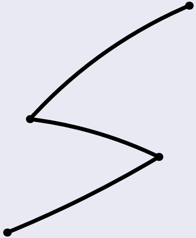
复变积分

- 复变积分
- 单连通区域的 Cauchy 定理
- 复连通区域的 Cauchy 定理
- 两个有用的定理
- Cauchy 积分公式
- 解析函数的高阶导数
- Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

- 复变积分
- 单连通区域的 Cauchy 定理
- 复连通区域的 Cauchy 定理
- 两个有用的定理
- Cauchy 积分公式
- 解析函数的高阶导数
- Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

Definition (复变积分)

如图，设 C 是分段光滑曲线[a]，



[a] 本课程中曲线都是指分段光滑曲线.

复变函数积分定义为两个实变线积分的组合

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z \equiv \int_C (u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y) = \int_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \tag{1}$$

因此, 根据实变线积分的知识, 可以知道: 如果 $f(z)$ 是 C 上的连续函数, 则复变积分一定存在.
复变积分性质可由实变线积分的性质得到:

1. 若 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 则

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

2. 以 C^- 表示 C 的逆向

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

3. 积分不等式

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \tag{4}$$

1. 若 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 则

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

2. 以 C^- 表示 C 的逆向

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

3. 积分不等式

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \tag{4}$$

1. 若 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 则

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{2}$$

2. 以 C^- 表示 C 的逆向

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

3. 积分不等式

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| \tag{4}$$

上式右边的积分同样由实变线积分定义

$$\begin{aligned}\int_C |f(z)||\mathrm{d}z| &\equiv \int_C |u+\mathrm{i}v||\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y| \\ &= \int_C \sqrt{u^2+v^2}\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{5}$$

$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$.
如果$f(z)$在C上有界$|f(z)|\le M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_C M|\mathrm{d}z| = Ml \tag{6}$$

$l=\int_C|\mathrm{d}z|=\int_C \mathrm{d}s$为$C$的长度

复变积分的计算 积分路径参数化

简单光滑曲线 简单光滑曲线可表示为 $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t); a \le t \le b$, 且 $x(t)$ 和 $y(t)$ 有连续导数. 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + \mathrm{i}v(x(t), y(t))] [x'(t) + \mathrm{i}y'(t)]\mathrm{d}t = \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \qquad (7)$$

复变积分的计算 积分路径参数化 (cont.)

分段光滑曲线 设为 $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, 其中每一段 C_i 为简单光滑曲线, 则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z \qquad (8)$$

复变积分与路径相关

一般说来，复变积分的数值，不仅依赖于被积函数和积分路径的端点，而且还依赖于积分路径本身

Example

求 $\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z$

C_1: 沿实轴$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$

C_2: 沿虚轴$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$

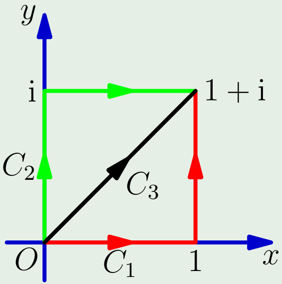
C_3: 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

复变积分与路径相关

一般说来，复变积分的数值，不仅依赖于被积函数和积分路径的端点，而且还依赖于积分路径本身

Example

求 $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}z\,\mathrm{d}z$



C_1: 沿实轴$0 \to 1$，再平行于虚轴$1 \to 1+\mathrm{i}$

C_2: 沿虚轴$0 \to \mathrm{i}$，再平行于实轴$\mathrm{i} \to 1+\mathrm{i}$

C_3: 沿直线$0 \to 1+\mathrm{i}$

Solution

$\mathrm{Re}z = x$, 所以

$$\int_C \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_C x\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_C x\mathrm{d}y$$

C_1:

$$\int_{C_1} \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}y = \frac{1}{2} + \mathrm{i}$$

C_2:

$$\int_{C_2} \mathrm{Re}z\mathrm{d}z = 0 + \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Solution (cont.)

C_3: 积分参数化为 $z(t) = (1 + \mathrm{i})t; 0 \leq t \leq 1$, 于是

$$\int_{C_3} \mathrm{Re} z \mathrm{d}z = \int_0^1 t\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$$

$\square$

不定积分或原函数

Definition (不定积分或原函数)

设 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 是区域 G 内的函数, 如果在 G 内有 $\Phi'(z)=f(z)$, 那么函数 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 G 内的一个**不定积分或原函数**

Note

1. $\Phi(z)$ 显然为 G 内解析函数
2. 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的

不定积分或原函数

Definition (不定积分或原函数)

设 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 是区域 G 内的函数, 如果在 G 内有 $\Phi'(z) = f(z)$, 那么函数 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 G 内的一个**不定积分或原函数**

Note

1. $\Phi(z)$ 显然为 G 内解析函数
2. 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的

不定积分或原函数

Definition (不定积分或原函数)

设 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 是区域 G 内的函数, 如果在 G 内有 $\Phi'(z) = f(z)$, 那么函数 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 G 内的一个**不定积分或原函数**

Note

1. $\Phi(z)$ 显然为 G 内解析函数
2. 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的

不定积分或原函数

Definition (不定积分或原函数)

设 $f(z)$ 及 $\Phi(z)$ 是区域 G 内的函数, 如果在 G 内有 $\Phi'(z) = f(z)$, 那么函数 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 G 内的一个**不定积分或原函数**

Note

1. $\Phi(z)$ 显然为 G 内解析函数
2. 除去可能相差一个常数外, 原函数是唯一确定的

下列定理相当于微积分基本定理.

Theorem

设 C 的端点 a, b; f 的某个原函数为 Φ,

$$\int_C f \mathrm{d}z = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{9}$$

Theorem

设 f 连续. 积分 $\int_C f \mathrm{d}z$ 在区域 G 内仅与 C 的端点有关, 则 f 在 G 内的原函数 $F(z)$ 存在.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) \mathrm{d}z \tag{10}$$

z_0 为区域内的任意参考点.

下列定理相当于微积分基本定理.

Theorem

设 C 的端点 a, b; f 的某个原函数为Φ,

$$\int_C f \mathrm{d}z = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{9}$$

Theorem

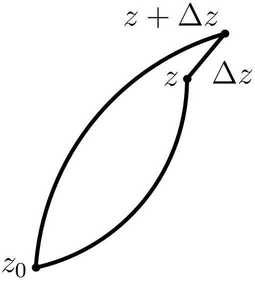
设 f 连续. 积分 $\int_C f \mathrm{d}z$ 在区域 G 内仅与 C 的端点有关, 则 f 在 G 内的原函数 $F(z)$ 存在.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) \mathrm{d}z \tag{10}$$

z_0 为区域内的任意参考点.

Proof

只要直接求出 $F(z)$ 的导数即可. 为此, 设 z 是 G 内一点, $z+\Delta z$ 是它的邻点



则

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta, \quad F(z+\Delta z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Proof (cont.)

因为积分与路径无关, 所以

$$
\begin{aligned}
F(z+\Delta z) &= \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\
&= F(z) + \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

于是, 当 $\Delta z \to 0$ 时

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} \\
&= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \to \frac{f(z)\Delta z}{\Delta z} = f(z)
\end{aligned}
$$

Proof (cont.)

这样就证明了 $F(z)$ 在 G 内可导, 并且 $F'(z) = f(z)$. $\square$

知道了被积函数的原函数, 可使复变积分的计算简化

Example

计算积分 $\int_a^b z^n \mathrm{d}z$, n 为整数

Solution

设 $f(z) = z^n$ 的原函数为 Φ, 则

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

$n \geq 0$时, 原函数为整个复平面上的解析函数, 因此对于z平面上任意一条积分路线, 均有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

Solution (cont.)

$n < -1$ 时, 原函数为除去 $z = 0$ 点的整个复平面上的解析函数, 因此对于 z 平面上任意一条不通过 O 点的积分路线, 仍有

$$\int_a^b z^n \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

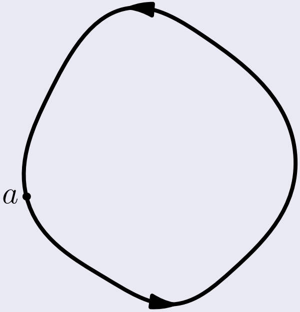
$n = -1$ 时, 原函数 $\ln z$ 为整个复平面除去一条从 O 点出发的割线 $\{\mathbb{C} - \text{割线}\}$ 上的解析函数, 因此对于在解析区域内的任意一条积分路线, 有

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln b - \ln a$$

- 复变积分
- 单连通区域的 Cauchy 定理
- 复连通区域的 Cauchy 定理
- 两个有用的定理
- Cauchy 积分公式
- 解析函数的高阶导数
- Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

围道积分

Definition



如图，如果积分路线的起点和终点重合，积分路线为一闭合曲线，这时复变积分称为**围道积分**，记为

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

显然, 如果 $f(z)$ 在区域 G 内原函数存在, 则 G 中任何一条闭合围道积分 $(\forall a \in C)$

$$\oint_C f(z)\mathsf{d}z = \int_a^a f(z)\mathsf{d}z = \Phi(a) - \Phi(a) = 0$$

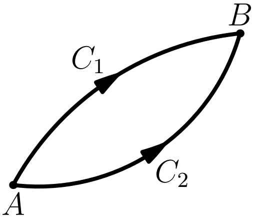
Theorem

在区域 G 内，下列命题等价:

1. 复变积分与路径无关
$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\mathrm{d}z$$
2. 围道积分恒为零
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$
3. 函数的原函数存在
$$f(z) = \Phi'(z)$$

Proof

由上节定理5, 命题 1 与命题 3 等价. 命题 1 与命题 2 的等价显然:
设 C_1, C_2 为连接两点 A, B 的任意两条曲线



Proof (cont.)

则下面等式互相等价

$$\oint_{C_1+C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$$

$\square$

Definition (简单闭合围道)

不与自身相交的闭合围道称为**简单闭合围道**.

Example

计算 $\oint_C z^n \mathrm{d}z$, n 为整数, C 为一逆时针方向的简单闭合围道

Definition (简单闭合围道)

不与自身相交的闭合围道称为**简单闭合围道**.

Example

计算 $\oint_C z^n \mathrm{d}z$, n 为整数, C 为一逆时针方向的简单闭合围道

Solution

原函数为

$$\Phi(z) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} z^{n+1} & n \neq -1 \\ \ln z & n = -1 \end{cases}$$

$n \geq 0$ 时, 原函数为整个复平面上的解析函数, 因此对于任意一条闭合围道, 均有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

Solution (cont.)

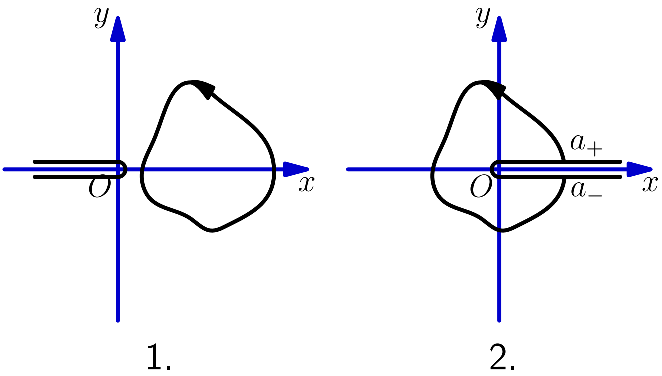
$n < -1$ 时, 原函数为除去 $z = 0$ 点的整个复平面上的解析函数, 因此对于任意一条不通过 O 点的闭合围道, 仍有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

$n = -1$ 时, 原函数 $\ln z$ 为多值函数, 需作割线化为单值函数. 设积分围道不通过原点, 区分如下两

Solution (cont.)

种情况:



Solution (cont.)

1. 闭合围道不包围 O 点. 可作割线, 使闭合围道位于 $\ln z$ 的解析区域内, 仍有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = 0$$

2. 闭合围道包围 O 点. 这时无论如何作割线, 总会与闭合围道相交. 例如作割线沿 x 轴方向, 与围道交 a 点. 但我们有 (设回路方向为逆时针)

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} &= \lim_{\substack{a_+\to a\\ a_-\to a}} \int_{a_-}^{a_+} \frac{\mathrm{d}z}{z} \\ &= \lim_{a_+\to a} \ln a_+ - \lim_{a_-\to a} \ln a_-\end{aligned}$$

Solution (cont.)

规定 $0 \le \arg z < 2\pi$, 则

$$\lim_{a_+ \to a} \ln a_+ = \ln a$$

$$\lim_{a_- \to a} \ln a_- = \ln a + 2\pi \mathrm{i}$$

故这时

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi \mathrm{i}$$

Solution (cont.)

总之, 若简单闭合围道不通过原点, 且回路方向为逆时针

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = -1\text{且}C\text{包围}z = 0 \\ 0 & \text{其它情形} \end{cases}$$

$\square$

Theorem (Jordan定理)

任何一条简单闭合围道把整个平面分成两个不相交的区域:

- *一个有界称为它的**内区域**,*
- *一个无界称为它的**外区域**.*

Definition (单连通与复连通区域)

若区域内任何简单闭合围道的内区域都属于该区域, 称为**单连通区域**. 否则为**复连通区域**.

Theorem (Jordan定理)

任何一条简单闭合围道把整个平面分成两个不相交的区域:

- *一个有界称为它的**内区域**,*
- *一个无界称为它的**外区域**.*

Definition (单连通与复连通区域)

若区域内任何简单闭合围道的内区域都属于该区域, 称为**单连通区域**. 否则为**复连通区域**.

Theorem (Jordan定理)

任何一条简单闭合围道把整个平面分成两个不相交的区域:

- *一个有界称为它的**内区域**,*
- *一个无界称为它的**外区域**.*

Definition (单连通与复连通区域)

若区域内任何简单闭合围道的内区域都属于该区域, 称为**单连通区域**. 否则为**复连通区域**.

Theorem (Jordan定理)

任何一条简单闭合围道把整个平面分成两个不相交的区域:

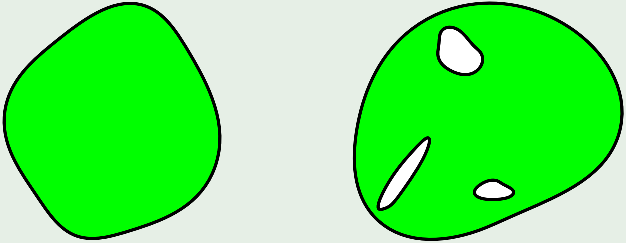
- *一个有界称为它的**内区域**,*
- *一个无界称为它的**外区域**.*

Definition (单连通与复连通区域)

若区域内任何简单闭合围道的内区域都属于该区域, 称为**单连通区域**. 否则为**复连通区域**.

Example

下图中, (a)和(b)是两个区域



(a) (b)

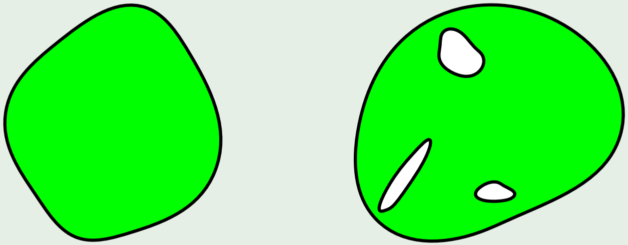
Solution.

(a) 单连通区域

(b) 复连通区域

Example

下图中, (a)和(b)是两个区域



(a) (b)

Solution.

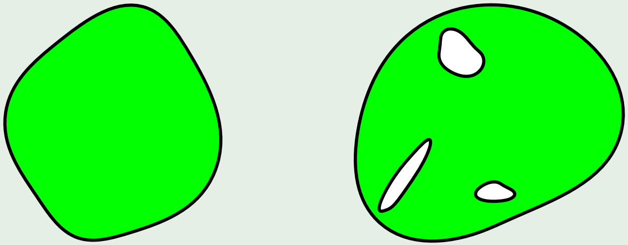
(a) 单连通区域

(b) 复连通区域

□

Example

下图中, (a)和(b)是两个区域



(a) (b)

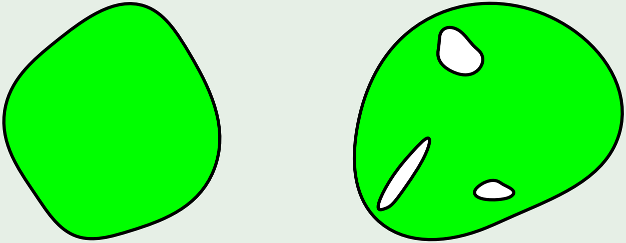
Solution.

(a) 单连通区域

(b) 复连通区域

Example

下图中, (a)和(b)是两个区域



(a) (b)

Solution.

(a) 单连通区域

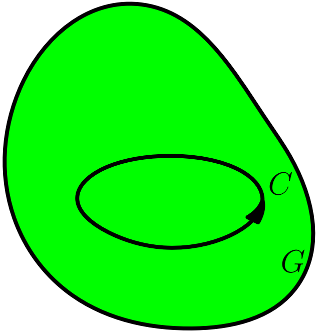
(b) 复连通区域

□

Theorem ((单连通区域的)Cauchy定理)

如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 G 中解析，则沿G中任何一个简单闭合围道 C，有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$



不严格的证明

我们用Green公式给出一个不严格的证明. 假设 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ 连续, 下列 Green 公式成立:

$$\oint_C [P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y] = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

S 为 C 的内区域. 复变积分定义为两个实变线积分的组合(方程(1)). 由假设, $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 连

不严格的证明 (cont.)

续.

$$\oint_C [u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y] = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint_C [v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y] = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

根据 C–R 方程, 右端两个面积分中的被积函数均等于零. 故有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

□

Note

在证明中, 为了应用 Green 公式, 我们假设了偏导数连续. 以后我们会证明解析函数的偏导数的确连续, 但需用到 Cauchy 定理! 所以, 上述证明不严格.

不用假设 $f(z)$ 的偏导数连续, 而严格证明 Cauchy 定理, 可参考教科书所列参考数目.

推论1 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

推论2 若 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析, 则复变积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关.

推论3 单连通区域 G 内的解析函数总有原函数.

Note

复连通区域则不一定. 例如: $1/z$ 和 $1/z^n (n > 1)$ 都是复连通区域—复平面除去原点中的解析函数...

推论1 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

推论2 若 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析, 则复变积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关.

推论3 单连通区域 G 内的解析函数总有原函数.

Note

复连通区域则不一定. 例如: $1/z$ 和 $1/z^n (n > 1)$ 都是复连通区域—复平面除去原点中的解析函数...

推论1 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

推论2 若 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析, 则复变积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关.

推论3 单连通区域 G 内的解析函数总有原函数.

Note

复连通区域则不一定. 例如: $1/z$ 和 $1/z^n(n>1)$ 都是复连通区域—复平面除去原点中的解析函数...

推论1 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

推论2 若 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析, 则复变积分 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关.

推论3 单连通区域 G 内的解析函数总有原函数.

Note

复连通区域则不一定. 例如: $1/z$ 和 $1/z^n (n > 1)$ 都是复连通区域—复平面除去原点中的解析函数...

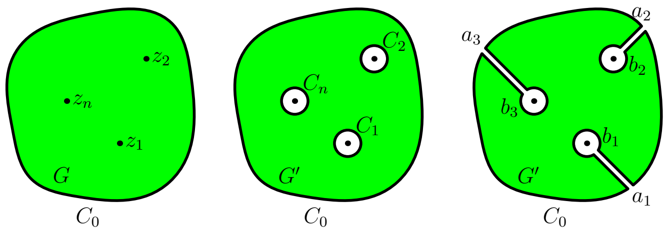
根据单连通区域的 Cauchy 定理(推论1), 设 C 为一条简单闭合围道, G 为 C 的内区域. 若 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 上解析, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

如果被积函数在区域 G 内有奇点 z_1, z_2, ..., z_n, 则单连通区域的Cauchy定理不能直接使用.

复连通区域的Cauchy定理

我们可用一系列小围道 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 将奇点排除在讨论的区域之外. 这时, 我们便会遇到*复连通区域*.



复连通区域的Cauchy定理 (cont.)

我们把最大围道用 C_0 代表, 其它围道包含在 C_0 内部用 C_1, C_2, ..., C_n 表示. 不妨取 C_0, C_1, ..., C_n 均为逆时钟方向.

作适当割线把 C_1, C_2, ..., C_n 和 C_0 连接起来, 从而得到一个单连通区域 G'. 对 G' 可以应用单连通区域的 Cauchy 定理, 沿 G' 边界取积分围道, 则由

$$\int_{a_i}^{b_i} f(z)\mathrm{d}z + \int_{b_i}^{a_i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

可得

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_1^-} f(z)\mathrm{d}z + \cdots \oint_{C_n^-} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

复连通区域的Cauchy定理 (cont.)

于是

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \cdots \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

我们把上述结果总结为

Theorem (复连通区域的 Cauchy 定理)

如果 $f(z)$ 是复连通区域 $\overline{G}$ 中的 (单值) 解析函数, 则

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z \tag{12}$$

其中 $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ 是构成复连通区域 $\overline{G}$ 的边界的各个(分段光滑)闭合围道, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ 都包含在 C_0 的内部. 而且所有积分围道走向相同.

Note

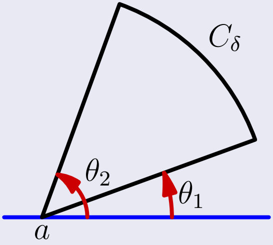
上面, $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中解析, 则函数不仅在 G 中无奇点, 且在边界(即积分围道)上也解析无奇点. 例如: 若 z_1, z_2, ..., z_n 为 G 内奇点, $\{G - \{z_1\} - \{z_2\} - \cdots - \{z_n\}\}$ 为复连通区域, 但不能够应用复连通区域的 Cauchy 定理.

- 复变积分
- 单连通区域的 Cauchy 定理
- 复连通区域的 Cauchy 定理
- 两个有用的定理
- Cauchy 积分公式
- 解析函数的高阶导数
- Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

Theorem (小圆弧定理)

若函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 的空心邻域内连续，且当 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$，$|z-a| \to 0$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k，则

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1) \tag{13}$$



其中 C_δ 是以 a 为圆心，δ 为半径，夹角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，即

$$C_\delta = \{|z-a| = \delta, \theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2\}$$

Proof

将 C_δ 路径参数化, 为

$$z = a + \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

可得

$$\int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{i} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta = \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)$$

Proof (cont.)

$\therefore$

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1)\right| \\
=&\left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_\delta} \frac{k}{z-a}\mathrm{d}z\right| \\
=&\left|\int_{C_\delta} [(z-a)f(z) - k]\frac{\mathrm{d}z}{z-a}\right| \\
\leq&\int_{C_\delta} |(z-a)f(z) - k|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|}
\end{aligned}
$$

Proof (cont.)

由 $(z-a)f(z) \to k$ 一致趋近条件: $\forall \epsilon > 0$, $\exists r(\epsilon)$ 与 $\arg(z-a)$ 无关, 当 $\delta < r$ 时, 对于 C_δ 上所有点$|z-a| = \delta$, $|(z-a)f(z) - k| < \epsilon$. 于是

$$\left| \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1) \right| \leq \epsilon \int_{C_\delta} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|} = \epsilon(\theta_2 - \theta_1)$$

即

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1)$$

$\square$

Note

在实际运用中, 若

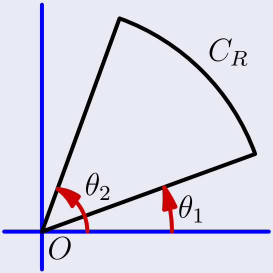
$$\lim_{z \to a}(z-a)f(z) = k$$

即在 $0 \leq \arg(z-a) \leq 2\pi$ 的范围内, $|z-a| \to 0$ 时, $(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k.

Theorem (大圆弧定理)

设 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内连续，当 $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$，$z \to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致地趋近于 K，则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1) \tag{14}$$



其中 C_R 是以原点为圆心，R 为半径，夹角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，即

$$C_R = \{|z| = R, \theta_1 \le \arg z \le \theta_2\}$$

Proof

令 $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}(\theta_2 - \theta_1)$$

Proof (cont.)

$\therefore$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2 - \theta_1)\right| \\
=&\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_R} \frac{K}{z}\mathrm{d}z\right| \\
=&\left|\int_{C_R} [zf(z) - K]\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \\
\leq&\int_{C_R} |zf(z) - K|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}
\end{aligned}$$

Proof (cont.)

由 $z \to \infty$, $zf(z) \to K$ 一致趋近条件: $\forall \epsilon > 0$, $\exists M(\epsilon)$ 与 $\arg z$ 无关, 当 $R > M$ 时, 对于 C_R 上所有点$|z| = R$, $|zf(z) - k| < \epsilon$. 于是

$$\left| \int_{C_R} f(z) \mathrm{d}z - \mathrm{i}K(\theta_2 - \theta_1) \right| \leq \epsilon \int_{C_R} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|} = \epsilon(\theta_2 - \theta_1)$$

即

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) \mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2 - \theta_1)$$

$\square$

Note

若

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = K$$

即在 $0 \le \arg z \le 2\pi$ 的范围内, $z \to \infty$ 时, $zf(z)$ 一致地趋近于 K.

- 复变积分
- 单连通区域的 Cauchy 定理
- 复连通区域的 Cauchy 定理
- 两个有用的定理
- Cauchy 积分公式
- 解析函数的高阶导数
- Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

复变函数积分的另一重要而又极有用的关系式是Cauchy积分公式.

Theorem (Cauchy 积分公式)

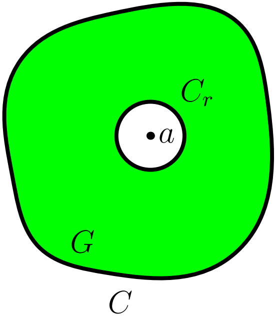
设 C 为一简单闭合围道, G 为其内部, a 为 G 内一点. 若 $f(z)$ 是区域 $\overline{G}$ 上的 (单值) 解析函数, 则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z \tag{15}$$

其中围道积分沿 C 的正向即逆时针方向.

Proof

在 G 内作小圆 $|z-a|=r$.
则 $\{G-(\text{小圆内})|z-a|<r\}$ 为一复连通区域.



Proof (cont.)

被积函数在此复连通区域内解析, 根据复连通区域的 Cauchy 定理

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z$$

此结果与 r 的大小无关, 故可令 $r \to 0$. 因为

$$\lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{z-a} = f(a)$$

Proof (cont.)

所以，由小圆弧定理

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \lim_{r\to 0}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a)\cdot 2\pi\mathrm{i}$$

就证得

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a)$$

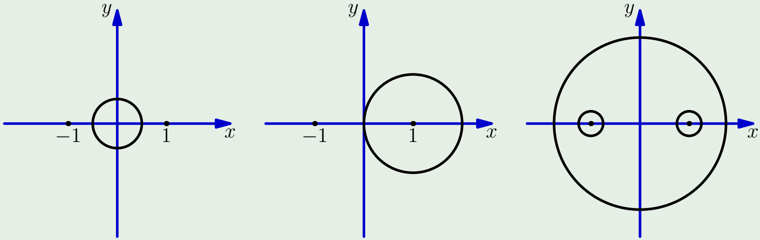
$\square$

Example

计算下列积分

$$\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z$$

1. $|z| = \frac{1}{2}$
2. $|z-1| = 1$
3. $|z| = 3$



1. 2. 3.

Solution

被积函数的奇点为 $z = \pm 1$

1. 奇点都在 $|z| = \frac{1}{2}$ 圆外，故根据 Cauchy 定理

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} \mathrm{d}z = 0$$

Solution (cont.)

2. 采用 Cauchy 积分公式

$$
\begin{aligned}
&\oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2-1} \mathrm{d}z \\
=&\oint_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1}}{z-1} \mathrm{d}z \\
=&2\pi \mathrm{i} \left. \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z+1} \right|_{z=1} \\
=&2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Solution (cont.)

3. 解法1: 由复连通 Cauchy 定理, 作两个小圆将奇点 1 和 -1 包围, 则

$$
\begin{aligned}
&\oint_{|z|=3} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z \\
=&\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z \\
=&\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}}{z-1}\mathrm{d}z + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}}{z+1}\mathrm{d}z \\
=&2\pi\mathrm{i}\left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right|_{z=1} + 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\right|_{z=-1} = \sqrt{2}\pi\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

解法2: 化为部分分式

$$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{(z+1)(z-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

每个部分分式只有一个奇点. 于是

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=3}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z\\
=&\frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\oint_{|z|=3}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\mathrm{d}z\\
=&\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\sin\frac{\pi z}{4}\Big|_{z=1}-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\sin\frac{\pi z}{4}\Big|_{z=-1}\\
=&\sqrt{2}\pi\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Solution (cont.)

$\square$

Example

求积分

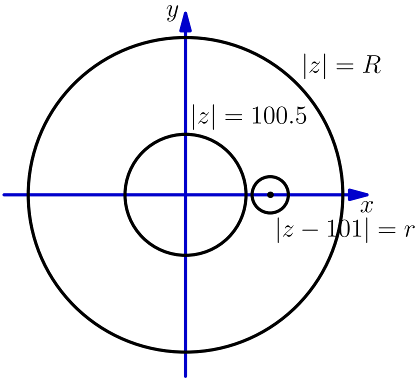
$$I = \oint_{|z|=100.5} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)(z-2)\cdots(z-100)(z-101)}$$

对无界区域应用 Cauchy 定理

本题中被积函数有101个奇点. 其中, 100个奇点在圆 $|z| = 100.5$ 之内, 1个在圆外. 诚然, 可分别以 $z_0 = 1$, $z_1 = 2$, ..., $z_{100} = 100$ 为圆心, 以正数 $r < 0.5$ 为半径作100个小圆, 然后利用 Cauchy 积分公式求积分.

对无界区域应用 Cauchy 定理 (cont.)

为简单计，我们考虑圆外的无界区域. 作大圆 $|z| = R(R > 102)$. 再作一小圆 $|z - 101| = r(r < 0.5)$ 包围奇点 $z_{101} = 101$.



对无界区域应用 Cauchy 定理 (cont.)

由复连通的 Cauchy 定理

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z = \oint_{|z|=100.5} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z + \oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z$$

其中，我们令

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)\cdots(z-100)}$$

对无界区域应用 Cauchy 定理 (cont.)

所以

$$I = \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101} \mathrm{d}z - \oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101} \mathrm{d}z$$

此积分值与 R 无关. 令 $R \to \infty$, 利用大圆弧定理

$$\lim_{z\to\infty} z \frac{f(z)}{z-101} = 0$$

所以

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-101} \mathrm{d}z = 0$$

对无界区域应用 Cauchy 定理 (cont.)

最后，由 Cauchy 积分公式

$$I = -\oint_{|z-101|=r} \frac{f(z)}{z-101}\mathrm{d}z$$

$$= -2\pi \mathrm{i} f(101) = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{100 \cdot 99 \cdots 1} = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{100!}$$

$\square$

由 Cauchy 积分公式, G 内任意一点的函数值 $f(z)$ 可用边界 C 上各点的函数值积分表示

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi \tag{16}$$

首先求 $f'(z)$. 因为

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{h} \oint_C \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z - h} - \frac{f(\xi)}{\xi - z}\right]\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)}\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

将被积函数视为 ξ, h 的函数, 因函数连续, 故可交换积分与求极限的次序

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)(\xi - z)} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi
\end{aligned} \tag{17}
$$

同样, 可得

$$
\begin{aligned}
f''(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(z+h) - f'(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \frac{1}{h} \oint_C \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right] \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \right] \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2!}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} \mathrm{d}\xi
\end{aligned} \tag{18}
$$

一般可得高阶导数公式

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \mathrm{d}\xi} \tag{19}$$

Theorem

设 $f(z)$ 是区域 G 内的解析函数，则在区域 G 内 $f(z)$ 的任何阶导数都存在，并且 $f^{(n)}(z)$ 也是区域内的解析函数.

Example

利用高阶导数公式求复变积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} \mathrm{d}z$$

Theorem

设 $f(z)$ 是区域 G 内的解析函数，则在区域 G 内 $f(z)$ 的任何阶导数都存在，并且 $f^{(n)}(z)$ 也是区域内的解析函数.

Example

利用高阶导数公式求复变积分

$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2} \mathrm{d}z$$

Solution.

由高阶导数公式, 得

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!}f^{(n)}(a)$$

令 $a = 0$, $n = 1$

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1!}(\sin z)'_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}\cos z\big|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}$$

$\square$

Theorem (Liouville (刘维) 定理)

如果 $f(z)$ 在全平面解析, 而且 $|f(z)|$ 有界. 则 $f(z)$ 是一个常数.

Proof

任取一点 z. 以 z 为圆心, R 为半径作圆. 则

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\xi - z| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi$$

于是

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|\xi - z| = R} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} |\mathrm{d}\xi|$$

Proof (cont.)

$\because |f(z)|$ 有界, $\therefore \exists M > 0$ 使得 $|f(z)| < M$. 于是

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}\oint_{|\xi - z| = R} |\mathrm{d}\xi|$$
$$= \frac{M}{2\pi R^2}\cdot 2\pi R = \frac{M}{R}$$

令 $R \to \infty$

$$|f'(z)| = 0$$
$$f'(z) = 0$$
$$f(z) = \text{常数}$$

- 复变积分
- 单连通区域的 Cauchy 定理
- 复连通区域的 Cauchy 定理
- 两个有用的定理
- Cauchy 积分公式
- 解析函数的高阶导数
- Cauchy 型积分和含参量积分的解析性

Theorem (Morera (摩列拉) 定理)

设 $f(z)$ 在区域 G 内连续. 如果对 G 中的任何闭合围道 C, 都有 $\oint_C f(z) = 0$. 则 $f(z)$ 在 G 内解析.

Proof.

由 $\oint_C f(z) = 0$, 则 $f(z)$ 有原函数 $\Phi(z)$

$$f(z) = \Phi'(z)$$

说明 $\Phi(z)$ 为解析函数. 于是 $\Phi(z)$ 的导数 $f(z) = \Phi'(z)$ 也解析. □

Theorem (Morera (摩列拉) 定理)

设 $f(z)$ 在区域 G 内连续. 如果对 G 中的任何闭合围道 C, 都有 $\oint_C f(z) = 0$. 则 $f(z)$ 在 G 内解析.

Proof.

由 $\oint_C f(z) = 0$, 则 $f(z)$ 有原函数 $\Phi(z)$

$$f(z) = \Phi'(z)$$

说明 $\Phi(z)$ 为解析函数. 于是 $\Phi(z)$ 的导数 $f(z) = \Phi'(z)$ 也解析. □

Theorem (含参量积分的解析性)

设

1. $f(t,z)$ 是 t 和 z 的连续函数，$t \in [a,b]$, $z \in G$,
2. 对于 $[a,b]$ 上的任何 t，$f(t,z)$ 是 G 内的解析函数，

则 $F(z) = \int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 G 内是解析的，且

$$F'(z) = \int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t \tag{20}$$

Proof

在 G 内任取闭合围道 C, 都有 (因为 $f(t,z)$ 连续, 故可交换积分次序)

$$\begin{aligned}\oint_C F(z)\mathrm{d}z &= \oint_C \int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t\mathrm{d}z \\ &= \int_a^b \oint_C f(t,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

由 Morera 定理, $F(z)$ 在 G 内解析.

Proof (cont.)

利用解析函数的导数公式, 设 C 为 G 内一包围 z 点的闭合围道

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi$$
$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{1}{(\xi - z)^2} \left[\int_a^b f(t, \xi) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\xi$$

再次交换积分次序, 得

$$F'(z) = \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(t, \xi)}{(\xi - z)^2} \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z} \mathrm{d}t$$

Proof (cont.)

设 C 为一条分段光滑的(闭合和不闭合)曲线, $\phi(\xi)$ 为 C 上的连续的函数, 对于 C, 积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{\phi(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

称为 Cauchy 型积分. 由上述定理, $f(z)$ 为曲线外点 z 的解析函数, 并且其导数可通过积分号下求导而得到,

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{\phi(\xi)}{(\xi-z)^{p+1}}\mathrm{d}\xi \tag{21}$$