1. Cours : Logarithme népérien

1 Logarithme népérien

Définition 1 : Soit a un réel strictement positif. On appelle *logarithme népérien* de a, noté $\ln(a)$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration 1 : Derrière cette définition se cache une démonstration : une telle solution existe-t-elle ? Si elle existe, cette solution est-elle unique ?

□

■ **Exemple 1 :** $\ln(1) =$ ■

■ **Exemple 2 :** $\ln(e) =$, $\ln(e^2) =$. ■

Propriété 1 : Pour tout réel $a > 0$, $e^{\ln(a)} = a$.

Pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

Démonstration 2 : Soit a un réel strictement positif.

□

■ **Exemple 3 :** On cherche à résoudre l'équation $3e^x - 6 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

■

Attention : il n'existe pas de logarithme népérien de réels négatifs !

■ **Exemple 4 :** On cherche à résoudre l'équation $\ln(x+2)+3 = 0$.

■

2 Propriétés algébriques

Propriété 2 : Soit a et b des réels strictement positifs. On a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 3 : Soit a et b des réels strictement positifs.

□

■ **Exemple 5 :** On a $\ln(2) + \ln(3) + \ln(4) =$ ■

■ **Exemple 6 :** Soit x un réel. Alors,

$$\ln(1 + e^{-x}) + x =$$

■

Propriété 3 : Soit a et b des réels strictement positifs. Alors,

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad\qquad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration 4 : :

□

■ **Exemple 7 :** On a $\ln(21) - \ln(7) =$ ■

Propriété 4 : Soit a un réel strictement positif. Alors,

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

Démonstration 5 : Soit $a > 0$.

□

Propriété 5 : Soit a un réel strictement positif. Pour tout entier **relatif** n

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

Démonstration 6 : Soit $a > 0$. Pour tout entier naturel n, on pose $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

□

■ **Exemple 8 :** On souhaite simplifier $\ln(12) + \ln(3) - 2\ln(6)$. ■

■ **Exemple 9 :** On a $\dfrac{\ln(10000)}{\ln(0.001)} =$ ■

3 Fonction logarithme népérien

Définition 2 : On appelle *fonction logarithme népérien* la fonction $x \mapsto \ln(x)$ définie pour tout réel x strictement positif.

Cette fonction est la *fonction réciproque* de la fonction exponentielle.

3.1 Limites

Propriété 6 : On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

De plus, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

La puissance de x l'emporte sur le logarithme en cas d'indéterminée : ce sont les croissances comparées au logarithme.

Démonstration 7 — Au programme : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$: Pour $x > 0$, posons $X = \ln(x)$.

□

3.2 Dérivabilité

Propriété 7 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

La fonction ln est donc également continue sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 8 — Au programme : On admet que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$.

□

■ **Exemple 10 :** Pour tour réel $x>0$, on pose $f(x)=e^x\ln(x)$.

■

On en déduit naturellement la propriété suivante.

Propriété 8 : Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout réel $x\in I$, $u(x)>0$.

Alors $\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$

■ **Exemple 11 :** Pour tout réel x, on pose $u(x)=x^2-2x+5$ et $f(x)=\ln(u(x))=\ln(x^2-2x+5)$.

■

Puisque $\ln(u)$ n'est définie que lorsque u est strictement positive, on en déduit que u et $\ln(u)$ ont les mêmes variations.

3.3 Étude de la fonction ln

Propriété 9 : La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration 9 : La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif. ln est donc strictement croissante. □

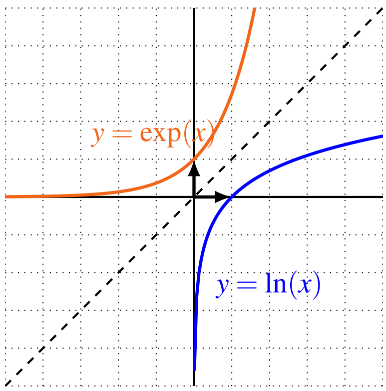
La stricte croissance du logarithme nous est notamment utile pour déterminer le signe d'une expression mettant en jeu des logarithmes, et en particulier...

Propriété 10 : Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors $\ln(x) \geqslant \ln(y)$ si et seulement si $x \geqslant y$.
En particulier, $\ln(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 1$.

■ **Exemple 12 :** On souhaite déterminer l'entier n à partir duquel $3-12\times 0.9^n \geqslant 2.9$.

■

Propriété 11 : La courbe de la fonction ln est symétrique à la courbe de la fonction exp par rapport à la droite d'équation $y=x$.



Cette propriété est vraie pour toutes les fonctions réciproques l'une de l'autre. Par exemple, vous pouvez observer le même phénomène en regardant les courbes des fonctions $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$. Autre exemple, la fonction inverse, qui est sa propre réciproque. La courbe de cette fonction est elle-même symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$.