

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 1. ФИПИ

Задание 1. Найдите значение выражения при данном условии:

- | | |
|--|--|
| 1) $31a-4b+55$, если $\frac{a-4b+7}{4a-b+7}=8$; | 5) $28a-7b+40$, если $\frac{2a-5b+7}{5a-2b+7}=6$; |
| 2) $19a-7b+12$, если $\frac{5a-8b+2}{8a-5b+2}=3$; | 6) $39a-15b+25$, если $\frac{3a-6b+4}{6a-3b+4}=7$; |
| 3) $41a-11b+15$, если $\frac{4a-9b+3}{9a-4b+3}=5$; | 7) $11a-7b+21$, если $\frac{4a-5b+6}{5a-4b+6}=3$; |
| 4) $25a-5b+22$, если $\frac{3a-7b+6}{7a-3b+6}=4$; | 8) $61a-11b+50$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9$. |

Задание 2. Решите уравнение:

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| 1) $x^3+2x^2-x-2=0$; | 9) $x^3+5x^2=4x+20$; |
| 2) $x^3+3x^2-4x-12=0$; | 10) $x^3+2x^2=9x+18$; |
| 3) $x^3+2x^2-9x-18=0$; | 11) $x^3+7x^2=4x+28$; |
| 4) $x^3+5x^2-x-5=0$; | 12) $x^3+6x^2=9x+54$; |
| 5) $x^3+4x^2-x-4=0$; | 13) $x^3+3x^2=16x+48$; |
| 6) $x^3+5x^2-9x-45=0$; | 14) $x^3+4x^2=9x+36$; |
| 7) $x^3+3x^2-x-3=0$; | 15) $x^3+6x^2=4x+24$; |
| 8) $x^3+4x^2-4x-16=0$; | 16) $x^3+x^2=16x+16$. |

Задание 3. Решите уравнение:

- | | |
|--|------------------------------|
| 1) $x^2-2x+\sqrt{4-x}=\sqrt{4-x}+15$; | 9) $x(x^2+2x+1)=2(x+1)$; |
| 2) $x^2-3x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+10$; | 10) $x(x^2+4x+4)=3(x+2)$; |
| 3) $x^2-3x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+40$; | 11) $x(x^2+2x+1)=6(x+1)$; |
| 4) $x^2-3x+\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}+18$; | 12) $x(x^2+6x+9)=4(x+3)$; |
| 5) $x^2-2x+\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}+3$; | 13) $x(x^2+4x+4)=8(x+2)$; |
| 6) $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$; | 14) $x(x^2+6x+9)=10(x+3)$; |
| 7) $x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8$; | 15) $x(x^2+8x+16)=12(x+4)$; |
| 8) $x^2-3x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+40$; | 16) $x(x^2+10x+25)=6(x+5)$. |

Задание 4. Решите уравнение:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $(x-1)(x^2+8x+16)=6(x+4);$ | 9) $(x^2-4)^2+(x^2-3x-10)^2=0;$ |
| 2) $(x-1)(x^2+4x+4)=4(x+2);$ | 10) $(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0;$ |
| 3) $(x-2)(x^2+6x+9)=6(x+3);$ | 11) $(x^2-1)^2+(x^2-6x-7)^2=0;$ |
| 4) $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1);$ | 12) $(x^2-4)^2+(x^2-6x-16)^2=0;$ |
| 5) $(x-1)(x^2+6x+9)=5(x+3);$ | 13) $(x^2-25)^2+(x^2+2x-15)^2=0;$ |
| 6) $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4);$ | 14) $(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0;$ |
| 7) $(x-3)(x^2+10x+25)=9(x+5);$ | 15) $(x^2-36)^2+(x^2+4x-12)^2=0;$ |
| 8) $(x-4)(x^2+2x+1)=6(x+1);$ | 16) $(x^2-16)^2+(x^2+x-12)^2=0.$ |

Задание 5. Решите уравнение:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| 1) $\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-12=0;$ | 9) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x-2}-6=0;$ |
| 2) $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0;$ | 10) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{4}{x-1}-12=0;$ |
| 3) $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0;$ | 11) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{3}{x-3}-4=0;$ |
| 4) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0;$ | 12) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0;$ |
| 5) $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0;$ | 13) $\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{5}{x-2}-14=0;$ |
| 6) $\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}-14=0;$ | 14) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{x-1}-3=0;$ |
| 7) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-12=0;$ | 15) $\frac{1}{(x-3)^2}-\frac{6}{x-3}-16=0;$ |
| 8) $\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}-7=0;$ | 16) $\frac{1}{(x-4)^2}+\frac{1}{x-4}-20=0.$ |

Задание 6. Решите уравнение:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $(x+4)^4-6(x+4)^2-7=0;$ | 5) $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0;$ |
| 2) $(x-2)^4-(x-2)^2-6=0;$ | 6) $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0;$ |
| 3) $(x+3)^4-2(x+3)^2-15=0;$ | 7) $(x+1)^4+(x+1)^2-6=0;$ |
| 4) $(x-4)^4-4(x-4)^2-21=0;$ | 8) $(x-2)^4+(x-2)^2-12=0.$ |

Задание 7. Решите уравнение:

- 1) $x^4 = (x-20)^2$; 3) $x^4 = (4x-5)^2$; 5) $x^4 = (x-6)^2$; 7) $x^4 = (2x-8)^2$;
2) $x^4 = (3x-10)^2$; 4) $x^4 = (2x-15)^2$; 6) $x^4 = (3x-4)^2$; 8) $x^4 = (5x-14)^2$.

Задание 8. Решите систему уравнений:

- 1) $\begin{cases} 3x^2 - 4x = y, \\ 3x - 4 = y; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x^2 - 5x = y, \\ 2x - 5 = y; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 4x^2 + y = 9, \\ 8x^2 - y = 3; \end{cases}$ 13) $\begin{cases} x^2 + y = 7, \\ 2x^2 - y = 5; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 9x^2 - 14x = y, \\ 9x - 14 = y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 3x^2 + y = 4, \\ 2x^2 - y = 1; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} 3x^2 + y = 9, \\ 7x^2 - y = 1; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 7x^2 - 5x = y, \\ 7x - 5 = y; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 4x^2 - 3x = y, \\ 8x - 6 = y; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x^2 + y = 4, \\ 4x^2 - y = 2; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 6x^2 + y = 14, \\ 12x^2 - y = 4; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 5x^2 - 11x = y, \\ 5x - 11 = y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x^2 - 5x = y, \\ 8x - 10 = y; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} 5x^2 + y = 12, \\ 9x^2 - y = 2; \end{cases}$ 16) $\begin{cases} 3x^2 + y = 6, \\ 4x^2 - y = 1. \end{cases}$

Задание 9. Решите систему уравнений:

- 1) $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 31, \\ 2x^2 + 6y^2 = 31x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36, \\ 8x^2 + 4y^2 = 36x; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} (x-4)(y-6) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-8} = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 50, \\ 12x^2 + 8y^2 = 50x; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 21, \\ 6x^2 + 9y^2 = 21x; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} (x-8)(y-9) = 0, \\ \frac{y-5}{x+y-13} = 4; \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25, \\ 3x^2 + 12y^2 = 25x; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 24, \\ 4x^2 + 8y^2 = 24x; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} (x-6)(y-7) = 0, \\ \frac{y-4}{x+y-10} = 3; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 61, \\ 15x^2 + 3y^2 = 61x; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 9x^2 + 6y^2 = 45x; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} (x-4)(y-7) = 0, \\ \frac{y-5}{x+y-9} = 2. \end{cases}$

Задание 10. Решите неравенство:

- 1) $(x-1)^2 < \sqrt{2}(x-1)$; 3) $(x-5)^2 < \sqrt{7}(x-5)$; 5) $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$;
2) $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$; 4) $(x-6)^2 < \sqrt{10}(x-6)$; 6) $(x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4)$.

Задание 11. Решите неравенство:

- | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $-\frac{12}{x^2-7x-8} \leq 0;$ | 5) $-\frac{18}{x^2-2x-15} \leq 0;$ | 9) $\frac{-13}{(x-4)^2-6} \geq 0;$ |
| 2) $-\frac{19}{x^2+x-12} \leq 0;$ | 6) $-\frac{10}{x^2+5x-14} \leq 0;$ | 10) $\frac{-15}{(x+1)^2-3} \geq 0;$ |
| 3) $-\frac{25}{x^2-9x-10} \leq 0;$ | 7) $\frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0;$ | 11) $\frac{-11}{(x-2)^2-3} \geq 0;$ |
| 4) $-\frac{23}{x^2+6x-16} \leq 0;$ | 8) $\frac{-16}{(x+2)^2-5} \geq 0;$ | 12) $\frac{-17}{(x+3)^2-7} \geq 0.$ |

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства
Блок 2. ФИПИ. Расширенная версия

Задание 1. Сократите дробь:

- | | | | |
|--|---|---|---|
| 1) $\frac{100^n}{5^{2n-1} \cdot 4^{n-2}};$ | 3) $\frac{18^n}{3^{2n-1} \cdot 2^{n-2}};$ | 5) $\frac{20^n}{2^{2n-2} \cdot 5^{n-2}};$ | 7) $\frac{75^n}{5^{2n-1} \cdot 3^{n-2}};$ |
| 2) $\frac{50^n}{5^{2n-1} \cdot 2^{n-3}};$ | 4) $\frac{48^n}{4^{2n-1} \cdot 3^{n-3}};$ | 6) $\frac{12^n}{2^{2n-3} \cdot 3^{n-1}};$ | 8) $\frac{36^n}{3^{2n-1} \cdot 4^{n-2}}.$ |

Задание 2. Решите уравнение:

- | | |
|---|----------------------------|
| 1) $(2x-2)^2(x-2)=(2x-2)(x-2)^2;$ | 9) $(x+5)^3=25(x+5);$ |
| 2) $(x-8)(4x-8)^2=(x-8)^2(4x-8);$ | 10) $(x+2)^3=4(x+2);$ |
| 3) $(2x-5)^2(x-5)=(2x-5)(x-5)^2;$ | 11) $(x+4)^3=16(x+4);$ |
| 4) $(x+3)(4x+2)^2=(4x+2)(x+3)^2;$ | 12) $(x+9)^3=81(x+9);$ |
| 5) $(x-2)(x-3)(x-5)=(x-2)(x-4)(x-5);$ | 13) $3x^2-7x+29=(x+4)^2;$ |
| 6) $(x-7)(x-4)(x-6)=(x-7)(x-3)(x-6);$ | 14) $4x^2-9x+12=(x+6)^2;$ |
| 7) $(x+2)(x-13)(x-4)=(x+2)(x-5)(x-13);$ | 15) $-3x^2-14x-7=(x-1)^2;$ |
| 8) $(x-4)(x+5)(x+7)=(x+5)(x+7)(x-2);$ | 16) $-4x^2-7x+12=(x-2)^2.$ |

Задание 3. Решите уравнение:

- | | | |
|---------------------|-------------------|----------------------------|
| 1) $x^6=(6x-5)^3;$ | 4) $x^3=3x^2+4x;$ | 7) $(x-2)^2(x-3)=20(x-2);$ |
| 2) $x^6=(7x-12)^3;$ | 5) $x^3=2x^2+8x;$ | 8) $(x-2)^2(x-3)=12(x-2).$ |
| 3) $x^6=(6x-8)^3;$ | 6) $x^3=4x^2+5x;$ | |

Задание 4. Сократите дробь:

1) $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b) = \left(b + \frac{3}{b}\right)\left(3b + \frac{1}{b}\right)$;

4) $\frac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(c) = \frac{c(6-c)}{c-3}$;

2) $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b) = \left(b + \frac{5}{b}\right)\left(5b + \frac{1}{b}\right)$;

5) $\frac{p(a)}{p(8-a)}$, если $p(c) = \frac{c(8-c)}{c-4}$;

3) $\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}$, если $p(b) = \left(b + \frac{10}{b}\right)\left(10b + \frac{1}{b}\right)$;

6) $\frac{p(a)}{p(20-a)}$, если $p(c) = \frac{c(20-c)}{c-10}$.

Задание 5. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} (x+6y)^2 = 7y, \\ (x+6y)^2 = 7x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (2x+6y)^2 = 8y, \\ (2x+6y)^2 = 8x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (2x+y)^2 = 3y, \\ (2x+y)^2 = 3x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-2x=6, \\ x^2-xy+y^2=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-y=10, \\ x^2+xy-y^2=20; \end{cases}$

6) $\begin{cases} y-x=-5, \\ x^2-2xy-y^2=17. \end{cases}$

Задание 6. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+y=5, \\ 6x^2-y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2+y=4, \\ 4x^2-y=2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-y=-8, \\ \frac{x-1}{3} + \frac{y}{2} = -1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x-y=15, \\ \frac{x+6}{2} - \frac{y}{3} = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x^2+y=4, \\ 2x^2-y=1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2+y=6, \\ 4x^2-y=1. \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x+y=1, \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y}{5} = 2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x-2y=-8, \\ \frac{x}{4} + \frac{y-2}{3} = -1. \end{cases}$

Задание 7. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 = 2y+3, \\ x^2+6 = 2y+y^2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 = 10y+6, \\ x^2+3 = 10y+y^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 = 11y+3, \\ x^2+1 = 11y+y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 = 17y+2, \\ x^2+2 = 17y+y^2. \end{cases}$

Задание 8. Решите неравенство:

1) $(x-3)(2x+3) < -7$;

3) $(2x+1)(x-1) > 9$;

2) $(x-1)(3x-5) < 1$;

4) $(3x-2)(x+4) > -11$.

Задание 9. Решите неравенство:

1) $(4x-6)^2 \geq (6x-4)^2;$

5) $x^2(-x^2-64) \leq 64(-x^2-64);$

2) $(5x-8)^2 \geq (8x-5)^2;$

6) $x^2(-x^2-49) \leq 49(-x^2-49);$

3) $(3x-5)^2 \geq (5x-3)^2;$

7) $x^2(-x^2-25) \leq 25(-x^2-25);$

4) $(2x-7)^2 \geq (7x-2)^2;$

8) $x^2(-x^2-9) \leq 9(-x^2-9).$

Задание 10. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2}{3} \geq \frac{3x+3}{4}$

2) $\frac{x^2}{2} < \frac{2x+2}{3}$

3) $\frac{x^2}{3} \geq \frac{8x-9}{5}$

4) $\frac{x^2}{2} < \frac{11x-4}{5}$

Задание 11. Решите систему неравенств:

1)
$$\begin{cases} 7(3x+2)-3(7x+2) > 2x, \\ (x-5)(x+8) < 0; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} (6x+2)-6(x+2) > 2x, \\ (x-7)(x+6) < 0; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 4(9x+3)-9(4x+3) > 3x, \\ (x-2)(x+9) < 0; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} (5x+4)-5(x+4) > 2x, \\ (x-3)(x+10) < 0. \end{cases}$$

Задание 12. Решите систему неравенств:

1)
$$\begin{cases} \frac{10-2x}{3+(5-2x)^2} \geq 0, \\ 2-7x \leq 14-3x; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} \frac{3-x}{1+(5-x)^2} \geq 0, \\ 8-7x \leq 12-3x; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \frac{7-7x}{2+(3-x)^2} \geq 0, \\ 6-9x \leq 31-4x; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} \frac{2-2x}{8+(2-6x)^2} \geq 0, \\ 5-9x \leq 37-5x. \end{cases}$$

20. Алгебраические выражения, уравнения и неравенства

Блок 3. Типовые экзаменационные варианты

Задание 1. Решите уравнение:

1) $x^6 = -(4-5x)^3;$

3) $x^6 = -(5x+6)^3;$

2) $x^6 = -(10-7x)^3;$

4) $x^6 = -(7x+6)^3.$

Задание 2. Решите систему уравнений:

1)
$$\begin{cases} x^2+y^2=29, \\ xy=10; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x^2+y^2=45, \\ xy=18; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=-6; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x^2+y^2=26, \\ xy=-5. \end{cases}$$