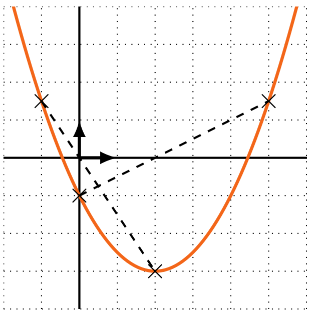
1. Cours : Convexité

1 Convexité, concavité

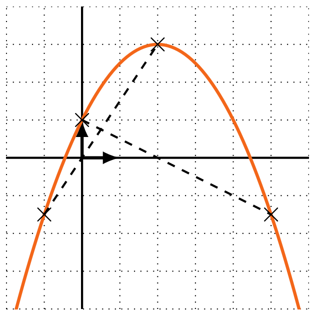
Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- On dit que f est *convexe* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.
- On dit que f est *concave* sur I si, **pour tous réels** a et b dans I, avec $a < b$, la sécante reliant les deux points de la courbe d'abscisses a et b se trouve en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a,b]$.

Fonction convexe

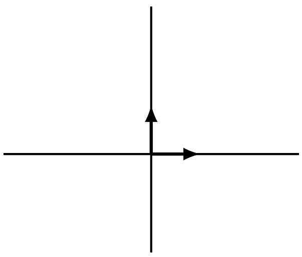


Fonction concave

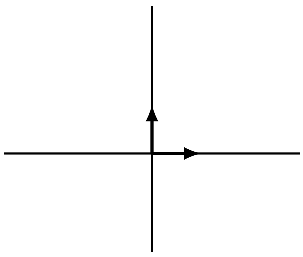


Rappel de certaines courbes représentatives

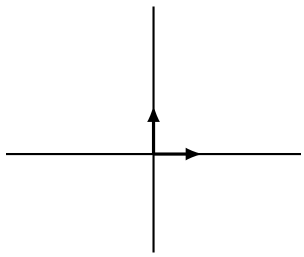
$x \mapsto x^2$



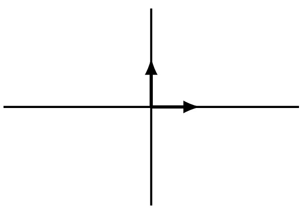
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$



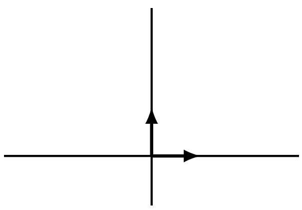
$x \mapsto x^3$



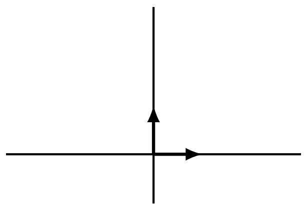
$x \mapsto \ln(x)$



$x \mapsto \mathrm{e}^x$

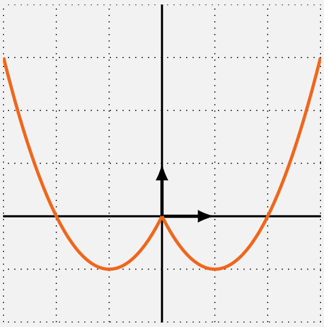


$x \mapsto \sqrt{x}$



■ **Exemple 1 :** Les fonction $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sont
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est
La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est
La fonction $x \mapsto x^3$ est ■

■ **Exemple 2 :** Attention : on parle bien de convexité sur un intervalle. Par ailleurs, ce n'est pas parce qu'une fonction f est convexe sur deux intervalles $[a,b]$ et $[b,c]$ que f est aussi convexe sur $[a,c]$.



La fonction représentée ci-dessus est convexe sur $[-3;0]$ et sur $[0;3]$ mais n'est pas convexe sur $[-3,3]$. ■

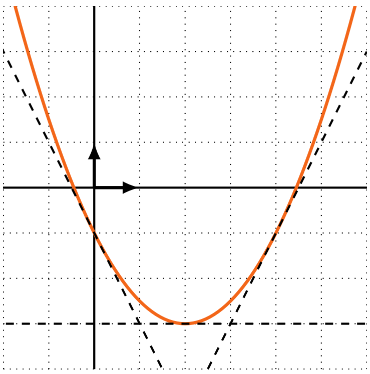
2 Fonctions dérivables

2.1 Caractérisation des fonctions convexes

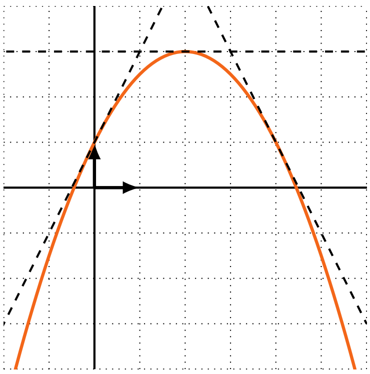
Propriété 1 : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- f est convexe sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve au-dessus de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.
- f est concave sur I si et seulement si la courbe $\mathscr{C}_f$ se trouve en-dessous de toutes ses tangentes aux points d'abscisses $x \in I$.

Fonction convexe



Fonction concave



■ **Exemple 3 :** Montrons que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Notons $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit a un réel.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) =$.
- La tangente à $\mathscr{C}_f$ a pour équation

- Pour tout réel x,

$$f(x) - (2ax - a^2) =$$

Ainsi, $\mathscr{C}_f$ est toujours au-dessus de sa tangente à l'abscisse a, et ce, peu importe le réel a choisi. f est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

■

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

De cette propriété vient naturellement la suivante...

Propriété 3 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.
- f est concave sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

L'étude de la convexité d'une fonction revient à l'étude de signe de sa dérivée seconde (si celle-ci existe, bien entendu).

Démonstration 1 : **Si $f'' \geqslant 0$, alors f est convexe** : Soit f une fonction deux fois dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

□

■ **Exemple 4 :** Pour tout entier naturel pair $n \geqslant 2$, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En effet, la dérivée seconde de cette fonction est la fonction $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$.
Or, n étant pair, $n-2$ l'est aussi, et pour tout réel x, on a donc $x^{n-2} \geqslant 0$. ■

■ **Exemple 5 :** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

En effet, f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 6x$, qui est positif si et seulement si x l'est aussi. ■

2.2 Point d'inflexion

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

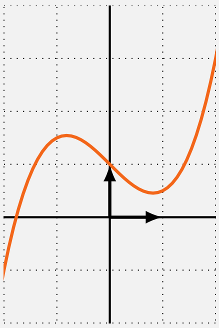
Un *point d'inflexion* est un point où la convexité de la fonction f change. La tangente à la courbe de f en un point d'inflexion traverse la courbe de f.

Propriété 4 : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- Si f présente un point d'inflexion à l'abscisse a, alors $f''(a) = 0$.
- Réciproquement, si $f''(a) = 0$ et f'' **change de signe** en a, alors f présente un point d'inflexion en a.

Cela rappelle naturellement le cas des extremum locaux. Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. Cependant, si $f'(a) = 0$, f admet un extremum local en a seulement si f' change de signe en a.

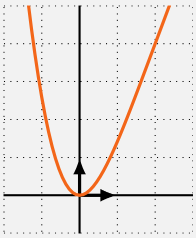
■ **Exemple 6 :** Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - x + 1$.



■

L'annulation de la dérivée seconde n'est pas une condition suffisante de présence d'un point d'inflexion !

■ **Exemple 7 :** Pour tout réel x, on pose $g(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 + 2x^2$.



■

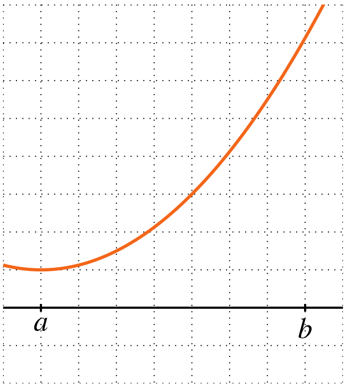
3 Inégalités de convexité

3.1 Inégalités de milieux

Propriété 5 : Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

Démonstration 2 : On considère les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$.



□

■ **Exemple 8 :** La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour tous réels a et b, ■

Propriété 6 : Soit f une fonction concave sur un intervalle I.

Pour tous réels a et b de I, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

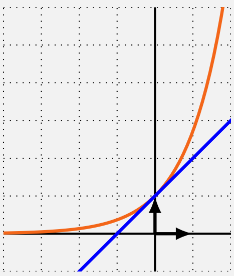
■ **Exemple 9 :** La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, pour tous réels a et b positifs, ■

3.2 Inégalités avec les tangentes

La convexité des fonctions dérivables permet d'établir des inégalités en utilisant les équations des tangentes.

■ **Exemple 10 :** Montrons que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.



■