

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 1. ФИПИ

Задание 1. Найдите значение выражения при данном условии:

- | | |
|--|--|
| 1) $31a - 4b + 55$, если $\frac{a-4b+7}{4a-b+7} = 8$; | 5) $28a - 7b + 40$, если $\frac{2a-5b+7}{5a-2b+7} = 6$; |
| 2) $19a - 7b + 12$, если $\frac{5a-8b+2}{8a-5b+2} = 3$; | 6) $39a - 15b + 25$, если $\frac{3a-6b+4}{6a-3b+4} = 7$; |
| 3) $41a - 11b + 15$, если $\frac{4a-9b+3}{9a-4b+3} = 5$; | 7) $11a - 7b + 21$, если $\frac{4a-5b+6}{5a-4b+6} = 3$; |
| 4) $25a - 5b + 22$, если $\frac{3a-7b+6}{7a-3b+6} = 4$; | 8) $61a - 11b + 50$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5} = 9$. |

Задание 2. Решите уравнение:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| 1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; | 9) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$; |
| 2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$; | 10) $x^3 + 2x^2 = 9x + 18$; |
| 3) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$; | 11) $x^3 + 7x^2 = 4x + 28$; |
| 4) $x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$; | 12) $x^3 + 6x^2 = 9x + 54$; |
| 5) $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$; | 13) $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$; |
| 6) $x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = 0$; | 14) $x^3 + 4x^2 = 9x + 36$; |
| 7) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$; | 15) $x^3 + 6x^2 = 4x + 24$; |
| 8) $x^3 + 4x^2 - 4x - 16 = 0$; | 16) $x^3 + x^2 = 16x + 16$. |

Задание 3. Решите уравнение:

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1) $x^2 - 2x + \sqrt{4-x} = \sqrt{4-x} + 15$; | 9) $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)$; |
| 2) $x^2 - 3x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 10$; | 10) $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x+2)$; |
| 3) $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$; | 11) $x(x^2 + 2x + 1) = 6(x+1)$; |
| 4) $x^2 - 3x + \sqrt{5-x} = \sqrt{5-x} + 18$; | 12) $x(x^2 + 6x + 9) = 4(x+3)$; |
| 5) $x^2 - 2x + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + 3$; | 13) $x(x^2 + 4x + 4) = 8(x+2)$; |
| 6) $x^2 - 6x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 7$; | 14) $x(x^2 + 6x + 9) = 10(x+3)$; |
| 7) $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$; | 15) $x(x^2 + 8x + 16) = 12(x+4)$; |
| 8) $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$; | 16) $x(x^2 + 10x + 25) = 6(x+5)$. |

Задание 4. Решите уравнение:

1) $(x-1)(x^2+8x+16)=6(x+4);$

2) $(x-1)(x^2+4x+4)=4(x+2);$

3) $(x-2)(x^2+6x+9)=6(x+3);$

4) $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1);$

5) $(x-1)(x^2+6x+9)=5(x+3);$

6) $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4);$

7) $(x-3)(x^2+10x+25)=9(x+5);$

8) $(x-4)(x^2+2x+1)=6(x+1);$

9) $(x^2-4)^2+(x^2-3x-10)^2=0;$

10) $(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0;$

11) $(x^2-1)^2+(x^2-6x-7)^2=0;$

12) $(x^2-4)^2+(x^2-6x-16)^2=0;$

13) $(x^2-25)^2+(x^2+2x-15)^2=0;$

14) $(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0;$

15) $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0;$

16) $(x^2-16)^2+(x^2+x-12)^2=0.$

Задание 5. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0;$

2) $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0;$

3) $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0;$

4) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0;$

5) $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0;$

6) $\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}-14=0;$

7) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-12=0;$

8) $\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}-7=0;$

9) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2}-6=0;$

10) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0;$

11) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{3}{x-3}-4=0;$

12) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0;$

13) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{5}{x-2}-14=0;$

14) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-3=0;$

15) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{6}{x-3}-16=0;$

16) $\frac{1}{(x-4)^2}+\frac{1}{x-4}-20=0.$

Задание 6. Решите уравнение:

1) $(x+4)^4-6(x+4)^2-7=0;$

2) $(x-2)^4-(x-2)^2-6=0;$

3) $(x+3)^4-2(x+3)^2-15=0;$

4) $(x-4)^4-4(x-4)^2-21=0;$

5) $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0;$

6) $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0;$

7) $(x+1)^4+(x+1)^2-6=0;$

8) $(x-2)^4+(x-2)^2-12=0.$

Задание 7. Решите уравнение:

- 1) $x^4 = (x-20)^2$; 3) $x^4 = (4x-5)^2$; 5) $x^4 = (x-6)^2$; 7) $x^4 = (2x-8)^2$;
 2) $x^4 = (3x-10)^2$; 4) $x^4 = (2x-15)^2$; 6) $x^4 = (3x-4)^2$; 8) $x^4 = (5x-14)^2$.

Задание 8. Решите систему уравнений:

- | | | | |
|--|---|---|--|
| 1) $\begin{cases} 3x^2 - 4x = y, \\ 3x - 4 = y; \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y; \end{cases}$ | 9) $\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3; \end{cases}$ | 13) $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 5; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} 9x^2 - 14x = y, \\ 9x - 14 = y; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y; \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1; \end{cases}$ | 14) $\begin{cases} 3x^2 + y = 9, \\ 7x^2 - y = 1; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y; \end{cases}$ | 7) $\begin{cases} 4x^2 - 3x = y, \\ 8x - 6 = y; \end{cases}$ | 11) $\begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ 4x^2 - y = 2; \end{cases}$ | 15) $\begin{cases} 6x^2 + y = 14, \\ 12x^2 - y = 4; \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} 5x^2 - 11x = y, \\ 5x - 11 = y; \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} 4x^2 - 5x = y, \\ 8x - 10 = y; \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} 5x^2 + y = 12, \\ 9x^2 - y = 2; \end{cases}$ | 16) $\begin{cases} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1. \end{cases}$ |

Задание 9. Решите систему уравнений:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31, \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x; \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36, \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x; \end{cases}$ | 9) $\begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 50, \\ 12x^2 + 8y^2 = 50x; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 21, \\ 6x^2 + 9y^2 = 21x; \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} (x-8)(y-9) = 0, \\ \frac{y-5}{x+y-13} = 4; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25, \\ 3x^2 + 12y^2 = 25x; \end{cases}$ | 7) $\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 24, \\ 4x^2 + 8y^2 = 24x; \end{cases}$ | 11) $\begin{cases} (x-6)(y-7) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-10} = 3; \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 61, \\ 15x^2 + 3y^2 = 61x; \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 9x^2 + 6y^2 = 45x; \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} (x-4)(y-7) = 0, \\ \frac{y-5}{x+y-9} = 2. \end{cases}$ |

Задание 10. Решите неравенство:

- 1) $(x-1)^2 < \sqrt{2}(x-1)$; 3) $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$; 5) $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$;
 2) $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$; 4) $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$; 6) $(x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4)$.

Задание 11. Решите неравенство:

1) $-\frac{12}{x^2 - 7x - 8} \leq 0;$

5) $-\frac{18}{x^2 - 2x - 15} \leq 0;$

9) $\frac{-13}{(x-4)^2 - 6} \geq 0;$

2) $-\frac{19}{x^2 + x - 12} \leq 0;$

6) $-\frac{10}{x^2 + 5x - 14} \leq 0;$

10) $\frac{-15}{(x+1)^2 - 3} \geq 0;$

3) $-\frac{25}{x^2 - 9x - 10} \leq 0;$

7) $\frac{-14}{(x-5)^2 - 2} \geq 0;$

11) $\frac{-11}{(x-2)^2 - 3} \geq 0;$

4) $-\frac{23}{x^2 + 6x - 16} \leq 0;$

8) $\frac{-16}{(x+2)^2 - 5} \geq 0;$

12) $\frac{-17}{(x+3)^2 - 7} \geq 0.$

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

Задание 1. Сократите дробь:

1) $\frac{100^n}{5^{2n-1} \cdot 4^{n-2}};$	3) $\frac{18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n-2}};$	5) $\frac{20^n}{2^{2n-2} \cdot 5^{n-2}};$	7) $\frac{75^n}{5^{2n-1} \cdot 3^{n-2}};$
2) $\frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-3}};$	4) $\frac{48^n}{4^{2n-1} \cdot 3^{n-3}};$	6) $\frac{12^n}{2^{2n-3} \cdot 3^{n-1}};$	8) $\frac{36^n}{3^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}.$

Задание 2. Решите уравнение:

1) $(2x-2)^2(x-2) = (2x-2)(x-2)^2;$

9) $(x+5)^3 = 25(x+5);$

2) $(x-8)(4x-8)^2 = (x-8)^2(4x-8);$

10) $(x+2)^3 = 4(x+2);$

3) $(2x-5)^2(x-5) = (2x-5)(x-5)^2;$

11) $(x+4)^3 = 16(x+4);$

4) $(x+3)(4x+2)^2 = (4x+2)(x+3)^2;$

12) $(x+9)^3 = 81(x+9);$

5) $(x-2)(x-3)(x-5) = (x-2)(x-4)(x-5);$

13) $3x^2 - 7x + 29 = (x+4)^2;$

6) $(x-7)(x-4)(x-6) = (x-7)(x-3)(x-6);$

14) $4x^2 - 9x + 12 = (x+6)^2;$

7) $(x+2)(x-13)(x-4) = (x+2)(x-5)(x-13);$

15) $-3x^2 - 14x - 7 = (x-1)^2;$

8) $(x-4)(x+5)(x+7) = (x+5)(x+7)(x-2);$

16) $-4x^2 - 7x + 12 = (x-2)^2.$

Задание 3. Решите уравнение:

1) $x^6 = (6x-5)^3;$

4) $x^3 = 3x^2 + 4x;$

7) $(x-2)^2(x-3) = 20(x-2);$

2) $x^6 = (7x-12)^3;$

5) $x^3 = 2x^2 + 8x;$

8) $(x-2)^2(x-3) = 12(x-2).$

3) $x^6 = (6x-8)^3;$

6) $x^3 = 4x^2 + 5x;$

Задание 4. Сократите дробь:

1) $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b)=\left(b+\frac{3}{b}\right)\left(3b+\frac{1}{b}\right)$;

4) $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(c)=\frac{c(6-c)}{c-3}$;

2) $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b)=\left(b+\frac{5}{b}\right)\left(5b+\frac{1}{b}\right)$;

5) $\frac{p(a)}{p(8-a)}$, если $p(c)=\frac{c(8-c)}{c-4}$;

3) $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b)=\left(b+\frac{10}{b}\right)\left(10b+\frac{1}{b}\right)$;

6) $\frac{p(a)}{p(20-a)}$, если $p(c)=\frac{c(20-c)}{c-10}$.

Задание 5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (x+6y)^2 = 7y, \\ (x+6y)^2 = 7x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (2x+6y)^2 = 8y, \\ (2x+6y)^2 = 8x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (2x+y)^2 = 3y, \\ (2x+y)^2 = 3x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-2x=6, \\ x^2-xy+y^2=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-y=10, \\ x^2+xy-y^2=20; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y-x=-5, \\ x^2-2xy-y^2=17. \end{cases}$

Задание 6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y=5, \\ 6x^2-y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2+y=4, \\ 4x^2-y=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-y=-8, \\ \frac{x-1}{3}+\frac{y}{2}=-1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x-y=15, \\ \frac{x+6}{2}-\frac{y}{3}=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2+y=4, \\ 2x^2-y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2+y=6, \\ 4x^2-y=1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ \frac{x+1}{3}-\frac{y}{5}=2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x-2y=-8, \\ \frac{x+y-2}{4}=-1. \end{cases}$

Задание 7. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2=2y+3, \\ x^2+6=2y+y^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2=10y+6, \\ x^2+3=10y+y^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2=11y+3, \\ x^2+1=11y+y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2=17y+2, \\ x^2+2=17y+y^2. \end{cases}$

Задание 8. Решите неравенство:

1) $(x-3)(2x+3) < -7;$

3) $(2x+1)(x-1) > 9;$

2) $(x-1)(3x-5) < 1;$

4) $(3x-2)(x+4) > -11.$

Задание 9. Решите неравенство:

- 1) $(4x-6)^2 \geq (6x-4)^2$;
- 2) $(5x-8)^2 \geq (8x-5)^2$;
- 3) $(3x-5)^2 \geq (5x-3)^2$;
- 4) $(2x-7)^2 \geq (7x-2)^2$;
- 5) $x^2(-x^2-64) \leq 64(-x^2-64)$;
- 6) $x^2(-x^2-49) \leq 49(-x^2-49)$;
- 7) $x^2(-x^2-25) \leq 25(-x^2-25)$;
- 8) $x^2(-x^2-9) \leq 9(-x^2-9)$.

Задание 10. Решите неравенство:

$$1) \frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4} \quad 2) \frac{x^2}{2} < \frac{2x+2}{3} \quad 3) \frac{x^2}{3} \geq \frac{8x-9}{5} \quad 4) \frac{x^2}{2} < \frac{11x-4}{5}$$

Задание 11. Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 7(3x+2)-3(7x+2) > 2x, \\ (x-5)(x+8) < 0; \end{cases} & 3) \begin{cases} (6x+2)-6(x+2) > 2x, \\ (x-7)(x+6) < 0; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 4(9x+3)-9(4x+3) > 3x, \\ (x-2)(x+9) < 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} (5x+4)-5(x+4) > 2x, \\ (x-3)(x+10) < 0. \end{cases} \end{array}$$

Задание 12. Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x; \end{cases} & 3) \begin{cases} \frac{3-x}{1+(5-x)^2} \geq 0, \\ 8-7x \leq 12-3x; \end{cases} \\ 2) \begin{cases} \frac{7-7x}{2+(3-x)^2} \geq 0, \\ 6-9x \leq 31-4x; \end{cases} & 4) \begin{cases} \frac{2-2x}{8+(2-6x)^2} \geq 0, \\ 5-9x \leq 37-5x. \end{cases} \end{array}$$

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 3. Типовые экзаменационные варианты

Задание 1. Решите уравнение:

- 1) $x^6 = -(4-5x)^3$;
- 2) $x^6 = -(10-7x)^3$;
- 3) $x^6 = -(5x+6)^3$;
- 4) $x^6 = -(7x+6)^3$.

Задание 2. Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=10; \end{cases} & 2) \begin{cases} x^2+y^2=45, \\ xy=18; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=-6; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2+y^2=26, \\ xy=-5. \end{cases} \end{array}$$