# Analízis 2.
# Programtervező informatikus A. szakirány

## Bizonyítások

2022-2023. tanév 1. félév

Petrányi Bálint

2022. október 27.

## Tartalomjegyzék

# 1. A differenciálhatóság átfogalmazása

**Tétel:**
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists A \in \mathbb{R}, \text{ és } \epsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \epsilon = 0 \quad \text{úgy, hogy} \quad f(x) - f(a) = A(x-a) + \epsilon(x)(x-a)$$

**Bizonyítás:**

$$\Longrightarrow f \in D\{a\} \text{ esetén legyen } A := f'(a), \text{ és} \epsilon(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

Ezzel a választással egyrészt

$$A(x-a)+\epsilon(x)(x-a) = f'(a)(x-a)+\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\Big)(x-a) = f(x)-f(a),$$

másrészt a differenciálhatóság miatt

$$\lim_{x\to a} \epsilon(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = 0.$$

$\Longleftarrow$ Ha az $A$ szám és az $\epsilon$ függvény teljesítik az állítást feltételeit, akkor

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \epsilon(x), s \lim_{x-a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A = f'(a) \in \mathbb{R}$$

## 2. A szorzat függvény deriválása

**Tétel:**

$$f \in D\{a\} \Longrightarrow f \cdot g \in D\{a\}, \text{és} (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

**Bizonyítás:**

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\
&= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(x)}{x - a} \\
&= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_{f \cdot g} \setminus \{a\})
\end{aligned}$$

következés képen

$$\triangle_a f \cdot g(x) = g(x) \cdot \triangle_a f(x) \cdot + f(a) \cdot \triangle_a g(x) \quad (x \in \mathcal{D}_{f \cdot g} \setminus \{a\})$$

Mivel $g \in D\{a\}$ , ezét $g \in C\{a\}$ és így $\lim_a g = g(a)$
Ezek alapján:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_a \triangle_a (f \cdot g) = \lim_a (g \cdot \triangle_a f) + \lim_a (f(a) \cdot \triangle_a g) \\
&= g(a) \cdot f'(a) + f(a) \cdot g'(a)
\end{aligned}$$

# 3. A hányados függvény deriváltja

**Tétel:**

$$f \in D\{a\} \text{ és } g(a) \neq 0 \Longrightarrow \frac{f}{g} \in D\{a\}, \text{és} \Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

**Bizonyítás:**
kifejezzük a hányadosfüggvényt különbségi hányados függvényt a számláló és a nevező különbségi hányados függvényével

$$\begin{aligned}
\triangle_a\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) &= \frac{\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) - \Big(\frac{f}{g}\Big)(a)}{x-a} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(a) - f(a)g(x)}{x-a} \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)}\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a) - f(a)\cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\Big) \\
&= \frac{1}{g(a)g(x)}(g(a)\cdot \triangle_a f(x) - f(a)\cdot \triangle_a g(x))
\end{aligned}$$

Innen mindkét oldal $a$-beli határértékét véve kapjuk a bizonyítandó

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

összefüggést

# 4. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel

**Tétel:**
Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$
Ekkor:

$$f'(a) = 0$$

**Bizonyítás:**
Tegyük fel, hogy $f$-nek $a$-ban lokális maximuma van. Ekkor $\exists r > 0$, hogy

$$\forall x \in (a-r, a+r) \text{esetén} f(x) \leq f(a), \text{azaz} f(x) - f(a) \leq 0.$$

Tekintsük az $f$ függvény $a$-hoz tartozó különbségi hányados-függvényét

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\})$$

Ha $a < x < a + r$, akkor $x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0$ miatt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \leq 0$$

Ha viszont $a - r < x < a$ akkor $x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \leq 0$ miatt

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \longrightarrow \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) \geq 0$$

Mivel $f \in D\{a\}$ ezért

$$\underbrace{f'_-(a)}_{\geq 0} = \underbrace{f'_+(a)}_{\leq 0} = f'a = 0$$

A bizonyítás hasonló akkor is, ha $f$-nek $a$-ban lokális minimuma van.

## 5. A Rolle-féle középértéktétel

**Tétel:**
legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$ Tegyük fel hogy

1. $f \in C[a, b]$
2. $f \in D(a, b)$
3. $f(a) = f(b)$

Ekkor

$$\exists \varepsilon \in (a, b) \quad \text{hogy} \quad f'(\varepsilon) = 0$$

**Bizonyítás:**
$f \in C[a, b] \to$ (Weierstrass-tétel) $\exists \alpha, \beta \in [a, b]$ hogy

$$f(\alpha) = \min_{[a,b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a,b]} f =: M$$

1.eset: $m = M$ Ekkor $f$ állandó, így $\forall \varepsilon \in (a, b)$ esetén $f'(\varepsilon) = 0$
2.eset: $m \neq M$ Mivel $f(a) = f(b)$, ezért $\alpha$ és $\beta$ közül legalább az egyik (pl. $\alpha$) $(a, b)$-be esik
Ekkor $\varepsilon := \alpha \in \text{int}\mathcal{D}_f = (a, b)$, és $f$-nek $\varepsilon$-ban lokális minimuma van.
Mivel $f \in D\{\varepsilon\}$ ezért innen a szélsőértékékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételből következik, hogy $f'(\varepsilon) = 0$

# 6. A Lagrange-féle középértéktétel.

**Tétel:**
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Tegyük fel hogy

1. $f \in C[a, b]$
2. $f \in D(a, b)$

Ekkor:

$$\exists \varepsilon \in (a, b) \quad \text{hogy} \quad f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Bizonyítás:**
az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete

$$y = h_{a,b}(x) = f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

igazoljuk hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x \in [a, b])$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középérték feltételeit
Valóban, $f$ és $h_{a,b}$ mindketten folytonosak a $[a, b]$-n és deriválhatók $(a, b)$-n, ezért a különbségük, $F$ szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal
Továbbá:

$$F(a) = f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$F(b) = f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - (\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a)) = 0$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül a Rolle-tétel alapján tehát van olyan $\varepsilon \in (a, b)$ pont amelyre

$$F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - h'_{a,b}(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Következésképpen

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## 7. A Cauchy-féle középértéktétel.

**Tétel:**
Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Tegyük fel hogy

1. $f, g \in C[a, b]$
2. $f, g \in D(a, b)$
3. $g'(x) \neq 0 (x \in (a, b))$

Ekkor:

$$\exists \varepsilon \in (a, b), \quad \text{hogy} \quad \frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

**Bizonyítás:**
A 3. feltételből a Rolle-tétel alapján következik, hogy $g(a) \neq g(b)$ vagyis az állítás jobb oldalának a nevezője nem 0
Valóban $g(a) = g(b)$-ből az következne, hogy $g$ deriváltja nulla az $(a, b)$ intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.
Legyen

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \quad (x \in [a, b])$$

Az $F$ függvény kielégíti a Rolle-tétel félteleit: folytonos $[a, b]$-n Deriválható $(a, b)$-n és $F(a) = F(b) = 0$
Következésképpen létezik olyan $\varepsilon \in (a, b)$ amelyre $F'(\varepsilon) = 0$ azaz

$$0 = F'(\varepsilon) = f'(\varepsilon) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\varepsilon)$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\varepsilon) \neq 0$ ezért átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

# 8. Nyílt intervallumon értelmezett deriválható függvények esetében a monotonitás és a derivált kapcsolata

**Tétel:**
Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum. Tegyük fel hogy $f : I \to \mathbb{R},\ f \in D(I)$
Ekkor:

$$f \nearrow \iff f' \geq 0.$$

**Bizonyítás:**
$\Longrightarrow$ Legyen $x \in I$ Ekkor tetszőleges

1.

$$y \in I\ , y > x \quad \text{esetén} \quad f(y) \geq f(x), \quad \text{tehát} \quad \triangle_x f(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

2.

$$y \in I\ , y > x \quad \text{esetén} \quad f(y) \leq f(x), \quad \text{tehát} \quad \triangle_x f(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$$

következésképpen

$$\triangle_x f(y) \geq 0 \quad (y \in I) \Longrightarrow f'(x) = \lim_{y \to x} \triangle_x f(y) \geq 0$$

$\Longleftarrow$ Indirekt tegyük fel, hogy $f'$ nem monoton növekedő Ekkor $\exists x, y \in, x < y$ amelyre $f(y) < f(x)$ A Lagrange-féle középérték-tétel feltételei teljesülnek az $[x, y] \subset I$ intervallumon.
Következésképen $\exists \varepsilon \in (x, y)$, hogy

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0 \text{Ellentmondás!}$$

# 9. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel

**Tétel:**
Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és a $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.
Tegyük fel hogy $\exists \delta > 0$, amelyre $f \in D((a-\delta, a+\delta))$ és $f'$ előjelet vált $a$-ban
Ekkor $f$-nek szigorú lokális szélsőértéke van az $a$-ban
$(+,-)$ jelváltás esetén maximum és$(-,+)$ jelváltás esetén minimum

**Bizonyítás**:
Elég a $(+,-)$ jelváltás esetén bizonyítani. feltételből következik, hogy $\exists \epsilon > 0$, hogy

$$f'(x) > 0 (a-\epsilon, a) \text{ és } f \in C\{a\} \text{ és igy } f_{\big|(a-\epsilon,a)\uparrow}$$
$$f'(x) < 0 (a, a+\epsilon), \text{ és } f \in C\{a\} \text{ és igy } f_{\big|(a,a+\epsilon)\downarrow}$$

Következésképpen $f(a) > f(x)\ \forall x \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \setminus \{a\}$

## 10. A konvexitás jellemzése a deriváltfüggvénnyel.

**Tétel**

Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és $f \in D(I)$.

Ekkor

$$f \text{ konvex az } I \text{ intervallumon} \iff f' \nearrow \text{ az } I\text{-n}.$$

Megjegyzés: szigorúan konvex esetben $f' \nearrow$ helyett $f' \uparrow$ áll. Konkáv esetben értelemszerűen $f' \searrow$ és szigorúan konkáv esetben pedig $f' \downarrow$.

**Bizonyítás**

$\Longrightarrow$ Legyen $u, v \in I$, $u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges.

Tegyük fel, hogy $f$ konvex az $I$-n. Ekkor

$$f(x) \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u)$$

és

$$f(x) \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - v) + f(v) .$$

Egyszerű átrendezésekkel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \le \frac{f(x) - f(v)}{x - v} .$$

Vegyük itt az $x \to u$, illetve az $x \to v$ határátmenetet:

$$f'(u) \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \le f'(v) .$$

$f'$ tehát monoton növekedő az $I$-n.

**Bizonyítás (folyt.)**

$\Longleftarrow$ Tegyük fel, hogy $f'$ monoton növekedő az $I$-n.

Legyen $u, v \in I$, $u < v$ tetszőleges és $x \in (u, v)$ is tetszőleges.

Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel szerint $\exists\, \xi_1 \in (u, x)$ és $\exists\, \xi_2 \in (x, v)$, amelyre

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} \quad \text{és} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(v) - f(x)}{v - x}$$

Mivel $f' \nearrow$ az $I$-n, ezért $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, vagyis

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} \le \frac{f(v) - f(x)}{v - x} .$$

Ezt átrendezve azt kapjuk, hogy

$$f(x) \le \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) .$$

Ez azt jelenti, hogy az $f$ függvény konvex az $I$-n. $\square$

# 11. A véges pontbeli $\frac{0}{0}$ határérték esetre vonatkozo L'Hospital-szabály

**Tétel: L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.**

*Legyen* $-\infty \le a < b < +\infty$ *és* $f, g \in D(a,b)$. *T.f.h.*

(a) $\exists \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$,

(b) $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$,

(c) $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Ekkor*

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \textit{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$



**Bizonyítás.** $\boxed{\text{1. eset: } a > -\infty \text{ (véges).}}$

Legyen $A := \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$, azaz

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0 : \forall\, y \in (a, a+\delta) \subset (a,b) : \dfrac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A)$.

Azt kell igazolni, hogy

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0 : \forall\, x \in (a, a+\delta) \subset (a,b) : \dfrac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A)$.

Értelmezzük $f$-et és $g$-t az $a$ pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \quad \text{és} \quad g(a) := 0.$$

Ekkor a $\lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy $f, g \in C[a, a+\delta)$.



Legyen most $x \in (a, a+\delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az $f$ és a $g$ függvényre az $[a,x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists\, \xi_x \in (a,x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g}$ határérték létezik, és $\lim\limits_{a+0} \dfrac{f}{g} = A$.

# 12. A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal

**Tétel (Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.)**

Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}(K(a))$.

Ekkor $\forall x \in K(a)$ ponthoz $\exists$ olyan $a$ és $x$ közé eső $\xi$ szám, hogy

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Bizonyítás**

Tegyük fel, hogy $a < x$ (az $x < a$ eset hasonlóan kezelhető).

Tudjuk, hogy $f^{(k)}(a) = \left(T_{a,n}f\right)^{(k)}(a)$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Következésképpen az $F := f - T_{a,n}f$ függvényre teljesül, hogy $F^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Legyen $G(t) = (t-a)^{n+1}$ $(t \in \mathbb{R})$. Erre a függvényre is igaz, hogy $G^{(k)}(a) = 0$ $(k = 0, \ldots, n)$.

Könnyű ellenőrizni, hogy az $F$, $G$ függvényekre alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel:

$$\exists\, a < \xi_1 < x, \quad \text{amelyre} \quad \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

(A második tagban $F(a) = G(a) = 0$.)

**Bizonyítás (folytatás)**

Megismételhetjük az előző gondolatmenetet az $F'$, $G'$ függvényekre:

$$\exists\, a < \xi_2 < \xi_1, \quad \text{amelyre} \quad \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

$F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a)$ $(k = 0, \ldots, n)$ miatt ezt tovább folytathatjuk. Azt kapjuk, hogy $\exists\, a < \xi_{n+1} < \xi_n$, amelyre

$$\frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

(Az utolsó előtti tagban $F^{(n)}(a) = G^{(n)}(a) = 0$.)

Mivel $T_{a,n}f$ legfeljebb $n$-edfokú polinom, ezért $\left(T_{a,n}f\right)^{(n+1)} \equiv 0$, így $F^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = \left(f(x) - T_{a,n}f(x)\right)^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = f^{(n+1)}(\xi_{n+1})$.

Másrészt $G(t) = (t-a)^{n+1}$, ezért $G^{(n+1)} \equiv (n+1)!$.

Következésképpen

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad \square$$