1. Cours : Compléments sur la dérivation

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Fonction dérivée

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $a \in I$ et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Cette limite est appelée *nombre dérivé de f en a* et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$. On appelle alors *fonction dérivée* de f sur I la fonction

$$f' : \left\{ \begin{array}{lcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array} \right.$$

■ **Exemple 1 :** On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel et h un réel non nul.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = 2x+h$$

Lorsque h se rapproche de 0, cette quantité tend vers $2x$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$. ■

1.2 Dérivées usuelles

$f : x \mapsto$	Définie sur	Dérivable sur	$f' : x \mapsto$
$k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$mx+p$, m et p réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\exp(ax+b)$, a et b réels	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\exp(ax+b)$

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 1 : Soit I un intervalle, u et v deux fonctions dérivables sur I, k un réel. Alors les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur I. Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est également dérivable sur I. On a alors

$$(ku)' = ku' \qquad (u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

■ **Exemple 2 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\exp(3x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2 - 3x + 1$ et $v(x) = \exp(3x+1)$.

- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = 2x - 3$.
- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 3\exp(3x+1)$.

On a $f = uv$. Ainsi, f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a $f' = u'v + uv'$. Ainsi, pour tout réel x,

$$f'(x) = (2x-3) \times \exp(3x+1) + (x^2 - 3x + 1) \times 3\exp(3x+1) = (3x^2 - 7x)\exp(3x+1).$$

■

1.4 Tangente à la courbe

Définition 2 — Tangente à la courbe : Soit f une fonction dérivable en a. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite de coefficient directeur $f'(a)$ et passant par le point de coordonnée $(a; f(a))$.

Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable en a. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation

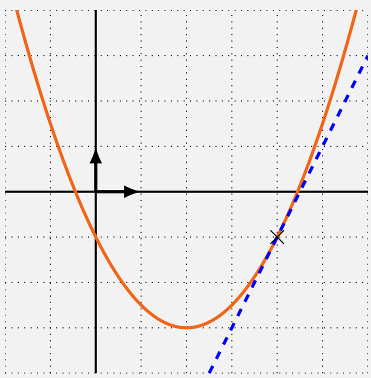
$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

■ **Exemple 3 :** Pour tout réel x, posons $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - 1$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $f'(x) = x - 2$.
Déterminons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 4

- $f'(4) = 4 - 2 = 2$
- $f(4) = \frac{4^2}{2} - 2 \times 4 - 1 = -1$

Cette tangente a pour équation $y = f'(4) \times (x-4) + f(4)$ soit $y = 2(x-4) - 1$ et donc $y = 2x - 9$.



■

1.5 Variations d'une fonction

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

■ **Exemple 4 :** On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 1)\exp(3x+1)$ étudiée précédemment. On a vu que pour tout réel x, on a $f'(x) = (3x^2 - 7x)\exp(3x+1) = x(3x-7)\exp(3x+1)$.

$f'(x)$ étant écrite sous forme factorisée, on peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f.

x	$-\infty$		0		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\exp(3x+1)$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\frac{5\mathrm{e}^8}{9}$	$\nearrow$	

■

2 Dérivée seconde

Définition 3 — Dérivée seconde : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa fonction dérivée f' est également dérivable sur I (on dit également que f est deux fois dérivable sur I).

On appelle fonction *dérivée seconde* de f la fonction dérivée de f'. Cette fonction est notée f''.

Pour tout $x \in I$, $f''(x) = (f')'(x)$.

■ **Exemple 5 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x-2}$. Posons, pour tout réel x, $u_1(x) = 2x+1$ et $v_1(x) = \mathrm{e}^{3x-2}$.

- u_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_1'(x) = 2$.
- v_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_1'(x) = 3\mathrm{e}^{3x-2}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = u_1'(x) \times v_1(x) + u_1(x) \times v_1'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{3x-2} + (2x+1) \times 3\mathrm{e}^{3x-2} = (6x+5)\mathrm{e}^{3x-2}.$$

Posons alors, pour tout réel x, $u_2(x) = 6x+5$ et $v_2(x) = e^{3x-2}$.

- u_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u_2'(x) = 6$.
- v_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v_2'(x) = 3e^{3x-2}$.

Ainsi, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f''(x) = u_2'(x) \times v_2(x) + u_2(x) \times v_2'(x) = 6 \times e^{3x-2} + (6x+5) \times 3e^{3x-2} = (24x+21)e^{3x-2}.$$

■

3 Composition de fonctions

Définition 4 — Fonction composée : Soit I et J deux parties de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur J et g une fonction définie sur I telle que pour tout réel x, $g(x) \in J$.

On définit la *fonction composée* de f et g notée $f \circ g$ par

$$\text{Pour tout } x \in I,\ f \circ g(x) = f(g(x)).$$

L'idée derrière la composition de fonctions est simplement d'appliquer successivement plusieurs fonctions.

$$f \circ g : x \xmapsto{g} g(x) \xmapsto{f} f[g(x)]$$

■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on note $f(x) = x^2$ et $g(x) = x+3$. Alors, pour tout réel x,

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (x+3)^2$.
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x)+3 = x^2+3$.

■

Attention ! En général, on n'a pas $f \circ g = g \circ f$! Ces deux fonctions ne sont d'ailleurs pas forcément définies sur le même ensemble.

Propriété 3 : Soit I et J deux intervalles, f une fonction définie et dérivable sur J et g une fonction définie et dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $g(x) \in J$. Alors $f \circ g$ est dérivable et pour tout réel x dans I,

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \times (f' \circ g)(x).$$

■ **Exemple 7 :** On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x-2}$. Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2+3x-2$. Pour tout réel x, on a alors $f(x) = u(v(x)) = u \circ v(x)$.

- v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $v'(x) = 2x+3$
- u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $u'(x) = \mathrm{e}^x$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = v'(x) \times u'(v(x)) = (2x+3)e^{x^2+3x-2}.$$

■

Propriété 4 — Cas particuliers : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I

- Pour tout entier naturel n, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.
- Si pour tout réel $x \in I$, $u(x) > 0$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si pour tout réel x, $u(x) \neq 0$, $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{u'}{u^2}$.

Exemple 8 : Pour tout réel x, posons $f(x) = (4x+1)^9$.

Pour tout réel x, on pose $u(x) = 4x+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Or, $f = u^9$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 9 \times u' \times u^8$, c'est-à-dire que pour tout réel x, on a

$$f'(x) = 9 \times 4 \times (4x+1)^{9-1} = 36 \times (4x+1)^8.$$

■

Exemple 9 : Pour tout réel x, posons $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Pour tout réel x, on pose alors $u(x) = x^2+1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas. Or, $f = \dfrac{1}{u}$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = -\dfrac{u'}{u^2}$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

■

Exemple 10 : On considère la fonction f définie pour tout réel $x \in [-2;2]$ par $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Bien que la fonction f soit définie sur l'intervalle fermé $[-2;2]$, elle n'est en revanche dérivable que sur l'intervalle ouvert $]-2;2[$. Pour tout réel $x \in]-2;2[$, on a

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

■