Analisi Matematica III

Dalle lezioni del Prof. Maurizio Grasselli
per il corso di Ingegneria Matematica

Dispense di Simone Paloschi

Politecnico di Milano

A.A. 2022/2023

Indice

1 Funzioni a variabile complessa **3**

1.1 Insieme numeri complessi 3
1.2 Funzioni Complesse di una Variabile Complessa 3
1.3 Serie Di Potenze nel campo complesso 4
1.4 Cammini e circuiti 5
1.5 Integrale di funzioni complesse di variabile complessa 5
1.6 Analicità funzioni olomorfe 6
1.7 Singolarità delle funzioni di variabile complessa e Sviluppi di Lourent 6
1.8 Residui integrali 7
1.9 Logaritmo e potenze di numeri complessi 8

2 Elementi di Analisi Funzionale **9**

2.1 Successioni negli spazi normati 9
2.2 Integrale di Lebesgue 9
2.3 Insiemi misurabili e integrali su insiemi misurabili 10
2.4 Spazi $\mathbf{L^P}$ 11
2.5 Spazi di Hilbert 12
2.6 Ortogonalità 12
2.7 Sistemi e basi ortonormali 12
2.8 Serie di Fourier in $\mathbf{L^2}$ 13

3 Elementi di Teoria delle Distribuzioni **14**

3.1 Spazio Duale di uno Spazio Vettoriale 14
3.2 Derivata di una distribuzione 15
3.3 Distribuzioni temperate 16
3.4 Prodotto distribuzione-funzione 16

4 Trasformata di Fourier **17**

4.1 La trasformata di Fourier e la derivazione 17
4.2 Inversione della trasformata di Fourier 17
4.3 Trasformata di Fourier per distribuzioni temperate 18
4.4 Trasformata nello spazio $\mathbf{L^2}$ 18
4.5 Prodotto convoluzione e trasformata Fourier 19
4.6 Applicazioni 19

1 Funzioni a variabile complessa

1.1 Insieme numeri complessi

Oss. Il campo $(\mathbb{C},+,\cdot)$ non può essere ordinato
In $\mathbb{C}$ vale il teorema fondamentale dell'algebra: un polinomio di grado n ha n radici

I numeri complessi possono essere scritti: $a+ib \quad \rho(cos(\eta)+isin(\eta)) \quad \rho e^{i\eta}$

Topologia:

- **distanza** := |z-w| è simmetrica e positiva $(d=0 \Leftrightarrow z=w)$
- **Disco** (aperto) $R>0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ $allora$ $B_R(z_0) := z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R$ e chiuso con $\leq$
- $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice **aperto** se $\forall z_0 \in A \ \ \exists R>0 \ t.c. \ B_R(z_0) \subset A$
- Punto di **accumulazione** se $\forall R>0 \ B_R(z_0)$ contiene almeno uno $z \in E$ $(con\ z \neq z_0)$
- $E \subseteq \mathbb{C}$ **chiuso** se contiene tutti i suoi punti di accumulazione
- Una succesione $[z_n]_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ $se\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ t.c.\ |z_n - z| < \varepsilon, \forall n > n_0$

1.2 Funzioni Complesse di una Variabile Complessa

f: $E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f(z)=Ref(z) + i Imf(z)

> **Def.** f è **continua** in $z_0 \in A$ $se\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ t.c.\ |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon\ \forall z \in B_\delta(z_0)\cap A$

Oss. f(z) = u(x+iy) + i v(x+iy) (u e v funzioni)
data f possiamo definire in modo univoco $(u,v): E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e viceversa

> **Def.** Sia $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diremo che f è **derivabile** in $z_0 \in A$ se esiste finito $lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$

Oss. Ovvero $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ t.c.\ |\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f'(z_0)| < \varepsilon \quad \forall h \neq 0\ t.c.\ |h|<\delta\ e\ z_0+h \in A$

Oss. Derivabilità equivale a **differenziabilità**:
$\exists\alpha \in \mathbb{C}\ t.c.\ f(z_0+h)-f(z_0) = \alpha h + o(h)\ \ per\ h \to 0\ \ con\ \alpha = f'(z_0)$

Teo. Condizioni di Cauchy-Riemann DIM
f è derivabile in $z_0 \Longleftrightarrow$ u,v sono diffferenziabili in (x_0,y_0), $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\ e\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$

> **Def.** $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è **Olomorfa** in A se è derivabile $\forall z \in A$

Oss. $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0 \ \in A$, allora
$f'(z0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = (C.R.) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \implies |f'(z0)|^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + u_y^2$
Oss. $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \qquad J_F\ (x,y) = |f'(z_0)| \begin{bmatrix} \frac{u_x}{|f'(z_0)|} & \frac{v_x}{|f'(z_0)|} \\ \frac{u_y}{|f'(z_0)|} & \frac{u_y}{|f'(z_0)|} \end{bmatrix} = |f'(z_0)|\theta(z_0)$

> **Def.** Una trasformazione di un aperto si dice **conforme** se conserva gli angoli tra coppie di curve (regolari)

Teo. f olomorfa in A con $f'(z) \neq 0\ \forall z \in A$ allora f è una trasformazione conforme

Oss. Vogliamo mostrare che le funzioni olomorfe sono serie di potenze

1.3 Serie Di Potenze nel campo complesso

Def. Una serie di potenze di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e coefficienti $a_n \in \mathbb{C}$ è la successione $\{\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ che può essere chiamata con il simbolo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

Oss. Puoi sostituire la serie alla successione se sai che converge

Teo. Raggio di convergenza delle serie di potenze nel campo complesso DIM
Sia $\alpha = \overline{lim}_{n\to+\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} \in [0,+\infty]$ allora posto $R = \frac{1}{\alpha}$, avremo:
i) la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ converge assolutamente $\forall z : |z-z_0| < R$
ii) la serie non converge $\forall z : |z-z_0| > R$

Def. Data la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(z-z_0)^n$ con raggio di convergenza R
Il **cerchio di convergenza** è $\Gamma_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$
Il **disco** di convergenza è $\mathcal{D}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}^* : |z-z_0| \leq R\}$ *con* $\mathbb{C}^* : \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$

Oss. $\forall R' < R$ la serie converge totalmente in $|z-z_0| < R'$

Cor. Una serie di potenze converge totalmente e uniformemente in ogni E t.c. $\overline{E} \subset \Gamma_R(z_0)$

Teo. Una serie di potenze ha come somma una funzione continua in $|z-z_0| \leq R$
scriveremo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

Prop. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ (Serie derivata termine a termine) hanno lo stesso raggio di convergenza

Teo. Derivabilità delle serie di potenze DIM
La somma f(z) di una serie di potenze è olomorfa in $|z-z_0| \leq R$ e risulta $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$

Cor. La somma ha derivate di ogni ordine continue in $|z-z_0| < R$ che si ottengono derivando termine a termine: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n(z-z_0)^{n-k}$ e in particolare $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$

Estensione delle trascendenti elementari (sin, cos, exp. . .)

Teo. Sia $f : (a,b) \subseteq \mathbb{C}$ derivabile in (a,b).
Se esiste una funzione olomorfa in A ⊃ (a,b) t.c. $F|_{(a,b)} = f$ allora F è unica

Cor. Sono funzioni olomorfe le seguenti:
$\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} := e^z$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} := sin(z)$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} := cos(z)$

Cor. Relazioni fondamentali che continuano a valere:
$sin^2 z + cos^2 z = 1$ $sinz = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $cosz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
Oss. Ma per esempio non è più vera: $|sinz| \leq 1$

1.4 Cammini e circuiti

Def. $r : [a, b] \to \mathbb{C}$ è **$\mathbf{C^1}$ a tratti** se è C^0 ed $\exists\{t_0...t_k\}$ $t.c.$ $\quad t_0 = a, t_k = b, t_{j-1} < t_j$ e $\; r|_{[tj-1,t_j]} \in C^1$

Def. $r_1, r_2 \in \widetilde{C}^1$ sono **equivalenti** se $\exists\varphi : D_1 \to D_2$ biettiva, strettamente crescente con D_i i rispettivi domini t.c. $\quad$ i) $\varphi, \varphi^{-1} \in \widetilde{C}^1$ $\quad$ ii) $r_1 = r_2(\varphi)$

Def. Sia $C = (\gamma, r)$ un **cammino** di $\mathbb{C}$, allora:
i) C è chiuso se $r(a) = r(b)$ $\quad$ (allora C è un **circuito**)
ii) -C indica il cammino **inverso**, ovvero $\widetilde{r}(t) = r(a + b - t)$
iii) se $C \in (a, b)$, allora è la **somma** dei cammini parametrizzati da $r_1 = r|_{[a,l]}$ e $r_2 = r|_{[l,b]}$: $\quad C = C_1 + C_2$
iv) C è un cammino **semplice** se non ha intersezioni

Def. $A \subseteq \mathbb{C}$ è **connesso** se $\nexists A_1, A_2 \subset A$ non vuoti, digiunti t.c. $A_1 \cup A_2 = A$

Def. Siano C_1, C_2 circuiti in $A \subseteq \mathbb{C}$, **A-omotopia** è una funzione $H : [a, b] \times [0, 1] \to A$ continua t.c.
i) $\forall\lambda \in [0, 1]$ $H(\cdot, \lambda)$ è la parametrizzazione di un circuito di A
ii) $H(\cdot, 0)$ e $H(\cdot, 1)$ sono parametrizzazioni di C_1 e C_2 che si diranno A-omotopi

Def. A è **semplicemente connesso** se ogni circuito in A è A-omotopo ad un punto di A

Def. A è **stellato** rispetto a $z_0 \in A$ se ogni segmento di z_0 è incluso in A $\quad$ (Stellato $\implies$ sempl connesso)

1.5 Integrale di funzioni complesse di variabile complessa

Def. Siano $C = (\gamma, \{r\})$ un cammino di $\mathbb{C}$ e $f : \gamma \to \mathbb{C}$ continua, avremo $\quad \int_C f(z)dz := \int_a^b f(r(t)) \cdot r'(t)dt$

Proprietà principali:
i) lunghezza $L_\gamma = \int_a^b |r'(t)|dt$ $\qquad$ ii) $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$
iii) $\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_C f(z)dz$ $\qquad$ iv) $|\int_C f(z)dz| \leq sup_{z\in\gamma}|f(z)| \cdot L_\gamma$

Possiamo separare l'integrale: $\int_C f(z)dz = ... = \int_C(u(x, y)dx - v(x, y)dy) + i\int_C(v(x, y)dx + u(x, y)dy)$

Def. Sia f continua con (u,v), allora $udx - vdy, vdx + udy$ si dicono **forme differenziali** associate a f

Teo. f è olomorfa se le forme diff associate sono chiuse (differenziabili e C^1)

Def. $F : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una **primitiva** di $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se è olomorfa e $F'(z) = f(z)$ $\forall z \in A$

Oss: Considerando F con (U,V), allora $U_x = V_y = u,\ V_x = -U_y = v$
ovvero $\nabla U = (u, -v)$ $\nabla V = (v, u)$, perciò le forme diff di f sono esatte (hanno primitiva)
Teo. f continua ha primitiva in A $\iff$ le sue f.d.ass. sono esatte

Teo. forma diff esatta e C^1 $\implies$ f.d. chiusa
Ipotesi: d'ora in poi assumeremo $u, v \in C^1$

Teo. f continua ha primitiva in A $\implies$ f è olomorfa in A (essendo chiusa)

Teo. f olomorfa su A semplicemente connesso $\iff$ f ha primitiva in A
Cor. f continua e olomorfa in A $\iff$ $\forall z \in A\ \exists$ un disco $B_R(z) \subset A$ t.c. f ha primitiva in B_R

Teo. f continua con una primitiva in A $\implies$ $\int_C f(z)dz = 0\ \forall$ circuito $C \subset A$
Cor. fissato $z_0 \in A,\ F(z) = \int_{C(z_0,z)} f(w)dw$ è una primitiva di f, con C un cammino con estemi $z_0\ e\ z$

Teo. Cauchy DIM
Sia $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se A è semplicemente connesso, allora $\int_C f(z)dz = 0\ \forall$ circuito $C \subset A$

Teo. Morera
Se f è t.c. $\int_C f(z)dz = 0\ \forall$ circuito $C \subset A$ allora f è olomorfa

1.6 Analicità funzioni olomorfe

Def. f è **analitica** se si può scrivere localmente in serie di potenze, ovvero:
$\forall z \in A\ \exists \delta > 0\ t.c.\ B_\delta(z) \subset A$ ed $\exists$ una serie di potenze di centro z che converge a $f(z+h)\ \ \forall h \in B_\delta$

Oss. Nel caso reale esistono funzioni C^∞ non analitiche

Teo. Se f è analitica allora è olomorfa

Teo. Formula di Cauchy DIM
Se $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in A, allora $\forall z \in B_r(z_0) \subset A\quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}dw$ con $C_r(z_0) = \partial B_r(z_0)$
Oss. I valori di f nel disco dipendono solo dai valori sul bordo

Teo. Weierstrass DIM
Se $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa in A, allora è f analitica in A
Quindi $\forall z \in A\ e\ B_r(z_0) \subseteq A$ vale lo sviluppo $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

Oss. Inoltre per lo sviluppo di Taylor, sappiamo che $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, da cui ricaviamo
la formula di Cauchy della derivata: $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz\ \ \forall k \in \mathbb{N}$

1.7 Singolarità delle funzioni di variabile complessa e Sviluppi di Lourent

Def. Sia f olomorfa in A-$\{z_0\}$ diremo che z_0 è una **singolarità isolata**

Def. Per analizzare le singolarità useremo le **serie di potenze bilatere**, dette anche sviluppi di Lourent
Ovvero $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}[(z-z_0)^{-1}]^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$

Oss. Il primo termine ha raggio di convergenza R' e converge in $|z-z_0| > \rho = \frac{1}{R'}$

Oss. Se $0 \le \rho < R \le +\infty$ la serie bilatera converge assolutamente in $A_{\rho,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \rho < |z-z_0| < R\}$
e converge uniformemente in ogni E t.c. $\overline{E} \subset A_{\rho,R}(z_0)$

Oss. Se $R = +\infty$ e $a_n = 0$ $\forall n > 0$ allora diremo che f è olomorfa all'infinito e $f(\infty) = a_0$

Teo. Sia f olomorfa in una corona circolare $A_{\rho,R}(z_0)$, allora f è somma di una serie bilatera di potenze:
$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ dove $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}dw$ con γ una circonferenza contenuta in $A_{\rho,R}(z_0)$

Def. Sia $f : A - \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora z_0 è una singolarità:
- eliminabile se f è la restrizione di una funzione olomorfa in A
- polare se $lim_{z\to z_0} f(z) = +\infty$
- essenziale, altrimenti

Prop. Sia $f : A - \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, allora $\exists R > 0$ t.c. $B_R(z_0) \subset A$, valgono:
- $a_{-m} = 0$ $\forall m \geq 1 \implies z_0$ eliminabile
- $\exists$ un numero finito (non nullo) di $a_{-m} \neq 0 \implies z_0$ è un polo
- $\exists$ infiniti $a_{-m} \neq 0 \implies z_0$ è essenziale

Prop. Se $\exists m_0 \geq 1$ $(m_0 \in \mathbb{N}_0)$ t.c. $a_{-m_0} \neq 0$ e $a_{-m} = 0$ $\forall m > m_0$ allora z_0 è un polo di ordine m_0
Se $\exists n_0 \geq 1$ t.c. $a_{n_0} \neq 0$ e $a_n = 0$ $\forall n < n_0$ allora z_0 è uno zero di ordine n_0

Oss. Regola di De L'Hopital: se z_0 è un polo o uno zero di f e g (olomorfe dove serve),
allora esistono finiti ed uguali $lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$

1.8 Residui integrali

Oss. Abbiamo detto che presa f olomorfa in $B_R(z_0)$ (z_0 al più escluso), allora $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$
Teo. Sia γ circonferenza interna a $B_R(z_0)$ (γ contiene z_0), allora $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = a_{-1}$

Def. a_{-1} è detto **residuo integrale** di f in z_0 e si indica con $Res(f, z_0)$

Teo. (dei residui 1) Sia f olomorfa tranne al più in un numero finito di singolarità isolate $z_1, ...z_N \in A$
Se γ è un circuito semplice in A contenente al suo interno tutte le singolarità, allora $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j)$

Teo. (dei residui 2) Siano A un aperto esterno ad un circuito semplice γ e f olomorfa in A tranne al più in un numero finito di punti singolari z_j e continua in $\overline{A}$, allora $\int_{-\gamma} f(z)dz = 2\pi i[\sum_{j=1}^{N} Res(f, z_j) + Res(f, \infty)]$

Cor. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in $\mathbb{C}$ tranne al più in un numero finito di singolarità,
allora la somma dei resuidi (compreso ∞) è zero

Teo. (Principio di identità delle funzioni olomorfe)
Siano $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa in A aperto connesso e $Z(f)$ l'insieme degli zeri di f,
allora f è identicamente nulla se e solo se $Z(f)$ ha punti di accumulazione in A

Teo. (Unicità del prolungamento analitico)
Siano $f_0 : S \subset A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A aperto connesso e S con un punto di accumulazione in A
se $\exists f : A \to \mathbb{C}$ olomorfa t.c. $f|_S = f_0$ allora f è unica
Oss. $f(z) = sin(z)$ ha zeri, ma il punto di accumulazione è ∞, che è esterno a $\mathbb{R}$

Prop. I poli di una funzione f sono tutti e soli gli zeri di un prolungamento olomorfo di $\frac{1}{f}$

Prop. Se f è olomorfa in un aperto connesso e non è identicamente nulla,
allora i suoi zeri sono tutti isolati e hanno ordine intero e finito

Lemma di Jordan DIM
Siano $R, w > 0$, $\rho : I \to (0, +\infty) \in \widetilde{C}^1$ con $I = [0, \pi]$ e $r_R = R\rho(t)e^{it}$ $t \in I$
Sia $C_R = (\gamma_R, r_R)$ un cammino con $\gamma_R = Im(r_R)$ e sia f continua su γ_R, allora:
$|\int_{C_R} e^{iwz} f(z)dz| \leq \frac{c^*}{w} sup_{z\in\gamma_R}|f(z)|$ con c^* indipendente da R

Oss. Il lemma di Jordan vale anche nei seguenti casi:
- $\int_{C_R} e^{-iwz} f(z)dz\ I = [-\pi, 0]$ • $\int_{C_R} e^{wz} f(z)dz\ I = [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ • $\int_{C_R} e^{-wz} f(z)dz\ I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

1.9 Logaritmo e potenze di numeri complessi

Oss. Dato $z \in \mathbb{C}_0$, esistono infiniti $w \in \mathbb{C}\ t.c.\ e^w = z$. Precisamente $w = ln|z| + i\theta\ con\ \theta \in Arg(z)$
dove $Arg(z) := \{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|e^{i\theta}\}$ n.b. se $z = 0$, $arg(z) = \mathbb{R}$

Def. La funzione **logaritmo principale** è $Ln(z) = ln|z| + iArg(z)\ con - \pi < Arg(z) < \pi$

Oss. $z \to Ln(z)$ è defintta su $E = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) \leq 0,\ \mathcal{I}m(z) = 0\}$
Oss. Su E $Ln(z)$ è olomorfa e vale $\frac{d}{dz}Ln(z) = \frac{1}{z}$, ma non posso estenderla a $\mathbb{C}$ perché c'è un salto

Def. $Ln(z)$ è una branca massimale di $ln(z)$, le altre sono $f_(z) = Ln(z) + i2k\pi\ k \in \mathbb{Z}$

Oss. Incollando i tagli delle branche generiamo una funzione continua, definita sulla superficie di Riemann

Def. Le funzioni simili a $ln(z)$, cioè insiemi di branche sono dette polidrome

Def. I punti come z=0 per $ln(z)$, cioè punti intorno a cui girano tutte le branche, sono di diramazione

Potenze a esponente complesso $\alpha \in \mathbb{C}$ $z^\alpha := e^{\alpha lnz}$ $\forall z \in \mathbb{C}_0$, analizziamo i casi:

I) $\alpha \in \mathbb{Z} \iff e^{\alpha(lnz+2k\pi i)} = e^{\alpha lnz}$, in tal caso z^α è olomorfa in $\mathbb{C}_0$

II) $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Q} \implies z^\alpha := \{w = |z|^{\mathcal{R}e(\alpha)} e^{i\mathcal{I}m(\alpha)ln|z|} e^{i\alpha\theta}, \theta \in Arg(z)\}$
Oss. In questo caso z^α ha infinite branche massimali olomorfe in $\mathbb{C}$ - semiretta contenente l'origine
Oss. z^α è una funzione polidroma con punto di diramazione in z=0
Oss. Dall'equazione di Eulero $e^{i\pi} + 1 = 0$ ricaviamo $\frac{ln(i)}{i} = \pi$

III) $\alpha \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ in questo caso otteniamo un numero finito di branche massimali

2 Elementi di Analisi Funzionale

Sia $X \neq 0$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o su $\mathbb{C}$)

Def. Una **norma** in X, che si indica con $||\cdot||$, è una funzione $N : X \to [0, +\infty)$ t.c.
i) $N(x) \geq 0$ e $x = 0 \Leftrightarrow N(x) = 0$ ii) $N(\alpha x) = \alpha N(x)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ iii) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)\ \forall x, y \in X$

Def. Uno S.V. X munito di norma $||\cdot||$ si dice **spazio vettoriale normato** e si indica con $(X, ||\cdot||)$

Oss. In $(X, ||\cdot||)$ è sempre possibile definire una distanza ponendo $d(x, y) := ||x - y||$
Dunque uno S.V.N. è sempre uno spazio metrico e quindi possiamo introdurre le nozioni topologiche viste

2.1 Successioni negli spazi normati

Def. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ **converge** a $x \in X$ se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ t.c.\ ||x_n - x|| < \varepsilon\ \ \forall n > n_0$

Def. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è **di Cauchy** se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ t.c.\ ||x_n - x_m|| < \varepsilon\ \forall n, m > n_0$

Def. $(X, ||\cdot||)$ si dice **spazio di Banach** se rispetto alla distanza è completo,
cioè ogni successione di Cauchy è convergente

2.2 Integrale di Lebesgue

Def. $R \subset \mathbb{R}^n$ è un plurirettangolo se $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)\ \ a_j, b_j \in \mathbb{R} : a_j < b_j$
La **misura** (o volume) n-dim di R è: $|R|_n = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$

Def. $E \subset \mathbb{E}^n$ è di **misura nulla**: $|E|_n = 0$ se $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \{R_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ t.c.
i) $E \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j$ ii) $\sum_{j\in\mathbb{N}} |R_j|_n < \varepsilon$

Prop. Se $E \subset \mathbb{R}^n$ è t.c. $|E|_n = 0$ allora $\forall F \subseteq E$ è t.c. $|F|_n = 0$
Prop. $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ t.c. $|E_j|_n = 0\ \forall j \in \mathbb{N} \implies |\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j|_n = 0$
Cor. $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ numerabile $|E|_n = 0$ (i.e. $|\mathbb{Q}^n|_n = 0$)

Def. Una proprietà $p(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$ vale **quasi ovunque** (q.o.) se
$\exists E \subset \mathbb{R}^n$ t.c. $|E|_n = 0$ e p(x) è vera $\forall x \in \mathbb{R}^n/E$

Def. Una f a valori in $\mathbb{R}$ è definita q.o. in $\mathbb{R}^n$ se è definita su un insieme del tipo $\mathbb{R}^n/E$ con $|E|_n = 0$

Def. Siano $R_1, ..., R_k$ k plurirettangoli mutuamente disgiunti.
Una funzione **semplice** è una funzione del tipo $h(x) = \sum_{j=1}^{k} h_j \chi_{R_j}$ con $h_j \in \mathbb{R}$

Oss. É una combinazione lineare di funzioni caratteristiche, dove $\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{in E} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Def. Funzione $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è **misurabile** se $\exists$ succesione di funzioni semplici t.c. $h_m \to u$ q.o. in $\mathbb{R}^n$

Prop. Siano $u : \mathbb{R}^n \to I \subseteq \mathbb{R}$ misurabile e $f : I \to \mathbb{R}$ continua, allora $f \circ g$ è misurabile

Oss. Perciò u,v misurabili $\implies u \cdot v,\ u \pm v,\ max\{u, v\},\ min\{u, v\}$ misurabili
Prop. Sia $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni misurabili t.c. $u_m \to u$ q.o. allora u è misurabile

Def. Se $h = \sum_{j=1}^{n} h_j \chi_{R_j}$ è una funzione semplice, allora definiamo l'**integrale** $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx := \sum_{j=1}^{n} h_j |R_j|_n$

Def. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile, u è **intergabile secondo Lebesgue** in $\mathbb{R}^n$ se
$\exists\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione di funzioni semplici t.c. i) $h_k \to u$ q.o. ii) $\{\int_{\mathbb{R}^n} h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy

Oss. ii) $\implies \exists\alpha \in \mathbb{R}\ t.c.\ lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_k = \alpha$
Si può provare che α non dipende dalla successione $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, perciò possiamo porre $\int_{\mathbb{R}^n} u(x) := \alpha$

Proprietà dell'integrale di Lebesgue:
1) u integrabile e v=u q.o. $\implies$ v integrabile e $\int_{\mathbb{R}^n} v = \int_{\mathbb{R}^n} u$
2) u integrabile $\implies$ |u| integrabile
3) u integrabile $\implies u^+, u^-$ integrabili
4) u,v integrabili $\implies$ max{u,v} e min{u,v} integrabili
5) u reale, non negativa e integrabile $\implies \int_{\mathbb{R}^n} u \geq 0$
6) u,v integrabili e $u \leq v$ q.o. $\implies \int_{\mathbb{R}^n} u \leq \int_{\mathbb{R}^n} v$
7) u integrabile $\implies |\int_{\mathbb{R}^n} u| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u|$
8) u,v integrabili $\implies \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \ \alpha u + \beta v$ integrabile e vale $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha u + \beta v = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} u + \beta \int_{\mathbb{R}^n} v$

Teo. Sia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ misurabile, se $\exists\varphi$ positiva e integrabile t.c. $|u| \leq \varphi$ q.o., allora u è integrabile

Teo. Convergenza dominata per Lebesgue
Siano $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrabili t.c. i) $u_k \to u$ q.o. ii) $\exists\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ integrabile t.c. $|u_k| \leq \varphi$ q.o.
Allora u è integrabile e vale $\int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u| \to 0$ per $k \to +\infty$ ovvero $lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_k = \int_{\mathbb{R}^n} u$

Teo. Convergenza monotona o Beppo Levi
Siano $u_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrabili e t.c. $u_{k+1} \geq u_k$ q.o. $\forall k \in \mathbb{N}$ allora:
i) $lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_k$ finito $\implies u_k \to u$ con u integrabile e $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k - u| = 0$
ii) $lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_k = +\infty \implies u_k \to u$ q.o. con u non integrabile, con $\int_{\mathbb{R}^n} u = +\infty$
iii) $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non converge q.o. a valori finiti

2.3 Insiemi misurabili e integrali su insiemi misurabili

Def. $E \subset \mathbb{R}^n$ è **misurabile** (secondo Lebesgue) se χ_E è misurabile $|E|_n = \begin{cases} +\infty \text{ se } \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E = +\infty \\ \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \quad \text{se } \chi_E \text{ è integrabile} \end{cases}$

Proprietà della misura n-dim di Lebesgue $|\cdot|_n$:
- Numerabilmente additiva: $\forall\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ insieme misurabile e disgiunto, risulta $|\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j|_n = \sum_{j\in\mathbb{N}} |E_j|_n$
- Invariante per traslazioni: $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ misuabile, risulta $|E \pm a|_n = |E|_n\ \forall a \in \mathbb{R}^n$

Def. Dati $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $u : E \to \mathbb{R}$
u è L-integrabile in E se $\widetilde{u}(x) := u(x)\chi_E$ è L-integrabile in $\mathbb{R}^n$, quindi sarà $\int_E u := \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{u}$

Teo. Ogni funzione limitata in $\mathbb{R}^n$, nulla al di fuori di un compatto e R-integrabile
É L-integrabile e i due integrali coincidono
Oss. Esistono funzioni R-integrabili che non sono L-integrabili, come $f(x) = \frac{sinx}{x}$

2.4 Spazi $\mathbf{L^P}$

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ L-misurabile, L'**insieme delle funzioni misurabili** in Ω è
$\mathcal{M}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ misurabile}\}$

Oss. Introduciamo la relazione di equivalenza: $u \sim v \Leftrightarrow u = v \ q.o. \ \ \forall u, v \in \mathcal{M}(\Omega)$
Oss. La classe di equivalenza con rappresentante u è $[u] := \{v \in \mathcal{M}(\Omega) \mid v = u \ \ q.o. \ in \ \Omega\}$

Oss. Consideriamo l'insieme quoziente: $M(\Omega) = \frac{\mathcal{M}(\Omega)}{\sim} = \{[u] : u \in \mathcal{M}(\Omega)\}$

Oss. Se Ω aperto, è unica la funzione continua in ogni classe di equivalenza

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile con $|\Omega|_n > 0$ e $p \in [1, \infty)$ fissato, allora
$\mathbf{L^P(\Omega)} := \{u \in M(\Omega) : \ |u|^p \text{ è L-integrabile in } \Omega\}$

Oss. $L^P(\Omega)$ possono essere dotati di una struttura di S.V. Una buona norma è $||u||_p := (\int_\Omega |u|^p)^{\frac{1}{p}}$

Oss. Per verificare l'adeguatezza di questa norma, per $p \in (1, \infty)$ usiamo la seguente:
- Disuguaglianza Minkowski $(\int_\Omega |u + v|^p)^{\frac{1}{p}} \le (\int_\Omega |u|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int_\Omega |v|^p)^{\frac{1}{p}}$ che si dimostra con la seguente:
- Disuguaglianza di Hölder se $|u|^p \ e \ |v|^q$ sono integrabili in Ω e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ allora $\int_\Omega |uv| \le (\int_\Omega |u|^p)^{\frac{1}{p}} (\int_\Omega |v|^q)^{\frac{1}{q}}$

Teo. $(L^P(\Omega), || \cdot ||_p)$ è uno spazio di Banach $\forall p \in [1, \infty)$

Def. $\mathbf{L^\infty(\Omega)} := \{u \in M(\Omega) \mid \ \exists K \ge 0 \ t.c. \ |u| \le K \ q.o. \ in \ \Omega\}$

Oss. $L^\infty(\Omega)$ è uno S.V. su $\mathbb{R}$

Prop. $\forall u \in L^\infty(\Omega)$ esiste l'estremo superiore essenziale $\alpha = min\{K \ge 0 \ t.c. \ |u| \le K \ q.o. \ in \ \Omega\}$
Oss. Una norma in $L^\infty(\Omega)$ $||u||_\infty := ess \ sup_{\ \Omega} \ |u(x)|$
Teo. $(L^\infty(\Omega), || \cdot ||_\infty)$ è uno spazio di Banach

Oss. La disuguaglianza di Hölder si estende facilmente a $p = \infty$ $\int_\Omega |uv| \le \int_\Omega (ess \ sup \ |u|)|v| \le ||u||_\infty \cdot ||v||_1$

Oss. A questo punto abbiamo una famiglia infinita di spazi di Banach infito dimensionali, dotati di una norma, ora introduciamo nozione di prodotto scalare e quindi di spazio hilbertiano

2.5 Spazi di Hilbert

Def. Sia X uno S.V. su $\mathbb{R}$ $\quad p : X \times X \to \mathbb{R}$ si dice **prodotto scalare** in X se:
i) $p(x,x) \geq 0$ e $p(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $p(x,y) = \overline{p(y,x)} \quad \forall x,y \in X$
iii) $p(\alpha x + \beta y, u) = \alpha p(x,u) + \beta p(y,u) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall x,y,u \in X$

Oss. $p(x,y) = <x,y> \qquad (X, \ <\cdot,\cdot>)$ si dice spazio **pre-Hilbertiano**

Oss. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>} + \sqrt{<y,y>} \quad \forall x,y \in X$

Prop. $||x|| := \sqrt{<x,x>}$ è la norma indotta dal prodotto scalare

Def. $(X, \ <\cdot,\cdot>)$ è uno **spazio di Hilbert** se è completo rispetto alla norma indotta

2.6 Ortogonalità

Oss. C.-S. $\implies -1 \leq \frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||} \leq 1 \quad \implies \exists! \ \theta \in [0,\pi] \ t.c. \ cos\theta = \frac{<x,y>}{||x||\cdot||y||} \quad \theta$ è l'angolo tra i vettori x e y

Def. x è **ortogonale** a y se $<x,y> = 0$

Teo. (Neumann): Se $(X, ||\cdot||)$ è di Banach, allora $||\cdot||$ è indotto da un prodotto scalare sse vale l'identità del parallelogramma: $||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \quad \forall x,y \in X$

2.7 Sistemi e basi ortonormali

Def. Dato uno spazio pre-Hilbertiano $(H, \ <\cdot,\cdot>)$ su $\mathbb{R}$
$\{u_n\}_{n\in E} \quad E \subseteq \mathbb{N}$ è un **sistema ortonormale** di H se $<u_r, u_s> = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$

Oss. Ovvero se è ortogonale e tutti i suoi elementi hanno norma unitaria: $||u_j|| = 1 \quad \forall j \in E$

Prop. Se $\{u_j\}_{j\in E}$ è un sistema ortonormale in H Hilbert, allora:
- Se E non è finito $\quad \sum_{j\in E} c_j u_j$ converge in H $\Leftrightarrow \sum_{j\in E} |c_j|^2 < \infty \quad \forall \{c_j\}_{j\in E} \subset \mathbb{R}$
- $u = \sum_{j\in E} c_j u_j \in H \quad c_j = <u, u_j>$
- Identità di Parseval: $x = \sum_{j\in E} c_j x_j \quad y = \sum_{j\in E} d_j y_j \quad \implies <x,y> = \sum_{j\in E} c_j d_j$

Def. Una **base ortonormale** di H Hilbert è un sistema ortonormale $\{u_j\}_{j\in E}$ $t.c.$
$\forall x \in H \quad \exists! \ \{c_j\}_{j\in E} \subset \mathbb{R} \ t.c. \ x = \sum_{j\in E} c_j u_j$

Oss. Se E infinito, allora esiste sempre una base ortonormale

Def. Dato $(H, \ <\cdot,\cdot>)$ Hilbert e $\{u_j\}_{j\in E}$ un suo sistema ortonormale con E infinito, allora ogni $x \in H$ è somma della **serie di Fourier** astratta $\sum_{j\in E} x_j u_j$ con $x_j = <x, u_j> =$ coefficienti di Fourier

Oss. Se E è finito, non è più una "serie", è una somma finita equivalente a una proiezione ortogonale

2.8 Serie di Fourier in $\mathbf{L^2}$

Def. Dati $H = L^2([-\pi,\pi])$ in $\mathbb{R}$ e $< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} fg \quad (H, \ < \cdot, \cdot >)$ è di Hilbert
$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ è una base ortornomale di H

Oss. Per scrivere i coefficienti di Fourier è necessario $f \in L^1([-\pi,\pi])$

Oss. Posti $a_0 = < f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >, \ \ a_n = < f, \frac{cos(nt)}{\sqrt{\pi}} >, \ \ b_n = < f, \frac{sin(nt)}{\sqrt{\pi}} >$
$T_N(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{sen(nt)}{\sqrt{\pi}}$ è detto polinomio trigonometrico
$\{T_N(t)\}_{N\in\mathbb{N}}$ è detta serie trigonometrica, se converge a una f, allora si dirà serie di Fourier di f

Prop. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|, \ \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ convergono, allora la serie di Fourier di f converge ass. e unif. in $[-\pi,\pi]$

Def. $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è **continua a tratti** in $[a,b]$ se è continua in $[a,b]$ tranne al più in un numero finito di punti, dove esistono finiti il limite destro e sinistro

Def. $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soddisfa la **condizione di Dirichlet** $\mathbb{D}$ in $x_o \in (a,b)$ se vale una delle seguenti:
i) f è derivabile in x_0 ii) f è continua in x_0 e ha un punto angoloso in x_0
iii) f ha un salto in x_0 ed $\exists$ finiti $lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}$ e $lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$

Teo. (Convergenza puntuale)
Sia $f : [-\pi,\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a tratti, allora la sua serie di Fourier converge in ogni $x_0 \in (-\pi,\pi)$ in cui è soddisfatta la condizione $\mathbb{D}$, più precisamente converge a $\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

Teo. (Convergenza uniforme)
Sia $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[-\pi,\pi]$ con derivata continua, tranne al più un numero finito di punti nei quali vale la condizione $\mathbb{D}$, allora la serie F di f converge a f assolutamente e uniformemente in $[-\pi,\pi]$
Oss. In particolare $f \in C^1([-\pi,\pi]) \implies$ serie F converge ass e unif in $[-\pi,\pi]$

Teo. (Carleson)
Se $f \in L^2([-\pi,\pi])$ allora la sua serie di Fourier converge puntualmente quasi ovunque
Oss. In un insieme finito f continua a tratti $\implies f \in L^2$

Def. Dati $H = L^2([-\pi,\pi])$ in $\mathbb{C}$ e $< f, g > := \int_{-\pi}^{\pi} f\overline{g} \quad (H, \ < \cdot, \cdot >)$ è di Hilbert
$\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortornomale di H

Oss. $f \in L^1([-\pi,\pi]) \implies \gamma_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \ \ n \in \mathbb{Z} \implies$ la serie di Fourier è $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{inx}$

Prop. $f \in L^p([-\pi,\pi]), \ p \in (1,\infty] \implies$ serie di F di f converge q.o.
Oss. Ovvero la successione $\sum_{n=-N}^{N} \gamma_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ converge per $N \to +\infty$ a f in L^p

Oss. f derivabile con al più un num finito di punti angolosi $\implies$ serie F converge uniformemente a f

Def. Un insieme A è denso in B se $\forall x \in B \ \ \exists\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \ \ t.c. \ u_n \to x$ in B

Oss. $C^\infty(\Omega)$ è denso in $L^P(\Omega) \ \forall p \in [1,\infty)$

3 Elementi di Teoria delle Distribuzioni

Def. Sia $v : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, non nullo e v continua
Il **supporto** di v è l'insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$ $\ supp(v) := \overline{\{x \in \Omega :\ v(x) \neq 0\}}$

Def. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto di $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{C^\infty(\Omega)}$ è lo S.V. su $\mathbb{R}$ delle funzioni $v : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. le derivate $D^\alpha v$ sono continue in Ω $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indice

Oss. $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $D^\alpha v(\underline{x}) = D^{\alpha_1}_{x_1}, ..., D^{\alpha_n}_{x_n}$ di $v(\underline{x})$ $\quad D^i_x$ è la derivata i-esima rispetto a x

Def. $C^\infty_c(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) :\ supp(v)$ è compatto in $\mathbb{R}^n\}$ è uno S.V. su $\mathbb{R}$

Def. Convergenza successionale: $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\Omega)$ converge a $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ se
$\exists K \subset \mathbb{R}^n$ compatto t.c. $supp(\varphi_j) \subseteq K$ $\forall j \in \mathbb{N}$ $\quad$ e $\{D^\alpha \varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge unif. in Ω a $D^\alpha\varphi$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

Prop. Se $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^\infty_c(\Omega)$ soddisfa (i) e $\{D^\alpha\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy uniformemente $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ allora
$\exists \varphi \in C^\infty_c(\Omega)$ t.c. $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a φ, cioè abbiamo completezza

Def. $\mathcal{D}(\Omega)$ è lo S.V. $C^\infty_c(\Omega)$ munito della convergenza successionale

3.1 Spazio Duale di uno Spazio Vettoriale

Def. Sia X uno S.V. su $\mathbb{R}$, il **duale algebrico** di X è lo S.V. X':=$\{L : X \to \mathbb{R}$ | L funz. lineare$\}$

Oss. $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ significa che vale la convergenza successionale

Def. $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ è una **distribuzione** su Ω o funzione generalizzata se valgono: $\quad$ i) è lineare
ii) $\forall \{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ t.c. $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ $\quad$ si ha $u(\varphi_j) \to u(\varphi)$ per $j \to \infty$

Def. Lo **spazio delle distribuzioni** su Ω è lo S.V. $\ \mathcal{D}'(\Omega) := \{u : C^\infty_c(\Omega) \to \mathbb{R} \mid$ soddisfano i) e ii)$\}$

Def. $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \iff u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ per $j \to \infty$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Oss. $\mathcal{D}'(\Omega)$ è completo:
$\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ t.c. $\{u_j(\varphi)\}_{j\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies \exists u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.c. $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

Notazione: • $< u, \varphi > := u(\varphi)$ $\quad$ • $\mathcal{D}'(\Omega)$ si sottointenderà dotato di convergenza puntuale

Def. $L^1_{loc}(\Omega)$:=$\{f \in \mathcal{M}(\Omega) :\ f|_K \in L^1(K)\ \ \forall K \subset \Omega,\ K$ compatto$\}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, non nullo

Oss. Siano $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $u_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la distribuzione associata a f, allora $< u_f, \varphi > := \int_\Omega f\varphi\, dx$

Proprietà:
- $\int_\Omega f\varphi\, dx \leq\ ||\varphi||_\infty \int_{supp(\varphi)} |f|\, dx \ \in \mathbb{R}$
- $u_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ben definita e lineare
- se $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ allora $< u_f, \varphi_j > \to < u_f, \varphi >$ in $supp(\varphi_j)$

Lemma di annullamento: $\quad$ Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ allora $\int_\Omega f\varphi\, dx = 0\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies f = 0$ q.o. in Ω
Oss. L'applicazione $\mathcal{F} : L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ $\ f \mapsto u_f$ $\quad$ è ben definitiva e iniettiva per il lemma

Perciò $L^1_{loc}(\Omega)$ può essere identificata con $\mathcal{F}(L^1_{loc}(\Omega)) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ ed è indifferente scrivere f o u_f

Oss. $\mathcal{F}(L^1_{loc}(\Omega)) \neq \mathcal{D}'(\Omega)$ Esempi:

- $f(t) = \frac{1}{t}$ per $t \neq 0 \implies f \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ però $u_f = v.p.\frac{1}{t} \in \mathcal{D}'(\Omega)$
  $< u_f, \varphi >:= v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t} dt = lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|t|>\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Teo. Se $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ è lineare, allora $u \in \mathcal{D}'(\Omega) \Leftrightarrow \forall K \subset \Omega$ K compatto, $\exists\ C_K > 0$ e $m_k \in \mathcal{N}$ t.c. $| < u, \varphi > | \leq C_k \sum_{|\alpha|<m_K} ||D^\alpha \varphi||_\infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ t.c. $supp(\varphi) \subseteq K$

Oss. Se m_k è indipendente da K, allora m si dirà ordine della distribuzione
se m=0 le distribuzioni si diranno misure

3.2 Derivata di una distribuzione

Oss. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ t.c. $f' \in C^0(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ allora
$< u_{f'}, \varphi > = \int_{\mathbb{R}} f'\varphi dt = -\int_{\mathbb{R}} f\varphi' dt$ ma questo non richiede $f \in C^1(\mathbb{R})$

Def. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ allora la **derivata distribuzionale** di u è la distribuzione $Du = v$ t.c.
$< v, \varphi > := \ - < u, \varphi' > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Oss. Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ avremo $u_{f'} = Du_f$

Oss. In generale se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}^n$ $\int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha f\ \varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi\ dx$, quindi

Def. La derivata ditribuzionale di ordince α di $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è la distribuzione $D^\alpha u = v$ t.c.
$< v, \varphi >:= (-1)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f D^\alpha \varphi\ dx$

Oss. Se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ allora $u_{D^\alpha f} = D^\alpha u_f \quad \forall \alpha : |\alpha| \leq k$

Proprità:
- $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \implies D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$
- Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge a u in $\mathcal{D}'(\Omega)$, cioè $< \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n, \varphi > \to < u, \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
  allora $\sum_{n\in\mathbb{N}} D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ in $\mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$
- $< u(Ax + \underline{b}), \varphi >:=< u, \varphi(A^{-1}(y - \underline{b})) \cdot (detA)^{-1} >$ con $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), A \in \mathbb{R}^{n\times n}, detA \neq 0, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$
  In particolare dato un versore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ $< D^{\underline{v}} u, \varphi > = - < u, D^{\underline{v}} \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Oss. Ogni $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ ha una primitiva in $\mathcal{D}'(\mathcal{R})$, ovvero:
Teo. $\forall u \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}),\ \exists v \in \mathcal{D}'(\mathcal{R})$ t.c. $Dv = u$, inoltre $\forall \tilde{v} = v + c\ con\ c \in \mathbb{R} \implies D\tilde{v} = u$

Oss. $f \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $\exists g \in L^1(\mathbb{R}) : ||\frac{f(\cdot+h_n)-f(\cdot)}{h_n} - g(\cdot)||_{L^1(\mathbb{R})} \to 0\ \forall \{h_n\} \subset \mathbb{R} : h_n \to 0 \implies Df = g$

Oss. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è T-periodica con $T \neq 0$ se $< u, \varphi(\cdot) > = < u, \varphi(\cdot - T) > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Oss. Teorema di Schwarz
$\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \Omega \subseteq \mathcal{R}^n$ aperto, non nullo $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$

3.3 Distribuzioni temperate

Def. Lo **spazio di Schwarz** o delle funzioni a decrescita rapida è:
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : D^\alpha \varphi = o(|x|^{-k}) \text{ per } |x| \to \infty \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall k \in \mathbb{N}\}$

Oss. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno S.V. in cui possiamo introdurre una convergenza successionale, per cui $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è completo
$\varphi_n \to \varphi$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per $n \to \infty \iff |x|^k D^\alpha \varphi_n \to |x|^k D^\alpha \varphi$ uniformemente $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ \forall k \in \mathbb{N}$

Def. Sia $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ funzione lineare, u è **continua** se $< u, \varphi_n > \to < u, \varphi > \quad \forall ...$

Def. Lo **spazio delle distribuzioni temperate** è $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) := \{u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ lineare e continua$\}$

Oss. $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ma $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un esempio è $e^{-||x||_2^2}$
Oss. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Teo. $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ si può estendere a $\tilde{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se e solo se
$\forall \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si ha $< u, \varphi_n > \to 0 = < u, 0 >$
Oss. Equivale alla continuità di u in 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, che è sufficiente per estendere u a $\tilde{u}$ per il lemma di densità

Lemma di densità: $\forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ \ \exists \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $u_n \to v$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ per $n \to \infty$

3.4 Prodotto distribuzione-funzione

Prop. $u \in \mathcal{D}'(\Omega), \ \psi \in C^\infty(\Omega) \quad < u\psi, \varphi > := < u, \psi\varphi > \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \implies u\psi \in \mathcal{D}'(\Omega)$
Prop. $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \ \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad < u\psi, \varphi > := < u, \psi\varphi > \ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies u\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Oss. Per n=1 vale la regola di Leibniz per il prodotto $D^\alpha(u\psi) = \sum_{k \leq \alpha} \binom{\alpha}{k} D^k u \ D^{\alpha-k}\psi$

Problema di divisione:
Data $v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\psi \in C^\infty(\Omega)$ trovare $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ t.c. $\psi u = v$

4 Trasformata di Fourier

Def. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la **trasformata di Fourier** di u è la funzione $\widehat{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ $\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} u(x)\, dx$

Oss. $|\widehat{u}(\xi)| \leq ||u||_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ quindi $\widehat{u}$ è ben definita e limitata
Oss. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $u \mapsto \widehat{u}$ è ben definita e lineare

Proprietà: $\forall u \in L^1(\mathbb{R}^n),\ \forall a \in \mathbb{R}_0,\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$
1) $v(x) = u(ax) \implies \widehat{v}(\xi) = \frac{1}{|a|}\widehat{u}(\frac{\xi}{a})$
2) $v(x) = u(x - x_0) \implies \widehat{v}(\xi) = e^{-ix_0\xi}\widehat{u}(\xi)$
3) $v(x) = e^{ix_0 x}u(x) \implies \widehat{v}(\xi) = \widehat{u}(\xi - x_0)$
4) $v(x) = u(A^{-1}x)$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, detA \neq 0 \implies \widehat{v}(\xi) = |detA|\ \widehat{u}(A^T\xi)$
5) $v(x) = \overline{u(x)} \implies \widehat{v}(\xi) = \overline{\widehat{u}(-\xi)}$
6) u pari (dispari) $\implies$ $\widehat{u}$ pari (dispari)
7) u reale pari $\implies$ $\widehat{u}$ reale pari u reale dispari $\implies$ $\widehat{u}$ immaginaria dispari
Oss. Per la 4) vale: u radiale $\implies$ $\widehat{u}$ radiale

Lemma di Riemann-Lebesgue: DIM
$\forall u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ risulta $\widehat{u} \in C^0(\mathbb{R}^n)$ e $lim_{|\xi|\to\infty}\ \widehat{u}(\xi) = 0$

4.1 La trasformata di Fourier e la derivazione

Teo.1 Sia $u \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $xu \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{u} \in C^1(\mathbb{R})$ e $\frac{\partial}{\partial\xi}\widehat{u}(\xi) = -i\widehat{(xu)}(\xi)$

Teo.2 Sia $u \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $u,\ u' \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{u}'(\xi) = i\xi\widehat{u}(\xi)$

Teo.3 Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ t.c. $x_j u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\exists\partial_{\xi_j}\widehat{u} \in C(\mathbb{R}^n)$ e $\partial_{\xi_j}\widehat{u}(\xi) = -i\widehat{(x_j u)}(\xi)$

Teo.4 Sia $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ t.c. $u,\ \partial_{x_j}u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $\widehat{(\partial_{x_j}u)}(\xi) = i\xi_j\widehat{u}(\xi)$

Oss. Teo.3 (1) $\implies$ più la u si schiaccia all'infinito più $\widehat{u}$ è regolare
In particolare $||x||^n u \in L^1(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\ \forall n \in \mathbb{N}$

Oss. Teo.4 (2) $\implies$ più u è regolare più la $\widehat{u}$ si schiaccia all'infinito
In particolare $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ t.c. $u^{(j)} \in L^1(\mathbb{R})\ \forall j \in \mathbb{N} \implies \widehat{(u^{(j)})}(\xi) = (i\xi)^j\widehat{u}(\xi)$
Ovvero $\widehat{(u^{(j)})}(\xi) = o(|\xi|^j)$ per $|\xi| \to +\infty$

4.2 Inversione della trasformata di Fourier

Oss. Trovare u data $\widehat{u}$ da problemi, infatti $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^n)) \not\subset L^1(\mathbb{R}^n)$

Teo. Formula di inversione
Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ t.c. $u \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora $u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\ \widehat{u}(\xi)\ d\xi$

Def. Data una funzione v, la funzione $\check{v}$ data dalla formula di inversione si dice **antitrasformata**

Oss. In generale non vale che $(\check{\widehat{u}}) = u$, servono condizioni su u

4.3 Trasformata di Fourier per distribuzioni temperate

Def. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la **trasformata di Fourier** di u è il funzionale
$\widehat{u}(\varphi) = < \widehat{u}, \varphi > := < u, \widehat{\varphi} > = \int u\widehat{\varphi} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Teo: $\widehat{u}$ è una trasformazione temperata ($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)

Dim:
Grazie a Fubini-Tonelli $\int_{\mathbb{R}^n} u\widehat{v} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}v \quad \forall u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$, di conseguenza vale il seguente lemma:
$\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ l'applicazione lineare $\widehat{u} : v \mapsto < u, \widehat{v} > \ \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è una distribuzione temperata
Quindi $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Inoltre $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\check{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
$\mathcal{F} : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ per $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un'applicazione biunivoca e bicontinua
Ovvero $\varphi_n \to \varphi \implies \mathcal{F}(\varphi_n) \to \mathcal{F}(\varphi)$, ma anche $\mathcal{F}^{-1}(\varphi_n) \to \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$
$\widehat{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ è ben definita e lineare
Inoltre dato $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $\varphi_n \to 0$ allora essendo $\mathcal{F}$ biunivoca e bicontinua $\widehat{\varphi}_n \to 0$
Quindi $< u, \widehat{\varphi}_n > \to 0 \implies \widehat{u}$ è continua in $\varphi = 0$, ma essendo lineare $\widehat{u}$ è continua in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
Concludiamo $\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Oss. Si può provare che anche $\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ gode delle proprietà della trasformata classica ($\widehat{u} \in L^1$)

Def. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, l'**antitrasformata** $\check{u}$ di u è la distribuzione temperata $< \check{u}, \varphi > := < u, \check{\varphi} >$

Teo. $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ è lineare, biunivoca e bicontinua t.c. $\check{u} = \mathcal{F}^{-1}(u)$
Oss. $\forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ avremo $\widehat{(\check{u})} = u$

Oss. Affinchè valga la fomula integrale per l'antitraformata basta che $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$

4.4 Trasformata nello spazio $\mathbf{L^2}$

Oss. $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \implies u_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{u}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Teo. Sia $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ allora $u \in L^2(\mathbb{R}^n) \iff \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$
in tal caso vale l'identità di Plancherel $||\widehat{u}||^2_{L^2} = (2\pi)^n ||u||^2_{L^2}$

Cor. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ è biunivoca e bicontinua

Oss. Se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ non si può in generale usare la formula integrale per $\widehat{u}$
Tuttavia se considero una successione crescente $\{K_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ di compatti di $\mathbb{R}^n$, la cui unione è $\mathbb{R}^n$
Posto $u_h = \chi_{K_h} u \ \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \quad u_h \to u \ in \ L^2(\mathbb{R}^n)$
Dunque $\widehat{u}_h$ si calcola con l'integrale e se la successione delle trasformate converge q.o. allora
$\widehat{u}(\xi) = lim_{k \to \infty} \int_{K_h} e^{-i\xi x} u(x) dx$

4.5 Prodotto convoluzione e trasformata Fourier

Def. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, il **prodotto di convoluzione** è $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy \quad \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Teo. $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

Def. Siano $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, il **prodotto di convoluzione tra distribuzioni e funzioni** è l'applicazione $(u * v)(x) = < u(\cdot), v(x-\cdot) > = \int u(y)v(x-y)dy$ che è una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Oss. La definizione ha senso con l'integrale solo se u ha una funzione associata
Dentro l'integrale per u si intende la funzione, per questo si integra su $\mathbb{R}^n$

Oss. Inoltre avremo $D^\alpha(u * v) = D^\alpha u * v = u * D^\alpha v$

Oss. Nel caso $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad u * v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Teo. Valgono le seguenti:
i) $u \in L^1(\mathbb{R}^n), v \in L^2(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{u * v} = \widehat{u}\,\widehat{v}$
ii) $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{u * v} = \widehat{u}\,\widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)$
iii) $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies \widehat{u * v} = \widehat{u}\,\widehat{v} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Oss. $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ o $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n),\ g \in L^2(\mathbb{R}^n) \implies$ prod convoluzione commutativo

Oss. $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) :\ u_n \to u\ in\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) :\ v_n \to v\ in\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora
$u_n * v_n \to u * v\ in\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

4.6 Applicazioni

Esempi di EDO

Consideriamo una edo a coefficienti costanti di operatore L: $Lu(x) := \sum_{k=0}^n a_k u^{(k)}(x) = f(x)$
Per risolvere l'equazione risolviamo nel caso $f = \delta$ e troviamo una soluzione $E(x)$, dunque $LE = \delta$.
Allora, se ha senso $E * f$, vale che $L(E * f) = (LE) * f = \delta * f = f \implies u(x) = E * f$ è una soluzione
E si chiama **soluzione fondamentale** dell'operatore L

Oss. Data $-u'' + u = f\ con\ f \in L^1(\mathbb{R}) \quad E(x) := \frac{e^{-|x|}}{2}$ e $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x|}}{2} f(y)dy$
Poichè E l'abbiamo trovata con Fourier, non è l'unica soluzione
Ci sono anche le soluzioni dell'omogenea $v(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ che non sono Fourier-trasformabili

Oss. La soluzione fondamentale di $u'' + u = f$ è $\quad E(x) = \frac{sinx}{2} sign(x) \quad E * f$ ha senso se $f \in L^1$
Però bisogna risolvere il problema di divisione dell'omogenea (f=0) $(1-\xi^2)\widehat{v}(\xi) = 0$, quindi
l'integrale generale della edo ha la forma $U(x) = c_1 sinx + c_2 cosx + \int_{\mathbb{R}} E(x-y)f(y)dy$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Oss. Questa edo risolve i moti armonici, che è un contesto periodico, cioè con f e u periodiche
Teo. Ogni $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ T-periodica è temperata.
Inoltre $\forall \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con u_n T-periodica e convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, allora converge in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Equazione di Poisson

Problema: Sia Ω un aperto semplicemente connesso e sia $\underline{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un campo di forze
Sia $\underline{F}$ irrotazionale, regolare e soggetto a una distribuzione di sorgenti $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ovvero t.c. $-div\underline{F} = f$
Equivale al problema $-\Delta U = f$ in Ω questa è detta equazione di Poisson

Oss. Per risolvere $-\nabla u = f$ dobbiamo trovare la soluzione fondamentale E(x) $\implies u(x) = (E_n * f)(x)$

Oss. Le soluzioni di $-\nabla u = \delta_0$ sono: $E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} ln \frac{1}{|x|} & N = 2 \\ \frac{1}{4\pi|x|} & N = 3 \end{cases}$