Analízis 2.
Programtervező informatikus A. szakirány

Definíciók és tételek

2022-2023. tanév 1. félév

Petrányi Bálint

2022. november 29.

Remélem nem írtam el semmit illetve hogy jól értelmeztem a kérdéseket ha mégis írjatok hogy mit hibáztam és kijavítom.

Tartalomjegyzék

2. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Mi a belső pont definíciója?

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az $a \subset \mathbb{R}$ pont az A halmaz egyes belső pontja, ha $\exists \delta > 0$ olyan, hogy $k_\delta \subset A$.

Emlékeztető: $k_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$

jelölés: az A belső pontjainak halmazát az A belsejének hívjuk és int A-val jelöljük.

2. Mikor mondjuk azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$

Akkor ha

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

Jelölése: $f \in \mathcal{D}\{a\}$

3. Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \in D\{a\} \quad \implies \quad f \in C\{a\}$$

Szóban: Ha egy valós-valós függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos abban a pontban.

4. Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra lineáris közelítéssel?

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists A \in \mathbb{R}, \text{ és } \epsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \epsilon = 0 \quad \text{úgy, hogy} \quad f(x) - f(a) = A(x-a) + \epsilon(x)(x-a)$$

5. Mi az érintő definíciója?

Legyen $f \in D\{a\}$. Ekkor az

$$e_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad e_a f(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$$

egyenesest az f függvény a pontbeli érintőjének hívjuk .

6. Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

$$f, g \in D\{a\} \quad \implies \quad f \cdot g \in D\{a\}, \text{ és } (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

7. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

$$f, g \in D\{a\} \text{ és } g(a) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f}{g} \in D\{a\}, \text{ és } \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

8. Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Legyen $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Tegyük fel, hogy az a int $\mathcal{D}_g$ pontban $g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor:

$$f \circ g \in D\{a\}, \text{ és } (f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$$

9. Mi az exp, sin, cos függvények derivált függvénye?

- $(e^x)' = e^x$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$

3. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Írja fel az exp, ln$x$, sin, cos, tg, $a^x(a > 0, x \in \mathbb{R})$ függvények derivált függvényét.

- $(e^x)' = e^x$
- $\ln x' = \frac{1}{x}$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$
- $\text{tg } x' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $a^{x'} = a \cdot \ln a$

2. Adjon példát olyan függvényre, ami az $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, de nem differenciálható!

Az abszolút érték függvény folytonos a 0 pontban, de nem differenciálható 0-ban.

3. Mi a jobb oldali derivált definíciója?

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel hogy az f függvény jobbról deriválható (differenciálható), ha

$$\exists \quad \text{és véges a} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{határérték}$$

Ezt a határértéket nevezzük az f függvény a pontbeli jobb oldal deriváltjának és $f'_+(a)$-val jelöljük

4. Mi az érintő definíciója?

Legyen $f \in D\{a\}$. Ekkor az

$$e_a f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad e_a f(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

egyenesest az f függvény a pontbeli érintőjének hívjuk .

5. Írja le az inverz függvény differenciálszámításáról szóló tételt!

Legyen $I \in \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

1. f szigorúan monoton és folytonos I-n,
2. f differenciálható az $a \in I$ és $f'(a) \neq 0$.

Ekkor az f^{-1} inverz függvény deriválható a $b := f(a)$ pontban, és

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

6. Milyen tételt hatványsor összegfüggvényének differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

Tegyük fel, hogy a $\sum(\alpha_n(x-a)^n)$ $(x \in \mathbb{R})$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad (x \in K_R(a))$$

a hatványsor összegfügevénye.
Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x-a)^{n-1} \quad (\forall x \in K_R(a))$$

4. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvény monoton növekedésével kapcsolatban?[1]

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy $f : I \to \mathbb{R},\ f \in D(I)$
Ekkor:

$$f \nearrow \quad \Longleftrightarrow \quad f' \geq 0.$$

Megjegyzés: az $f' \geq 0$ feltétel azt jelenti, hogy minden $x \in I$ pontban $f'(x) \geq 0$, aminek geometriai interpretációja az, hogy az érintő meredeksége minden pontban nem negatív.

2. Milyen elégséges feltételt ismer differenciálható függvény szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?[1]

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy $f : I \to \mathbb{R},\ f \in D(I)$
Ekkor:

$$f' > 0 \quad \Rightarrow \quad f \uparrow$$

Megjegyzés: Az állítás fordítottja nem igaz. Az $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény szigorúan monoton növekedő, de $f'(0) = 0$

3. Mit ért azon hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény valamely helyen lokális minimuma van?

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban lokális minimuma van ha

$$\exists K(a), \quad \text{hogy} \quad \forall x \in K(a) \cap \mathcal{D}_f \quad \text{esetén} \quad f(x) \geq f(a)$$

Ekkor az $a \in \mathcal{D}_f$ pontot az f lokális minimumhelyének nevezzük, $f(a)$ pedig az f lokális minimuma.

4. Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel?

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$
Ekkor:

$$f'(a) = 0$$

5. Adjon példát olyan $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre valamely $a \in \mathbb{R}$ esetén $f \in D\{a\}, f'(a) = 0$ teljesül, de az f függvénynek az a pontjában nincs lokális szélsőértéke

$f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$ esetén $f'(x) = 3x^2$ derivált csak a 0 pontban 0 ami viszont egyértelműen nem lokális szélsőértékhely $x < 0$ esetén $x^3 < 0$ és $x > 0$ esetén $x^3 > 0$

[1](Ha nem jó valaki javítson ki mert nem tudom ere mi lenne a pontos válasz)

6. Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?

Azt mondjuk hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban (-,+) előjelet vált ha $f(a) = 0$, és van olyan $\delta > 0$, hogy

$$f(x) < 0 \, (a - \delta < x < a), \quad f(x) > 0 \, (a < x < a + \delta)$$

A (+,-) jelváltás értelem szerűen definiálható

7. Hogyan szól a lokális maximumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és a $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$.
Tegyük fel hogy $\exists \delta > 0$, amelyre $f \in D((a - \delta, a + \delta))$ és f' előjelet vált a-ban
Ekkor f-nek szigorú lokális szélsőértéke van az a-ban
$(+, -)$ jelváltás esetén maximum.
Megjegyzés: $(-, +)$ jelváltás esetén minimum,

8. Írja le a lokális minimumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt.

Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$
Tegyük fel hogy:

1. $f \in D^2\{a\}$
2. $f'(a) = 0$ és $f''(a) \neq 0$

Ekkor az a pont a szigorú lokális szélsőértékhelye az f. függvénynek $f''(a) > 0$ esetén minimum
Megjegyzés: $f''(a) < 0$ esetén maximum

9. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt!
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Tegyük fel hogy

1. $f \in C[a, b]$
2. $f \in D(a, b)$

Ekkor:

$$\exists \varepsilon \in (a, b) \quad \text{hogy} \quad f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

10. Mondja ki a Cauchy-féle középértéktételt!
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Tegyük fel hogy

1. $f, g \in C[a, b]$
2. $f, g \in D(a, b)$
3. $g'(x) \neq 0 (x \in (a, b))$

Ekkor:

$$\exists \varepsilon \in (a, b), \quad \text{hogy} \quad \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

5. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Definiálja az inflexiós pont fogalmát.
Legyen I nyílt intervallumon, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I \subset \mathcal{D}_f$
Azt mondjuk hogy az $a \in I$ pont az f függvénynek inflexiós pontja ha:

$$\exists \delta > 0 \ k_\delta(a) \subset I \text{ olyan hogy}$$
$$f \text{ konvex az } (a-\delta, a] \text{ intervallumon és}$$
$$\text{konkáv az } [a, a+\delta)\text{-n intervallumon vagy fordítva}$$

2. Mondja ki az inflexiós pont létezésére vonatkozó másodrendű szükséges feltételt.
Legye $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$
Ha $f \in C^2\{a\}$ és f-nek az a pontjában inflexiója van akkor $f''(a) = 0$

3. Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek aszimptotája van a $+\infty$-ben?
Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk hogy f-nek van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha:

$$\exists l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - l(x)) = 0$$

Ekkor az $l(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenes az f aszimptotája $(+\infty)$-ben

4. Hogyan szól a $(+\infty)$-beli aszimptota létezésére vonatkozó tétel?
Az $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$-ben, ha léteznek és végesek az alábbi határértékek:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - Ax) =: B \in \mathbb{R}$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

Egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben

5. Írja le a jobboldali határérték $\frac{0}{0}$ esetére vonatkozó L'Hospital-szabályt.
Legyen $-\infty \leq a < b < +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$. Tegyük fel hogy:

- $\exists \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$
- $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

6. Írja le a baloldali határérték $\frac{+\infty}{+\infty}$ esetére vonatkozó L'Hospital-szabályt.
Legyen $-\infty < a < b \leq +\infty$ és $f, g \in D(a, b)$ Tegyük fel hogy:

- $\exists \lim\limits_{a-0} f = \lim\limits_{a-0} g = +\infty$
- $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$
- $\exists \lim\limits_{a-0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$

Ekkor

$$\exists \lim_{a-0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a-0} \frac{f}{g} = \lim_{a-0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$$

6. Gyakorlat elméleti kérdései

7. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Definiálja a primitív függvény fogalmát!

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon és $f : I \to \mathbb{R}$ egy adott függvény.
Azt mondjuk, hogy a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény az f egy primitív függvénye ha,

$$F \in D(i) \text{ és } F'(x) = f(x) \quad (\forall x \in i)$$

2. Mit nevezünk egy függvény határozatlan integráljának?

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon és $f : I \to \mathbb{R}$
Az f függvény primitív függvényeinek halmazát az f határozatlan integráljának nevezzük.
Jelölések : $\int f, \int f(x)dx$

3. Mikor mondjuk, hogy egy függvény Darboux-tulajdonságú?

Legyen I nyílt intervallumon, $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad I \subset \mathcal{D}_f$

Azt mondjuk, hogy az f függvény Daroux-tulajdonságú az I intervallumon, ha tetszőleges $a, b \in I, a < b$ és bármely $f(a)$ és $f(b)$ közé eső c esetén van olyan $\varepsilon \in [a, b]$, hogy $f(\varepsilon) = c$

Megjegyzés: Ha $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos akkor f Daroux-tulajdonságú az I-n

4. Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos parciális integrálás tétele?

Legyen I nyílt intervallum.

Tegyük fel, hogy $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik függvénye I-n
Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (x \in I)$$

5. Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos első helyettesítési szabály?

Legyenek adottak az I, J nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}, f : J \to \mathbb{R}$ függvények.

Tegyük fel hogy $g \in D(I), \mathcal{R}_g \subset J$ és az f függvénynek van primitív függvénye.
Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (x \in I)$$

ahol F a f függvénynek egy primitív függvénye

6. Adja meg az alábbi függvények egy primitív függvényét:
exp, x^a $(x > 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$, sin, $\frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

- $f(x) = e^x, F(x) = e^x$
- $f(x) = x^a, F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}$
- $f(x) = \sin x, F(x) = -\cos x$
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, F(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

8. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Legyen I nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha\beta \in \mathbb{R}$ mellet $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \quad (x \in I)$$

2. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabályt

Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok
tegyük fel hogy $f : I \to \mathbb{R}, \quad g : J \to I$ bijekció továbbá $g \in D(J)$, $g'(x) \neq 0$ $(x \in J)$ Ha az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye akkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)dx \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \quad (x \in I)$$

3. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum $f : I \to \mathbb{R}$ és $f \in D(I)$. Mi a határozatlan integrálja az $f' \cdot f^n$ függvénynek.

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c \quad (x \in Ic \in \mathbb{R})$$

4. Definiálja intervallum egy felosztását

(Fogalmam nincs melyik a jó szerintem mind ugyan az de leírom mindet biztos ami biztos lehet válogatni)

1. Az $[a, b]$ intervallum olyan véges részhalmazait, amik tartalmazzák az intervallum végpontjait azaz az a, b pontokat az $[a, b]$ intervallum felosztásainak nevezzük Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak a halmazát $F[a, b]$-vel jelöljük

2. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ Ekkor az $[a, b]$ intervallum felosztásán olyan véges

   $$\tau = \{x_0, ..., x_n\} \subset [a, b]$$

   halmazt értünk amelyre

   $$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

3. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztásán a

   $$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$$

   halmazt értjük ahol $n \in \mathbb{N}^+$

5. Mit jelent egy felosztás finomítása

Legyen $a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b$ és $\tau_1, \tau_2 \subset [a, b]$ egy-egy felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor τ_2 finomítása τ_1-nek, ha $\tau_1 \subset \tau_2$

6. Mi az also közelítő összeg definíciója

(Kitudja hogy kérdezi e a felső közelítést olyan hasonló hogy inkább leírom mind 2 öt) Legyen $f \in K[a, b]$ $\tau \in F[a, b], \tau = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$
Alsó közelítő összeg:

$$m_i := \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \inf f\Big|_{[x_{i-1}, x_i]} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Ekkor:

$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Felső közelítő összeg

$$M_i := \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \sup f\Big|_{[x_{i-1}, x_i]} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Ekkor:

$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

tldr: A kettő ugyan az anyi különbség van bennük hogy inf helyet sup és m és s helyet M és S van

9. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabályt

Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok
tegyük fel hogy $f : I \to \mathbb{R}, \quad g : J \to I$ bijekció továbbá $g \in D(J),\ g'(x) \neq 0\ (x \in J)$ Ha az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye akkor az f függvénynek is van primitív függvénye és

$$\int f(x)dx \underset{x=g(t)}{=} \int f(g(t)) \cdot g'(t)dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \quad (x \in I)$$

2. Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között? **(Nem vagyok benne biztos)**

Legyen $f \in K[a,b]$ és tegyük fel, hogy $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$

- Ha τ_2 finomabb τ_1-nél (azaz $\tau_1 \subset \tau_2$) akkor :

$$s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau_2) \quad \text{és} \quad S(f,\tau_1) \geq S(f,\tau_2)$$

- Tetszőleges $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s(f,\tau_1) \leq S(f,\tau_2)$$

3. Mi a Darboux-féle alsó integrál definíciója?

Legyen $f \in K[a,b]$ Az alsó közelítő összegek szuprémumát, azaz az

$$I_*(f) := \sup\{s(f,\tau) \| \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \in \mathbb{R}$$

számot az f függvény Darbux-féle alsó integráljának nevezzük

4. Mi a Darboux-féle alsó integrál definíciója?

Legyen $f \in K[a,b]$ A felső közelítő összegek infimumát, azaz az

$$I^*(f) := \inf\{S(f,\tau) \| \tau \in F[a,b]\} \in \mathbb{R}$$

számot az f függvény Darbux-féle felső integráljának nevezzük

5. Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak ?

Azt mondjuk hogy az $f \in K[a,b]$ függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon (röviden integrálható $[a,b]$-n) ha:

$$I_*(f) = I^*(f)$$

Ezt a számot az f függvény $[a,b]$ intervallum vett Riemann integráljának nevezzük, és következő képen jelöljük:

$$\int_a^b \quad \text{vagy} \quad \int_a^b f(x)dx$$

6. Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-) integrálját?

Legyen $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos függvény. Ha $I_*(f) = I^*(f)$, akkor az f függvény határozott (vagy Riemann-)integrálja az $I_*(f) = I^*(f)$ valós szám

7. Adjon meg egy példát nem integrálható függvényre!

Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha} x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

8. Mi az oszcillációs összeg definíciója?

Ha $f \in K[a, b]$ és $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, akkor

$$\Omega(f, \tau) := S(f, \tau) - s(f, \tau)$$

az f függvény τ felosztásához tartózó oszcillációs összege

9. Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal kapcsolatban tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

$f \in R[a, b] \Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \quad \Omega(f, \tau) < \varepsilon$$

10. Gyakorlat elméleti kérdései

1. Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalens átfogalmazását!

$f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = i$ akkor és csak akkor, ha

$\exists$ olyan $\tau_n \in \mathcal{F}[a,b]$ $(n \in \mathbb{N})$ felosztás szorzat, amelyre

$$\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = i$$

2. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$ Ekkor:

$$f + g \in R[a,b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

3. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?

Ha $f, g \in R[a,b]$ akkor $f \cdot g \in R[a,b]$

4. Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?

Ha $f, g \in R[a,b], \left|g(x)\right| \geq m > 0 \quad (\forall x \in [a,b])$ akkor $\frac{f}{g} \in R[a,b]$

5. Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény értékeinek megváltoztatását illetően?

Tegyük fel hogy $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Ha $f \in R[a,b]$ és az

$$A := \{x \in [a,b] | f(x) \neq (x)\} \text{halmaz véges}$$

akkor $g \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

6. Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

Tegyük fel hogy $f \in K[a,b]$ és legyen $c \in (a,b)$ Ekkor:

1. $f \in R[a,b] \Leftrightarrow f \in R[a,c]$ és $f \in R[c,b]$
2. ha $f \in R[a,c]$ és $f \in R[c,b]$ (vagy $f \in R[a,b]$) akkor

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

7. Hogyan szól az integrálszámítás első középértéktétele?

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$ és $g \geq 0$ Ekkor

1. az $m := \inf\limits_{[a,b]} f, M := \sup\limits_{[a,b]} f$ jelölésekkel

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g$$

2. ha $f \in C[a,b]$ is teljesül, ekkor $\exists \varepsilon \in [a,b]$ olyan, hogy

$$\int_a^b f \cdot g = f(\varepsilon) \cdot \int_a^b g$$

8. Fogalmazza meg a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-féle egyenlőtlenséget!

Tetszőleges $f, g \in R[a,b]$ függvények esetén

$$\left| \int_a^b f \cdot g \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}$$

9. Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton, akkor integrálható.

10. Definiálja a szakaszonként monoton függvény fogalmát!

Legyen $a, b \in \mathbb{R} a < b$
azt mondjuk hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény szakaszonként monoton ha

$$\exists m \in \mathbb{N}^+ \quad \text{és} \quad \tau\{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, ..., m$ index esetén

1. az $f_{|(x_{i-1}, x_i)}$ függvény monoton
2. f korlátos $[a,b]$-n