que cette population atteigne la moitié de sa valeur maximale.

► Exercice 34 (Modèle de Gompertz) – Voir le corrigé

Un laboratoire de recherche étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie de disparition.

En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille. Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t, exprimé en années à partir de l'origine 2000.

D'après le module d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0;+\infty[$ et satisfait l'équation différentielle

$$(E) : y' = -\frac{1}{20}y(3-\ln(y)).$$

1. Soit f une solution de (E) et $g = \ln(f)$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et exprimer g' en fonction de f' et f.
   (b) Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E') : y' = \frac{1}{20}y - \frac{3}{20}$.
   (c) Résoudre l'équation (E')
   (d) En déduire qu'il existe un réel C tel quel pour tout réel x,
   $$f(x) = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right).$$
2. Réciproquement, pour C un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)$. Montrer que f est une solution de l'équation (E).
3. Les conditions initiales conduisent à considérer la fonction f définie pour tout $t > 0$ par
   $$f(t) = \exp\left(3 - 3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Déterminer le sens de variations de f sur $[0;+\infty[$.
   (c) Au bout de combien d'années la taille de l'échantillon sera-t-elle inférieure à vingt individus ?

► Exercice 35 – Voir le corrigé

L'objectif de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables telles que, pour tous réels a et b, on a $(E) : f(a+b) = f(a)f(b)$.

1. Déterminer les solutions constantes de ce problème.
2. On suppose désormais que f est une solution de (E) non constante.
   (a) Justifier que $f(0) = 1$.
   (b) Justifier que pour tous réels a et x, on a $f'(a+x) = f(a)f'(x)$. puis $f'(a) = f(a)f'(0)$.
   (c) En déduire toutes les solutions de (E).

3. Corrigés

Notion d'équation différentielle

► Correction 1 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$ et $3f(x) - 3 = 3(\mathrm{e}^{3x} + 1) - 3 = 3\mathrm{e}^{3x} + 3 - 3 = 3\mathrm{e}^{3x}$.

Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = 3f(x) - 3$. f est donc solution de l'équation différentielle $y' = 3y - 3$.

► Correction 2 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x \neq -1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ et donc $(1+x)f'(x) + f(x) = (1+x) \times \left(-\dfrac{1}{(1+x)^2}\right) = 0$.

f est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' + y = 0$.

► Correction 3 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

De plus, $f(x) \times (1 - f(x)) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} \times \left(1 - \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} = f'(x)$.

f est bien solution de l'équation différentielle $y' = y(1-y)$.

► Correction 4 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $f'(x) = \lambda\mathrm{e}^x + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x = (\lambda x + \lambda + \mu)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = \lambda\mathrm{e}^x + (\lambda x + \lambda + \mu)\mathrm{e}^x = (\lambda x + 2\lambda + \mu)\mathrm{e}^x$.

Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f''(x) - 2f'(x) + f(x) &= (\lambda x + 2\lambda + \mu)\mathrm{e}^x - 2(\lambda x + \lambda + \mu)\mathrm{e}^x + (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x \\ &= (\lambda x - 2\lambda x + \lambda x + 2\lambda + \mu - 2\lambda - 2\mu + \mu)\mathrm{e}^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

f est bien solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

Primitives

► Correction 5 – Voir l'énoncé

h est la dérivée de H. Or, h est négative sur $]-\infty; 0]$: H est donc décroissante sur cet intervalle. Ainsi, pour tout $x < 0$, $H(x) > H(0)$. Or, $H(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x < 0$, $H(x) > 0$: H est positive sur $]-\infty; 0]$.

► Correction 6 – Voir l'énoncé

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = x\ln(x) - x$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

f est une primitive de ln sur $]0; +\infty[$.

► Correction 7 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $F(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $f(x) = (4x^2+2x+2)\mathrm{e}^{x^2-1}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ revient à montrer que $F' = f$.

La dérivée de $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-1}$ est $x \mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2-1}$ et celle de $x \mapsto (2x+1)$ est $x \mapsto 2$. Ainsi, pour tout réel x,

$$F'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{x^2-1} + (2x+1) \times 2x\mathrm{e}^{x^2-1} = (4x^2+2x+2)\mathrm{e}^{x^2-1} = f(x).$$

F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Correction 8 – Voir l'énoncé

Soit $f : x \mapsto (ax+b)\mathrm{e}^{4x+3}$. Pour tout réel x, $f'(x) = a\mathrm{e}^{4x+3} + (ax+b) \times 4\mathrm{e}^{4x+3} = (4ax+a+4b)\mathrm{e}^{4x+3}$. En prenant $a = 2$ et $b = 3$. On obtient $f'(x) = (8x+14)\mathrm{e}^{4x+3}$. f est alors bien une primitive de la fonction demandée.

► Correction 9 – Voir l'énoncé

Notons $g : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{1-3x}$.

Pour tout réel x,

$$g'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{1-3x} + (ax^2+bx+c) \times (-3\mathrm{e}^{1-3x}) = (-3ax^2+(2a-3b)x+b-3c)\mathrm{e}^{1-3x}.$$

En prenant $a = 1$, $b = 0$ et $c = -4$, on obtient $g'(x) = f(x)$. g est alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Correction 10 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.

Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} = f(x)$. F est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Notons F_0 l'unique primitive de f telle que $F_0(0) = 0$. Puisque toutes les primitives de f ne varient que d'une constante, on sait qu'il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_0(x) = F(x) + C$. Ainsi, $F_0(0) = F(0) + C = 1 + C = 0$ et donc $C = -1$. Finalement, pour tout réel x, $F_0(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 1$.

► Correction 11 – Voir l'énoncé

Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = f(x)$. F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_0(x) = F(x) + C = \ln(1+\mathrm{e}^x) + C$. Or, $F_0(0) = \ln(2) + C = 0$. On a donc $C = -\ln(2)$.

Finalement, pour tout réel x, $F_0(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x) - \ln(2) = \ln\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)$.

► Correction 12 – Voir l'énoncé

- $F_1 : x \mapsto \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - x$ est une primitive de $f_1 : x \mapsto x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
- $F_2 : x \mapsto 3\ln(x) + \dfrac{2}{x}$ est une primitive de $f_2 : x \mapsto \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$.
- $F_3 : x \mapsto x^7 + 2\mathrm{e}^{4x+2} + \dfrac{1}{2x^2}$ est une primitive de $f_3 : x \mapsto 7x^6 + 8\mathrm{e}^{4x+2} - \dfrac{1}{x^3}$ sur $I =]-\infty; 0[$.
- $F_4 : x \mapsto \frac{4}{5}x^5 + x^3 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{3x^6}$ est une primitive de $f_4 : x \mapsto 4x^4 + 3x^2 - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{4}{x^7}$ sur $]-\infty; 0[$

- $F_5 : x \mapsto \dfrac{3}{5}e^{5x+2}$ est une primitive de $f_5 : x \mapsto 3e^{5x+2}$ sur $\mathbb{R}$.
- $F_6 : x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ln(x)$ est une primitive de $f_6 : x \mapsto e^{3x} + x^4 - \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
- $F_7 : x \mapsto -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{5}{3x^3}$ est une primitive de $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{5}{x^4}$ sur $]0;+\infty[$.
- Pour tout réel $x > 0$,

  $$f_8(x) = \frac{2x^5+3x^2+1}{x^3} = \frac{2x^5}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3} = 2x^2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}.$$

  $F_8 : x \mapsto \dfrac{2}{3}x^3 + 3\ln(x) - \dfrac{1}{2x^2}$ est une primitive de $f_8 : x \mapsto \dfrac{2x^5+3x^2+1}{x^3}$ sur $]0;+\infty[$.

► Correction 13 – Voir l'énoncé

- La fonction $F : x \mapsto x^2 + x$ est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_1(x) = x^2 + x + C$. Or, $F_1(3) = 2 = 3^2 + 3 + C = 12 + C$ et donc, $C = -10$. La fonction recherchée est la fonction $F_1 : x \mapsto x^2 + x - 10$.
- La fonction $F : x \mapsto 2\ln(x) - \dfrac{1}{x}$ est une primitive de f_2 sur $]0;+\infty[$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_2(x) = 2\ln(x) - \dfrac{1}{x}$. Or, $F_2(1) = 3 = 2\ln(1) - \dfrac{1}{1} + C = C - 1$ et donc, $C = 4$. La fonction recherchée est la fonction $F_2 : x \mapsto 2\ln(x) - \dfrac{1}{x} + 4$.
- La fonction $F : x \mapsto \dfrac{2}{3}e^{3x-4} + x$ est une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_3(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x-4} + x + C$. Or, $F_3\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{2}{3}e^{3\times(4/3)-4} + \dfrac{4}{3} + C = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} + C = 2 + C = 5$ et donc, $C = 3$. La fonction recherchée est la fonction $F_3 : x \mapsto \dfrac{2}{3}e^{3x-4} + x + 3$.
- Attention au fait que l'intervalle est $]-\infty;0[$! La fonction $F : x \mapsto 3\ln(-x) + \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de f_4 sur $]-\infty;0[$. Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $F_4(x) = 3\ln(-x) + \dfrac{x^2}{2} + C$. Or, $F_4(-1) = 3\ln(1) + \dfrac{(-1)^2}{2} + C = \dfrac{1}{2} + C = 2$ et donc, $C = \dfrac{3}{2}$. La fonction recherchée est la fonction $F_4 : x \mapsto 3\ln(-x) + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2}$.

► Correction 14 – Voir l'énoncé

- On reconnait une fonction de la forme $u'e^u$ avec pour tout réel non nul x, $u(x) = 2x^2 + x + 3$. Une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction

  $$F_1 : x \mapsto e^{2x^2+x+3}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2 + 3x + 3$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ (c'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif et dont le coefficient dominant est positif). Par ailleurs, pour tout réel x, $f_2(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f_2 est donc $\ln(u)$, soit la fonction

  $$F_2 : x \mapsto \ln(x^2 + 3x + 3).$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 3+e^{2x}$. Pour tout réel x, $u(x) \neq 0$ et $f_3(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$. Une primitive de f_3 est donc $\dfrac{1}{u}$, soit la fonction

$$F_3 : x \mapsto \frac{1}{3+e^{2x}}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^3$. Pour tout réel x, $f_4(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 e^{x^3} = \dfrac{1}{3} \times u'(x) \times e^{u(x)}$. Une primitive de f_4 est donc $\dfrac{1}{3}e^{u(x)}$, soit la fonction

$$F_3 : x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2+5x+7$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ (c'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif et dont le coefficient dominant est positif). Par ailleurs, pour tout réel x, $f_5(x) = \dfrac{2u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f_5 est donc $2\ln(u)$, soit la fonction

$$F_2 : x \mapsto 2\ln(x^2+5x+7).$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^3+3x$.
Pour tout réel $x > 0$, $f_6(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}} = \frac{2}{3} \times \dfrac{3x^2+3}{2\sqrt{x^3+3x}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$. Une primitive de f_6 est donc $\dfrac{2}{3}\sqrt{u}$, soit la fonction

$$F_6 : x \mapsto \frac{2}{3}\sqrt{x^3+3x}.$$

- Pour tout réel x strictement positif, $f_7(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times e^{1/x}$. On reconnait une fonction de la forme $u'e^u$ avec pour tout réel non nul x, $u(x) = \dfrac{1}{x}$. Une primitive de f_7 sur $]0;+\infty[$ est donc la fonction

$$F_7 : x \mapsto e^{1/x}.$$

- Pour tout réel x, $f_8(x) = \dfrac{1}{2} \times (2xe^{x^2-5})$. On reconnait une fonction de la forme $\dfrac{1}{2}u'e^u$ avec $u : x \mapsto x^2-5$. Une primitive est donc $\dfrac{1}{2}e^u$. Une primitive de f_8 sur I est fonc la fonction

$$F_8 : x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2-5}.$$

- Pour tout réel $x > 0$, on a $f_9(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}}$. On reconnaît une fonction de la forme $u' \times e^u$ avec $u : x \mapsto \sqrt{x}$. Une primitive de cette fonction est e^u. Ainsi, une primitive de g sur $]0;+\infty[$ est

$$F_9 : x \mapsto e^{\sqrt{x}}.$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = \sqrt{x}$. Pour tout réel $x > 0$, $f_{10}(x) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = 2u'(x) \times e^{u(x)}$. Une primitive de f_{10} est donc $2e^u$, soit la fonction

$$F_{10} : x \mapsto 2e^{\sqrt{x}}.$$

- On reconnaît une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto x^4 - 3x^2 + 5$. Une primitive de cette fonction est $\ln(u)$, à condition que u soit strictement positive. Or, pour tout réel x, $u(x) = x^4 - 3x^2 + 5 = X^2 - 3X + 5$ en posant $X = x^2$. Le polynôme $X^2 - 3X + 5$ a pour discriminant -11 qui est strictement négatif. On en conclut que pour tout réel x, $u(x) > 0$. Ainsi, une primitive de f_{11} sur $\mathbb{R}$ est

  $$F_{11} : x \mapsto \ln(x^4 - 3x^2 + 5).$$

- Pour tout réel$x > 1$, $f_{12}(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$. On reconnaît une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto \ln(x)$. Par ailleurs, pour $x \in]1; +\infty[$, $u(x) > 0$. Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est donc $\ln(u)$. Une primitive de f_{12} sur I est donc la fonction

  $$F_{12} : x \mapsto \ln(\ln(x)).$$

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 5x^2 + 7$. Pour tout réel $x > 0$, $f_{13}(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^2} = -\left(-\frac{u(x)}{(u(x))^2}\right)$. Une primitive de f_{13} est donc $-\frac{1}{u}$, soit la fonction

  $$F_{13} : x \mapsto -\frac{1}{5x^2 + 7}.$$

- Pour tout réel $x > 0$, $f_{14}(x) = \frac{-(2x+5)}{(x^2 + 5x)^2}$. On reconnaît une fonction de la forme $-\frac{u'}{u^2}$ avec $u : x \mapsto x^2 + 5x$. Une primitive de cette fonction est $\frac{1}{u}$. Ainsi, une primitive de f_{14} sur $]0; +\infty[$ est

  $$F_{14} : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 5x}.$$

► Correction 15 – Voir l'énoncé

- Les primitives de $f : x \mapsto x^2 e^{x^3}$ sont les fonctions $F : x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3} + C$, pour C réel (voir exercice précédent). Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$. On a alors $F(0) = \frac{1}{3} + C = 3$ et donc $C = \frac{8}{3}$. La primitive recherchée est $F : x \mapsto \frac{1}{3}e^{x^3} + \frac{8}{3}$.
- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 1 + x^2$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ et $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f est donc $ln(u)$. Les primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto \ln(1 + x^2) + C$. Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $F(x) = \ln(1 + x^2) + C$. On a alors $F(2) = \ln(5) + C = 7$ et donc $C = 7 - \ln(5)$. Ainsi, pour tout réel x, $F(x) = \ln(1 + x^2) + 7 - \ln(5) = \ln\left(\frac{1 + x^2}{5}\right) + 7$.
- Pour tout réel x, on pose $u(x) = 2x^2 + 2x + 1$. Pour tout réel x, $u(x) > 0$ (c'est une fonction polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif et le coefficient dominant est positif) et $f(x) = \frac{2u'(x)}{u(x)}$. Une primitive de f est donc $2ln(u)$. Les primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto 2\ln(2x^2 + 2x + 1) + C$. Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $F(x) = \ln(2x^2 + 2x + 1) + C$. On a alors $F(-1) = \ln(1) + C = C = 3$. Ainsi, pour tout réel x, $F(x) = \ln(2x^2 + 2x + 1) + 3$.

- Pour tout réel x, on pose $u(x) = x^2+1$.
  Pour tout réel x, $u(x) > 0$ et $f(x) = \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \left(-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}\right)$.
  Une primitive de f est donc $\dfrac{3}{2u}$. Les primitives de f sont donc les fonctions $x \mapsto \dfrac{3}{2(x^2+1)} + C$.
  Soit donc $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{3}{2(x^2+1)} + C$. On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = C = 2$. Ainsi, pour tout réel x, $F(x) = \dfrac{3}{2(x^2+1)} + 2$.

► Correction 16 – Voir l'énoncé

1. On considère deux réels a et b ,
$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3)+b(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(a+b)x+3a-b}{(x-1)(x+3)}.$$
   Ainsi, pour avoir, pour tout réel x, $(a+b)x+3a-b = 1$, il suffit que $a+b=0$ et $3a-b=1$ soit $a = \dfrac{1}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$. On a donc, pour tout réel x,
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)}.$$
2. Pour tout $x > 1$, $x+3 > 0$ et $x-1 > 0$.

   Une primitive de f sur $]1;+\infty[$ est donc $F : x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln(x-1) - \dfrac{1}{4}\ln(x+3) = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$.

► Correction 17 – Voir l'énoncé

Dérivons chacune des fonctions proposées. Pour tout réel x...

- $K'(x) = 2H'(2x) = 2h(2x) = 2k(x)$;
- $K'(x) = 2 \times 2H'(2x) = 2h(2x) = 2k(x)$;
- $K'(x) = \frac{1}{2} \times 2H'(2x) = h(2x) = k(x)$;
- $K'(x) = 2H'(x) = 2h(x) = 2k\left(\frac{x}{2}\right)$.

La réponse correcte est la réponse **c.**.

Équations différentielles du premier ordre

► Correction 18 – Voir l'énoncé

- Les fonction solutions de l'équation différentielle $y' - 8y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{8x}$, C étant un réel. On cherche donc le réel C tel que $Ce^{-16} = 7$. On a donc $C = 7e^{16}$. Ainsi, l'unique solution de l'équation différentielle $y' = 8y$ telle que $y(-2) = 7$ est la fonction $x \mapsto 7e^{8x+16}$.
- Les solutions générales sont les fonctions $x \mapsto Ce^{2x}$. Pour avoir $f(2) = 3$, il faut que $C = 3e^{-4}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 3e^{2x-4}$.
- Les solutions générales sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-4x}$. Pour avoir $f(-1) = -5$, il faut que $C = -5e^{-4}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -5e^{-4x-4}$.

- On a alors $y' + 7y = 0$. Les solutions générales sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-7x}$. Pour avoir $f(0) = 2$, il faut que $C = 2$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 2\mathrm{e}^{-7x}$.
- On a alors $y' + \frac{2}{3} = 0y$. Les solutions générales sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-2x/3}$. Pour avoir $f(1) = 3$, il faut que $C = 3\mathrm{e}^{2/3}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x/3+2/3}$.
- La fonction nulle $f : x \mapsto 0$ est solution de cette équation. La solution étant unique, il s'agit de la fonction recherchée.

► Correction 19 – Voir l'énoncé

1. Les solutions de l'équation $y' + ky = 0$ sont les fonctions $f : t \mapsto C\mathrm{e}^{-kt}$, pour C réel. Par ailleurs, on cherche l'unique solution N vérifiant $N(0) = N_0 = C\mathrm{e}^0 = C$. Ainsi, pour tout réel t, $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$.
2. (a) On a $N(\tau) = \dfrac{N_0}{2}$ par définition. Or, $N(\tau) = N_0\mathrm{e}^{-k\tau}$. Ainsi, $\dfrac{N_0}{2} = N_0\mathrm{e}^{-k\tau}$ et donc $\mathrm{e}^{-k\tau} = \dfrac{1}{2}$. En appliquant le logarithme népérien, on obtient $-k\tau = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et donc $\tau = \dfrac{\ln(2)}{k}$.

   (b) On a $5730 = \dfrac{\ln(2)}{k}$ d'où $k = \dfrac{\ln(2)}{5730} \simeq 1.21 \times 10^{-4}$ années^{-1}.
3. Notons t le temps écoulé depuis la période où a vécu Otzi et N_0 le nombre initial d'atomes de carbone 14 dans son corps. On a alors $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$ d'une part et $N(t) = 0.53N_0$ d'autre part.
   Il en vient que $N_0\mathrm{e}^{-kt} = 0.53N_0$ et donc $t = -\dfrac{ln(0.53)}{k} \simeq 5248$. Otzi a vécu il y a environ 53 siècles.

► Correction 20 – Voir l'énoncé

1. Les solutions de l'équation $y' = 4y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{4x}$, pour C réel.
2. Soit φ une solution constante de (E). On a alors $0 = 4\varphi + 1$ et donc $\varphi = \dfrac{-1}{4}$. Réciproquement, la fonction constante égale à $-\dfrac{1}{4}$ est bien solution de l'équation (E).
3. L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{4x} - \dfrac{1}{4}$, pour C dans $\mathbb{R}$.
4. Soit C le réel tel que, pour tout réel x, $f_0(x) = C\mathrm{e}^{4x} - \dfrac{1}{4}$. On a alors $f_0(3) = C\mathrm{e}^{12} - \dfrac{1}{4} = 5$ et donc $C = \frac{21}{4}\mathrm{e}^{-12}$. Ainsi, pour tout réel x, $f_0(x) = \dfrac{21}{4}\mathrm{e}^{4x-12} - \dfrac{1}{4}$.

► Correction 21 – Voir l'énoncé

1. Les solutions générales sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}$. Pour avoir $f(3) = 1$, il faut que $C = \dfrac{5}{3}\mathrm{e}^{-9}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{5}{3}\mathrm{e}^{3x-9} - \dfrac{2}{3}$.
2. On a alors $y' = \dfrac{5}{2}y - \dfrac{1}{2}$. Les solutions générales sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{5x/2} + \dfrac{1}{5}$. Pour avoir $f(0) = 2$, il faut que $C = \dfrac{9}{5}$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{9}{5}\mathrm{e}^{5x/2} + \dfrac{1}{5}$.
3. La fonction constante égale à -2 convient. Par unicité de la solution, c'est la solution recherchée.

► Correction 22 – Voir l'énoncé

Notons $z = y'$. Alors y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation $z' + 2z - 3 = 0$ ou encore

$z' + 2z = 3$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$.

Ainsi, y est solution de (E) si et seulement si il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $y'(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}$ et donc si et seulement s'il existe deux réels C et k tels que, pour tout réel x, $y(x) = \frac{C}{-2}e^{-2x} + \frac{3}{2}x + k$ (ou simplement $y(x) = C'e^{-2x} + \frac{3}{2}x + k$, en posant $C' = \frac{C}{-2}$).

► Correction 23 – Voir l'énoncé

1. Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{\ln(2)}{7}y + \frac{20\ln(2)}{7}$ sont $t \mapsto Ce^{-\ln(2)t/7} + 20$.
   Soit donc C un réel tel que, pour tout réel positif t, $T(t) = Ce^{-\ln(2)t/7} + 20$.
   On a alors $T(0) = C + 20 = 100$ et donc $C = 80$. Ainsi, pour tout réel t, $T(t) = 80e^{-\ln(2)t/7} + 20$.
2. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t) = 20$.
3. On a $T(t) \leqslant 25$ si et seulement si $80e^{-\ln(2)t/7} + 20 \leqslant 25$ soit $e^{-\ln(2)t/7} \leqslant \frac{1}{14}$. En appliquant le logarithme népérien, qui est une fonction croissante sur $]0;+\infty[$, cela équivaut donc à $-\frac{\ln(2)t}{7} \leqslant -\ln(14)$ et donc $t \geqslant \frac{7\ln(14)}{\ln(2)}$. Or, $\frac{7\ln(14)}{\ln(2)} \simeq 26.65$. Il faut donc attendre environ 27 minutes pour que la température du thé soit inférieur à 25 degrés.

► Correction 24 – Voir l'énoncé

1. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $y + RCy' = E$ si et seulement si $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{E}{RC}$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $t \mapsto ke^{-\frac{t}{RC}} + E$.
   Soit dont k le réel tel que, pour tout réel t, $u(t) = ke^{-\frac{t}{RC}} + E$. Puisque le condensateur est initialement déchargé, on a $u(0) = 0$ et donc $ke^{-\frac{0}{RC}} + E = 0$ soit $k + E = 0$ et finalement, $k = -E$. Ainsi, pour tout réel $t > 0$, $u(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.
2. Puisque R et C sont positifs, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{RC}} = 0$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = E$.
3. Pour tout réel $t > 0$, $u'(t) = \frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$. Ainsi, la tangente à la courbe de u à l'abscisse 0 a pour équation $y = u'(0)(x - 0) + u(0)$ soit $y = \frac{E}{RC}t$.
4. On a $\frac{E}{RC}t = E$ si et seulement si $t = RC$. Ainsi, $\tau = RC$.
5. On a $u(\tau) = E(1 - e^{-\frac{RC}{RC}}) = E(1 - e^{-1}) \simeq 0.63E$.

► Correction 25 – Voir l'énoncé

Partie A : étude d'un modèle discret.

1. On ajoute 15 g de chlore, soit 15000 mg, dans une piscine de 50 m^3 d'eau, soit 50000 L. La concentration en chlore augmente alors de $\frac{15000}{50000}$ soit 0,3 mg·L^{-1}.
2. (a) Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$ ».
      - **Initialisation** : On a $u_0 = 0{,}7$ et $u_1 = 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}944$. On a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$. $P(0)$ est donc vraie.

- **Hérédité** : Soit n un entier naturel tel que $P(n)$ est vraie. On a alors $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$. Ainsi, on a $0{,}92v_n \leqslant 0{,}92v_{n+1} \leqslant 0{,}92 \times 4$ et donc $0{,}92v_n + 0{,}3 \leqslant 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leqslant 0{,}92 \times 4 + 0{,}3$, c'est-à-dire $v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 3{,}98$. Puisque $3{,}98 \leqslant 4$, on a en particulier $v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

(b) D'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. Puisque pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}92v_n + 0{,}3)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \ell$ et, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}92v_n + 0{,}3) = 0{,}92\ell + 0{,}3$. Ainsi, on a $\ell = 0{,}92\ell + 0{,}3$ soit $0{,}08\ell = 0{,}3$ et donc $\ell = \dfrac{0{,}3}{0{,}08} = 3{,}75$.

3. À long terme, le taux de chlore dans la piscine sera proche de $3{,}75$ mg·L^{-1}, ce qui est bien supérieur au taux recommandé.
4. On complète le programme Python ainsi :

```python
def alerte_chlore(s) :
  n = 0
  u = 0.7
  while u < s :
    n = n + 1
    u = 0.92 * u + 0.3
  return n
```

5. L'instruction alerte_chlore(3) renvoie la valeur 17. Cela signifie qu'en appliquant la méthode d'Alain, le taux de chlore dans la piscine sera supérieur à 3 mg·L^{-1}.

Partie B : étude d'un modèle continu.

1. Les solutions des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a et b sont des constantes sont des fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$. Ici, $a = -0{,}08$ et $b = \dfrac{q}{50}$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-0{,}08x} - \dfrac{\frac{q}{50}}{-0{,}08}$ soit $x \mapsto Ce^{-0{,}08x} + \dfrac{q}{4}$.
2. (a) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (-0{,}08x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$. Par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}08x} = 0$ et donc $\lim\limits_{c\to+\infty} f(x) = \dfrac{q}{4}$.

   (b) Puisque que la taux de chlore se stabilise autour de 2 mg·L^{-1}, cela signifie que $\dfrac{q}{4} = 2$ et donc $q = 8$. Par ailleurs, on a $f(0) = 0{,}7 = Ce^{-0{,}08\times 0} + \dfrac{8}{4} = C + 2$. On a donc $C = -1{,}3$.

► Correction 26 – Voir l'énoncé

1. D'après le contexte, $f(0) = 225$.
2. Les solutions de l'équation homogène associée $y' + 6y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ce^{-6t}$, $C \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution constante φ à cette équation.
   On a alors $\varphi' = 0$ et donc $6\varphi = 150$ soir $\varphi = \dfrac{150}{6} = 25$
   Les solutions de l'équation $y' + 6y = 150$ sont donc les fonctions $t \mapsto Ce^{-6t} + 25$, $C \in \mathbb{R}$.
3. Soit C le réel tel que, pour tout réel t, $f(t) = Ce^{-6t} + 25$. Puisque $f(0) = 225$, on a alors $C + 25 = 225$ et donc $C = 200$. Ainsi, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$.
4. Puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-6t} = 0$, il en vient que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 25$. Cette valeur est cohérente, elle correspond à la température de la boulangerie.

5. Soit $t \geqslant 0$. On a $f(t) \leqslant 40$ si et seulement si $200\mathrm{e}^{-6t}+25 \leqslant 40$, soit $\mathrm{e}^{-6t} \leqslant \dfrac{3}{40}$. En appliquant la fonction ln, qui est croissante sur $]0;+\infty[$, on a alors $-6t \leqslant \ln\left(\dfrac{3}{40}\right)$ et donc $t \geqslant -\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{3}{40}\right)$.
   Ce temps est exprimé en heures. Il faut donc attendre $-\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{3}{40}\right) \times 60$ soit $-10\ln\left(\dfrac{3}{40}\right)$ minutes (environ 26 minutes) pour que la température des baguettes passe en-dessous de 40°C.

► Correction 27 – Voir l'énoncé

1. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{4x}$ où C est un réel.
2. On considère la fonction $v : x \mapsto -\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}$. Pour tout réel x, $v'(x) = -\dfrac{3}{4}$.
   Ainsi, $v'(x)-4v(x) = -\dfrac{3}{4}-4\times\left(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}\right) = 3x-1$.
   v est solution de l'équation différentielle $y' = 4y+3x-1$.
3. f est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $f'(x) = 4f(x)+3x-1$. En retirant $\varphi'(x)$ aux deux membres de cette équation, on obtient que f est solution de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x) = 4f(x)+3x-1-\varphi'(x)$. Or, φ est solution de l'équation (E), et donc, pour tout réel x, $\varphi'(x) = 4\varphi(x)+3x-1$.
   On a donc que f est solution de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x) = 4f(x)+3x-1-(4\varphi(x)+3x-1)$ soit $(f-\varphi)'(x) = 4(f-\varphi(x))$, c'est-à-dire $f-\varphi$ est solution de (H).
4. Ainsi, f est solution de l'équation $y' = 4y+3x-1$ si et seulement si $f-v$ est solution de l'équation homogène $y' = 4y$, c'est-à-dire qu'il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x)-v(x) = C\mathrm{e}^{4x}$ ou encore $f(x) = C\mathrm{e}^{4x}+v(x) = C\mathrm{e}^{4x}-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{16}$.

► Correction 28 – Voir l'énoncé

1. L'équation homogène associée $y'+y=0$ ou $y' = -y$ a pour solutions les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où C est un réel.
2. f est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel x, $f'(x)+f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   En retirant $\varphi'(x)$ aux deux membres de cette équation, on obtient que f est solution de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x)+f(x) = \mathrm{e}^{-x}-\varphi'(x)$ ce qui équivaut à $f'(x)-\varphi'(x) = -f(x)+\mathrm{e}^{-x}-\varphi'(x)$. Or, φ est solution de l'équation (E), et donc, pour tout réel x, $\varphi'(x) = -\varphi(x)+\mathrm{e}^{-x}$.
   On a donc que f est solution de (E) si et seulement si $f'(x)-\varphi'(x) = -f(x)+\mathrm{e}^{-x}+\varphi(x)-\mathrm{e}^{-x}$ soit $(f-\varphi)'(x) = -(f-\varphi(x))$, c'est-à-dire $f-\varphi$ est solution de (H).
3. On considère la fonction $\varphi : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ Pour tout réel x, $\varphi'(x) = 1\times\mathrm{e}^{-x}+x\times(-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Ainsi, pour tout réel x, $\varphi'(x)+f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. φ est bien solution de l'équation (E).
4. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{x}$ où C est un réel.

► Correction 29 – Voir l'énoncé

1. L'équation différentielle homogène est $2y'+y=0$ ou $y'+\dfrac{1}{2}y=0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x/2}$ où C est un réel.
2. Soit a et b deux réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(ax^2+bx)$. Pour tout réel x, on a alors
   $$f'(x) = (2ax+b)\times\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+(ax^2+bx)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = \left(-\frac{1}{2}ax^2+\left(2a-\frac{b}{2}\right)x+b\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$
   Ainsi, f est solution de (E) si et seulement si pour tout réel x, $2f'(x)+f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(x+1)$, c'est-à-dire

$$2\times\left(-\frac{1}{2}ax^2+\left(2a-\frac{b}{2}\right)x+b\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+(ax^2+bx)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=(x+1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Les coefficients de x^2 dans le premier membre s'annulent, on doit donc avoir $(4a+b)x+2b=x+1$. On a alors $4a=1$ et $b=\frac{1}{2}$. Ainsi, $a=\frac{1}{4}$ et $b=\frac{1}{2}$.
La fonction $x\mapsto\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ est solution de l'équation (E).

3. Les solutions de l'équation (E) sont les fonction $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x/2}+\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ où C est un réel.

► **Correction 30 – Voir l'énoncé**

1. On a $(f_1+f_2)'=f_1'+f_2'=af_1+g_1+af_2+g_2=a(f_1+f_2)+g_1+g_2$. f_1+f_2 est solution de (E).
2. (a) Une solution de l'équation $y'=2y+2$ est la fonction constante égale à -1.
   (b) Soit : $f:x\mapsto a\mathrm{e}^{3x}$. Pour tout réel x, $f'(x)=3a\mathrm{e}^{3x}$ et donc $f'(x)-2f(x)=2a\mathrm{e}^{3x}$. Ainsi, en prenant $a=\frac{1}{2}$, on a bien $f'=2f+\mathrm{e}^{3x}$.
   (c) Les solutions de l'équation homogène $y'=2y$ sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{2x}$, pour C réel.
   Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{2x}-1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}$.

Pour aller plus loin...

► **Correction 31 – Voir l'énoncé**

1. Les solutions de l'équation $y'+y=0$ sont les fonctions $x\mapsto C\mathrm{e}^{-x}$ où C est un réel quelconque.
2. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=C'(x)\mathrm{e}^{-x}-C(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Puisque f est solution de (E), on a, pour tout réel x, $f'(x)+f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.
   Ainsi, pour tout réel x, $C'(x)\mathrm{e}^{-x}-C(x)\mathrm{e}^{-x}+C(x)\mathrm{e}^{-x}=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et donc $C'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
   (c) On reconnaît une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u:x\mapsto 1+\mathrm{e}^x$, qui est une fonction strictement positive. Une primitive de cette fonction est $\ln(u)$. La fonction $x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$ convient donc.
   (d) Pour tout réel x, on pose $f(x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$.
   - On considère $u:x\mapsto\ln(1+\mathrm{e}^x)$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
   - Pour tout réel x, on pose $v(x)=\mathrm{e}^{-x}$. v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}$.

   Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\times\mathrm{e}^{-x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\times(-\mathrm{e}^{-x})=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}-\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x)+f(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}-\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

   f est donc bien solution de l'équation différentielle $y'+y=\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}$ où C est un réel quelconque.

► Correction 32 – Voir l'énoncé

Si f est une solution de ce problème, c'est une solution d'une équation de la forme $y' + y = c$, où c est une constante. C'est donc une fonction de la forme $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{-x} + D$ où C et D sont des constantes.

Pour tout réel x, on a alors $f'(x) = -C\mathrm{e}^{-x}$ et donc $f'(x) + f(x) = D$. Or, pour tout réel x, $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1) = C + D + C\mathrm{e}^{-1} + D$. Ainsi, $D = 2D + C(1+\mathrm{e}^{-1})$ et donc $D = -C(1+\mathrm{e}^{-1})$.

Ainsi, il existe un réel C tel que, pour tout réel x, $f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - C(1+\mathrm{e}^{-1}) = C(\mathrm{e}^{-x} - 1 - \mathrm{e}^{-1})$.

Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions conviennent.

► Correction 33 – Voir l'énoncé

1. (a) Pour tout réel t, $F'(t) = \dfrac{-P'(t)}{P^2(t)}$.

   (b) P est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si $P' = \dfrac{3}{20}P - \dfrac{P^2}{50000}$.
   En divisant par P^2, on obtient $\dfrac{P'}{P^2} = \dfrac{3}{20P} - \dfrac{1}{50000}$, c'est-à-dire $-F' = \dfrac{3}{20}F - \dfrac{1}{50000}$ ou encore $F' = -\dfrac{3}{20}F + \dfrac{1}{50000}$. F est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = -\dfrac{3}{20}y + \dfrac{1}{50000}$.

   (c) Les solutions générales de (E') sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{at} - \dfrac{b}{a}$ où C est un réel.
   Ainsi, les solutions de (E') sont les fonctions $t \mapsto C\mathrm{e}^{-0.15t} + \dfrac{1}{7500}$.

   (d) On rappelle que $F = \dfrac{1}{P}$ et donc $P = \dfrac{1}{F}$.
   Ainsi, les solutions de (E) sont les $P_C : t \mapsto \dfrac{1}{C\mathrm{e}^{-0.15t} + \dfrac{1}{7500}}$ pour C réel.
   En multipliant numérateur et dénominateur par 7500, on obtient $P_C(t) = \dfrac{7500}{1 + 7500C\mathrm{e}^{-0.15t}}$.
   Par ailleurs, $P(0) = 10$. Or, $P_C(0) = \dfrac{7500}{1+7500C}$. Ainsi, pour déterminer l'unique solution de l'équation (E) vérifiant $P(0) = 10$, il faut résoudre l'équation $\dfrac{7500}{1+7500C} = 10$.
   On trouve alors $C = \dfrac{7490}{75000} = \dfrac{749}{7500}$. Ainsi, l'unique solution de (E) qui vaut 10 en 10 est la fonction $P : t \mapsto \dfrac{7500}{1 + 749\mathrm{e}^{-0.15t}}$.

2. Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} 749\mathrm{e}^{-0.15t} = 0$, il en vient que $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = 7500$.

► Correction 34 – Voir l'énoncé

1. Soit f une solution de (E) et $g = \ln(f)$.

   (a) Puisque f est dérivable et strictement positive, $\ln(f)$ est dérivable et $(\ln(f))' = \dfrac{f'}{f}$.

   (b) Puisque f est solution de (E), on a alors $f' = -\dfrac{1}{20}f(3 - \ln(f))$. En divisant par f qui est strictement positive, on a $\dfrac{f'}{f} = -\dfrac{3}{20} + \dfrac{1}{20}\ln(f)$ c'est-à-dire $g' = \dfrac{1}{20}g - \dfrac{3}{20}$.

g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = \dfrac{1}{20}y - \dfrac{3}{20}$.

(c) Les solutions de l'équation (E') sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{x/20} + 3$ où C est un réel.

(d) Ainsi, il existe un réel C tel quel pour tout réel x, $g(x) = \ln(f(x)) = C\mathrm{e}^{x/20} + 3$ et donc

$$f(x) = \exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right).$$

2. Réciproquement, pour C un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(3 + C\,\exp\left(\dfrac{x}{20}\right)\right)$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{C}{20}\exp\left(\frac{x}{20}\right) \times \exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right) = \frac{C}{20}\exp\left(3 + \frac{x}{20} + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right).$$

Par ailleurs, pour tout réel x,

$$-\frac{1}{20}f(x)(3 - \ln(f(x)) = -\frac{1}{20}\exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\left[3 - \ln\left(\exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\right)\right].$$

Ainsi,

$$-\frac{1}{20}f(x)(3 - \ln(f(x)) = -\frac{1}{20}\exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\left[3 - \left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\right].$$

Et donc,

$$-\frac{1}{20}f(x)(3 - \ln(f(x)) = -\frac{1}{20}\exp\left(3 + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right)\left[-C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right] = \frac{C}{20}\exp\left(3 + \frac{x}{20} + C\,\exp\left(\frac{x}{20}\right)\right) = f'(x).$$

f est donc solution de l'équation (E).

3. (a) On a $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

(b) Puisque pour tout réel x, $f'(x) = -\dfrac{3}{20}\exp\left(3 - +\dfrac{3}{20}\,\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right) < 0$, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

(c) On cherche à résoudre l'équation $f(t) \leqslant 0.02$, c'est-à-dire $\exp\left(3 - 3\,\exp\left(\dfrac{t}{20}\right)\right) \leqslant 0.02$.
On a alors $-3\,\exp\left(\dfrac{t}{20}\right) \leqslant \ln(0.02) - 3$ puis $\exp\left(\dfrac{t}{20}\right) \geqslant \dfrac{\ln(0.02) - 3}{-3}$.
Enfin, on trouve $t \geqslant 20\ln\left(\dfrac{\ln(0.02) - 3}{-3}\right)$.
Or, $20\ln\left(\dfrac{\ln(0.02) - 3}{-3}\right) \simeq 16.69$. La taille de l'échantillon sera inférieure à 20 individus après 17 ans.

► Correction 35 – Voir l'énoncé

1. Si f est une constante λ, on a alors $\lambda^2 = \lambda$ et donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
2. (a) En prenant $a = b = 0$, on a $f(0+0) = f(0)f(0)$ soit $f(0) = f(0)^2$ et donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Or, si $f(0) = 0$, on a, pour tout réel x, $f(0+x) = f(0)f(x) = 0$, ce qui est impossible puisqu'on suppose f non constante. Ainsi, $f(0) = 1$.

(b) Fixons $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto f(a+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto f'(a+x)$. La fonction $x \mapsto f(a)f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto f(a)f'(x)$. Ainsi, pour tout réel x, on a $f'(a+x) = f(a)f'(x)$. En particulier, en prenant $x = 0$, on a $f'(a) = f(a)f'(0)$.

(c) f est solution d'une équation de la forme $y' = \alpha y$. Ainsi f est de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{\alpha x}$, où C est une constante. Or, puisque $f(0) = 1$, on a forcément $C = 1$. On a donc forcément $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ pour tout réel x. Réciproquement, on vérifie facilement que ces fonctions conviennent.