1. Problema 2D

1.1. Formulación clásica y variacional

Espacio físico

Formulación clásica:
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la geometría definida por NURBS. Buscamos $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \Gamma_D, \quad \text{(condición de Dirichlet)}, \\ \nabla u \cdot n = h & \text{en } \Gamma_N \quad \text{(condición de Neumann)}, \\ \alpha u + \beta \, \nabla u \cdot n = r & \text{en } \Gamma_R \quad \text{(condición de Robin)}. \end{cases}$$

Formulación variacional (homogeneizada):
Definimos los espacios

$$V = \{v \in H^1(\Omega)\}, \qquad V_0 = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ en } \Gamma_D\}.$$

Buscamos $u \in V$ con $u = g$ en Γ_D tal que

$$a(u, v) = \ell(v) \qquad \forall v \in V_0,$$

donde

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Gamma_R} \tfrac{\alpha}{\beta} \, uv \, d\Gamma,$$

$$\ell(v) = \int_\Omega f \, v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} h \, v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \tfrac{r}{\beta} \, v \, d\Gamma.$$

1.2. Transformación del espacio físico al paramétrico

La geometría se describe mediante un mapeo NURBS

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} R_i(\xi, \eta) \, \mathbf{P}_i,$$

donde $R_i(\xi, \eta)$ son las funciones base NURBS y $\mathbf{P}_i$ los puntos de control.

El cambio de variable entre Ω y $\hat{\Omega}$ se realiza a través del jacobiano de la transformación

$$J(\xi, \eta) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Así, una integral en el espacio físico se transforma en el espacio paramétrico como

$$\int_\Omega f(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} f(\mathbf{x}(\xi, \eta)) \, \big| \det J(\xi, \eta) \big| \, d\xi \, d\eta.$$

Del mismo modo, los gradientes de las funciones base en coordenadas físicas se obtienen mediante

$$\nabla_{\mathbf{x}} R_i = J^{-T}\, \nabla_{(\xi,\eta)} R_i,$$

donde $\nabla_{(\xi,\eta)} R_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial R_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial R_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$.

En consecuencia, la formulación variacional en el espacio físico

$$a(u,v) = \int_{\hat{\Omega}} (\nabla_{(\xi,\eta)} u)^T\, G(\xi,\eta)\, (\nabla_{(\xi,\eta)} v)\, |\det J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta + \int_{\hat{\Gamma}_R} \frac{\alpha}{\beta}\, uv\, \|J_\Gamma\|\, d\hat{s},$$

$$\ell(v) = \int_{\hat{\Omega}} f(\mathbf{x}(\xi,\eta))\, v\, |\det J(\xi,\eta)|\, d\xi d\eta + \int_{\hat{\Gamma}_N} h\, v\, \|J_\Gamma\|\, d\hat{s} + \int_{\hat{\Gamma}_R} \frac{r}{\beta}\, v\, \|J_\Gamma\|\, d\hat{s}.$$

Aquí $\hat{\Gamma}_N, \hat{\Gamma}_R$ son las fronteras correspondientes en el espacio paramétrico y $\|J_\Gamma\|$ es el jacobiano tangente que convierte la integral de línea de $\hat{\Gamma}$ a Γ en el espacio físico.