Analzízis Alkalmazásai. Programtervező informatikus A. szakirány

RöpZh Tételek

2023-2024. tanév 2. félév

Petrányi Bálint

2024. március 4.

Tartalomjegyzék

1. week

1.1. Mikor mondjuk, hogy a φ függvény az $f(x,y) = 0$ egyenletnek egy implicit megoldása?

1.1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy adott függvény. Ha létezik olyan $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy*

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (\forall x \in I)$$

akkor azt mondjuk, hogy a φ függvény az $f(x,y) = 0$ implicit alakban van megadva

1.2. Hogyan szól az egyváltozós implicitfüggvény-tétel?

1.1. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel.). *Legyen $\Omega \in \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

(a) f folytonosan deriválható Ω-n

(b) az $(a,b) \in \Omega$ pontban $f(a,b) = 0$ és $\partial_2 f(a,b) \neq 0$

Ekkor:

1. *Van olyan $K(a) =: U$ és $K(b) =: V$ környezet $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f(x, \varphi(x)) = 0$*

2. *Az így definiált $\varphi : U \to V$ függvény folytonosan deriválható U-n, továbbá $\forall x \in U$-ra $\partial_2 f(x, \varphi(x)) \neq 0$ és*

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))}$$

1.3. Igaz-e a következő állítás? *"Az implicitfüggvény-tétel egy explicit előállítást ad az $f(x,y) = 0$ egyenlet implicit megoldására."* A válaszát indokolja meg!

Nem igaz

Világos, hogy $\varphi(a) = b$. A φ függvényt az $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in U)$ egyenlőség "implicit" módon definiálja. Innen származik a tétel neve. A tétel csak a φ implicit függvény létezéséről szól, ezt a függvényt általában nem tudjuk explicit képlettel előállítani. Ennek ellenére a $\varphi'(x)$ deriváltat ki tudjuk számítani, ha ismerjük a $\varphi(x)$ függvényértéket.

1.4. A deriválási szabályok alapján hogyan vezethető le az $f(x, \varphi(x)) = 0$ $(x \in U)$ egyenlőségből az implicit megoldás deriváltjára vonatkozó összefüggést az U környezetben?

$$F(x) := f(x, \varphi(x)) \quad (x \in U)$$

Mivel $\forall x \in U$ esetén $F(x) = 0$, ezért $F'(x) = 0$. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$0 = F'(x) = \partial_1 f(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \partial_2 f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad (x \in U)$$

ezért $\forall x \in U$ pontban:

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))}$$

1.5. Mit jelent az, hogy egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú függvény lokálisan invertálható?

1.2. Tétel (Lokális invertálhatóság.). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.*
T.f.h. $f \in C^1(I)$ és egy $a \in I$ pontban $f'(a) \neq 0$
Ekkor f az a-ban lokálisan invertálható, azaz $\exists U := K(a)$ és $V := f[U]$ nyílt halmaz, hogy az $f_{|U} : U \to V$ függvény bijekció, ezért invertálható. Az $f_{|U}^{-1}$ lokális inverz folytonosan deriválható V-n, és

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (y \in V)$$

1.6. Igaz-e, hogy minden $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ típusú, folytonos és lokálisan invertálható függvény globálisan is invertálható? A válaszát indokolja meg!

Nem igaz
Például az

$$f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

folytonos függvény a sík minden π-nél kisebb sugarú körlapján injektív, de globálisan nem injektív, hiszen

$$f(x, y + 2\pi) = f(x, y) \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

1.7. Hogyan szól az inverzfüggvény-tétel?

1.3. Tétel (Inverzfüggvény-tétel.). *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(x \in \mathbb{N})$ *nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *T.f.h*

(a) f *folytonosan deriválható* Ω*-n*

(b) egy $a \in \Omega$ *pontban* $\det f'(a) \neq 0$

Ekkor

1. f *lokálisan invertálható, azaz van olyan, az* $a \in \Omega$ *pontot tartalmazó* U *nyílt halmaz, hogy ha* $V := f[U]$, *akkor az* $f_{|U} : U \to V$ *függvény bijekció (következésképpen invertálható).*
2. *Az* $\left(f_{|U}\right)^{-1}$ *lokális inverz folytonosan deriválható* V*-n és*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1} \quad (y \in V)$$

1.8. Igaz-e a következő állítás? *"Az inverzfüggvény-tétel egy explicit előállítást ad bizonyos feltételeket teljesítő függvények inverzére."* A válaszát indokolja meg!

Nem igaz

Az f függvény explicit alakjának az ismeretében f^{-1} helyettesítési értékeire általában nincs explicit képlet, viszont

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1} \quad (y \in V)$$

alapján a derivált helyettesítési értékei az f' helyettesítési értékeinek felhasználásával már kiszámíthatók, ha ismerjük az inverz függvény értékét a megfelelő pontban

2. week

2.1. Adja meg a két változós valós értékű f függvény a $g = 0$-ra vonatkozó feltételes abszolút maximumának a fogalmát!

2.1. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz T.f.h $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és*

$$H_g := \{z \in U \mid g(z) = 0\} \neq 0$$

*$a \in H_g$ pontban **feltételes abszolút maximuma van** ha*

$$f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in H_g \subset \mathcal{D}_f = U$$

2.2. Adja meg a két változós valós értékű f függvény a $g = 0$-ra vonatkozó feltételes lokális maximumának a fogalmát

2.2. Definíció. *Legyen $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz T.f.h $f, g : U \to \mathbb{R}$ adott függvények és*

$$H_g := \{z \in U \mid g(z) = 0\} \neq 0$$

*$a \in H_g$ pontban **feltételes lokális maximuma van** ha*

$$\exists K(a) \subset U : f(x) \leq f(a), \quad \forall x \in K(a) \cap H_g$$

2.3. Igaz-e, hogy egy feltételes abszolút maximum egyben feltételes lokális maximum? A válaszát indokolja meg!

Igen Mert van egy környezet amiben lokális maximum lesz

2.4. Mondja ki az elsőrendű szükséges feltételről szóló tételt feltételes lokális szélsőértékekre!

Általános eset:

2.1. Tétel. *T.f.h* $n, m \in \mathbb{N}$ $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt halmaz*

(a) az $f : U \to \mathbb{R}$ *és a* $g = (g_1, \ldots, g_m) : U \to \mathbb{R}^m$ *függvények folytonosan deriválhatók az* U *halmazon*

(b) az $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ *pontban az* f *függvénynek a* $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$ *feltételekre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van*

(c) rang $\begin{bmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \ldots & \partial_n g_1(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 g_m(a) & \partial_2 g_m(a) & \ldots & \partial_n g_m(a) \end{bmatrix} = 0$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *(Lagrange-szorzók), hogy az*

$$\mathcal{L}(x) := f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x) \quad (x \in U)$$

Lagrange-függvénynek $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(a) = [\partial_1 \mathcal{L}(a), \ldots, \partial_n \mathcal{L}(a)] = [0, \ldots, 0] = \theta_m \in \mathbb{R}^n$$

vagy **2 változos eset:**

2.2. Tétel. *T.f.h*

(a) $U \subset \mathbb{R}^2$ *nyílt halmaz és az* $f, g : U \to \mathbb{R}$ *függvényeknek léteznek a parciális deriváltjaik és azok folytonosak az* U *halmazon*

(b) az $(x_0, y_0) \in U$ *pontban az* f *függvénynek a* $g = 0$ *feltételre vonatkozóan feltételes lokális szélsőértéke van*

(c) $g'(x_0, y_0) = (\partial_1 g(x_0, y_0), \partial_2 g(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$

Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ *valós szám (ezt Lagrange-szorzónak szokás nevezni), hogy az*

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (()\,(x, y) \in U)$$

Lagrange-függvénynek (x_0, y_0) *stacionárius pontja, azaz*

$$\mathcal{L}'(x, y) = (\partial_x \mathcal{L}(x_0, y_0), \partial_y \mathcal{L}(x_0, y_0)) = (0, 0)$$

2.5. Mondja ki a másodrendű elégséges feltételről szóló tételt feltételes lokális szélsőértékekre!

Általános eset:

2.3. Tétel. *$n, m \in \mathbb{N}$ $m < n$, $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz T.f.h: $f, g_1, \ldots, g_m \in C^2$ és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ olyan számok, valamint az $a \in U$ olyan pont, hogy az*

$$\mathcal{L} := f + \lambda_1 g_1 + \ldots + \lambda_m g_m$$

függvényre $\mathcal{L}'(a) = \emptyset_n$ továbbá minden olyan $h \in \mathbb{R}^n, h \neq \subset_n$ vektorra, amelyre

$$g_1'(a) \cdot h = 0,\ g_2'(a) \cdot h = 0, \ldots,\ g_m'(a) \cdot h = 0$$

teljesül úgy, hogy

$$\langle \mathcal{L}''(a) \cdot h, h \rangle > 0$$

Ekkor az f függvénynek a $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$ feltételek mellett feltételes minimuma van az $a \in U$ pontban.

vagy **2 változos eset:**

2.4. Tétel. *T.f.h*

(a) $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f, g \in C^2(U, \mathbb{R})$

(b) az $(x_0, y_0) \in U$ pontban a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ számmal teljesül a szükséges feltétel.

Tekintsük ezzel a λ_0 számmal az

$$\mathcal{L}(x, y) := f(x, y) + \lambda_0 g(x, y) \quad ((x, y) \in U)$$

Lagrange-függvényt. Legyen

$$D(x_0, y_0; \lambda_0) := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_2 g(x_0, y_0) \\ \partial_1 g(x_0, y_0) & \partial_{11}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{12}\mathcal{L}(x_0, y_0) \\ \partial_2 g(x_0, y_0) & \partial_{21}\mathcal{L}(x_0, y_0) & \partial_{22}\mathcal{L}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

*(a mátrixot **kibővített Hesse-mátrixnak** szokás nevezni). Ekkor:*

1. *ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) > 0 \Leftarrow (x_0, y_0)$ feltételes lokális **maximumhely***
2. *ha $D(x_0, y_0; \lambda_0) < 0 \Leftarrow (x_0, y_0)$ feltételes lokális **minimumhely***

2.6. Miért nem tudjuk általában alkalmazni a korábban megismert (nem feltételes) lokális szélsőértékek keresésére szolgáló módszert feltételes lokális szélsőértékek keresésére?

Mert mindig feltettük, hogy a vizsgált pont az értelmezési tartomány belső pontja. Könnyen látható azonban, hogy a H_g halmaznak nincs belső pontja.

2.7. Milyen esetben tudjuk a kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételes szélsőérték-problémát visszavezetni egy egyváltozós függvény szélsőérték-problémájára?

T.f.h a feltételt megadó $g(x, y) = 0$ egyenletből (például) az y kifejezhető az x változó függvényeként, azaz $\exists \varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $g(x, \varphi(x)) = 0$

A $H_g = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz tehát a φ függvény garfikonja, ami "jó" esetben egy síkbeli "görbe". Az f függvénynek a H_g halmaz pontjaiban felvett értékeit a $h(x) := f(x, \varphi(x))$ alós-valós függvénnyel lehet kifejezni.

A kétváltozós függvényekre vonatkozó feltételes szélsőérték-problémát a szóban forgó esetben a h egyváltozós függvény szélsőérték-problémájára lehet visszavezetni.

2.8. Milyen esetekben és hogyan tudjuk a Weierstrass-tételt alkalmazni a feltételes abszolút szélsőrtékek keresésében?

A feltételes abszolút szélsőértékhelyek megkeresése egy "egyszerűbb" feladathoz vezethet, ha a

$$H_g := \{x \in U \mid g(x) = 0\}$$

halmaz korlátos és zárt. Ebben az esetben a Weierstrass-tétel garantálja a feltételes abszolút szélsőértékhelyek létezését, amelyek a Lagrange-függvény stacionárius pontjai lesznek.

3. week

3.1. Mit nevezünk szakaszonként sima útnak?

3.1. Definíció. *A* $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *függvény **szakaszonként sima út**, ha*

- $\varphi \in C\,[a, b]$
- $\exists a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$ $(m \in \mathbb{N})$ *olyan felosztása* $[a, b]$*-nek , amelyre tetszőleges* $k = 0, 1, \ldots, m-1$ *index esetén* $\varphi_{|_{[t_k, t_{k+1}]}}$ *sima út*

3.2. Mit nevezünk egy út ellentettjének?

Egy φ út $\tilde{\varphi}$ **ellentettjét** így definiáljuk:

$$\tilde{\varphi} := \varphi(b + a - t) \quad (a \leq t \leq b)$$

3.3. Mit nevezünk az u és v pontokat összekötő szakasznak?

Legyenek adottak az $u, v \in \mathbb{R}^n$ pontok, és legyen

$$\varphi_{uv}(t) := u + t(v - u) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Ekkor φ_{uv} egy sima út, az u-t és v-t összekötő szakasz, amelynek a $\varphi_{uv}(0) = u$ a kezdőpontja, a $\varphi_{uv}(1) = v$ pedig a végpontja.

3.4. Mikor mondjuk, hogy egy halmaz összefüggő, és mit nevezünk tartománynak?

Azt mondjuk, hogy az $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz **összefüggő**, ha bármely két pontja összeköthető U-ban haladó töröttvonallal. Az összefüggő nyílt halmazokat röviden **tartománynak** nevezzük.

3.5. Adja meg az f függvény φ útra vett vonalintegrálјának fogalmát!

3.2. Definíció. *T.f.h* $U \subset \mathbb{R}^n \quad (n \in \mathbb{R}^n)$ *tartomány, az* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *függvény folytonos, továbbá* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *egy* U*-ban haladó szakaszonként sima út. Ekkor az* f *függvény* φ *út vett vonalintegrálját így értelmezzük:*

$$\int_{\varphi} f := \int_a^b \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle = \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt.$$

3.6. Mondja ki a vonalintegrál utak egyesítéséről szóló állítás!

3.1. Tétel. *Legyen* $U \subset \mathbb{R}^n \quad (n \in \mathbb{N})$ *egy tartomány és t.f.h az* $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ *függvények folytonosak. Ha a* φ, ψ *utak* U*-beliek és létezik a* $\varphi \vee \psi$ *egyesítésük, akkor*

$$\int_{\varphi \vee \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f$$

3.7. Mondja ki a vonalintegrál utak ellentettjéről szóló állítás!

3.2. Tétel. *Legyen* $U \subset \mathbb{R}^n \quad (n \in \mathbb{N})$ *egy tartomány és t.f.h az* $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ *függvények folytonosak. bármilyen* U*-beli* φ *út* $\tilde{\varphi}$ *ellentettjére*

$$\int_{\tilde{\varphi}} f = -\int_{\varphi} f$$

3.8. Adja meg egy f vektormező primitív függvényének fogalmát!

3.3. Definíció. *Legyen* $U \subset \mathbb{R}^n$ *egy tartomány és* $f = (f_1, \ldots, \varphi_n) : U \to \mathbb{R}^n$ *adott vektormező Azt mondjuk, hogy a* $F : U \to \mathbb{R}$ *függvény a* f *függvény* ***primitív függvénye*** *ha* F *differenciálható* U*-ban, és* $F' = f$ *azaz ha minden* $x \in U$ *pontban*

$$F'(x) = (\partial_1 F(x), \ldots, \partial_n F(x)) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$$

3.9. Mondja ki a Newton-Leibniz-tételt!

3.3. Tétel (Newton–Leibniz). *Legye $U \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány, és t.f.h. az $f : U \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvénynek van primitív függvénye. Ekkor tetszőleges U-ban haladó $\varphi : [a, b] \to U$ szakaszonként sima út esetén a f bármelyik F primitív függvényével*

$$\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

3.10. Igaz-e a következő állítás? "Ha a folytonos $f : U \to \mathbb{R}^n$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f vonalintegráltjának értéke nulla tetszőleges U-ban haladó zárt úton" A válaszát indokolja meg!