复变函数

- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

复变函数

- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

复数的引入

考虑二次方程

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

其通解为

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

当 $4AC > B^2$ 时，便会出现复数

$$x = \frac{-B \pm \mathrm{i}\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$

Definition (虚单位)

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{1}$$

为 -1 的平方根中的一个, 称为**虚单位**

Definition (复数)

$z = x + \mathrm{i}y$ 定义为满足以下运算规则的*一对有序实数* (x, y):

$$\text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{2a}$$

$$\text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 - y_1 x_2) \tag{2b}$$

Definition (虚单位)

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{1}$$

为 -1 的平方根中的一个, 称为**虚单位**

Definition (复数)

$z = x + \mathrm{i}y$ 定义为满足以下运算规则的一对有序实数 (x, y):

$$\begin{aligned} &\text{加法} \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(2a)} \\ &\text{乘法} \quad (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, \\ &\qquad\qquad x_1y_2 - y_1x_2) && \text{(2b)} \end{aligned}$$

Definition (复数域)

所有复数的集合，记为 $\mathbb{C}$.

Definition (实部)

$\mathrm{Re} z = x$

Definition (虚部)

$\mathrm{Im} z = y$

Definition (相等)

$$z = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0 \tag{3a}$$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \ \& \ y_1 = y_2 \tag{3b}$$

Definition (复数域)

所有复数的集合，记为 $\mathbb{C}$.

Definition (实部)

$\mathrm{Re} z = x$

Definition (虚部)

$\mathrm{Im} z = y$

Definition (相等)

$$z = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0 \tag{3a}$$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \ \& \ y_1 = y_2 \tag{3b}$$

Definition (复数域)

所有复数的集合，记为 $\mathbb{C}$.

Definition (实部)

$\mathrm{Re}z = x$

Definition (虚部)

$\mathrm{Im}z = y$

Definition (相等)

$$z = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0 \tag{3a}$$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2 \tag{3b}$$

Definition (复数域)

所有复数的集合，记为 $\mathbb{C}$.

Definition (实部)

$\mathrm{Re}z = x$

Definition (虚部)

$\mathrm{Im}z = y$

Definition (相等)

$$z = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0 \tag{3a}$$

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2 \tag{3b}$$

代数运算

作为代数，复数运算遵从一般的代数运算规则

1. 加法交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. 加法结合律 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
3. 乘法交换律 $z_1 z_2 = z_2 z_1$
4. 乘法结合律 $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
5. 乘法对加法的分配律 $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

加上复数虚单位 i 的性质 (1) 即可完全确定复数的运算.

代数运算

作为代数, 复数运算遵从一般的代数运算规则

1. 加法交换律$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. 加法结合律$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
3. 乘法交换律$z_1 z_2 = z_2 z_1$
4. 乘法结合律$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
5. 乘法对加法的分配律$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

加上复数虚单位 i 的性质 (1) 即可完全确定复数的运算.

代数运算举例

1. 加法 (减法)

$$
\begin{aligned}
z_1 \pm z_2 &= (x_1 + \mathrm{i} y_1) \pm (x_2 + \mathrm{i} y_2) \\
&= (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)
\end{aligned} \tag{4}
$$

2. 乘法

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i} y_1) \cdot (x_2 + \mathrm{i} y_2) \\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)
\end{aligned} \tag{5}
$$

代数运算举例 (cont.)

3. 除法 ($z_2 \neq 0$)

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} \\ &= \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} \cdot \frac{x_2 - \mathrm{i}y_2}{x_2 - \mathrm{i}y_2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (6)\end{aligned}$$

其中 $x_2 - \mathrm{i}y_2$ 为 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的复共轭

□

Definition (复共扼)

$$z^* = (x + \mathrm{i}y)^* = x - \mathrm{i}y \tag{7}$$

复共扼是一个相互关系

$$(z^*)^* = z \tag{8}$$

显然

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{9a}$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \tag{9b}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \tag{9c}$$

Definition (复共扼)

$$z^* = (x + \mathrm{i}y)^* = x - \mathrm{i}y \tag{7}$$

复共扼是一个相互关系

$$(z^*)^* = z \tag{8}$$

显然

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{9a}$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \tag{9b}$$
$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \tag{9c}$$

Definition (复共扼)

$$z^* = (x + \mathrm{i}y)^* = x - \mathrm{i}y \tag{7}$$

复共扼是一个相互关系

$$(z^*)^* = z \tag{8}$$

显然

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{9a}$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \tag{9b}$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*} \tag{9c}$$

Example

求 $w = \sqrt{z}$, 即 $w^2 = z$.

复数的平方根

设 $z = a + \mathrm{i}b$, $w = x + \mathrm{i}y$. 满足

$$(x + \mathrm{i}y)^2 = a + \mathrm{i}b$$

即

$$(x^2 - y^2) + \mathrm{i}(2xy) = a + \mathrm{i}b$$

必须

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}$$

复数的平方根 (cont.)

解得 $(b \geq 0)$

$$w = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

或 $(b < 0)$

$$w = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)$$

$\square$

Example

求解 $z^4 + \mathrm{i} = 0$.

Solution

令 $z^2 = w$. 则 $w^2 = -\mathrm{i}$. 带入公式, 令 $a = 0$ 及 $b = -1$

$$w = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)$$

先考虑方程 $z^2 = (1-\mathrm{i})/\sqrt{2}$. 同样, 带入公式, 令 $a = 1/\sqrt{2}$ 及 $b = -1/\sqrt{2}$, 得两解

$$z = \pm\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}}\right)$$

Solution (cont.)

另两解为

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{-1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2^{3/4}} \right)$$

$\square$

Theorem

设 z 为复数. 则总存在另一复数 w 为其平方根, 使得 $w^2 = z$.

Note

$-w$ 为其另一个平方根.

Theorem

设 z 为复数. 则总存在另一复数 w 为其平方根, 使得 $w^2 = z$.

Note

$-w$ 为其另一个平方根.

复数不能比较大小

$$\text{有序域} = \{0, \text{正数}, \text{负数}\}$$

可得,

$$\forall a \in \text{有序域}, \quad a^2 = a \cdot a \geq 0$$

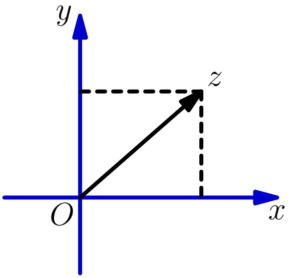
但复数域 $\mathbb{C}$ 有 $\mathrm{i}^2 = -1$.

复变函数

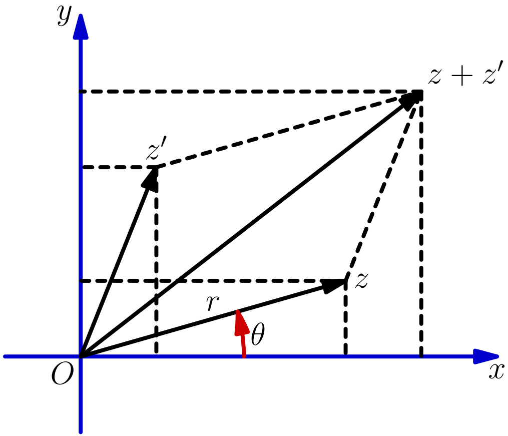
- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

复数的几何表示

一个复数可用复平面 (也用 $\mathbb{C}$ 表示) 上的一个点表示. 还可以表示为复平面的一个矢量.



根据复数的加法规则, 可以看出复数加法的几何意义: 矢量相加的平行四边形法则



直角坐标 (x, y) 到极坐标 (r, θ)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{10}$$

得

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{11}$$

Definition (模)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definition (辐角)

$$\arg z = \theta$$

直角坐标 (x, y) 到极坐标 (r, θ)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{10}$$

得

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{11}$$

Definition (模)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definition (辐角)

$$\arg z = \theta$$

直角坐标 (x, y) 到极坐标 (r, θ)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{10}$$

得

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{11}$$

Definition (模)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definition (辐角)

$$\arg z = \theta$$

直角坐标 (x, y) 到极坐标 (r, θ)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{10}$$

得

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{11}$$

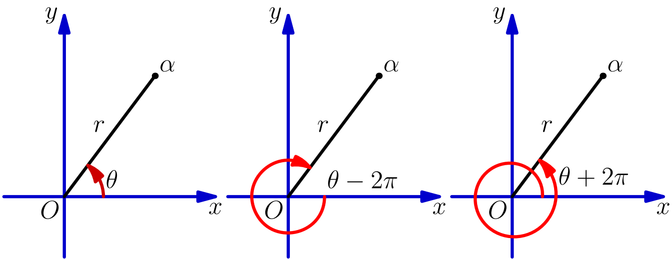
Definition (模)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Definition (辐角)

$$\arg z = \theta$$

辐角的多值性

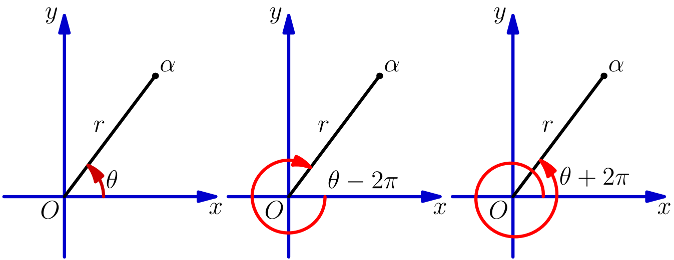


$$\theta = \theta_p + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Definition (主辐角)

θ_p 为辐角的主值 $(-\pi < \theta_p \leq \pi)$

辐角的多值性



$$\theta = \theta_p + 2\pi k \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Definition (主辐角)

θ_p 为辐角的主值 $(-\pi < \theta_p \leq \pi)$

Example

把下列关系用几何图形表示出来

1. $\arg(1-z)=0$
2. $\arg(1+z)=\dfrac{\pi}{3}$
3. $\arg(z+1-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}$

等式的几何表示.

复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 代表复平面上的一点, 复数的一个等式关系则通常代表复平面上的一段曲线.

1. $1 - z$ 为复平面上两矢量 1 和 z 之差, $1 - z$ 沿 x 轴, 所以 z 应在 x 轴上且小于 1.
2. $1 + z$ 则为复平面上两矢量 z 和 -1 之差, $1 + z$ 辐角 $60°$, 为 -1 点引出的一条射线.
3. $z + 1 - \mathrm{i}$ 为 z 与 $-1 + \mathrm{i}$ 之差, 所以为由 $-1 + \mathrm{i}$ 引出平行 y 轴的一条射线.

□

等式的几何表示.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 代表复平面上的一点, 复数的一个等式关系则通常代表复平面上的一段曲线.

1. $1-z$ 为复平面上两矢量 1 和 z 之差, $1-z$ 沿 x 轴, 所以 z 应在 x 轴上且小于 1.
2. $1+z$ 则为复平面上两矢量 z 和 -1 之差, $1+z$ 辐角 $60°$, 为 -1 点引出的一条射线.
3. $z+1-\mathrm{i}$ 为 z 与 $-1+\mathrm{i}$ 之差, 所以为由 $-1+\mathrm{i}$ 引出平行 y 轴的一条射线.

$\square$

等式的几何表示.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 代表复平面上的一点, 复数的一个等式关系则通常代表复平面上的一段曲线.

1. $1-z$ 为复平面上两矢量 1 和 z 之差, $1-z$ 沿 x 轴, 所以 z 应在 x 轴上且小于 1.
2. $1+z$ 则为复平面上两矢量 z 和 -1 之差, $1+z$ 辐角 $60°$, 为 -1 点引出的一条射线.
3. $z+1-\mathrm{i}$ 为 z 与 $-1+\mathrm{i}$ 之差, 所以为由 $-1+\mathrm{i}$ 引出平行 y 轴的一条射线.

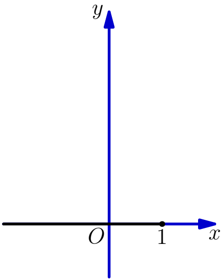
$\square$

等式的几何表示.

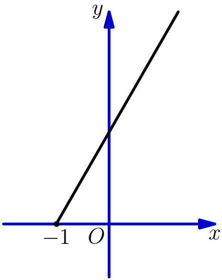
复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 代表复平面上的一点, 复数的一个等式关系则通常代表复平面上的一段曲线.

1. $1 - z$ 为复平面上两矢量 1 和 z 之差, $1 - z$ 沿 x 轴, 所以 z 应在 x 轴上且小于 1.
2. $1 + z$ 则为复平面上两矢量 z 和 -1 之差, $1 + z$ 辐角 $60°$, 为 -1 点引出的一条射线.
3. $z + 1 - \mathrm{i}$ 为 z 与 $-1 + \mathrm{i}$ 之差, 所以为由 $-1 + \mathrm{i}$ 引出平行 y 轴的一条射线.

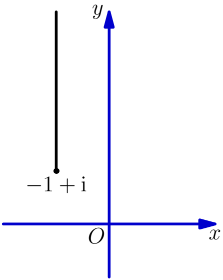
$\square$



$\arg(1 - z) = 0$

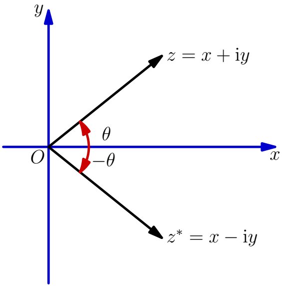


$\arg(1 + z) = \frac{\pi}{3}$



$\arg(z + 1 - \mathrm{i}) = \frac{\pi}{2}$

复共扼 z^* 的几何表示



如图

$$\arg z = -\arg z^* \tag{12}$$

我们有

$$z \cdot z^* = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{13}$$

复数相乘

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Theorem (复数乘法)

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \qquad (15)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad (16)$$

Note

复数辐角可相差 2π 的整数倍

复数相乘

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Theorem (复数乘法)

$$
\begin{aligned}
|z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1||z_2| && (15) \\
\arg(z_1 z_2) &= \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 && (16)
\end{aligned}
$$

Note

复数辐角可相差 2π 的整数倍

复数相乘

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Theorem (复数乘法)

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2| \qquad (15)$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad (16)$$

Note

复数辐角可相差 2π 的整数倍

复数相除

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] \tag{17}$$

Theorem (复数除法)

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{18}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{19}$$

复数相除

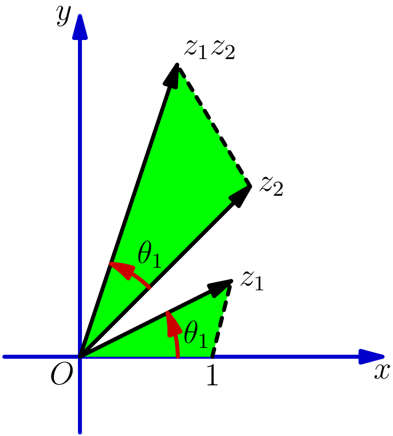
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)] \tag{17}$$

Theorem (复数除法)

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{18}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 \tag{19}$$

复数乘法的几何表示



如图，两个阴影三角形为相似三角形.

De Moirre 定理 (棣美佛 1667–1754)

几个复数相乘时

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + \mathrm{i} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \quad (20)$$

令 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$

Theorem (De Moirre 定理)

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i} \sin n\theta) \quad (21)$$

De Moirre 定理 (棣美佛 1667–1754)

几个复数相乘时

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + \mathrm{i} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \quad (20)$$

令 $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$

Theorem (De Moirre 定理)

$$z^n = r^n (\cos n\theta + \mathrm{i} \sin n\theta) \quad (21)$$

Example

复数的 n 次方根. 求 $w = \sqrt[n]{z}$ 即 $w^n = z$.

Solution

设

$$z = \rho(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$$

同样

$$w = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

由 De Moirre 定理

$$w^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

比较, 得

$$\rho = r^n$$
$$\phi = n\theta$$

Solution (cont.)

即

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt[n]{\rho} \\
\theta &= \frac{\phi}{n}
\end{aligned}
$$

于是

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\phi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi}{n}\right)$$

Solution (cont.)

考虑到辐角的多值性, 得到 n 个不同的根

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\phi_p + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi_p + 2\pi k}{n}\right)$$

$-\pi < \phi_p \leq \pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ $\square$

Theorem (n 次方根)

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 它的 n 次方根为 n 个复数

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \tag{22}$$

Example

求 i 的平方根

Theorem (n 次方根)

设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，它的 n 次方根为 n 个复数

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \qquad (22)$$

Example

求 i 的平方根

Solution

$$\mathrm{i} = 1(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$$

所以

$$\begin{aligned}(\sqrt{\mathrm{i}})_k &= \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi/2 + 2\pi k}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)\end{aligned}$$

Solution (cont.)

$k = 0, 1$. 两根分别为

$$(\sqrt{\mathrm{i}})_0 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{\mathrm{i}})_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

即

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})$$

□

Example

求解 $z^8 = 1$.

Solution.

因为

$$1 = \cos 0 + \mathrm{i} \sin 0$$

由 n 次方根定理

$$z = \cos \frac{k2\pi}{8} + \mathrm{i} \sin \frac{k2\pi}{8}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 7$$

$$= 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \mathrm{i}, \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, -1,$$

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, -\mathrm{i}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

Example

求解 $z^8 = 1$.

Solution.

因为

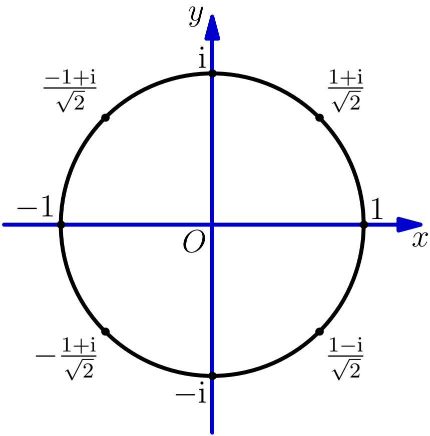
$$1 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0$$

由 n 次方根定理

$$\begin{aligned} z =& \cos\frac{k2\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{k2\pi}{8}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 7 \\ =& 1, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \mathrm{i}, \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, -1, \\ & \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}, -\mathrm{i}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

□

如图, 八个根 $z=\sqrt[8]{1}$ 均匀分布在单位圆上.



复变函数

- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

复变函数

与实函数定义相仿

Definition (函数)

设在复平面 $\mathbb{C}$上有一点集 E, 如果对于 E 内每一个 z 值, 都有一个或多个[a]复数值 w 与之对应, 则称 w 为 z 的**函数**. 记为 $w = f(z)$. E 为其**定义域**.

[a]多值函数

即 $\forall z \in E, \exists w = f(z)$

与实函数定义相仿

Definition (函数)

设在复平面 $\mathbb{C}$上有一点集 E, 如果对于 E 内每一个 z 值, 都有一个或多个[a]复数值 w 与之对应, 则称 w 为 z 的**函数**. 记为 $w = f(z)$. E 为其**定义域**.

[a] 多值函数

即 $\forall z \in E, \exists w = f(z)$

$$z = x + \mathrm{i}y$$
$$w = u + \mathrm{i}v$$

所以

$$\begin{aligned} w &= f(z) = f(x, y) \\ &= u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \end{aligned} \tag{23}$$

复变函数不过是两个二元实变函数的有序组合.

Example

设 $z = x + \mathrm{i}y$, 求 $\dfrac{z+2}{z-1}$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$.

$$z = x + \mathrm{i}y$$
$$w = u + \mathrm{i}v$$

所以

$$\begin{aligned} w = f(z) &= f(x, y) \\ &= u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \end{aligned} \tag{23}$$

复变函数不过是两个二元实变函数的有序组合.

Example

设 $z = x + \mathrm{i}y$, 求 $\dfrac{z+2}{z-1}$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$.

$$z = x + \mathrm{i}y$$
$$w = u + \mathrm{i}v$$

所以

$$\begin{aligned} w &= f(z) = f(x, y) \\ &= u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \end{aligned} \tag{23}$$

复变函数不过是两个二元实变函数的有序组合.

Example

设 $z = x + \mathrm{i}y$, 求 $\dfrac{z+2}{z-1}$ 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$.

Solution

$$
\begin{aligned}
\frac{z+2}{z-1} &= \frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y} = \frac{(x+2)+\mathrm{i}y}{(x-1)+\mathrm{i}y}\cdot\frac{(x-1)-\mathrm{i}y}{(x-1)-\mathrm{i}y}\\
&= \frac{(x+2)(x-1)+y^2+\mathrm{i}[y(x-1)-y(x+2)]}{(x-1)^2+y^2}
\end{aligned}
$$

Solution (cont.)

这样,

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{x^2+x-2+y^2}{(x-1)^2+y^2}$$
$$v(x,y) = \mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{z-1}\right) = \frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}$$

$\square$

一些初等函数

除了多项式外, 基本的函数还有三角函数和指数函数.

实变函数

Taylor 展开

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \tag{24}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \tag{25}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{26}$$

复变函数

三角函数和指数函数可以定义为幂级数，且其幂级数展开式与相应实变函数的幂级数展开式相同

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \tag{27}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{28}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{29}$$

令 $z = \mathrm{i}\theta$, 即得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$$
$$= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Theorem (Euler 公式)

(欧拉 1707–1783)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{30}$$

令 $z = \mathrm{i}\theta$, 即得

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\theta^{2n} + \mathrm{i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$$
$$= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Theorem (Euler 公式)

(欧拉 1707–1783)

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \tag{30}$$

复数的指数表示

复数 z 的极坐标表示可简单地记为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = re^{\mathrm{i}\theta} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} \tag{31}$$

复数的乘法和除法运算简化为 (由 (15), (16) 和 (18), (19) 得)

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \tag{32}$$

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\cdots+\theta_n)} \tag{33}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \tag{34}$$

复数的指数表示

复数 z 的极坐标表示可简单地记为

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z} \tag{31}$$

复数的乘法和除法运算简化为 (由 (15), (16) 和 (18), (19) 得)

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \tag{32}$$

$$z_1 \cdots z_n = r_1 \cdots r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\cdots+\theta_n)} \tag{33}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \tag{34}$$

复变函数

- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

Definition (邻域)

复平面上 $|z-a|=r$ 为一圆. 圆内 $|z-a|<r$ $(r>0)$ 称为以 a 为中心, r 为半径的**圆盘**或 a 的一个**邻域**, 或 r-邻域.

$|z-a|\leq r$ 则称为以 a 为中心, r 为半径的**闭圆盘**

Definition (空心邻域)

z_0 的空心邻域, 指的是以 z_0 为圆心的环域 $0<|z-z_0|<\delta$.

Definition (邻域)

复平面上 $|z-a|=r$ 为一圆. 圆内 $|z-a|<r$ $(r>0)$ 称为以 a 为中心, r 为半径的**圆盘**或 a 的一个**邻域**, 或 r-邻域.

$|z-a|\leq r$ 则称为以 a 为中心, r 为半径的**闭圆盘**

Definition (空心邻域)

z_0 的空心邻域, 指的是以 z_0 为圆心的环域 $0<|z-z_0|<\delta$.

Definition (内点)

给定集合 E, a 属于E, 如果以点 a 为圆心作一个圆, 当半径 ϵ 足够小时, 圆内所有点 $|z-a|<\epsilon$ 都属于点集 E, 即 $z\in E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**内点**.

即存在 a 的某个邻域完全包含在 E 内

Definition (孤立点)

给定集合 E, a 属于 E, 如果以点 a 为圆心作一个圆, 当半径 ϵ 足够小时, 空心邻域 $0<|z-a|<\epsilon$ 内所有点 z 都不属于点集 E, 即 $z\notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**孤立点**.

Definition (内点)

给定集合 E, a 属于E, 如果以点 a 为圆心作一个圆, 当半径 ϵ 足够小时, 圆内所有点 $|z-a|<\epsilon$ 都属于点集 E, 即 $z\in E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**内点**.

即存在 a 的某个邻域完全包含在 E 内

Definition (孤立点)

给定集合 E, a 属于 E, 如果以点 a 为圆心作一个圆, 当半径 ϵ 足够小时, 空心邻域 $0<|z-a|<\epsilon$ 内所有点 z 都不属于点集 E, 即 $z\notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**孤立点**.

Definition (边界点)

给定集合 E, 如果以点 a 为圆心作一个任意半径 ϵ 的圆, 圆内总有两点 z_1 和 z_2, $|z_{1,2} - a| < \epsilon$, 其中 $z_1 \in E$ 而 $z_2 \notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**边界点**.

Note

边界点既不是集 E 的内点, 也不是其补集 $\mathbb{C} \setminus E$ 的内点.

Note

边界点包括 E 的孤立点.

Note

集合的边界点不一定属于集合.

Definition (边界点)

给定集合 E, 如果以点 a 为圆心作一个任意半径 ϵ 的圆, 圆内总有两点 z_1 和 z_2, $|z_{1,2} - a| < \epsilon$, 其中 $z_1 \in E$ 而 $z_2 \notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**边界点**.

Note

边界点既不是集 E 的内点, 也不是其补集 $\mathbb{C} \setminus E$ 的内点.

Note

边界点包括 E 的孤立点.

Note

集合的边界点不一定属于集合.

Definition (边界点)

给定集合 E, 如果以点 a 为圆心作一个任意半径 ϵ 的圆, 圆内总有两点 z_1 和 z_2, $|z_{1,2} - a| < \epsilon$, 其中 $z_1 \in E$ 而 $z_2 \notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**边界点**.

Note

边界点既不是集 E 的内点, 也不是其补集 $\mathbb{C} \setminus E$ 的内点.

Note

边界点包括 E 的孤立点.

Note

集合的边界点不一定属于集合.

Definition (边界点)

给定集合 E, 如果以点 a 为圆心作一个任意半径 ϵ 的圆, 圆内总有两点 z_1 和 z_2, $|z_{1,2} - a| < \epsilon$, 其中 $z_1 \in E$ 而 $z_2 \notin E$, 则称点 a 为点集 E 的一个**边界点**.

Note

边界点既不是集 E 的内点, 也不是其补集 $\mathbb{C} \setminus E$ 的内点.

Note

边界点包括 E 的孤立点.

Note

集合的边界点不一定属于集合.

Definition (内部)

集合 E 的**内部**由所有 E 的内点组成. 记为 $\mathring{E}$

Definition (边界)

集合 E 的**边界**由所有 E 的边界点组成. 记为 ∂E

Definition (闭包)

集合 E 的**闭包**由 E 加上 E 的所有边界点组成. 记为 $\overline{E}$

显然

$$\overline{E} = E + \partial E = \mathring{E} + \partial E$$

Definition (内部)

集合 E 的**内部**由所有 E 的内点组成. 记为 $\mathring{E}$

Definition (边界)

集合 E 的**边界**由所有 E 的边界点组成. 记为 ∂E

Definition (闭包)

集合 E 的**闭包**由 E 加上 E 的所有边界点组成. 记为 $\overline{E}$

显然

$$\overline{E} = E + \partial E = \mathring{E} + \partial E$$

Definition (内部)

集合 E 的**内部**由所有 E 的内点组成. 记为 $\mathring{E}$

Definition (边界)

集合 E 的**边界**由所有 E 的边界点组成. 记为 ∂E

Definition (闭包)

集合 E 的**闭包**由 E 加上 E 的所有边界点组成. 记为 $\overline{E}$

显然

$$\overline{E} = E + \partial E = \mathring{E} + \partial E$$

Definition (内部)

集合 E 的**内部**由所有 E 的内点组成. 记为 $\mathring{E}$

Definition (边界)

集合 E 的**边界**由所有 E 的边界点组成. 记为 ∂E

Definition (闭包)

集合 E 的**闭包**由 E 加上 E 的所有边界点组成. 记为 $\overline{E}$

显然

$$\overline{E} = E + \partial E = \mathring{E} + \partial E$$

Definition (开集)

如果集 E 即它的内部, 则 E 称为**开集**

即开集 E 的点全部是内点: $E = \mathring{E}$

Definition (闭集)

如果集 E 即它的闭包, 则 E 称为**闭集**

即闭集 E 包括它的所有边界点: $E = \overline{E}$

Note

任何集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 必然是一闭集

Definition (开集)

如果集 E 即它的内部, 则 E 称为**开集**

即开集 E 的点全部是内点: $E = \mathring{E}$

Definition (闭集)

如果集 E 即它的闭包, 则 E 称为**闭集**

即闭集 E 包括它的所有边界点: $E = \overline{E}$

Note

任何集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 必然是一闭集

Definition (开集)

如果集 E 即它的内部, 则 E 称为**开集**

即开集 E 的点全部是内点: $E = \mathring{E}$

Definition (闭集)

如果集 E 即它的闭包, 则 E 称为**闭集**

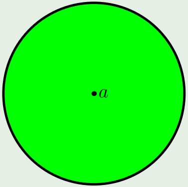
即闭集 E 包括它的所有边界点: $E = \overline{E}$

Note

任何集合 E 的闭包 $\overline{E}$ 必然是一闭集

Example

圆盘 $E : |z-a| < r$



Solution.

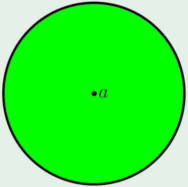
$\forall z_0 \in E$, 显然 $\exists \epsilon > 0$, 使得 z_0 的 ϵ-邻域 $|z - z_0| < \epsilon$ 内所有点 z 都属于圆盘即 $z \in E$. 于是圆盘 $E : |z-a| < r$ 中的点全部是它的内点. 因此圆盘 (邻域) 是一个开集.

E 的闭包 $\overline{E}$ 即闭圆盘 $|z-a| \leq r$, 它是一个闭集

E 的边界为 $\partial E = \overline{E} - E$ 由圆 $|z-a| = r$ 组成 $\square$

Example

圆盘 $E: |z-a| < r$

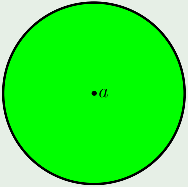


Solution.

$\forall z_0 \in E$, 显然 $\exists \epsilon > 0$, 使得 z_0 的 ϵ-邻域 $|z-z_0| < \epsilon$ 内所有点 z 都属于圆盘即 $z \in E$.
于是圆盘 $E: |z-a| < r$ 中的点全部是它的内点.
因此圆盘 (邻域) 是一个开集.
E 的闭包 $\overline{E}$ 即闭圆盘 $|z-a| \leq r$, 它是一个闭集
E 的边界为 $\partial E = \overline{E} - E$ 由圆 $|z-a| = r$ 组成 $\square$

Example

$$E : 0 < |z - a| < r$$



Solution.

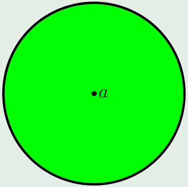
E 为开集

$\overline{E}$ 仍为闭圆盘 $|z - a| \leq r$

∂E 由圆 $|z - a| = r$ 及孤立点 $z = 0$ 组成 $\square$

Example

$E: 0 < |z-a| < r$



Solution.

E 为开集

$\overline{E}$ 仍为闭圆盘 $|z-a| \le r$

∂E 由圆 $|z-a| = r$ 及孤立点 $z = 0$ 组成 $\square$

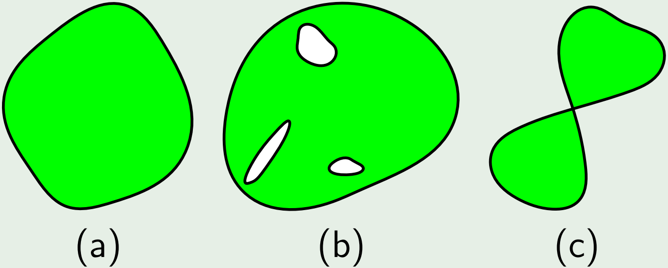
Definition (区域)

区域为具有下列两个性质的点集

1. 开集: 全部由内点组成
2. 连通性: 点集中任意两点都可以用一条折线连接起来, 折线上的点全都属于此点集

Example

下列点集是否区域?



区域与非区域.

由区域定义来判断:

(a) 是

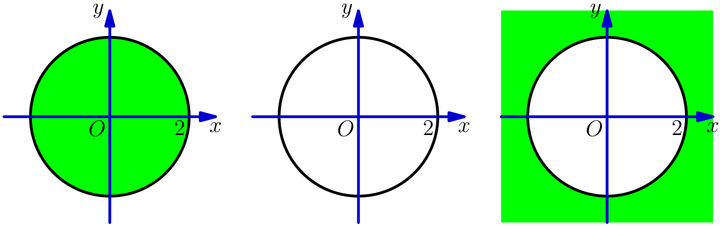
(b) 有洞也是

(c) 自相交不是. 看似有交点, 但交点非内点

□

区域用不等式表示

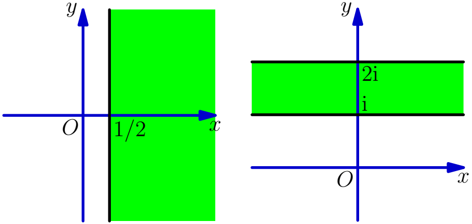
等式代表复平面上的一段曲线, 而一个关于复数的不等式则通常代表复平面上的一个区域.
下图中, 不等式 $|z| < 2$ 和 $|z| > 2$ 都是区域 (等式 $|z| = 2$ 为闭集)



$|z| < 2$ $|z| = 2$ $|z| > 2$

区域用不等式表示 (cont.)

同样, 下图中, 不等式 $\mathrm{Re}z > \frac{1}{2}$ 和 $1 < \mathrm{Im}z < 2$ 也是区域



$\mathrm{Re}z > 1/2$ $\qquad$ $1 < \mathrm{Im}z < 2$

Definition (闭区域)

区域 G 的闭包 $\overline{G}$ 即区域 G 加上边界 ∂G 构成**闭区域**

通常用 G 代表区域, $\overline{G}$ 代表闭区域, C 代表边界. 则

$$\overline{G} = G + \partial G = G + C \tag{35}$$

Definition (闭区域)

区域 G 的闭包 $\overline{G}$ 即区域 G 加上边界 ∂G 构成**闭区域**

通常用 G 代表区域, $\overline{G}$ 代表闭区域, C 代表边界. 则

$$\overline{G} = G + \partial G = G + C \tag{35}$$

- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

复变函数中极限和连续概念是建立在邻域概念上的

Definition (极限)

设函数在 z_0 的空心邻域内有定义. 如果存在复数 A, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$, 使当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称 $z \longrightarrow z_0$ 时, $f(z)$ 的**极限**存在. A 为其*极限值*(或*极限*), 表示为

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = A \tag{36}$$

Definition (连续)

设函数在 z_0 的邻域内有定义. 如果

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \tag{37}$$

即 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点**连续**

Note

函数在区域 G 内的每一点都连续, 称为在 G 内连续.
函数在闭区域 $\overline{G}$ 上的每一点都连续, 称为在 $\overline{G}$ 内连续.

Definition (连续)

设函数在 z_0 的邻域内有定义. 如果

$$\lim_{z\longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \tag{37}$$

即 $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta(\epsilon) > 0$, 当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点**连续**

Note

函数在区域 G 内的每一点都连续, 称为在 G 内连续.
函数在闭区域 $\overline{G}$ 上的每一点都连续, 称为在 $\overline{G}$ 内连续.

Theorem

连续函数的和、差、积、商 (分母不为零), 以及复合函数仍是连续函数.

- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

无穷远点

为了方便，常引入无穷远点 (或无穷大) ∞，满足 $(\forall z \in \mathbb{C})$

$$z + \infty = \infty \tag{38a}$$

$$z \cdot \infty = \infty \quad (z \neq 0) \tag{38b}$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \tag{38c}$$

Note

与实数域不同 (它有两个无穷大 $+\infty$ 和 $-\infty$)，复数域只有一个无穷远点．原因是复数域不是一个有序域．

无穷远点

为了方便, 常引入无穷远点 (或无穷大) ∞, 满足 $(\forall z \in \mathbb{C})$

$$z + \infty = \infty \tag{38a}$$

$$z \cdot \infty = \infty \quad (z \neq 0) \tag{38b}$$

$$\infty \cdot \infty = \infty \tag{38c}$$

Note

与实数域不同 (它有两个无穷大 $+\infty$ 和 $-\infty$), 复数域只有一个无穷远点. 原因是复数域不是一个有序域.

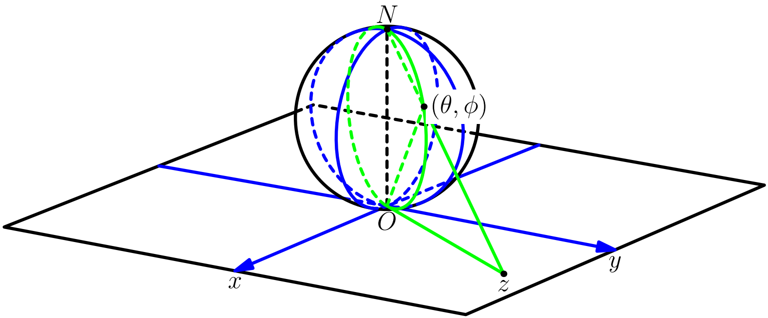
Definition

扩充的复数域 和扩充的复平面

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \infty$$

Riemann 球表示

可以用 **Riemann 球表示**来理解扩充的复平面.



Definition (无穷远点的邻域)

定义为 $|z| > M$ $(M > 0)$.

Definition (无穷远点的极限)

设函数在 ∞ 的邻域内有定义. 如果存在复数 A, $\forall \epsilon > 0$, $\exists M(\epsilon) > 0$, 使当 $|z| > M$ 时, 恒有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称 $z \to \infty$ 时, $f(z)$ 的极限存在. A 为其*极限值*(或*极限*), 表示为

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A \tag{39}$$

Definition (无穷远点的邻域)

定义为 $|z| > M$ $(M > 0)$.

Definition (无穷远点的极限)

设函数在 ∞ 的邻域内有定义. 如果存在复数 A, $\forall \epsilon > 0$, $\exists M(\epsilon) > 0$, 使当 $|z| > M$ 时, 恒有 $|f(z) - A| < \epsilon$, 则称 $z \to \infty$ 时, $f(z)$ 的**极限存在**. A 为其*极限值*(或*极限*), 表示为

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A \tag{39}$$

Definition (无穷远点的函数值)

设函数在 ∞ 的极限存在. 定义

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) \tag{40}$$

并称 $f(z)$ 在 ∞ 点连续

无穷远点只不过是一个极限过程. 若令 $z = \frac{1}{w}$, 则

无穷远点的邻域 $|z| > M$ 便是 $|w| < \frac{1}{M}$,

为 $w = 0$ 点的邻域. 所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} f(\frac{1}{w}) \tag{41}$$

Definition (无穷远点的函数值)

设函数在 ∞ 的极限存在. 定义

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = f(\infty) \tag{40}$$

并称 $f(z)$ 在 ∞ 点连续

无穷远点只不过是一个极限过程. 若令 $z = \dfrac{1}{w}$, 则
无穷远点的邻域 $|z| > M$ 便是 $|w| < \dfrac{1}{M}$,
为 $w = 0$ 点的邻域. 所以

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} f(\frac{1}{w}) \tag{41}$$

- 复数及其运算规则
- 复数的几何表示
- 复变函数
- 复平面的拓扑简介
- 极限和连续
- 无穷远点
- 有界区域

Definition (有界)

若存在正实数 $M>0$, 所有点集 E 的点 z 都满足 $|z|<M$, 则称点集 E **有界**

Theorem (连续函数有界性)

在有界闭区域 $\overline{G}$ 上连续的函数 $f(z)$, $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界, 并达到它的上下界.

Definition (有界)

若存在正实数 $M > 0$, 所有点集 E 的点 z 都满足 $|z| < M$, 则称点集 E **有界**

Theorem (连续函数有界性)

在有界闭区域 $\overline{G}$ 上连续的函数 $f(z)$, $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界, 并达到它的上下界.

在引入扩充的复平面后, 连续函数的有界性定理可表为

Theorem (推广的连续函数有界性)

在扩充的复平面内, 闭区域 $\overline{G}$ 上连续的函数 $f(z)$, $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界, 并达到它的上下界.

这是因为在扩充的复平面, 我们可以将闭区域 $\overline{G}$ 拆为两部分: $|z| \leq M$ 和 $|z| \geq M$. 第一部分为有界闭区域, 而第二部分在变换 $z = \dfrac{1}{w}$ 后, 也是 w 平面的一个有界闭区域.