

Calculadora Cosmológica: Resultados y ejemplos

Guadalupe Cañas Herrera

Resumen

Se pretende mostrar los resultados numéricos proporcionados por nuestro programa así como el análisis de los mismos en comparación con los datos bibliográficos o de otras gráficas que pretenden ilustrar el buen funcionamiento de el código escrito. Por otra parte, se proporcionan ejemplos gráficos sobre la evolución del universo en función de la curvatura intrínseca y de la composición en materia, radiación y energía oscura.



1. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

Con el fin de comprender los resultados numéricos y gráficos que se proporcionan en este informe es necesario definir una serie de magnitudes que calcula el programa:

- El **parámetro de deceleración** q_0 en cosmología es una magnitud adimensional que expresa la aceleración cósmica de la expansión del espacio en un universo regido por la métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker. Se define como,

$$q_0 = -\frac{R(t_0)\ddot{R}(t_0)}{\dot{R}(t_0)^2} \quad (1)$$

En un universo con densidades de materia Ω_M , densidad de radiación Ω_R y densidad de energía oscura Ω_Λ , el parámetro de desaceleración se define como [1],

$$q_0 = 0,5\Omega_M + \Omega_R - \Omega_\Lambda \quad (2)$$

- La **distancia radial comóvil** dc es la distancia entre dos puntos medidos a los largo de la trayectoria definida en el tiempo cosmológico presente. Para objetos moviéndose debido al flujo de Hubble, esta medida debe ser constante en el tiempo. La distancia comóvil desde un observador hasta un objeto distante se puede calcular mediante,

$$dc = C \int_x^1 \frac{dx}{H_0 x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \quad (3)$$

donde $x = R(t)/R(t_0) = 1/(1+z) \rightarrow dx = 1/(1+z)^2$ es un cambio de variable sugerido para poder calcular la integral presente en la ecuación (3).¹

- La **distancia propia** dp entre dos eventos cercanos es la distancia entre ellos en el sistema de referencia en el cual ambos eventos ocurren en el mismo tiempo t . Es la distancia medida por una regla en el tiempo de observación. La distancia transversal comóvil no es la distancia propia definida tal cual, sino que se consideraría como la distancia propia dividida por el radio de los factores de escala (véase pagina 444 de [2]). En este informe se considera a la distancia propia como esta distancia transversal comóvil que depende de la geometría intrínseca del Universo. Esta distancia dp coincide con la distancia radial comóvil dc para un universo plano $k = 0$

$$dp = \frac{c}{H_0 \sqrt{-\Omega_k}} \sin \sqrt{\Omega_k} dc \quad \text{si } \Omega_k < 0 \quad (4)$$

$$dp = \frac{c}{H_0 \sqrt{-\Omega_k}} \sinh \sqrt{\Omega_k} dc \quad \text{si } \Omega_k > 0 \quad (5)$$

$$dp = \frac{c}{H_0} dc \quad \text{si } \Omega_k = 0 \quad (6)$$

1. Se ha decidido realizar este cambio de variable ya que se ha considerado que para calcular la edad del universo para un futuro es mas sencillo redefinir el factor de escala (tal y como se expuso en el Documento relacionado con las Características del Software) que estudiar nuevamente el método de integración por trapecios para $z < 0$

- **La distancia de diámetro angular** da describe la relación entre el tamaño angular de un objeto celeste observado en el cielo y su corrimiento al rojo desde la tierra. Se relaciona con la distancia propia como,

$$da = R(t)dp \quad (7)$$

- **La distancia de luminosidad** dl se define como la relación entre el flujo bolométrico integrado en todas las frecuencias y la luminosidad bolométrica. Puede relacionarse con la distancia propia como,

$$dl = (1 + z)dp = dp/R(t) \quad (8)$$

- **Light Travel Time** es el tiempo transcurrido desde un cierto valor de corrimiento al rojo z hasta el presente, donde $z=0$. Se define como,

$$t_{light} = \int_x^1 \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k x + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \quad (9)$$

- **La edad del universo para un z determinado** $t(z)$ es el tiempo transcurrido desde el Big Bang hasta un cierto valor de corrimiento al rojo z . Se define como,

$$t(z) = \int_0^x \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k x + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \quad (10)$$

- **La edad del universo** $t(z=0)$, de acuerdo con la Teoría del Big Bang, es el tiempo transcurrido desde el Big Bang hasta el presente. Puede definirse como,

$$t(z=0) = \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_k x + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}}} \quad (11)$$

2. RESULTADOS NÚMERICOS Y ANÁLISIS

En esta sección se compararán los valores obtenidos con nuestra calculadora de las magnitudes explicadas en la introducción con los resultados de otras calculadoras presentes en la red así como datos bibliográficos.

2.1. Universo sin densidad de Radiación $\Omega_R = 0$

Se han estudiado los valores obtenidos para las magnitudes explicadas durante la introducción con la calculadora cosmológica CosmoCalculator.c y se han comparado con valores obtenidos con otras calculadoras cosmológicas online: Cosmological Calculator ([3]), CosmoCalc ([4]) y CosmoTools ([5]). Se han utilizado estas calculadoras de la red para el caso en que el universo no tenga densidad de Radiación ya que la mayoría de calculadoras cosmológicas desprecian la densidad de radiación y no es un parámetro que pueda ser introducido en sus interfaces.

Se han estudiado tres posibles casos para los valores de las magnitudes el para el caso de un universo plano ($k = 0$), con curvatura positiva ($k < 0$) y curvatura negativa ($k > 0$);

2.1.1. Para $k = 0$

	q_0	dc/Mpc	dp/Mpc	da/Mpc	dl/Mpc	Light Travel Time/Gyr	t(z=5)/Gyr	t(z=0)/Gyr
CosmoCalculator.c	-0.6400	8241.8193	8241.8193	1373.6365	49450.9155	12.8537	1.2728	14.12650
[3]	-0.6400	8241.8200		1373.6400	49450.9000	12.8451	1.2721	
[4]		8238.8000		1373.1000	49432.9000	12.8420	1.2680	14.11000
[5]	-0.64		8241.2000	1373.5000	49447.4000	12.8000		14.10000
Discrepancia [3] (%)	0.0000	0.0000		-0.0003	0.0000	0.067	0.058	
Discrepancia [4] (%)		0.0366		0.040	0.040	0.100	0.400	0.120
Discrepancia [5] (%)	0.0000		0.008	0.010	0.010	0.400		0.200

Cuadro 1

Datos numéricos para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,24$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,76$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0$. Los datos se han obtenido para un corrimiento al rojo $z = 5,0$. La constante de Hubble es $H_0 = 71 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$.

No se han encontrado discrepancias significativas para las magnitudes calculadas con los datos obtenidos en [3], [4] y [5]. Obsérvese que los datos coinciden de manera adecuada con los calculados con nuestra calculadora cosmológica (tanto en orden de magnitud como en la primer cifra decimal). No obstante, cabe destacar que los

resultados obtenidos con nuestra calculadora cosmológica son ligeramente superiores a los obtenidos con las 3 fuentes bibliográficas, con lo cual puede dar cierta idea de un error sistemático en nuestro método de integración por Trapecios.

Cabe destacar como la distancia propia (realmente la distancia transversal comóvil) coincide con la distancia radial comóvil tal y como cabría esperar para un universo plano.

2.1.2. Para $k < 0$

	q_0	dc/Mpc	dp/Mpc	da/Mpc	dl/Mpc	Light Travel Time/Gyr	t(z=5)/Gyr	t(z=0)/Gyr
CosmoCalculator.c	0.1200	6453.6258	8540.1179	1423.3530	51240.7072	10.3247	1.1168	11.44145
[3]	0.1200	6453.6200	8540.1100	1423.3500	51240.7000	10.3178	1.1161	
[4]								
[5]	0.1200		8540.1000	1423.4000	51240.7000	10.3000		11.40000
Discrepancia [3] (%)	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0000	0.0670	0.0570	
Discrepancia [4] (%)								
Discrepancia [5] (%)	0.0000		0.0002	-0.0030	0.0000	0.240		0.360

Cuadro 2

Datos numéricos para un universo no plano ($\Omega_k > 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,24$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,0$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0,0$. Los datos se han obtenido para un corrimiento al rojo $z = 5,0$. La constante de Hubble es $H_0 = 71 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$.

No se han encontrado discrepancias significativas para las magnitudes calculadas con los datos obtenidos en [3] y [5] (la calculadora [4] no considera el caso de que $\Omega_k > 0$). Obsérvese que los datos coinciden de manera adecuada con los calculados con nuestra calculadora cosmológica (tanto en orden de magnitud como en la primer cifra decimal). Nuevamente, cabe destacar que los resultados obtenidos con nuestra calculadora cosmológica son ligeramente superiores a los obtenidos con las 2 fuentes bibliográficas, con lo cual puede reafirmar la idea de un error sistemático en nuestro método de integración por Trapecios.

Cabe destacar como la distancia propia (realmente la distancia transversal comóvil) no coincide con la distancia radial comóvil tal y como cabría esperar para un universo no plano. En este caso la diferencia radica en que la distancia comóvil es aproximadamente 2000 Mpc más pequeña que la distancia propia.

2.1.3. Para $k > 0$

	q_0	dc/Mpc	dp/Mpc	da/Mpc	dl/Mpc	Light Travel Time/Gyr	t(z=5)/Gyr	t(z=0)/Gyr
CosmoCalculator.c	-0.7600	12014.3806	16301.1597	2716.8599	97806.9579	16.5676	4.6195	21.18709
[3]	-0.7600	12014.4000	16301.1000	2716.8500	97806.7000	16.5566	4.6192	
[4]		11997.1000		2710.4000	97575.5000	16.5430	4.1300	20.67300
[5]	-0.7600		16298.2000	2716.4000	97789.0000	16.6000		20.60000
Discrepancia [3] (%)	0.0000	-0.0002	0.0004	0.0004	0.0003	0.0670	0.0060	
Discrepancia [4] (%)	0.0000	0.1400		0.2400	0.2400	0.1500	11.0000	2.0000
Discrepancia [5] (%)	0.0000		0.0180	0.0170	0.0180	0.2000		3.0000

Cuadro 3

Datos numéricos para un universo no plano ($\Omega_k < 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,0$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,76$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0,0$. Los datos se han obtenido para un corrimiento al rojo $z = 5,0$. La constante de Hubble es $H_0 = 71 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$.

En este caso, sí que se han encontrado una serie de discrepancias significativas magnitudes calculadas con los datos obtenidos en [3] y [5] y [4]. Obsérvese que los datos coinciden de manera adecuada con los calculados respecto a las distancias dc , dp , da y dl . Sin embargo la discrepancia con los datos correspondientes a [5] son relativamente mayores que en el caso de $k = 0$ y $k < 0$. A pesar de que el orden de magnitud coincide, ya no coinciden la primera cifra decimal así como el valor de las unidades de millar. Nuevamente, cabe destacar que los resultados obtenidos con nuestra calculadora cosmológica son ligeramente superiores a los obtenidos con las 3 fuentes bibliográficas. Aquí se hace evidente que nuestro método de integración es posible que no sea adecuado para los tipos de funciones presentes en las ecuaciones (3), (4), (5) así como en los tiempos. El método de los trapecios es bueno para funciones de tipo exponencial crecientes así como polinomios, pero no es relativamente bueno para funciones racionales (que es el tipo de integral que nosotros tenemos). Concretamente, puede verse que la edad del universo calculada por nuestra calculadora es un Giga-año mayor que la edad calculada por el

resto de calculadoras cosmológicas.

Para comprobar dicha suposición de la existencia de un error sistemático, se han introducido dos nuevos métodos de integración en el programa CosmoCalculator.c²: método de Simpson y método de cuadratura de Gauss. Tras volver a calcular las distancias y los tiempos con estos dos métodos, no se han encontrado diferencias para los resultados obtenidos por Simpson y por el método de Trapecios. Con respecto a la cuadratura de Gauss, se ha comprobado que los resultados obtenidos son diferentes a los calculados por el método de trapecios. No obstante, dichas diferencias radican en la precisión de la segunda cifra decimal y por tanto no ha podido comprobarse que nuestro método de trapecios tenga un error sistemático que provoca que los resultados sean ligeramente superiores a los obtenidos con las calculadoras en la red. Se propone, para trabajos futuros, un análisis exhaustivo sobre qué métodos de integración numérica son los más adecuados para funciones racionales y un estudio del código de CosmoCalculator.c sobre la precisión de los valores obtenidos (puede ser posible que pierda precisión al realizar algunas operaciones).

Finalmente, cabe destacar como la distancia propia (realmente la distancia transversal comóvil) no coincide con la distancia radial comóvil tal y como cabría esperar para un universo no plano. En este caso la diferencia radica en que la distancia comóvil es aproximadamente 4000 Mpc más pequeña que la distancia propia, haciendo evidente como la geometría del universo es muy importante a la hora de calcular distancias.³

2.2. Universo con densidad de Radiación $\Omega_R \neq 0,0$

Con el fin de analizar cómo afecta la densidad de radiación a los resultados obtenidos con nuestra calculadora, se ha intentado reproducir el momento de la historia del Universo cuando los fotones se separaron del resto de la materia; es decir, el momento en el cual se produce el Fondo Cósmico de Microondas. Para ello, se han utilizado los datos presentes en [6].

	q_0	dc/Mpc	dp/Mpc	da/Mpc	dl/Mpc	Light Travel Time/Gyr	t(z=1091)/Gyr	t(z=0)/Gyr
CosmoCalculator.c	-0.495000	11169.988641	11169.988641	10.228927	12197627.595601	13.82392	0.000467	13.92392
[6]	-0.5000	14000					0.000377	13.75
Discrepancia [6] (%)	1.0	20.0					24.0	1.3

Cuadro 4

Datos numéricos para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,31$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,67$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0,02$. Los datos se han obtenido para un corrimiento al rojo $z = 1091,0$. La constante de Hubble es $H_0 = 67 km/(s.Mpc)$.

Se han encontrado discrepancias significativas en el cálculo de $t(z = 1091)$ y para el cálculo de dc mientras que las discrepancias para el cálculo de q_0 y para $t(z = 0)$ no son significativas. Obsérvese, no obstante, que el orden de las magnitudes calculadas coinciden con los dados bibliográficos. Esto es importante ya que los datos bibliográficos no se han obtenido mediante un procedimiento tan simple como es integrar numéricamente las ecuaciones de Friedman para el modelo “Lambda cold dark matter” (que es una parametrización del modelo cosmológico del Big Bang en el cual el universo contiene una constante cosmológica asociada a la energía oscura, y materia oscura fría abreviada como CDM. Normalmente se refiere a este modelo resultados bastante buenos sobre el comportamiento del universo). Los datos bibliográficos se han obtenido mediante el estudio del Fondo Cósmico de Microondas, mediante el ajuste del espectro de potencial tras el análisis de las anisotropías en la temperatura presentes en él. Estos datos obtenidos mediante el ajuste del espectro de potencias se han cotejado con otros métodos como el “lensing” que han permitido obtener valores para la composición del universo con incertidumbres muy bajas. Además, se han hecho estudios para calcular las distancias al fondo cósmico de microondas utilizando filtros en diferentes partes del espectro electromagnético, lo que permite calcular la distancia de luminosidad de manera más precisa y eficiente que el cálculo realizado por nuestra calculadora, que no es más que una simple aproximación numérica.

A pesar de las discrepancias, es posible observar como la radiación apenas afecta a la historia general del Universo, ya que la edad obtenida para un universo dominado por los parámetros presentes en el Cuadro 4 es

2. Estos métodos de integración se encuentran comentados en el programa y quedan a disposición del lector en caso de que quiera comprobar las diferencias que producen.

3. Se ha elegido un corrimiento al rojo $z=5$ para calcular las distancias debido a que para z mayores que $z=3$ se observa claramente la diferencia que existe entre la distancia radial comóvil y la distancia transversal comóvil. Para z cercanos a cero, la diferencia entre ambas distancias es prácticamente nula.

muy similar a la obtenida en el Cuadro 1, en el cual la densidad de radiación era cero. Esto justifica el hecho de que las mayorías de las calculadoras cosmológicas de la red no consideren la densidad de radiación como un parámetro a tener en cuenta para realizar los cálculos. Sin embargo, es cierto que en los primeros años de vida del universo la radiación era dominante, con lo cual se podría proponer para nuevas mejoras de la calculadora en un futuro la introducción de un modelo para un universo dominado únicamente por la radiación, de manera que se obtuviera de manera más precisa la edad del universo a la cual se produjo el desacoplo entre materia y radiación y obtener así la edad $t(z = 1091) = 300000yr$. Por otra parte, se obtiene un parámetro de desaceleración negativo, que implica que el universo no se está ralentizando sino que cada vez se expande más rápido debido a la presencia de energía oscura tal y como se expone en el artículo [6].

En definitiva, se ha comprobado como con una calculadora muy simple se pueden realizar estimaciones del orden de magnitud de datos obtenidos de manera mucho más compleja como son los obtenidos por la colaboración Planck y publicados recientemente en la revista "Astronomy and Astrophysics".

3. RESULTADOS GRÁFICOS Y ANÁLISIS

A continuación se procede a mostrar las gráficas obtenidas por nuestra calculadora cosmológica de las magnitudes presentes en la introducción. En primer lugar se comentarán las gráficas obtenidas para un universo sin radiación. A continuación se comentará como se comporta un universo con geometría plana cuando sólo está regido bien por radiación, materia o energía oscura y finalmente se hablará del comportamiento del factor de escala para lo que se cree (según los datos de [6]) es el universo actual.

3.1. Universo sin densidad de Radiación $\Omega_R = 0$

Se ha realizado la gráfica de la distancia propia, distancia de luminosidad y distancia de diámetro angular para un universo plano regido por una densidad de materia $\Omega_M = 0,24$ y una densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,76$. Además, se ha estudiado como varía la edad del universo en función del corrimiento al rojo, y el factor de escala en función de la edad del universo.

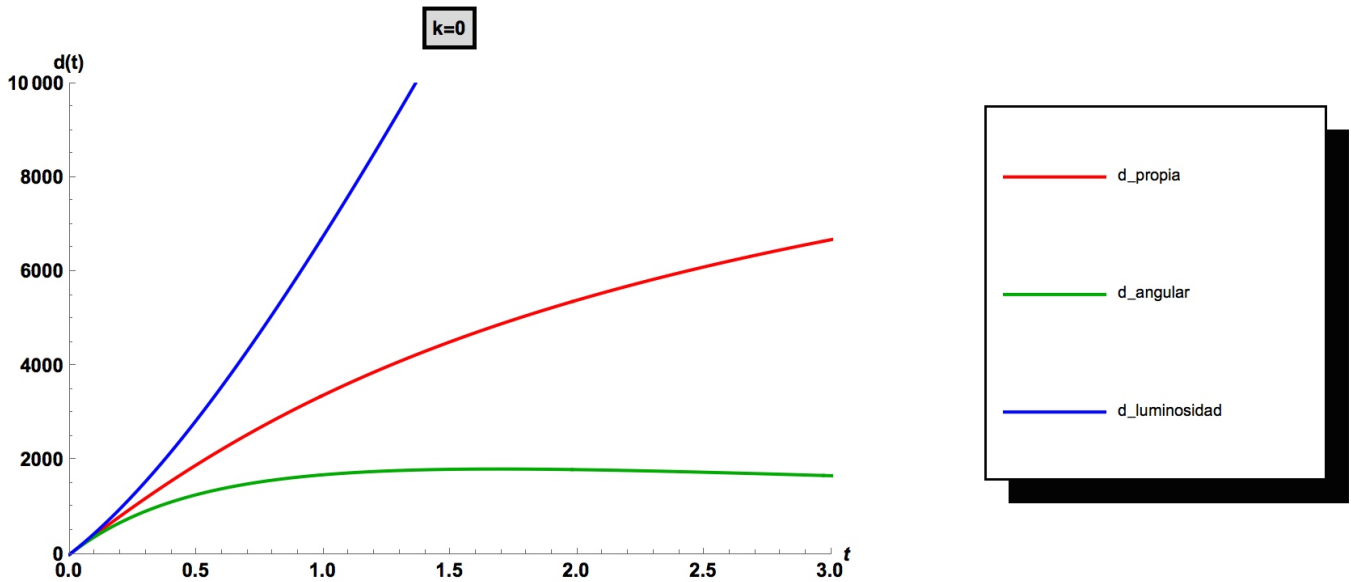


Figura 1. Distancias, en Megapársecs, para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,24$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,76$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0$ en función del tiempo en Giga-años. Los datos se han obtenido para una constante de Hubble $H_0 = 71 km/(s.Mpc)$.

En la Figura 1 puede observarse como la distancia de luminosidad crece a medida que aumenta el corrimiento al rojo tal y como predecía la ecuación (8) (recuérdese que $dl \propto (1+z)$). Por otra parte, es posible ver como la distancia de diámetro angular disminuye a medida que crece el corrimiento al rojo, tal y como predecía la ecuación

(7) (véase como $da \propto \frac{1}{1+z}$). Tal y como cabría esperar, la distancia propia se encuentra situada entre la distancia de diámetro angular y la distancia de luminosidad.

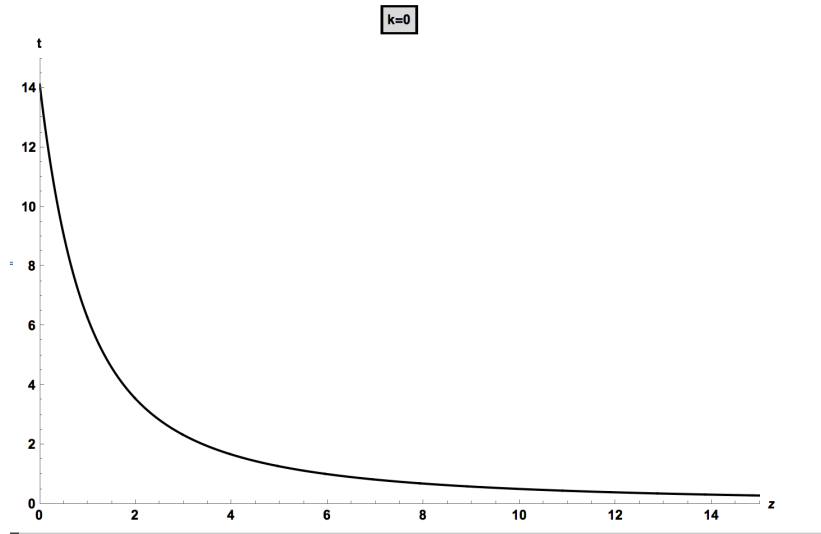


Figura 2. Dependencia del tiempo en Giga-años, para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,24$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,76$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0$ en función del corrimiento al rojo. Los datos se han obtenido para una constante de Hubble $H_0 = 71 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$.

En la Figura 2 puede observarse como la edad del universo crece a medida que decrece el corrimiento al rojo. Este decrecimiento puede considerarse exponencial para z cercanos al cero. Dicho decrecimiento exponencial podría explicarse ya que para z cercano al cero el universo ya está dominado por la energía oscura, con lo cual se cumple que, $R(t) = \frac{1}{1+z} \propto e^{Ht}$. Para corrimientos al rojo mayores, el universo se encuentra dominada por la materia, con lo cual este aumento en la edad con respecto a la disminución del corrimiento al rojo no se realiza de manera exponencial, sino que sigue una relación más constante. Finalmente, puede observarse tal y como se explicó en el Cuadro 1 que la edad en el presente (cuando $z = 0$) coincide con la observada en la gráfica.

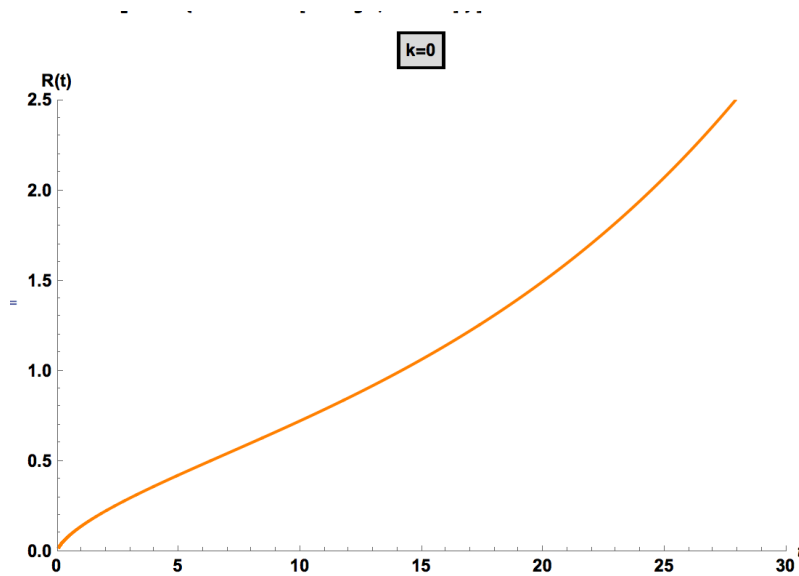


Figura 3. Dependencia del factor de escala, para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,24$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,76$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0$ en función del tiempo en Giga-años. Los datos se han obtenido para una constante de Hubble $H_0 = 71 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$.

En la figura 3 se observa la evolución del factor de escala en función de la edad para un universo de curvatura plana y densidad de materia $\Omega_M = 0,24$ y densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,76$. Para tiempos cercanos al Big

Bang ($t = 0$), el universo está dominado por la radiación. Como para la creación de esta gráfica no se tuvo en cuenta la densidad de radiación, no es posible ver esta dependencia. No obstante, si es posible ver que el universo se expandió hasta poco antes de la edad actual siguiendo una dependencia de $R(t) \propto t^{2/3}$. Esto es debido a que el universo desde $z = 5500$ está dominado por la materia.

Según aumenta la edad del universo, tal y como se ha mencionado antes, cerca de $z = 0$, el universo está dominado por la energía oscura, y el factor de escala tiene una dependencia con el tiempo exponencial según $R(t) \propto e^{Ht}$.⁴

3.2. Factores de escala para un universo plano $k = 0$ en función de Ω

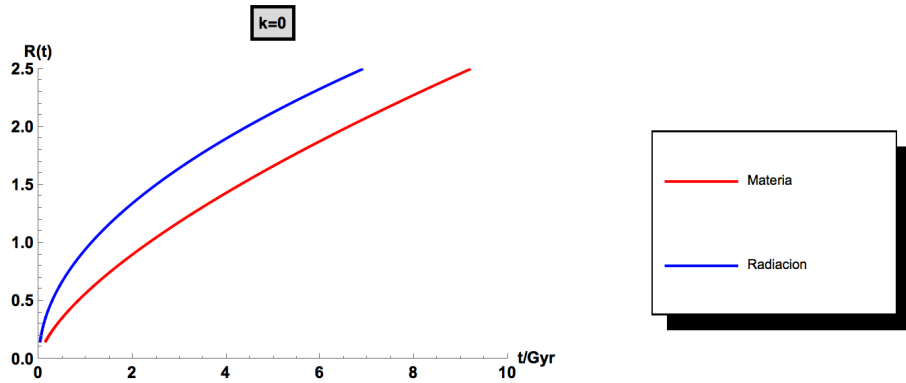


Figura 4. Dependencia del factor de escala, para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 1,00$ (en rojo) y densidad de radiación $\Omega_R = 1,0$ (en azul) en función del tiempo en Giga-años. Los datos se han obtenido para una constante de Hubble $H_0 = 71 km/(s.Mpc)$.

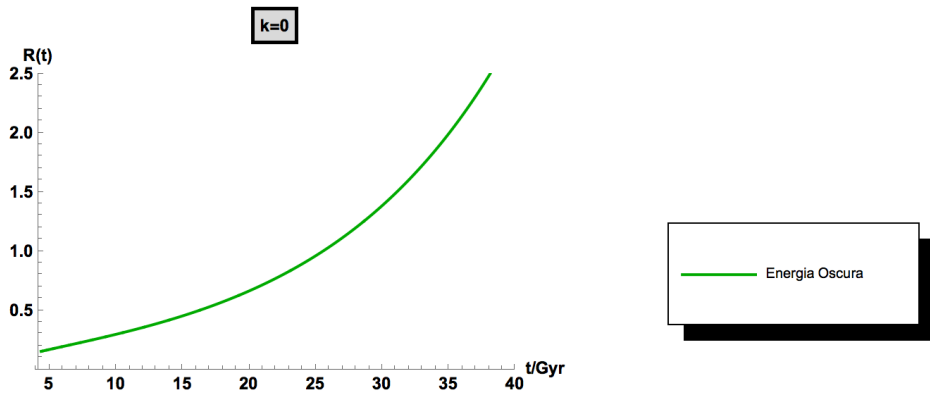


Figura 5. Dependencia del factor de escala, para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,999$ y densidad de materia $\Omega_M = 0,001$ (en verde) en función del tiempo en Giga-años. Los datos se han obtenido para una constante de Hubble $H_0 = 71 km/(s.Mpc)$.

Se han calculado las gráficas de la dependencia del factor de escala con el tiempo para un universo con geometría plana. Es posible resolver la ecuación de Friedman (12) para cada era del universo en la cual dominó bien la radiación, bien la materia o bien la energía oscura,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \propto \left(\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_M}{R(t)^3} + \frac{\Omega_R}{R(t)^4}\right) \quad (12)$$

4. Todas las dependencias del factor de escala en función del tiempo se han estudiado siguiendo [7]

Para cada era, se resuelve la ecuación diferencial ordinaria de primer orden mediante la cual es posible obtener las dependencias del factor de escala con el tiempo,

$$R(t) \propto t^{1/2} \quad (13)$$

para un universo dominado por Ω_R

$$R(t) \propto t^{2/3} \quad (14)$$

para un universo dominado por Ω_M

$$R(t) \propto e^{Ht} \quad (15)$$

para un universo dominado por Ω_Λ ⁵

3.3. Universo actual según la misión Planck

En la Figura 6 se observa la evolución del factor de escala en función de la edad para un universo de curvatura plana y densidad de materia $\Omega_M = 0,31$ y densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,67$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0,02$. Para tiempos cercanos al Big Bang ($t = 0$), el universo está dominado por la radiación. A diferencia de la figura 3, aquí es posible (si se observa con detenimiento) como la dependencia del factor de escala con el tiempo sigue una relación del tipo $R(t) \propto t^{1/2}$. También se observa como el universo se expandió hasta poco antes de la edad actual siguiendo una dependencia de $R(t) \propto t^{2/3}$ debido a la era dominada por la materia tal y como se veía en la Figura 3. No obstante, observe como la pendiente de la gráfica para esta época es menos pronunciada que la presente en la Figura 3. Esto es debido a que la constante de Hubble introducida es menor (según los datos de Planck no es $H_0 = 71 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$ sino $H_0 = 67 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$). Finalmente según aumenta la edad del universo, cerca de $z = 0$, el universo está dominado por la energía oscura, y el factor de escala tiene una dependencia con el tiempo exponencial según $R(t) \propto e^{Ht}$, que es fácilmente observado en la gráfica. ⁶

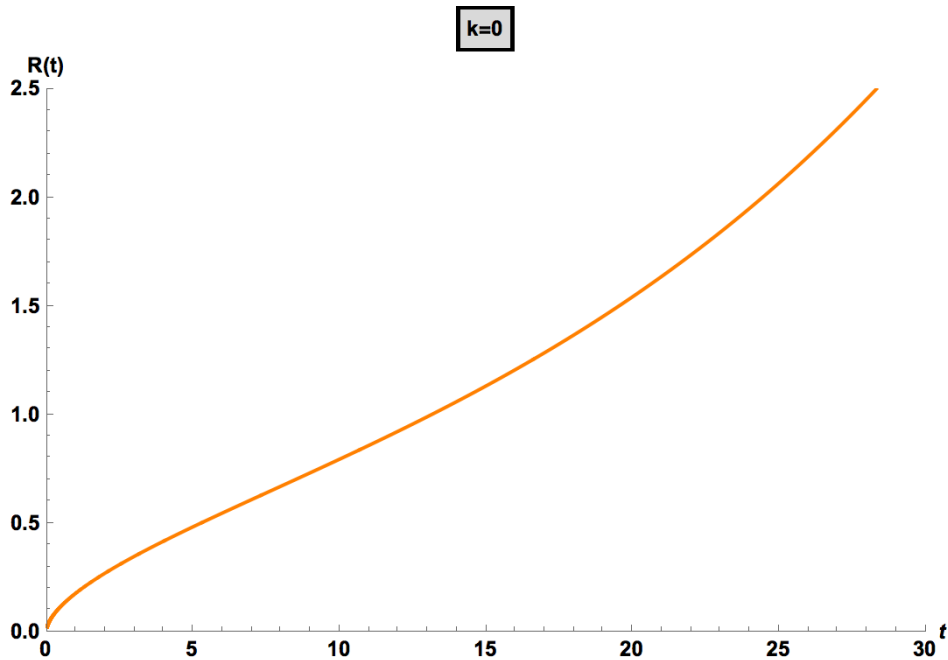


Figura 6. Dependencia del factor de escala, para un universo plano ($\Omega_k = 0$) con densidad de materia $\Omega_M = 0,31$, densidad de energía oscura $\Omega_\Lambda = 0,67$ y densidad de radiación $\Omega_R = 0,02$ en función del tiempo en Giga-años. Los datos se han obtenido para una constante de Hubble $H_0 = 67 \text{ km}/(\text{s.Mpc})$.

5. El método de integración incluido en CosmoCalculator.c no es lo suficientemente bueno para obtener la dependencia exponencial esperada para un universo regido por la energía oscura si se le pasa como parámetro $\Omega_\Lambda = 0,100$

6. A pesar de introducir la densidad de radiación, ambas figuras 3 y 6 son relativamente similares debido al hecho de que el peso de la densidad de radiación en los modelos actuales es prácticamente nulo.

REFERENCIAS

- [1] B. W. Carroll/ D. A. Ostlie "An Introduction to Modern Astrophysics" Second Edition. Pearson New International Edition.
- [2] Steven Weinberg "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity" John Wiley and Sons; Edición: 1 (28 de julio de 1972)
- [3] <http://www.kempner.net/cosmic.php>
- [4] <http://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html>
- [5] <http://www.bo.astro.it/~cappi/cosmotools>
- [6] Planck Collaboration: P. A. R. Ade et al. "Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results" A&A 571 A1. November 2014.
- [7] R. Freire "Lecture Notes from Modern Astrophysics and Cosmology". Utrecht University. 2014.