Analízis 2.
Programtervező informatikus A. szakirány

Bizonyítások

2022-2023. tanév 1. félév

Petrányi Bálint

2022. szeptember 22.

Tartalomjegyzék

1. A differenciálhatóság átfogalmazása **2**

2. A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata **3**

3. Deriválási szabályok **4**

1. A differenciálhatóság átfogalmazása

Tétel:
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists A \in \mathbb{R}, \text{ és } \epsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \epsilon = 0 \quad \text{úgy, hogy} \quad f(x) - f(a) = A(x-a) + \epsilon(x)(x-a)$$

Bizonyítás:

$$\Longrightarrow f \in D\{a\} \text{ esetén legyen } A := f'(a), \text{ és} \epsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Ezzel a választással egyrészt

$$A(x-a) + \epsilon(x)(x-a) = f'(a)(x-a) + \Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\Big)(x-a) = f(x) - f(a),$$

másrészt a differenciálhatóság miatt

$$\lim_{x \to a} \epsilon(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

$\Longleftarrow$ Ha az A szám és az ϵ függvény teljesítik az állítást feltételeit, akkor

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \epsilon(x), s \lim_{x-a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A = f'(a) \in \mathbb{R}$$

2. A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata

Tétel:

$$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \in D\{a\} \quad \Longrightarrow \quad f \in C\{a\}$$

Szóban: Ha egy valós-valós függvény differenciálható egy pontban, akkor folytonos abban a pontban.

Megjegyzés: Fordítva nem igaz. Az abszolútérték függvény folytonos a 0 pontban de nem deriválható 0-ban. Kompatibilitási probléma is van: folytonosság esetében nem szükséges, hogy a pont az értelmezési tartomány belső pontja legye.

Bizonyítás:

Nyilván $f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)$. f differenciálhatósága miatt, ezért

$$\lim_a f = \lim_{x \to a} \Big(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x-a) + f(a) \Big) = f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

3. Deriválási szabályok

Tételek:

$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$
\begin{array}{llcccccc}
1. & f \in D\{a\} \text{ és } c \in \mathbb{R} & \Longrightarrow & c \cdot f \in D\{a\}, & \text{és} & (c \cdot f)'(a) & = & c \cdot f'(a) \\
2. & f \in D\{a\} & \Longrightarrow & f + g \in D\{a\}, & \text{és} & (f + g)'(a) & = & f'(a) + g'(a) \\
3. & f \in D\{a\} & \Longrightarrow & f \cdot g \in D\{a\}, & \text{és} & (f \cdot g)'(a) & = & f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \\
4. & f \in D\{a\} \text{ és } g(a) \neq 0 & \Longrightarrow & \frac{f}{g} \in D\{a\}, & \text{és} & \left(\frac{f}{g}\right)'(a) & = & \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}
\end{array}
$$