Analzízis Alkalmazásai. Programtervező informatikus A. szakirány

RöpZh Tételek

2023-2024. tanév 2. félév

Petrányi Bálint

2024. február 18.

Tartalomjegyzék

1. 1. week

1.1. Mikor mondjuk, hogy a φ függvény az $f(x, y) = 0$ egyenletnek egy implicit megoldása?

1.1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy adott függvény. Ha létezik olyan $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy*

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (\forall x \in I)$$

akkor azt mondjuk, hogy a φ függvény az $f(x, y) = 0$ implicit alakban van megadva

1.2. Hogyan szól az egyváltozós implicitfüggvény-tétel?

1.1. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel.). *Legyen $\Omega \in \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

(a) f folytonosan deriválható Ω-n

(b) az $(a, b) \in \Omega$ pontban $f(a, b) = 0$ és $\partial_2 f(a, b) \neq 0$

Ekkor:

1. *Van olyan $K(a) =: U$ és $K(b) =: V$ környezet $\mathbb{R}$-ben, hogy minden $x \in U$ ponthoz létezik egyetlen $\varphi(x) \in V$, amelyre $f(x, \varphi(x)) = 0$*

2. *Az így definiált $\varphi : U \to V$ függvény folytonosan deriválható U-n, továbbá $\forall x \in U$-ra $\partial_2 f(x, \varphi(x)) \neq 0$ és*

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))}$$

1.3. Igaz-e a következő állítás? *"Az implicitfüggvény-tétel egy explicit előállítást ad az $f(x, y) = 0$ egyenlet implicit megoldására."* A válaszát indokolja meg!

Nem igaz

Világos, hogy $\varphi(a) = b$. A φ függvényt az $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad (x \in U)$ egyenlőség "implicit" módon definiálja. Innen származik a tétel neve. A tétel csak a φ implicit függvény létezéséről szól, ezt a függvényt általában nem tudjuk explicit képlettel előállítani. Ennek ellenére a $\varphi'(x)$ deriváltat ki tudjuk számítani, ha ismerjük a $\varphi(x)$ függvényértéket.

1.4. A deriválási szabályok alapján hogyan vezethető le az $f(x, \varphi(x)) = 0$ $(x \in U)$ egyenlőségből az implicit megoldás deriváltjára vonatkozó összefüggést az U környezetben?

$$F(x) := f(x, \varphi(x)) \quad (x \in U)$$

Mivel $\forall x \in U$ esetén $F(x) = 0$, ezért $F'(x) = 0$. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint

$$0 = F'(x) = \partial_1 f(x, \varphi(x)) \cdot 1 + \partial_2 f(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad (x \in U)$$

ezért $\forall x \in U$ pontban:

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))}$$

1.5. Mit jelent az, hogy egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú függvény lokálisan invertálható?

1.2. Tétel (Lokális invertálhatóság.). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$.*
T.f.h. $f \in C^1(I)$ és egy $a \in I$ pontban $f'(a) \neq 0$
Ekkor f az a-ban lokálisan invertálható, azaz $\exists U := K(a)$ és $V := f[U]$ nyílt halmaz, hogy az $f_{|U} : U \to V$ függvény bijekció, ezért invertálható. Az $f_{|U}^{-1}$ lokális inverz folytonosan deriválható V-n, és

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (y \in V)$$

1.6. Igaz-e, hogy minden $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ típusú, folytonos és lokálisan invertálható függvény globálisan is invertálható? A válaszát indokolja meg!

Nem igaz
Például az

$$f(x, y) := (e^x \cos y, e^x \sin y) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

folytonos függvény a sík minden π-nél kisebb sugarú körlapján injektív, de globálisan nem injektív, hiszen

$$f(x, y + 2\pi) = f(x, y) \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

1.7. Hogyan szól az inverzfüggvény-tétel?

1.3. Tétel (Inverzfüggvény-tétel.). *Legyen* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(x \in \mathbb{N})$ *nyílt halmaz és* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. *T.f.h*

(a) f *folytonosan deriválható* Ω*-n*

(b) egy $a \in \Omega$ *pontban* $\det f'(a) \neq 0$

Ekkor

1. f *lokálisan invertálható, azaz van olyan, az* $a \in \Omega$ *pontot tartalmazó* U *nyílt halmaz, hogy ha* $V := f[U]$, *akkor az* $f_{|U} : U \to V$ *függvény bijekció (következésképpen invertálható).*
2. *Az* $\left(f_{|U}\right)^{-1}$ *lokális inverz folytonosan deriválható* V*-n és*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1} \quad (y \in V)$$

1.8. Igaz-e a következő állítás? *"Az inverzfüggvény-tétel egy explicit előállítást ad bizonyos feltételeket teljesítő függvények inverzére."* A válaszát indokolja meg!

Nem igaz

Az f függvény explicit alakjának az ismeretében f^{-1} helyettesítési értékeire általában nincs explicit képlet, viszont

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left[f'(f^{-1}(y))\right]^{-1} \quad (y \in V)$$

alapján a derivált helyettesítési értékei az f' helyettesítési értékeinek felhasználásával már kiszámíthatók, ha ismerjük az inverz függvény értékét a megfelelő pontban