Analízis 2.
Programtervező informatikus A/B. szakirány

Bebizonyítással kért tételek

2022-2023. tanév 1. félév

2022. november 22.

Tartalomjegyzék

1. Tétel. *Oszcillációs összegek. Az integrálhatóság jellemzése oszcillációs összegekkel.*

$$f \in R[a,b] \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$$

Bizonyítás:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b] : I_*(f) = I^*(f) = I(f)$. A szuprémum definíciója alapján:

$$\sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I_*(f) = I(f) \overset{\text{sup def.}}{\Longrightarrow}$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \tau_1 \in \mathcal{F}[a,b] : I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \leq I(f)$$

Az infimum definíciója alapján:

$$\inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I^*(f) = I(f) \overset{\text{inf def.}}{\Longrightarrow}$$
$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b] : I(f) + \frac{\varepsilon}{2} > S(f,\tau_2) \geq I(f)$$

Legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor τ finomítása τ_1-nek és τ_2-nek, ezért:

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \leq s(f,\tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\tau) \leq S(f,\tau_2) \leq I(f) + \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow$$
$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon$$

$\boxed{\Longleftarrow}$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\tau \in \mathcal{F}[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$. Mivel $s(f,\tau) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,\tau)$ ezért

$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S(f,\tau) - s(f,\tau) = \Omega(f,\tau) < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0) \Longrightarrow$$
$$I^*(f) - I_*(f) = 0 \Longrightarrow I^*(f) = I_*(f) \Longrightarrow f \in R[a,b]$$

2. Tétel. *Az összegfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel.*

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$. Ekkor $f + g \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Bizonyítás:
Legyen $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ és

$$f_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$$

$$F_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f$$

$$g_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g$$

$$G_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g$$

Mivel $f_i + g_i \le f(x) + g(x) \le F_i + G_i$ $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ ezért $f_i + g_i \le \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}(f+g) \le \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}(f+g) \le F_i + G_i$. Ebből $x_i - x_{i-1}$-el való szorzással kapjuk, hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\tau) \le s(f+g,\tau) \le S(f+g,\tau) \le S(f,\tau) + S(g,\tau)$$

Tegyük fel, hogy $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ és legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor

$$s(f,\tau_1) + s(g,\tau_2) \le s(f,\tau) + s(g,\tau) \le s(f+g,\tau) \le I_*(f+g)$$

Innen először a τ_1 majd a τ_2 felosztásokra a bal oldal felső határát véve következik, hogy

$$I_*(f) + I_*(g) \le I_*(f+g)$$

Hasonlóan igazolható, hogy $I^*(f) + I^*(g) \ge I^*(f+g)$. Így:

$$I_*(f) + I_*(g) \le I_*(f+g) \le I^*(f+g) \le I^*(f) + I^*(g)$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$ ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$ és $I_*(g) = I^*(g) = \int_a^b g$ ezért $I_*(f+g) = I^*(f+g)$ tehát $f + g \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

3. Tétel. *A szorzatfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel*

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$. Ekkor $f \cdot g \in R[a,b]$.

Bizonyítás:

1. Tegyük fel, hogy $f, g \geq 0$, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$. Az előző bizonyításban bevezetett jelölésekkel:

$$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Longrightarrow$$

$$f_i \cdot g_i \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \leq F_i \cdot G_i \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Longrightarrow$$

$$\Omega(f \cdot g, \tau) = S(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g, \tau) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Mivel f és g korlátos ezért $\exists M : |f|, |g| \leq M$ $[a,b]$-n. Így

$$\Omega(f \cdot g, \tau) \leq \sum_{i=1}^{n} (F_i(G_i - g_i) + (F_i - f_i)g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$M \cdot \sum_{i=1}^{n} (G_i - g_i)(x_i - x_{i-1}) + M \cdot \sum (F_i - f_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$M \cdot (\Omega(g, \tau) + \Omega(f, \tau))$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$ ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \tau : \Omega(f, \tau), \Omega(g, \tau) < \varepsilon$. Tehát $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás:

$$\Omega(f \cdot g) \leq 2 \cdot M \cdot \varepsilon \Longrightarrow f \cdot g \in R[a,b]$$

2. Tegyük fel, hogy f, g tetszőleges és legyen $m_f = \inf_{[a,b]} f$ és $m_g = \inf_{[a,b]} g$. Ekkor $f - m_f \geq 0$ és $g - m_g \geq 0$ $[a,b]$-n integrálható függvények és az **1.** szerint:

$$(f - m_f)(g - m_g) = f \cdot g - \underbrace{f \cdot m_g - m_f \cdot g + m_f \cdot g}_{\in R[a,b]} \in R[a,b]$$

következtetésképpen $f \cdot g \in R[a,b]$.

4. Tétel. *Függvények hányadosának integrálhatóságára vonatkozó tétel*

Tegyük fel, hogy $f, g \in R[a,b]$ *és* $|g(x)| \geq m > 0 \quad (\forall x \in [a,b])$. *Ekkor* $\frac{f}{g} \in R[a,b]$.

Bizonyítás:
A szorzat tétel miatt elég csak azt bebizonyítani, hogy a g-re tett feltétel esetén $\frac{1}{g} \in R[a,b]$. Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. Ekkor $\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ pontokban

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(y)g(x)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(y)g(x)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1},x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}$$

$(x_i - x_{i-1})$-gyek való szorzás és összegzés után azt kapjuk, hogy

$$\Omega\left(\frac{1}{g}, \tau\right) \leq \frac{1}{m^2}\Omega(g, \tau)$$

Mivel $g \in R[a,b]$ ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \tau \in \mathcal{F}[a,b] : \Omega(g,\tau) < \varepsilon$. Így:

$$\Omega\left(\frac{1}{g}, \tau\right) < \frac{\varepsilon}{m^2} \Longrightarrow \frac{1}{g} \in R[a,b]$$

5. Tétel. *A monoton függvény integrálhatóságára vonatkozó tétel*

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény monoton az $[a,b]$ intervallumon, akkor integrálható $[a,b]$-n.

Bizonyítás:
Az integrálhatóság oszcillációs összegekkel való jellemzésére vonatkozó állítást alkalmazzuk, tehát

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\tau \in \mathcal{F}[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$$

Legyen pl $f \nearrow$. Ha $f(a) = f(b)$ akkor f állandó ezért ebben az esetben igaz. Ha $f(a) < f(b)$ akkor $\forall\tau = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} = f(x_{i-1})$ és $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} = f(x_i)$. Ezért

$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $n \in \mathbb{N}^+ : \frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ valamit τ az $[a,b]$ egyenletes felosztása. Ekkor $x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ minden $i = 1,\ldots,n$ indexre és

$$\Omega(f,\tau) < \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} <$$

$$\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \left((\cancel{f(x_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)}) + (\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}) + \cdots + (\underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \cancel{f(x_{n-1})}) \right) = \varepsilon$$

Ezzel az erdeti állítást igazoltuk $\Longrightarrow f \in R[a,b]$.

6. Tétel. *Az egyenletes folytonosságra vonatkozó Heine-tétel*

Ha $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f \in C[a,b]$ *akkor* f *egyenletesen folytonos az* $[a,b]$ *intervallumon*

Bizonyítás:
Indirekt módon. Tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos $[a,b]$-n. Ezt azt jelenti, hogy

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ hogy } \forall\delta > 0\text{-hoz } \exists x, y \in [a,b], |x-y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

A $\delta = \frac{1}{n}$ $\quad (n \in \mathbb{N}^+)$ választással kapjuk, hogy minden n-re létezik $x_n, y_n \in [a,b]$:

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ és } \underbrace{|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon}_{(*)}$$

x_n sorozat korlátos ezért van egy x_{n_k} konvergens részsorozata, amelynek az α határértéke ugyancsak $[a,b]$-ben van. Így

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k} \to 0 + \alpha = \alpha, \text{ ha } n_k \to +\infty$$

Mivel $f \in C[a,b]$ ezért $f \in C\{\alpha\}$ is teljesül. Az átviteli elv szerint tehát $f(x_{n_k}) \to f(\alpha)$ és $f(y_{n_k}) \to f(\alpha)$ ezért

$$\lim_{n_k \to +\infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$$

Ez azonban ellent mond a $(*)$ állításnak.

7. Tétel. *Folytonos függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel*

Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható $[a, b]$-n

Bizonyítás:
Elég megmutatni azt, hogy $\forall f \in C[a, b]$ függvényre a következő teljesül:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \tau \in \mathcal{F}[a, b] : \Omega(f, \tau) < \varepsilon$$

Mivel $f \in C[a, b] \Longrightarrow$ (Heine tétel) f egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon, ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a, b] : ||\tau|| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\} \leq \delta$. Ekkor $\Omega(f, \tau)$-ban $i = 1, \ldots, n$ esetén legyen

$$m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(u_i) \text{ és } M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(v_i)$$

(Weierstrass tétel miatt $\exists u_i, v_i$). Ekkor

$$\Omega(f, \tau) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $f \in R[a, b]$.

8. Tétel. *Newton-Leibniz tétel*

Ha $f \in R[a,b]$ és az f függvénynek van primitív függvénye $[a,b]$-n akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

Ahol F az f függvény egy tetszőleges primitív függvénye.

Bizonyítás:
Legyen $\tau = a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. A Lagrange-féle k.é.t. szerint $\forall i = 1, \ldots, n$ indexre $\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Ha ezeket az egyenlőségeket összeadjuk $\forall i = 1, \ldots, n$-en akkor a baloldalon minden tag kivéve $F(x_0) = F(a)$ és $F(x_n) = F(b)$ kiesik tehát:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sigma(f, \tau, \xi)$$

ahol $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$. Mivel $\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq f(\xi_i) \leq \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$ ezért

$$s(f, \tau) \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq F(b) - F(a) \leq S(f, \tau, \xi)$$

Következtetésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} s(f, \tau) \leq F(b) - F(a) \leq \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} S(f, \tau, \xi) = I^*(f)$$

Mivel $f \in R[a,b]$ ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$, így

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

9. Tétel. *Az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó tétel*

Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ *és* $x_0 \in [a,b]$. *Ekkor a*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad (x \in [a,b])$$

integrálfüggvény folytonos az $[a,b]$ *intervallumon.*

Bizonyítás:
Tetszőleges $x, y \in [a,b], x < y$ esetén

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_{x_0}^{y} f - \int_{x_0}^{x} f \right| = \left| \int_{x_0}^{y} f + \int_{x}^{x_0} f \right| = \left| \int_{x}^{y} f \right| \leq \int_{x}^{y} |f| \leq M \cdot \int_{x}^{y} 1 = M(y - x)$$

ahol M az f függvény egy korlátja: $|f(x)| \leq M \quad (x \in [a,b])$. (Mivel $f \in R[a,b]$ ezért f korlátos $[a,b]$-n). Ha tehát $\varepsilon > 0, \delta > 0 : M\delta < \varepsilon$, akkor $\forall x, y \in [a,b], |x - y| < \delta$ esetén:

$$|F(y) - F(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Ez azt jelenti F egyenletesen folytonos $[a,b]$-n így folytonos is.

10. Tétel. *Az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó állítás*

Tegyük fel, hogy $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor ha a

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \quad (x \in [a,b])$$

integrálfüggvény egy $d \in [a,b]$ pontban folytonos, akkor ott az F integrálfüggvény deriválható és $F'(d) = f(d)$. Ha $f \in C[a,b]$ akkor $F \in D[a,b]$ és $F'(x) = f(x)$ minden $x \in [a,b]$ pontban.

Bizonyítás:
Legyen $d \in (a,b)$ és tegyük fel, hogy $f \in C\{d\}$. Ez azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$:

$$\forall t \in [a,b] : |t-d| < \delta \text{ esetén } |f(t) - f(d)| < \varepsilon$$

Tegyük fel, hogy h-ra $d + h \in (a,b)$ teljesül. Ekkor

$$F(d+h) - F(d) = \int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^{d} f = \int_{d}^{d+h} f$$

Mivel $f(d) = \frac{1}{h}\int_d^{d+h} f(d)dt$ ezért

$$\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d) = \frac{1}{h}\int_d^{d+h} (f(t) - f(d))dt$$

Ha $0 < h < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h}\right| < \frac{1}{h} \cdot \int_d^{d+h} |f(t)-f(d)|dt < \frac{1}{h}\int_d^{d+h} \varepsilon = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h$$

Ha $-\delta < h < 0$, akkor

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_d^{d+h} |f(t)-f(d)|dt < \varepsilon$$

Az előzőek alapján tehát $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0 : \forall |h| < \delta$:

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| < \varepsilon$$

Ez azt jelenti, hogy:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d) = 0 \Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{F(d+h)-F(d)}{h} = f(d)$$

vagyis $F \in D\{d\}$ és $F'(d) = f(d)$. A végpontokban az előzőekhez hasonlóan kapjuk meg az egyoldali deriváltakra vonatkozó állításokat.

11. Tétel. *A parciális integrálásra vonatkozó tétel határozott integrálra*

Tegyük fel, hogy $f, g \in [a,b] \to \mathbb{R}, f, g \in D[a,b]$ *és* $f', g' \in R[a,b]$. *Ekkor*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g$$

Bizonyítás:
Egyrészt $f \in D[a,b] \implies f \in C[a,b] \implies f \in R[a,b]$. Mivel $g' \in R[a,b]$ ezért $fg' \in R[a,b]$. Hasonlóan kapjuk meg azt is, hogy $f'g \in R[a,b]$. Így $f'g + g'f \in R[a,b]$. Másrészt fg primitív függvénye az $f'g + g'f$ függvénynek. A Newton-Leibniz tétel szerint

$$\int_a^b (f'g + g'f) = [fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

A határozott integrál additivitását felhasználva rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$$

12. Tétel. *A helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra*

Tegyük fel, hogy $f \in C[a,b]$ *és a* $g \in [\alpha,\beta] \to [a,b]$ *függvény folytonosan deriválható. Ekkor*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'$$

Bizonyítás:
Tekintsük az

$$F(x) = \int_{g(\alpha)}^{x} f \quad (x \in [a,b]), \quad G(u) = \int_{\alpha}^{u} f \circ g \cdot g' \quad (x \in [\alpha,\beta])$$

integrálfüggvényeket. Megmutatjuk, hogy

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \underbrace{F(g(\beta)) = G(\beta)}_{(*)} = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'$$

Egyrész $f \in C[a,b] \Longrightarrow F' = f$, másrészt $f \circ g \cdot g' \in C[\alpha,\beta] \Longrightarrow G' = f \circ g \cdot g'$. Mivel $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g'$, ezért $(F \circ g - G)' = 0 \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}:$ $F \circ g - G = c$. Ugyanakkor $F(g(\alpha)) = 0 = G(\alpha) \Longrightarrow c = 0$. Következtetésképpen $F \circ g = G \Longrightarrow F(g(\beta)) = G(\beta)$.