

METODI ANALITICI DELLE EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Dalle lezioni del Prof. Marco Bramanti
per il corso di Ingegneria Matematica

Appunti di Simone Paloschi

Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023

Indice

1 Equazione di Laplace-Poisson	3
1.1 Preliminari su domini e identità integrali	3
1.2 Modelli fisici che portano alle equazioni di Laplace e Poisson	4
1.3 Ripasso relazione funzioni armoniche e olomorfe	5
1.4 Problemi al contorno	6
1.5 Problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio	8
1.6 Problema di Neumann sul cerchio	12
1.7 Formula integrale di Poisson per il problema di Dirichlet sul cerchio	13
1.8 Problema di Dirichlet per il laplaciano nel semipiano	16
1.9 Laplaciano su tutto lo spazio	20
1.10 Laplaciano su un dominio	25
1.10.1 Semispazio n-dim	28
1.10.2 La funzione di Green sulla sfera n-dim	29
1.11 Proprietà generali delle funzioni armoniche	31

2 Equazione del calore	36
2.1 Deduzione fisica del modello differenziale	36
2.2 Problema di Cauchy globale	38
2.3 Principi di massimo e questioni di unicità	39
2.4 Equazione del calore nel segmento	42
2.4.1 Problema di Dirichlet sul segmento	42
2.4.2 Problema di Cauchy-Neumann sul segmento	48
2.5 L'equazione del calore in tutto lo spazio	50
2.6 Equazione del calore non omogenea	56
2.7 Equazione del calore generale	61
2.8 Equazione del trasporto (Lineare)	64
3 Equazione delle onde	72
3.1 Equazione della corda vibrante	72
3.2 Problema di Cauchy-Dirichlet sul segmento per la corda vibrante	74
3.3 Problema di Cauchy globale per la corda vibrante	80
3.4 Soluzione debole per il problema di Cauchy globale per la corda vibrante	88
3.5 Modelli fisici delle onde	90
3.6 Equazione delle onde su domini limitati	91
3.7 Problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde	99
4 Teoria moderna	110
4.1 Spazi di Sobolev	110
4.2 Spazi di Hilbert, forme bilineari e problemi variazionali astratti	123
4.3 Formulazione debole del problema di Dirichlet per equazioni ellittiche	128
4.4 Soluzione debole del problema di Neumann per equazioni ellittiche	132
4.5 Soluzione debole per un operatore ellittico completo	135
4.6 Teoremi di regolarizzazione e soluzione forte	140

1 Equazione di Laplace-Poisson

1.1 Preliminari su domini e identità integrali

Def. Sia Ω un **dominio**, cioè un aperto connesso

Oss. Lo chiedo connesso così $u \in C^1(\Omega), \nabla u = 0$ in $\Omega \implies u = \text{cost}$ in Ω vale anche su $\bar{\Omega}$

DEFINIZIONE.

Ω è un **dominio di classe C^1** (o con frontiera di classe C^1) se $\forall x \in \partial\Omega$

Esistono un sistema di coordinate $(y_1, \dots, y_n) = (Y', y_n)$ con origine in x , una sfera $B(x)$ e una funzione φ definita in un intorno $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di $y' = O'$ t.c. $\varphi \in C^1(U), \varphi(O') = 0$

- 1) $\partial\Omega \cap B(x) = \{(Y', y_n) : y_n = \varphi(Y'), Y' \in U\}$
- 2) $\Omega \cap B(x) = \{(Y', y_n) : y_n > \varphi(Y'), Y' \in U\}$

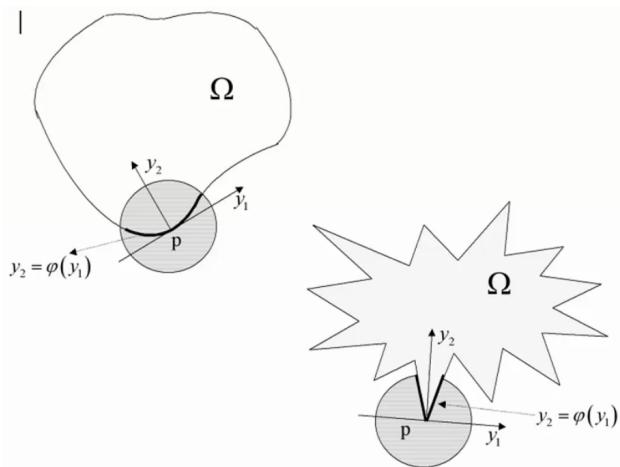
DEFINIZIONE.

f è **lipschitziana** in Ω se $\exists k > 0$ t.c. $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega$

DEFINIZIONE.

Ω è un dominio **lipschitziano** se soddisfa la def del dominio C^1 con la condizione che φ sia lipschitz

Oss. In generale i domini con punti angolosi (cubi, cilindri...) sono lipschitziani, ma non C^1



TEOREMA: Teorema della divergenza.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e lipschitz, sia $\underline{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale, allora

$$\underline{F} \in C^1(\bar{\Omega}) \implies \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{F}(x) dx = \int_{\partial\Omega} \underline{F} \cdot \hat{n}_e d\sigma$$

TEOREMA: I identità di Green.

Siano $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, Ω dominio limitato lipschitziano

$$u \in C^1(\bar{\Omega}), v \in C^2(\bar{\Omega}) \implies \int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

Def. Il termine $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla v \cdot \hat{n}_e$ prende il nome di **derivata normale**

DIM. (I identità di Green)

$$u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } \underline{G} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \nabla \cdot (\underline{u}\underline{G}) = \nabla u \cdot \underline{G} + u \nabla \cdot \underline{G}$$

$$\text{Se inoltre } \underline{G} = \nabla v \implies \nabla \cdot (\underline{u}\underline{G}) = \nabla u \nabla v + u \Delta v$$

Poiché $u \in C^1(\bar{\Omega}), v \in C^2(\bar{\Omega})$ applichiamo il teorema della divergenza

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u\nabla v) = \int_{\partial\Omega} u(\nabla v) \cdot \hat{n}_e = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$$

□

TEOREMA: II identità di Green.

Siano $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, Ω dominio limitato lipschitziano

$$u, v \in C^2(\bar{\Omega}) \implies \int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

DIM. (II identità di Green)

Differenza membro a membro tra la I identità di Green scritta con u, v e poi con v, u

$$\int_{\Omega} (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma \quad e \quad \int_{\Omega} (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

□

1.2 Modelli fisici che portano alle equazioni di Laplace e Poisson

- Equazione di Poisson $\Delta u = f$
- Equazione di Laplace $\Delta u = 0$

Oss. Se $\Delta g = 0$, allora g è detta funzione armonica

(I) Elettrostatica

Sia \bar{E} un campo elettrostatico generato da una distribuzione continua di carica $\rho(x)$ in una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

Per il teorema di Gauss per l'elettrostatica, vale che:

$$\forall A \subseteq \Omega \quad \Phi(E, \partial A) = \int_{\partial A} \bar{E} \cdot \hat{n} d\sigma = 4\pi k q_{\text{tot}}(A) = 4\pi k \int_A \rho(x) dx \quad \text{inoltre} \quad \int_{\partial A} \bar{E} \cdot \hat{n} d\sigma \stackrel{\text{teo div}}{=} \int_A \nabla \cdot \bar{E} dx$$

Quindi $\int_A (\nabla \cdot \bar{E} - 4k\pi\rho) dx = 0 \quad \text{se } (\nabla \cdot \bar{E} - 4k\pi\rho) \in C^0(A) \quad \forall A \text{ aperto, allora } \nabla \cdot \bar{E} - 4\pi k \rho = 0$

Sia u il potenziale elettrostatico $\bar{E} = \nabla u$, allora $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = 4k\pi\rho \quad \text{se } \rho = 0 \text{ (assenza di carica)} \quad \Delta u = 0$

Quindi il potenziale elettrostatico generato da una distribuzione di carica continua in una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è soluzione dell'equazione di Laplace-Poisson

Oss. Analogamente per il potenziale gravitazionale vale $\Delta u = -4G\pi\rho$

Dove ρ è la densità di massa e il segno cambia perché passa da forza attrattiva a repulsiva

(II) Fluidodinamica

Sia \bar{v} il campo delle velocità di un fluido in una regione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

Se il fluido è *incomprimibile* e il suo moto è *non vorticoso*, allora valgono: $\nabla \cdot \bar{v} = 0$ in Ω e $\text{rot } \bar{v} = 0$ in Ω
 \Rightarrow almeno localmente $\exists \psi$ potenziale di velocità t.c. $\bar{v} = \nabla \psi \Rightarrow \Delta \psi = 0$

Quindi il potenziale di velocità di un moto non vorticoso di un fluido incomprimibile è una funzione armonica

(III) Caso stazionario equazioni del calore e delle onde

(a) Sia u la temperatura in un mezzo continuo, omogeneo...

$u_t - D\Delta u = f$ dove $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $D = \text{cost}$ è il coefficiente di diffusione e f è il termine di sorgente

All'equilibrio termodinamico $u_t = 0 \Rightarrow -D\Delta u = f$ equazione di Poisson

(b) Sia $u(x, y, t)$ la posizione di una membrana elastica vibrante nel tempo (caso 2D)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = c^2 \Delta u \quad \text{nel caso stazionario} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$$

Oss. Quest'ultimo modello è suggestivo. Poiché la membrana deve avere laplaciano nullo in ogni punto, deduco che non avrà punti di massimo o di minimo assoluti, perché le derivate seconde in x e y si devono compensare, allora potrà avere solo punti di sella

1.3 Ripasso relazione funzioni armoniche e olomorfe

Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ t.c. $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Le funzioni olomorfe hanno parte reale e immaginaria che soddisfano C.-R. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Supponendo $u, v \in C^2(\Omega)$, allora posso derivare e sommare le CR per ottenere $\Delta u = 0$ e $\Delta v = 0$ in Ω

Quindi le parti reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono armoniche

Esempi:

$$(i) \quad f(z) = e^z \implies \begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y \\ v(x, y) = e^x \sin y \end{cases} \text{ sono armoniche in } \mathbb{R}^2$$

$$(ii) \quad f(z) = z^n \implies \begin{cases} u_n(x, y) = \rho^n \cos \theta \\ v_n(x, y) = \rho^n \sin \theta \end{cases} \text{ sono dette armoniche elementari nel piano}$$

Oss. Le armoniche elementari sono polinomi omogenei di grado (complessivo) n in x e y

Oss. Qualche grafico delle armoniche elementari mostra la loro caratteristica tipica di funzioni dotate di punti di sella, ma non di punti di massimo e minimo locale.

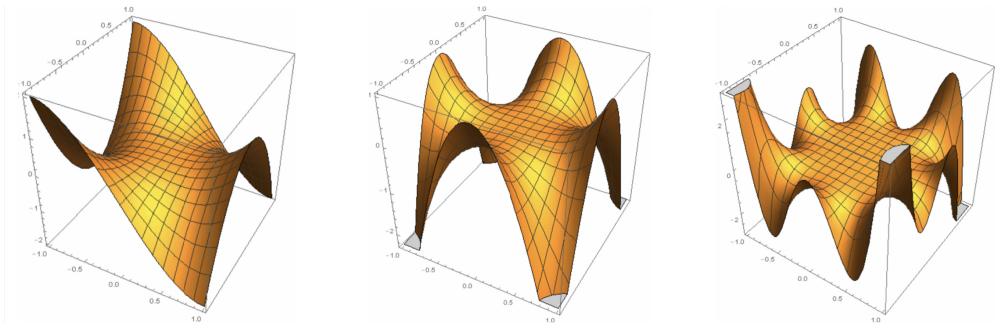


Figure 1: Grafici delle parti reali delle armoniche elementari di grado 3, 4, 7

1.4 Problemi al contorno

Oss. Per ottenere unicità serve aggiungere delle condizioni, ma avendo equazioni stazionarie le condizioni iniziali non vanno bene, quindi dovrò porre condizioni al contorno

DEFINIZIONE.

Condizioni per Poisson $\Delta u = f$ in Ω dominio limitato in \mathbb{R}^n

(1) Condizione di Dirichlet (sui valori al bordo)

$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$ esempio: vincolo il bordo della membrana a terra, quindi $u(x) = 0$ su $\partial\Omega$

(2) Condizione di Neumann (sulla derivata normale)

$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$ esempio: un corpo isolato non scambia calore, per la temperatura vale $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$

(3) Problema misto

$$\exists \Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \Omega \text{ t.c. } \Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega, \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset \text{ e} \begin{cases} u = g & \text{in } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{in } \Sigma_2 \end{cases}$$

(4) Condizione di Robin

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad \text{esempio: } u \text{ è la temperatura e } u_0 \text{ è la temp esterna, la diff } u - u_0 \neq 0 \text{ porta a } \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - u_0)$$

TEOREMA: Teorema di unicità.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e lipschitziano, considero un problema al contorno per $\Delta u = f$ in Ω con condizione (1),(2),(3) o (4), allora la soluzione u , se esiste, è unica nella classe di funzioni $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

Per la condizione di Neumann la soluzione è unica a meno di una costante additiva

Oss. La richiesta C^2 è ovvia perché è soluzione del laplaciano, mentre C^1 serve per la derivata al bordo.

Vedremo che per Dirichlet in realtà basta chiedere $C^0(\bar{\Omega})$

DIM. (Teorema di unicità)

Supponiamo u_1, u_2 soluzioni dello stesso problema al contorno, vogliamo mostrare che $u_1 = u_2$ in Ω

Sia $u = u_1 - u_2$, allora $\Delta u = 0$ perché $\Delta u_1 = \Delta u_2 = f$

Inoltre essendo u_1 e u_2 uguali al contorno, u deve soddisfare le condizioni al contorno con dato zero

Verifichiamo che per $u \in C^2(\bar{\Omega})$ con $\Delta u = 0$ in Ω t.c. soddisfa una delle condizioni con dato zero $\implies u = 0$

Vale la I identità di Green con $u = v$ $\int_{\Omega} (u \Delta v + |\nabla u|^2) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma$ e sappiamo che $\Delta u = 0$

(1) Dirichlet: $u=0$ in $\partial\Omega \implies \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0$

(2) Neumann: $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ in $\partial\Omega \implies \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0$

(3) Misto: $u = 0$ in Σ_1 , $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ in $\Sigma_2 \implies \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2} = 0$

(4) Robin: $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0$ in $\partial\Omega \implies \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \alpha u^2 d\sigma \leq 0$

In ogni caso $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq 0 \implies \nabla u = 0 \implies u = \text{cost}$ in Ω

(1) $u = 0$ in $\partial\Omega \implies u = 0$ in Ω (3) $u = 0$ in $\Sigma_1 \implies u = 0$ in Ω

(4) $u = \text{cost} \implies 0 = \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \alpha u$ in $\partial\Omega \implies u = 0$ in Ω

(2) $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ in $\partial\Omega \implies u = \text{cost}$ in $\Omega \implies u_1 = u_2 + \text{cost}$ ovvero unicità a meno di una costante

Vogliamo generalizzare al caso $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

A tale scopo definiamo Ω_ε una famiglia di domini regolari in Ω t.c. $\bigcup \Omega_\varepsilon = \Omega$ e $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \implies \Omega_{\varepsilon_2} \subset \Omega_{\varepsilon_1}$
 $u \in C^2(\Omega) \implies u \in C^2(\bar{\Omega}_\varepsilon) \forall \varepsilon$ posso applicare l'identità di Green $\int_{\Omega_\varepsilon} (u \Delta u + |\nabla u|^2) dx = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$

Posto $\Delta u = 0$ ottengo $\underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx}_A = \underbrace{\int_{\partial \Omega_\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma}_B \quad \forall \varepsilon > 0$

Per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega \implies A \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ e $B \rightarrow \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$

Possiamo quindi procedere come nel caso precedente e arrivare alla tesi

□

Oss. Di solito problemi di non unicità danno problemi di non esistenza

Infatti dato il problema al contorno delle eq di Laplace con condizione di Neumann: $\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ in } \partial\Omega \end{cases}$

Sia u soluzione, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \implies 0 = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla u dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial\Omega} g d\sigma$

Quindi affinché una soluzione esista è necessario che il dato al bordo (g) rispetti una

Condizione di compatibilità: $\int_{\partial\Omega} g = 0$

1.5 Problema di Dirichlet per il laplaciano sul cerchio

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ per } |x| < r \\ u = f \text{ per } |x| = r \end{cases} \quad \text{Sappiamo che c'è unicità nella classe } C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$$

Riformulazione del pb in coord polari per $\rho \in (0, r)$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 \\ u(r, \theta) = f(\theta) \end{cases}$

Usiamo la **tecnica della separazione delle variabili**, ovvero cerchiamo soluzioni a variabili separate:

$$u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta) \quad u_\rho(\rho, \theta) = R'(\rho)\Theta(\theta)$$

$$u_{\rho\rho}(\rho, \theta) = R''(\rho)\Theta(\theta) \quad u_{\theta\theta}(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta''(\theta)$$

Sostituendo nell'equazione, ottengo: $\begin{cases} R''(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho)\Theta''(\theta) = 0 \\ u(r, \theta) = f(\theta) \end{cases}$

Moltiplicando per $\frac{\rho^2}{R(\rho)\Theta(\theta)}$ riesco a separare le variabili, ovvero: $\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}$

Questa è un'uguaglianza tra funzioni di parametri differenti, le uniche soluzioni possibili sono costanti
 \implies posso disaccoppiare il problema:

$$(a) \rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = \lambda \quad (b) -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Riscrivo (b) e ottengo una EDO del 2° ordine: $\Theta''(\theta) + \lambda \Theta(\theta) = 0$

Bisogna anche richiedere che Θ sia 2π -periodica in θ , per il significato geometrico delle coordinate polari, se così non fosse la funzione $u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ sarebbe discontinua

Quindi richiederò $\lambda > 0$ che da radici $\pm i\sqrt{\lambda}$ e soluzione $\Theta(\theta) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\theta)$

Affinché sia 2π -periodica serve $\sqrt{\lambda} = n = 0, 1, 2, \dots$ cioè $\lambda = n^2 = 0, 1, 4, \dots$

$$(a) \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - n^2 R = 0$$

Questo è un caso particolare di EDO del 2° ordine a coefficienti non costanti chiamata **Equazione di Eulero**

che da soluzioni $R(\rho) = \rho^\alpha \implies \rho^2 \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2} + \rho \alpha \rho^{\alpha-1} - n^2 \rho^\alpha = 0 \iff (\alpha^2 - n^2)\rho^\alpha = 0$

Quindi $\alpha = \pm n$ e $R(\rho) = c_1 \rho^n + \frac{c_2}{\rho^n}$

Avevamo posto $\lambda = n > 0$, vediamo se possiamo includere $n=0$

$$\begin{aligned} \rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = 0 &\implies \rho(R')' + R' = 0 \implies \frac{d(R')}{d\rho} = -\frac{R'}{\rho} \implies \frac{d(R')}{R'} = -\frac{d\rho}{\rho} \\ &\implies \log(R') = -\log\rho + c = \log\left(\frac{c_1}{\rho}\right) \implies R(\rho) = c_1 \log\rho + c_2 \end{aligned}$$

Torno alla $u(\rho, \theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$ $R(0) = u(0, 0)$

Poiché mi interessano soluzioni regolari in $[0, r]$ escludiamo le soluzioni illimitate per $\rho \rightarrow 0^+$

$$R_n(\rho) = \begin{cases} c\rho^n & n = 1, 2, \dots \\ cost & n = 0 \end{cases} = c\rho^n \quad n = 0, 1, \dots$$

Abbiamo ottenuto una successione di soluzioni dell'equazione $\Delta u = 0$ in $|x| < R$

$$u_n(\rho, \theta) = \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

Le $a_n \cos(n\theta)$ e $b_n \sin(n\theta)$ sono armoniche elementari nel piano

Quindi per linearità, qualunque successione finita delle u_n risolve $\Delta u = 0$ sul cerchio (\forall scelta di a_n, b_n)

Per soddisfare la condizione al contorno ci serve considerare la somma delle infinite u_n :

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

Imporre la condizione al contorno significa richiedere $f(\theta) = u(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$

Faccio lo sviluppo in serie di Fourier di f in $[0, 2\pi]$

$$f(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

Quindi impongo: $a_0 = \frac{\alpha_0}{2}$; $r^n a_n = \alpha_n$; $r^n b_n = \beta_n$

Candidata soluzione : $u(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta))$ con α_n, β_n coefficienti di Fourier

Verifichiamo che la soluzione risolva il problema

Oss. In generale trovata la candidata formula risolutiva, per il rigore matematico, si dimentica tutto quello visto e si dimostra che la formala sia vera.

Devo dimostrare che questa formula sia derivabile le volte che servono affinché soddisfi l'equazione differenziale e che sia continua quanto basta perché assuma i dati al bordo e la condizione iniziale

RIPASSO: (Teoremi sulle serie di funzioni)

Teo 1: (Continuità)

Siano $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue in $[a, b]$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in $[a, b] \implies f$ è continua in $[a, b]$

Teo 2: (Integrale)

Siano $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili in $[a, b]$

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$ converge uniformemente ad f in $[a, b] \implies f$ è integrabile in $[a, b]$ e vale

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Teo 3: (Derivate)

Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni derivabili in $[a, b]$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente a f in $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge puntualmente a g in $[a, b]$

Allora f è derivabile e la sua derivata è g ($\exists f' = g$) e vale che $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$

Criterio per verificare convergenza uniforme: Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Se $\exists \{a_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \mathbb{R}$ tc: (i) $f_n(x) \leq a_n \forall x \in [a, b]$ (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

Allora si dice che la serie converge totalmente in $[a, b]$ e ciò implica che converge uniformemente

Verifichiamo sotto quali ipotesi la formula risolutiva è una soluzione valida

Iniziamo provando a maggiorare l'argomento della serie:

$$\left| \left(\frac{\rho}{r} \right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right| \leq \left(\frac{\rho}{r} \right)^n (|\alpha_n| + |\beta_n|) = *$$

$$f \in L^1(0, 2\pi) \implies |\alpha_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1} \text{ e } |\beta_n| \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1} \implies * \leq c \left(\frac{\rho}{r} \right)^n$$

$$\forall r_0 < r \text{ consideriamo il cerchio } \rho \leq r_0 \quad \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \leq \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \text{ con } \frac{r_0}{r} \in (0, 1) \implies \sum \left(\frac{r_0}{r} \right)^n < \infty$$

Quindi la serie che definisce u converge totalmente in ogni cerchio $\rho \leq r_0$ con $r_0 < r$

Proviamo ora ad applicare il teorema sulle derivate delle serie

Considero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\left(\frac{\rho}{r} \right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right)$ e ne studio l'argomento sui cerchi $\rho \leq r_0$ con $r_0 < r$

$$\left| n \frac{\rho^{n-1}}{r^n} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right| \leq \frac{n}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n-1} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq c n \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n-1} \leq c n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1}$$

Quindi su ogni cerchio $\rho \leq r_0$ con $r_0 < r$ la serie di u e le sue derivate di ogni ordine convergono totalmente, ovvero u è infinitamente derivabile e le sue derivate si possono calcolare derivando termine a termine e

$$u \text{ è } C^\infty \text{ in } |x| < r$$

Esempio del calcolo delle derivate termine a termine: $\Delta u = \sum (\alpha_n \Delta(\rho^n \cos n\theta) + \beta_n \Delta(\rho^n \sin n\theta)) = 0$

Oss. Questo vale perché $\rho^n \cos n\theta$ e $\rho^n \sin n\theta$ sono parte reale e immaginaria di z^n che è olomorfa

Abbiamo dimostrato che $\forall f \in L^1(0, 2\pi)$ la u definita dalla formula è armonica e C^∞ all'interno del cerchio

Questo ci dice che anche con un dato al bordo irregolare (anche se f discontinua), la u all'interno è C^∞

Vediamo in che senso è assunto il dato al bordo

Verifichiamo che la candidata sia soluzione classica su $B_r(0)$

DEFINIZIONE.

u è **soluzione classica** per pb di Dirichlet se $u \in C^0(\bar{\Omega})$, ovvero continua fino al bordo

(I) Se f è tale che la sua serie di Fourier converge totalmente, allora u è soluzione classica

Infatti, se $\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty$, allora la serie che definisce u converge totalmente e quindi u è $C^0(\overline{B_r(0)})$

Inoltre vale $u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta = f(\theta)$

TEOREMA.

Sia $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, regolare (C^1) a tratti, $f(0) = f(2\pi)$

Allora la sua serie di Fourier converge totalmente, quindi $u \in C^0(\overline{B_r(0)})$ ed è soluzione classica

(II) Se invece f non è una continua, ma $f \in L^2(0, 2\pi)$ vediamo che u assume il dato al bordo in senso L^2

TEOREMA.

Sia $f \in L^2(0, 2\pi)$ e la u è assegnata dalla formula risolutiva vista

$$\text{Allora } \int_0^{2\pi} |u(\rho, \theta) - f(\theta)|^2 d\theta \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow r^-$$

DIM.

$$\text{So che } f(\theta) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

$$\text{Per } \rho < r \text{ fissato } f(\theta) - u(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \right] (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Per il teorema di Pitagora in L^2 e perché $\|\sin n\theta\|_{L^2} = \|\cos n\theta\|_{L^2} = \pi$, ricavo:

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - u(\rho, \theta)|^2 d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[1 - \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \right]^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \pi}_{g_n(\rho)}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow r^-} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - u(\rho, \theta)|^2 d\theta = \lim_{\rho \rightarrow r^-} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho) \stackrel{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\rho \rightarrow r^-} g_n(\rho) = 0$$

* Posso portare limite dentro alla serie perché $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho)$ converge totalmente in $[0, r]$, infatti

$$|g_n(\rho)| \leq \pi(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \implies \sum g_n(\rho) \leq \sum \pi(\alpha_n^2 + \beta_n^2) < \infty \text{ perché } f \in L^2(0, 2\pi)$$

□

Oss. Se il dato al bordo è L^2 , allora il dato al bordo è assunto nel senso L^2 e questo basta per dire che la soluzione del problema è armonica e infinitamente derivabile all'interno del cerchio

1.6 Problema di Neumann sul cerchio

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } |x| < r \\ \frac{\partial u}{\partial n} = f & \text{per } |x| = r \end{cases} \quad \text{In coordinate polari:} \quad \begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho < r, \theta \in [0, 2\pi] \\ u_{\rho}(r, \theta) = f(\theta) & \text{per } \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Avevamo trovato la candidata soluzione per l'equazione di Laplace:

$$u(\rho, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

$u_\rho(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ Imponiamo le condizioni al bordo con lo sviluppo di Fourier di f

$$\alpha_0 = 0 \quad \alpha_n = nr^{n-1} a_n \quad \beta_n = nr^{n-1} b_n$$

Ritroviamo la condizione di compatibilità del dato al bordo del pb di Neumann: $\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$

Ritroviamo anche l'unicità a meno di una costante perché a_0 è indeterminata

Candidata soluzione : $u(\rho, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{nr^{n-1}} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$ con α_n, β_n coeff di Fourier di f

Analogamente a quanto già visto posso mostrare che u è armonica e C^∞ in $B_r(0)$

DEFINIZIONE.

u è **soluzione classica** per pb di Neumann se $u \in C^1(\bar{\Omega})$

TEOREMA.

Se f è continua, regolare a tratti, $f(0) = f(2\pi)$, che implica $\sum |\alpha_n| + |\beta_n| < \infty$

Allora la serie delle derivate prime di u converge puntualmente in $B_r(0)$ e la u soddisfa classicamente il problema di Neumann

1.7 Formula integrale di Poisson per il problema di Dirichlet sul cerchio

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \rho < r \\ u(r, \theta) = f(\theta) \end{cases} \quad u(\rho, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \\ \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \end{cases}$$

Affinché u assuma il dato al bordo in senso classico abbiamo richiesto $f \in C^0([0, 2\pi]), f(0) = f(2\pi)$

e f regolare a tratti, ma vorremmo rilassare quest'ultima condizione, che è limitante

Riscriviamo la soluzione classica in formulazione integrale esplicitando i coefficienti di Fourier

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \underbrace{[\cos(n\varphi) \cos(n\theta) + \sin(n\varphi) \sin(n\theta)]}_{\cos[n(\theta-\varphi)]} d\varphi$$

Vorrei scambiare la serie e l'integrale. Per il teorema sull'integrale delle serie posso farlo per $\rho < r$ se la serie converge uniformemente, ovvero se f è integrabile e limitata in $[0, 2\pi]$

$$u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos[n(\theta - \varphi)] \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi) k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi$$

DEFINIZIONE.

$u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} f(\varphi) k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi$ è detta **formula di rappresentazione integrale**

Calcoliamo $k(\rho, \gamma)$ con $\gamma = \theta - \varphi$

$$\begin{aligned} k(\rho, \gamma) &= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos n\gamma = \left\{ \left\{ \frac{\rho}{r} \cos \theta = \operatorname{Re} \left[\frac{\rho}{r} e^{i\theta} \right] \implies \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos n\gamma = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^n e^{in\gamma} \right] \right\} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r} e^{i\gamma} \right)^n \right] \right\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{i\gamma}} - 1 \right) \right] = \{ \{ \text{algebra dei numeri complessi} \} \} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \gamma} = k(\rho, \gamma) = \text{Nucleo di Poisson sul cerchio} \end{aligned}$$

I passaggi fatti dimostrano il seguente:

TEOREMA.

$\forall f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile e limitata

La $u(\rho, \theta)$ assegnata dalla formula risolutiva per serie del pb di Dirichlet è uguale a:

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = \text{formula integrale di Poisson}$$

Conseguenze:

- Dato che per f limitata e integrabile la formula integrale equivale a quella per serie $\forall f \in L^1 \cap L^\infty(0, 2\pi) = L^\infty(0, 2\pi)$ la u data dalla formula integrale è C^∞ e armonica all'interno del cerchio
- Dato che il denominatore del nucleo k è positivo su ogni cerchio $\rho \leq r_0$ con $r_0 < r$, la $k(\rho, \theta)$ è C^∞ e positiva

- Valutiamo il problema $\begin{cases} \Delta u = 0 & \rho < r \\ u = 1 & \rho = r \end{cases}$

la u assegnata dalla serie è soluzione classica e unica: $u \equiv 1 = \int_0^{2\pi} 1 \cdot k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi \quad \forall \theta$

Oss. Utilizzando queste proprietà possiamo migliorare le ipotesi e dimostrare il seguente:

TEOREMA.

Sia $f \in C^0([0, 2\pi])$, $f(0) = f(2\pi)$ e $u(\rho, \theta) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi$
Allora $u(\rho, \theta) \rightarrow f(\theta)$ per $\rho \rightarrow r^- \ \forall \theta$

Quindi la formula di Poisson assegna la soluzione classica al pb di Dirichlet per ogni dato al bordo continuo

DIM.

$$u(\rho, \theta) - f(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi - f(\theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi}_1 = \int_0^{2\pi} k(\rho, \theta - \varphi)[f(\varphi) - f(\theta)] d\varphi$$

$$\implies |u(\rho, \theta) - f(\theta)| \leq \int_0^{2\pi} k(\rho, \theta - \varphi)|f(\varphi) - f(\theta)| d\varphi = *$$

Per la continuità di f , se fissiamo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta$ tc $|\varphi - \theta| < \delta \implies |f(\varphi) - f(\theta)| < \varepsilon$ quindi spezziamo *

$$* = \int_{[0, 2\pi], |\varphi - \theta| < \delta} + \int_{[0, 2\pi], |\varphi - \theta| \geq \delta} = A_\delta + B_\delta$$

$$A_\delta \leq \varepsilon \int_{[0, 2\pi], |\varphi - \theta| < \delta} k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi \leq \varepsilon \underbrace{\int_0^{2\pi} k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi}_1 = \varepsilon$$

$$B_\delta \leq 2 \max|f| \int_{[0, 2\pi], |\varphi - \theta| \geq \delta} k(\rho, \theta - \varphi) d\varphi$$

$$|\varphi - \theta| \geq \delta \implies \cos(\theta - \varphi) \leq \cos \delta \implies k(\rho, \theta - \varphi) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\delta)} \xrightarrow{\rho \rightarrow r^-} \frac{1}{2\pi} \frac{0}{2r^2(1 - \cos \delta)}$$

$$\implies k(\rho, \theta - \varphi) \rightarrow 0 \text{ per } \rho \rightarrow r^- \quad \text{quindi } B_\delta < \varepsilon \text{ per } \rho \text{ abbastanza vicino a } r$$

Posso concludere che $|u(\rho, \theta) - f(\theta)| < 2\varepsilon$ per ρ vicina a r

□

Attraverso gli integrali definiti a meno di un parametro si può dimostrare, senza usare la formula per serie, che se $f \in L^1[0, 2\pi]$, allora $u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} (r^2 - \rho^2) \int_0^{2\pi} \frac{f(\varphi)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} d\varphi$ è armonica e C^∞ per $\rho < r$

RIPASSO: Integrali dipendenti da un parametro

DEFINIZIONE.

$u : I \rightarrow \mathbb{R}$ **Integrale dipendente da un parametro** è del tipo:

$$u(x) = \int_{\Omega} F(x, y) dy \quad \text{con } x \in I \subseteq \mathbb{R}, y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ e } F(x, \cdot) \in L^1(\Omega)$$

Vediamo i seguenti teoremi, che sono conseguenze della convergenza dominata di Lebesgue

Teorema 1: Supponiamo che

- i) $x \mapsto F(x, y)$ sia continua in x_0 per quasi ogni $y \in \Omega$
- ii) $\exists g \in L^1(\Omega)$ tc $|F(x, y)| \leq g(y) \forall x \in I$ e per q.o. $y \in \Omega$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \int_{\Omega} \lim_{x \rightarrow x_0} F(x, y) dy$

Teorema 2: Supponiamo che

- i) $\exists \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ per q.o. $y \in \Omega$ e $\forall x$ in un intorno di x_0
- ii) $\exists g \in L^1(\Omega)$ tc $\left| \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \right| \leq g(y)$ per q.o. $y \in \Omega$ e $\forall x$ in un intorno di x_0

Allora $\exists u'(x_0) = \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y) dy$

Applicazione alla formula integrale di Poisson:

$k(\rho, \theta)$ è C^∞ per $\rho < r$ e in ogni cerchio $\rho \leq r_0 < r$ ogni derivata di k è limitata

Quindi possiamo applicare il teorema 2 e portare dentro all'integrale di Poisson la derivata, ovvero

$$\left| \frac{\partial k}{\partial \rho}(\rho, \theta - \varphi) f(\varphi) \right| \leq c |f(\varphi)| \in L^1(0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} k(\rho, \theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\partial k}{\partial \rho}(\rho, \theta - \varphi) f(\varphi) d\varphi \quad \forall \rho < r$$

$\Rightarrow u$ infinitamente derivabile, ovvero $u \in C^\infty$

1.8 Problema di Dirichlet per il laplaciano nel semipiano

RIPASSO: Trasformata di Fourier in \mathbb{R}^n

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definisco la trasformata di Fourier di f : $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$

L'operatore trasformata di Fourier è $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f} \quad \mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_*^0(\mathbb{R}^n)$

Oss: Con * si intende che le funzioni tendono a zero all'infinito

Proviamo che $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \widehat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$:

Per $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, la funzione $\xi \mapsto f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ è continua e L^1 , infatti $|f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$

Quindi per il teorema sull'integrale dipendente da un parametro $\widehat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$

Teorema: $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \mathcal{F}(f * g)(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$

Trasformata della derivata:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)(\xi) = -4\pi^2 \xi_j^2 \widehat{f}(\xi) \quad \mathcal{F}(\Delta f)(\xi) = -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{f}(\xi)$$

Trasformata esponenziale:

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|})(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi\xi^2} \quad \text{in } \mathbb{R} \quad \forall a > 0$$

Consideriamo il problema $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{per } x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases}$ ovvero nel semipiano $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

Usiamo la **Tecnica della trasformata di Fourier** (rispetto a x, tenendo y come parametro)

$$\mathcal{F}_x(f) = \widehat{f}(\xi, y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

$\mathcal{F}_x(u_{xx} + u_{yy}) = \mathcal{F}_x(u_{xx}) + \mathcal{F}_x(u_{yy}) = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + \widehat{u}_{yy}(\xi, y) = 0$ è una EDO del 2° ordine in y

$$f'' = k^2 f \implies f(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

$$\text{Quindi } \widehat{u}_{yy} = 4\pi^2 \xi^2 \widehat{u} \implies \widehat{u}(\xi, y) = c_1(\xi) e^{2\pi|\xi|y} + c_2(\xi) e^{-2\pi|\xi|y} \quad y > 0$$

Poiché per trovare u dovrò antitrasformare \widehat{u} , cerco soluzioni $\widehat{u}(\xi, y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow +\infty \implies c_1(\xi) \equiv 0$

Oss. Questa possiamo vederla come una seconda condizione al contorno, la condizione a zero non basta

Impongo le condizioni al bordo: $u(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad c_2(\xi) = \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi)$

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}$$

La x-trasformata della soluzione che cerco è così univocamente determinata

Poiché $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$, cerco $k(x, y)$ tc $\mathcal{F}_x(k(x, y)) = e^{-2\pi|\xi|y}$ avrò $\widehat{u} = \widehat{f} \cdot \widehat{k} \implies u(x, y) = (k(\cdot, y) * f(\cdot))(x)$

$$\mathcal{F}(e^{-a|x|}) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 \xi^2} \quad \text{per il teorema di inversione ho: } \mathcal{F}\left(\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 x^2}\right) = e^{-a|\xi|} \implies a = 2\pi y > 0$$

$$\implies k(x, y) = \frac{4\pi y}{4\pi^2 y^2 + 4\pi^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \text{Nucleo di Poisson per il semipiano}$$

$$\text{Candidata soluzione} = u(x, y) = (k(\cdot, y) * f)(x) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2}$$

Verifichiamo che la soluzione risolva il problema

(I) Regolarità di u , ovvero $u \in C^\infty$ e armonica

Mostrare che u è derivabile, è un problema di derivazione sotto integrale

In ogni regione del tipo $y \geq \delta$ con $\delta > 0$, il denominatore di $\frac{y}{(x-t)^2 + y^2}$ è $(x-t)^2 + y^2 \geq \delta^2 > 0$

Quindi le derivate di qualsiasi ordine, rispetto a x e y , della frazione sono limitate in ogni regione $y \geq \delta > 0$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{y}{\pi} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} \right) \right| \leq c |f(t)| \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{e così via per ogni derivata}$$

$\implies u(x, y) \in C^\infty$ nel semipiano S e le sue derivate si calcolano derivando sotto all'integrale

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

Quindi, poiché $\frac{1}{z}$ è olomorfa in $\mathbb{C}/\{0\}$ $\frac{y}{(x-t)^2 + y^2}$ è armonica in $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$

$$\implies \Delta u(x, y) = \Delta \left(\frac{y}{\pi} \frac{1}{(x-t)^2 + y^2} \right) = 0 \text{ in } S$$

Concludiamo che $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ la $u(x, y)$ assegnata dall'integrale di Poisson è C^∞ e ha $\Delta u = 0$ in S

(II) In che senso e sotto quali ipotesi è assunto il dato di Dirichlet al bordo

Per procedere abbiamo bisogno di introdurre i **nuclei regolarizzanti**

Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; $\Phi \geq 0$; $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) dx = 1$

Definiamo $\{\Phi_\varepsilon\}$ la famiglia dei mollificatori (o nuclei regolarizzanti)

$$\Phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \implies \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\varepsilon dx = 1$$

Oss. Quindi i mollificatori hanno sempre massa unitaria

e per $\varepsilon \rightarrow 0$ si concentrano sempre più nell'origine

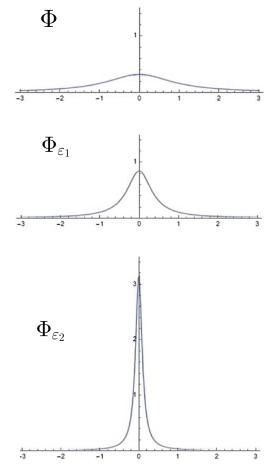
TEOREMA.

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\Phi_\varepsilon * f \rightarrow f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Se $f \in L^P(\mathbb{R}^n)$, allora $\Phi_\varepsilon * f \rightarrow f$ in $L^P(\mathbb{R}^n)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_*^0(\mathbb{R}^n)$, allora $\Phi_\varepsilon * f \rightarrow f$ uniformemente

Se inoltre $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $\Phi_\varepsilon * f \in C^\infty$ e quindi Φ_ε è una regolarizzante di f



Esempio di mollificatori:

In \mathbb{R} $\Phi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} > 0$ e $\int_{\mathbb{R}} \Phi dx = 1$ $\Phi_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$ sono detti nuclei di Poisson

Esempio di applicazione dei nuclei di Poisson a due funzioni, che nonostante siano:

f_1 non derivabile e f_2 discontinua, generano famiglie $\{\Phi_{\varepsilon}\}$ di funzioni C^{∞}

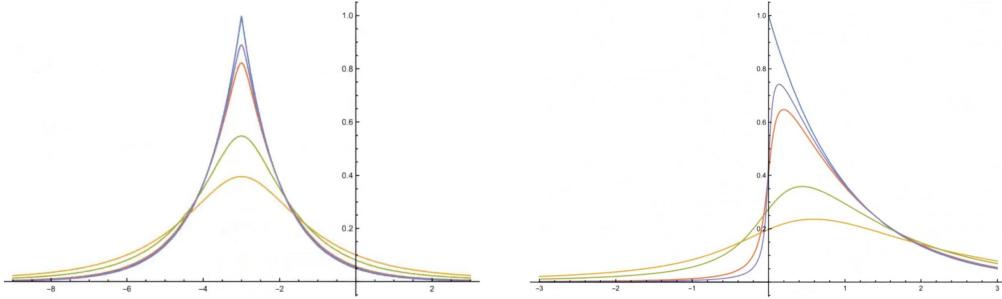


Figure 2: In azzurro sono plottate le funzioni $f_1 = e^{-|x+3|}$ $f_2 = e^{-x} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$

Possiamo applicare il teorema dei mollificatori sulla candidata soluzione $u(x, y) = (k_y * f)(x)$

Dove $k(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ e $k_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$

i) $f \in L^1(\mathbb{R}) \implies u(x, y) \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} f$ per $y \rightarrow 0^+$ ii) $f \in L^P(\mathbb{R}) \implies u(x, y) \xrightarrow{L^P(\mathbb{R})} f$ per $y \rightarrow 0^+$

iii) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_*^0(\mathbb{R}) \implies u(\cdot, y) \rightarrow f$ uniformemente in \mathbb{R} per $y \rightarrow 0^+ \implies u$ è soluzione classica del pb di D

Vediamo graficamente la soluzione $u(x, y)$ del problema di Dirichlet nel semipiano per due funzioni

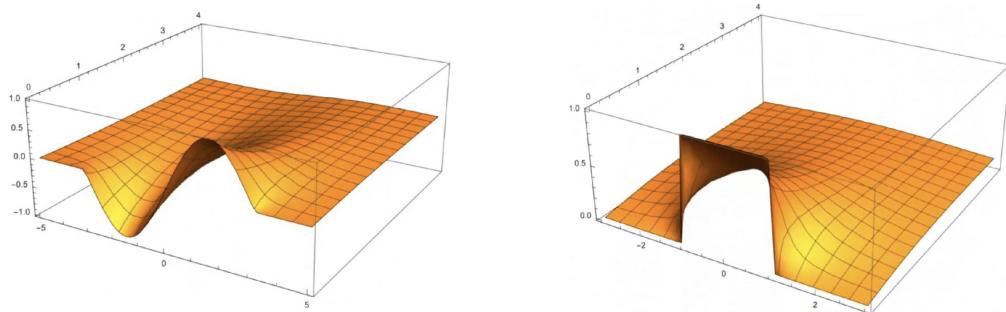


Figure 3: $f_3 = \sin(x) \mathbf{1}_{\{|x| < \pi\}}$ $f_4 = \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}$

f_3 è una funzione $L^1 \cap C_*^0$ infatti $u(x, y)$ converge uniformemente per $y \rightarrow 0^+$

f_4 è integrabile e continua ($L^1 \cap C_*^0$) tranne in alcuni punti, vediamo senza verificarlo che $u(x, y)$ converge uniformemente tranne in quei punti

Osservazione sull'unicità:

Poiché il semipiano è un dominio illimitato, non vale il teorema di unicità senza qualche ipotesi all'infinito

Si può dimostrare che nella classe di funzioni limitate vale l'unicità

Controesempio: $u(x, y) = e^x \sin y$ risolve il problema $\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$

Anche $u \equiv 0$ risolve lo stesso problema, quindi non c'è unicità

1.9 Laplaciano su tutto lo spazio

Consideriamo l'equazione $\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n per $n \geq 2$

Oss. Il problema equivale a trovare il potenziale elettrostatico u generato da una distribuzione di carica f
Semplifichiamo il problema e iniziamo cercando la soluzione per una carica nell'origine, poi troviamo la soluzione per una carica in un punto x qualsiasi e infine generalizziamo per una distribuzione qualsiasi

Vogliamo quindi iniziare risolvendo i problemi $-\Delta u = \delta_0$ e $-\Delta u = \delta_x$

Chiamiamo Γ la **soluzione fondamentale** per il laplaciano: $-\Delta \Gamma = \delta_0$

Una volta trovata Γ sarà facile risolvere il problema con termine noto qualsiasi f

Oss. Poiché una carica genera un potenziale radiale, proviamo a trovare una candidata soluzione di Γ tra le soluzioni radiali di $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $u(\underline{x}) = f(|\underline{x}|)$ $f(\rho) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\rho = \sqrt{\sum x_j^2}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{2\sqrt{\sum x_j^2}} = \frac{x_i}{\rho} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{\rho} \right) = \frac{\rho - x_i \frac{x_i}{\rho}}{\rho^2} = \frac{\rho^2 - x_i^2}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\underline{x}) = f'(\rho) \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = f'(\rho) \frac{x_i}{\rho} \implies \frac{\partial u^2}{\partial x_i^2} = f''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + f'(\rho) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{\rho} \right) = f''(\rho) \frac{x_i^2}{\rho^2} + \frac{f'(\rho)}{\rho^3} (\rho^2 - x_i^2)$$

$$\implies \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^2}{\partial x_i^2} = \frac{f''(\rho)}{\rho^2} \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{\rho^2} + \frac{f'(\rho)}{\rho^3} \underbrace{\sum_{i=1}^n (\rho^2 - x_i^2)}_{n\rho^2 - \rho^2} = f''(\rho) + \frac{n-1}{\rho} f'(\rho)$$

Abbiamo trovato il laplaciano di una funzione radiale, poniamo $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$f''(\rho) = \frac{1-n}{\rho} f'(\rho) \text{ in } (0, +\infty) \implies \frac{df'}{d\rho} = \frac{1-n}{\rho} f' \implies \int \frac{df'}{f'} = (1-n) \int \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\implies \log|f'| = (1-n)\log(\rho) + c = \log(\rho)^{1-n} + c$$

$$f'(\rho) = \frac{c}{\rho^{n-1}} \implies f(\rho) = c \int \frac{d\rho}{\rho^{n-1}} = \begin{cases} \frac{c}{\rho^{n-2}} + c_3 & n \geq 3 \\ c \log(\rho) + c_2 & n = 2 \end{cases}$$

Quindi a meno di una costante additiva, le funzioni radiali, armoniche in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono:

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{c}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \\ c \log|x| & n = 2 \end{cases}$$

Adesso vogliamo trovare Γ , ovvero vogliamo determinare le costanti c , affinché sia $-\Delta\gamma = \delta_0$

RIPASSO: Distribuzioni

$D(\mathbb{R}^n)$ = spazio delle funzioni test = $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ = insieme delle funzioni C^∞ sui compatti

Una **distribuzione** in \mathbb{R}^n è un funzionale lineare $T : D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ continuo in un senso opportuno

L'insieme delle distribuzioni di \mathbb{R}^n è $D'(\mathbb{R}^n)$

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ posso considerare la distribuzione $T_f : \varphi \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$

Delta di Dirac $\delta_0 : D(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0) \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

La derivata di una distribuzione $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ è la distribuzione $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ tc $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$

In particolare se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} T_f, \varphi \right\rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$

Il laplaciano di una distribuzione è la distribuzione ΔT tc $\langle \Delta T, \varphi \rangle = \langle T, \Delta \varphi \rangle$

In particolare se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\langle \Delta T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \Delta \varphi(x) dx$

$$\Delta\gamma = \delta \implies \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \text{ si ha: } \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle = \langle \Delta T_\gamma, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(x) \Delta \varphi(x) dx$$

Dato che $\gamma(x) = \frac{c}{|x|^{n-2}}$ in \mathbb{R}^n per $n \geq 3$, allora cerchiamo una costante $c \in \mathbb{R}$ tc:

$$-\Delta\gamma = \delta \text{ cioè } - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

RIPASSO: Coordinate sferiche in \mathbb{R}^n

In dimensione n , si possono introdurre delle coordinate sferiche (ρ e $n - 1$ angoli)

$$x_1 = \rho\Phi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \dots x_n = \rho\Phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \quad \text{dove } \rho = |x| = \sqrt{\sum x_i^2}$$

$$\text{Avremo: } d\underline{x} = dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = \rho^{n-1} \omega(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}$$

$$\int_{|\underline{x}| < R} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_0^R \rho^{n-1} \left[\int_{\Sigma_1} f(\dots) \underbrace{\omega(\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}}_{d\sigma_1} \right] d\rho = \int_0^R \left[\int_{\partial B_\rho(0)} f(\dots) d\sigma_\rho \right] d\rho$$

Dove Σ_1 è la superficie in cui variano gli angoli φ_i , ovvero la sfera unitaria di \mathbb{R}^n e $d\sigma_1$ è la misura di Σ_1
 $d\sigma_\rho = \rho^{n-1} d\sigma_1$ è la misura della sfera di raggio ρ , ovvero la dilatata della sfera di raggio 1

Integrale di una funzione radiale:

$$\int_{|x| < R} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_0^R f(\rho) \rho^{n-1} \underbrace{\left[\int_{\Sigma_1} \omega(\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}) d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} \right]}_{\omega_n = \text{misura sfera di raggio 1 = costante}} d\rho = \omega_n \int_0^R \rho^{n-1} f(\rho) d\rho$$

Esempio:

$$n = 2 \implies \int_{\sqrt{x^2 + y^2} < R} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = 2\pi \int_0^R \rho f(\rho) d\rho \implies \omega_2 = 2\pi$$

$$n = 3 \implies \dots = 4\pi \int_0^R \rho^2 f(\rho) d\rho \implies \omega_3 = 4\pi$$

Oss. Non c'è una formula generale per trovare gli ω_n

TEOREMA: Soluzione fondamentale del laplaciano in \mathbb{R}^n .

La funzione $\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n(n-2)|x|^{n-2}} & n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \log|x| & n = 2 \end{cases}$ risolve l'equazione $-\Delta\Gamma = \delta_0$ in $D'(\mathbb{R}^n)$

DIM. (Soluzione fondamentale del laplaciano in \mathbb{R}^n nel caso $n \geq 3$)

Eravamo arrivati a dire che $-\Delta\gamma = -\Delta\frac{c}{|x|^{n-2}} = \delta_0$

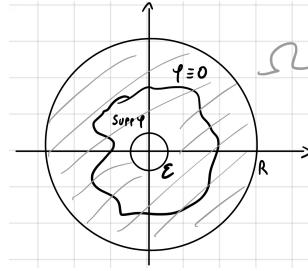
$\Delta u = \bar{c}\delta_0$ in $D'(\mathbb{R}^n)$ significa che $\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle \bar{c}\delta_0, \varphi \rangle = \bar{c}\varphi(0) \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

Dobbiamo mostrare che $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta\varphi dx = \langle u, \Delta\varphi \rangle = \langle \Delta u, \varphi \rangle = \bar{c}\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e trovare \bar{c}

Poiché c'è il laplaciano possiamo dimostrare nel caso più generale $\forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

Oss. Vorrei usare la II identità di Green sull'integrale, ma ho problemi in $\underline{x} = \underline{0}$, allora spezzo l'integrale di modo da poter applicare Green sulla corona sferica

Fissato φ , $\exists B_R(0) \supseteq \text{supp } \varphi$ e $B_\varepsilon(0) \subseteq \text{supp } \varphi$



$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx &= \int_{|x| < R} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = \\ &= \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx + \int_{\Omega = \{\varepsilon < |x| < R\}} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = A_\varepsilon + B_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A_\varepsilon + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} B_\varepsilon \end{aligned}$$

Mostriamo che $A_\varepsilon \rightarrow 0$

$$|A_\varepsilon| \leq \int_{|x| < \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-2}} |\Delta \varphi(x)| dx \leq \max_{\mathbb{R}^n} |\Delta \varphi| \underbrace{\int_{|x| < \varepsilon} \frac{dx}{|x|^{n-2}}}_{*}$$

$$\begin{aligned} * &\text{ è un integrale radiale, quindi } * = \omega_n \int_0^\varepsilon \rho^{n-1} \frac{1}{\rho^{n-2}} d\rho = \omega_n \int_0^\varepsilon \rho d\rho = \frac{\varepsilon^2}{2} \omega_n \\ \implies |A_\varepsilon| &\leq \left(\max_{\mathbb{R}^n} |\Delta \varphi| \frac{\omega_n}{2} \right) \varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{} 0 \end{aligned}$$

$$B_\varepsilon = \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = \{\text{II Green}\} = \int_{\Omega} \underbrace{\Delta \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right)}_0 \varphi(x) dx + \int_{\partial \Omega} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) dS(x)$$

$$\int_{\partial \Omega} = \int_{|x|=\varepsilon} + \int_{|x|=R} \quad \text{ma su } |x|=R \text{ ho } \varphi=0 \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial n}=0 \text{ poiché sono fuori dal supporto}$$

$$\implies B_\varepsilon = \int_{|x|=\varepsilon} \left[\frac{1}{|x|^{n-2}} \nabla \varphi(x) \hat{n} - \varphi(x) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \hat{n} \right] dS(x)$$

Siamo sul bordo interno di Ω quindi il versore uscente è $\hat{n} = -\frac{x}{|x|}$

$$\text{Inoltre possiamo calcolarci } \nabla \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) = \frac{(2-n)}{|x|^{n-1}} \cdot \frac{x}{|x|}$$

$$\implies B_\varepsilon = \int_{|x|=\varepsilon} \left(-\frac{1}{|x|^{n-2}} \nabla \varphi(x) \frac{x}{|x|} + \varphi(x) \underbrace{\frac{(2-n)}{|x|^{n-1}} \frac{x}{|x|}}_1 \cdot \frac{x}{|x|} \right) dS(x) = C_\varepsilon + D_\varepsilon$$

$$|C_\varepsilon| \leq \int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-2}} |\nabla \varphi(x)| dS(x) \leq \max_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi| \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \underbrace{\int_{|x|=\varepsilon} dS(x)}_{\varepsilon^{n-1} \cdot \omega_{n-1}} = c \cdot \varepsilon \implies C_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) \frac{(2-n)}{|x|^{n-1}} dS(x) = \quad \text{dato che } |x| = \varepsilon \text{ è costante su questa superficie} \\ &= \frac{(2-n)}{\varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) dS(x) = (2-n) \cdot \omega_n \cdot \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^{n-1} \omega_n} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) dS(x)}_* \end{aligned}$$

* è la media integrale di φ su $\partial B_\varepsilon(0)$ e tende a $\varphi(0)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ verifichiamolo:

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(x) dS(x) \right) - \varphi(0) \right| &= \left| \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dS(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{|x|=\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)| dS(x) \rightarrow 0 \quad \text{per continuità di } \varphi \\ \implies D_\varepsilon &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2-n)\omega_n \varphi(0) \implies \Delta \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} \right) = (2-n)\omega_n \delta_0 \implies -\Delta \left(\frac{1}{(2-n)\omega_n |x|^{n-2}} \right) = \delta_0 \end{aligned}$$

□

COROLARIO 1: Soluzione dell'equazione di Poisson in \mathbb{R}^n

$$\forall f \in C_0^2(\mathbb{R}^n) \text{ se poniamo } u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy \text{ allora } \Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Oss. Grazie alla soluzione fondamentale, riusciamo a trovare una soluzione classica dell'equazione di Poisson, almeno per ogni f regolare

Oss. La soluzione non è unica, infatti basta aggiungere a u una funzione armonica in tutto lo spazio per ottenere un'altra soluzione

DIM. (Soluzione dell'equazione di Poisson)

$$u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y) dy = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \Gamma(y) dy$$

Scambio perché Γ non è regolare nel polo e non riesco a farci le derivate, mentre $f \in C_0^2$

Inoltre grazie al teorema di integrazione sotto integrale, poiché $|\Delta_x[f(x-y)]| \leq \text{cost}$ sul supporto di f

$$\Delta u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x [f(x-y)] \Gamma(y) dy$$

Posto $\varphi_x(y) = f(x-y)$ avrò: $\Delta_y \varphi_x(y) = \Delta(f(x-y)) = (\Delta f)(x-y)$

Per il teorema sulla soluzione fondamentale so che $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y) \Delta \varphi(y) dy = -\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$

$$\implies \Delta u(x) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \varphi_x(y) \Gamma(y) dy = \varphi_x(0) = f(x)$$

□

1.10 Laplaciano su un dominio

Dal caso generale $\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n cerchiamo di arrivare a: $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Cominciamo vedendo una relazione soddisfatta dalla soluzione fondamentale su un dominio:

TEOREMA: Formula dei tre potenziali.

$\forall \Omega$ dominio limitato e lipschitziano, $\forall u \in C^2(\bar{\Omega})$ vale la formula di rappresentazione:

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \Gamma(x-\sigma) \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) dS(\sigma) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-\sigma) u(\sigma) dS(\sigma) \quad \forall x \in \Omega$$

Dove i tre addendi sono rispettivamente i potenziali: newtoniano, di strato semplice e di strato doppio

Oss. Non vediamo la dimostrazione, poiché è analoga a quella appena vista

Oss. Questa formula è un buon inizio, ma non basta. Infatti per un problema di Dirichlet non riuscirei a sostituire $\frac{\partial u}{\partial n}$ nel secondo integrale, mentre per un problema di Neumann, non conoscerei il terzo integrale

Per ottenere una formula utile alla soluzione di un problema di Dirichlet dobbiamo sostituire la soluzione fondamentale $\Gamma(x-y)$ con la funzione di Green $G(x,y)$

DEFINIZIONE.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio, si dice **funzione di Green** con polo in $x \in \Omega$ una funzione $G(x,y)$, se esiste, tc

$$\begin{cases} \Delta G(x,\cdot) = -\delta_x & \text{in } \Omega \\ G(x,\cdot) = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Oss. Il significato fisico della $G(x,\cdot)$ è quello del potenziale elettrostatico generato da una carica puntiforme in x e "messo a terra" su $\partial\Omega$

Oss. $-\Delta \Gamma = \delta_0$ $-\Delta_y \Gamma(x-y) = \delta_x$ La G e la Γ risolvono la stessa equazione differenziale, ma al

bordo la Γ fa quello che fa, mentre la G è imposta nulla, quindi posso pensare che ci sia una relazione tra le due

Per cercare $G(x, y)$ posso pensare di scriverla nella forma $G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Phi(x, y)$

Dove Φ è una funzione incognita, che per quello che abbiamo detto su G e Γ , sarà del tipo:

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x, y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \Phi(x, y) = \Gamma(x - y) & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

La Φ così definita è regolare, infatti è uguale a $\Gamma = \frac{1}{(n-2)\omega_n|x-y|^{n-2}}$ solo sul bordo dove $x - y \neq 0$

Perché $x \in \Omega$ e $y \in \partial\Omega$

Quindi se so risolvere il pb di Dirichelet su Ω per ogni dato al bordo regolare, allora so calcolare la $G(x, y)$

Oss. Si può dimostrare il seguente, anche se non lo useremo

TEOREMA.

$\forall \Omega$ limitato e lipschitziano il pb di Dirichlet ha soluzione classica $\forall f \in C(\partial\Omega)$

Quindi in particolare: \forall dominio limitato e lipschitziano la funzione di Green esiste

Inoltre si dimostra che: $G(x, y) > 0 \quad \forall x, y \in \Omega$ ed è simmetrica, cioè $G(x, y) = G(y, x)$

TEOREMA.

Siano Ω un dominio limitato e lipschitziano, $G(x, y)$ la funzione di Green e $u \in C^2(\bar{\Omega})$, allora:

$$u(x) = - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma) u(\sigma) dS(\sigma)$$

DIM.

Mostriamo che l'equazione con Green segue dall'equazione dei tre potenziali e dalla relazione tra G e Γ

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Gamma(x - y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \Gamma(x - \sigma) \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) dS(\sigma) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x - \sigma) u(\sigma) dS(\sigma) \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

$$G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Phi(x, y) \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \Delta_y \Phi(x, y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \Phi(x, y) = \Gamma(x - y) & y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Scriviamo la II id Green su Ω per le funzioni $u(y)$ e $y \mapsto \Phi(x, y)$

$$\int_{\Omega} [u(y) \underbrace{\Delta_y \Phi(x, y)}_0 - \Delta u(y) \Phi(x, y)] dy = \int_{\partial\Omega} \left[u(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, \sigma) - \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) \Phi(x, \sigma) \right] dS(\sigma)$$

$$\int_{\Omega} \Delta u(y) \Phi(x, y) dy + \int_{\partial\Omega} \left[u(\sigma) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, \sigma) - \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) \Phi(x, \sigma) \right] dS(\sigma) = 0 \quad (2)$$

Sommendo membro a membro la (1) e la (2), ottengo:

$$u(x) = - \int_{\Omega} \Delta u(y) \underbrace{[\Gamma(x-y) - \Phi(x, y)]}_{G(x,y)} dy - \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \underbrace{\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial n}(x-\sigma) - \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, \sigma) \right]}_{\frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma)} d\sigma +$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(\sigma) \underbrace{[\Gamma(x-\sigma) - \Phi(x, \sigma)]}_{G(x,\sigma)=0} d\sigma$$

□

Quindi per il problema: $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Abbiamo trovato una **candidata formula risolutiva**: $u(x) = - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma) u(\sigma) dS(\sigma)$

Verifica delle ipotesi della soluzione

TEOREMA.

Se Ω è limitato e lipschitziano, $g \in C(\partial\Omega)$

Allora $u(x) = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma) g(\sigma) d\sigma$ è soluzione classica di $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

DEFINIZIONE.

Il **nucleo di Poisson** per Ω è la funzione $P(x, \sigma) = - \frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma) = -(\nabla_y G(x, y) \cdot \hat{n})_{y=\sigma \in \partial\Omega}$

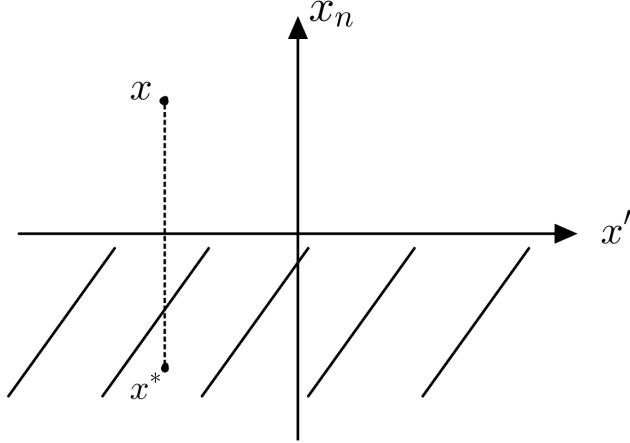
Per domini Ω di forma particolarmente semplice, si riesce a calcolare esplicitamente la funzione di Green e quindi il nucleo di Poisson, ci interessano due casi: il semispazio e la sfera in \mathbb{R}^n

Oss. Questi domini sono la generalizzazione del semipiano e cerchio del in \mathbb{R}^2

In cui avevamo infatti trovato il nucleo di Poisson e la formula integrale di Poisson

1.10.1 Semispazio n-dim

Definiamo $x \in \mathbb{R}^n$ $x = (x', x_n)$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x_n \in \mathbb{R}^n$ $\Omega = \{(x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$



$$\text{Stiamo cercando } G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Phi(x, y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n|x - y|^{n-2}} - \Phi(x, y)$$

Oss. Vediamo $\Gamma(x - \cdot)$ come il potenziale generato da una carica puntiforme in x e stiamo cercando una $\Phi(x^*, \cdot)$ che sia uguale a Γ in $x_n = 0$, l'idea è quella di prendere una carica simmetrica rispetto all'asse (rappresentato dalle ascisse nel disegno), che avrà un potenziale uguale sull'asse

Per trovare $\Phi(x, y)$ usiamo il **metodo delle immagini** o tecnica di riflessione:

Sia x^* il punto riflesso di x , cioè $x = (x', x_n) \implies x^* = (x', -x_n)$

Infatti se consideriamo $\Phi(x, y) = \Gamma(x^* - y)$, ottengo che:

$$\Gamma(x - y) - \Gamma(x^* - y) = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \left[\frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{1}{|x^* - y|^{n-2}} \right] = 0 \quad \text{per } y \in \partial\Omega$$

Questo è nullo perché x e x^* sono equidistanti dai punti dall'asse delle ascisse (ovvero il bordo)

Inoltre dato che $\frac{1}{|x^* - y|^{n-2}}$ equivale all'armonica $\frac{1}{|y|^{n-2}}$ traslata in x^* e il denominatore non si annulla mai, allora $\Delta_y \Gamma(x^* - y) = 0$

\implies La funzione di Green per il semispazio è: $G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Gamma(x^* - y)$

Quindi il nucleo di Poisson è:

$$P(x, \sigma) = -\frac{\partial G}{\partial n}(x, \sigma) = -\left(-\frac{\partial}{\partial y_n} [G(x, y)]|_{y=(y', 0)} \right)$$

$$\text{Fatti i conti, si trova: } P(x, \sigma) = -\frac{2x_n}{\omega_n(|x' - y'|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Questa formula vale per $n \geq 2$ infatti se sostituisco $n = 2$, otteniamo lo stesso nucleo che avevamo ottenuto per il semipiano con la trasformata di Fourier

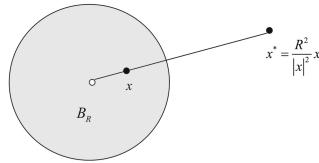
1.10.2 La funzione di Green sulla sfera n-dim

Consideriamo la sfera $B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^n \quad n \geq 3$

Oss. $n=2$ fa eccezione, ma lo conosciamo già

Come per il semispazio, vogliamo costruire $G(x, y) = \Gamma(x - y) - \Phi(x, y)$

Si utilizza anche in questo caso un'opportuna riflessione: $x^* = \frac{R^2}{|x|^2}x \quad \forall x \in B_R(0)$



Utilizzando l'inversione sferica, si definisce:

$$G(x, y) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left\{ \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \left(\frac{R}{|x|} \frac{1}{|x^*-y|} \right)^{n-2} \right\}$$

Oss. È evidente che si annulli prendendo un punto sulla sfera, dove avrà $x^* = x$

Per $x = 0$ questa perde di significato. Attraverso il limite, definisco:

$$G(0, y) = \frac{1}{\omega_n(n-2)} \left\{ \frac{1}{|y|^{n-2}} - \frac{1}{R^{n-2}} \right\}$$

Si può dimostrare che questa è la funzione di Green per la sfera di \mathbb{R}^n per $n \geq 3$

Troviamo il nucleo di Poisson in \mathbb{R}^n :

$$P(x, \sigma) = -\frac{\partial}{\partial n} G(x, y) \Big|_{y=\sigma} = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x - \sigma|^n}$$

La candidata formula risolutiva per il problema: $\begin{cases} \Delta u = 0 & |x| < R \\ u(x) = f(x) & |x| = R \end{cases}$ è

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(\sigma)}{|x - \sigma|^n} dS(\sigma) = \text{formula integrale di Poisson}$$

Oss. Avremo x sempre interno alla sfera e y che si muove sul bordo, quindi x e y "non si toccano mai"

E quindi con una funzione appena continua la formula è ben definita

La formula si può traslare a una sfera $B_R(x_0)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(x_0) \\ u(x) = f(x) & \partial B_R(x_0) \end{cases}$$

$$u(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_r(x_0)} \frac{f(\sigma)}{|x - \sigma|^n} dS(\sigma)$$

TEOREMA.

$$\forall f \in C^0(\partial B_R(x_0)) \quad \forall n \geq 2$$

La funzione $u(x)$ assegnata dalla formula di Poisson integrale traslata in x_0 è $C^\infty(B_R(x_0)) \cap C^0(\overline{B_R(x_0)})$

E risolve il problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(x_0) \\ u = f & \text{in } \partial B_R(x_0) \end{cases}$$

Ovvero u è una soluzione classica del pb di Dirichlet ed è C^∞

DIM. (Traccia della dim)

Devo valutare le derivate di u . Con teorema di derivazione sotto integrale si mostra che $u \in C^\infty(B_R(x_0))$

Per mostrare che u è armonica: $\Delta u = \int_{\partial B_R(x_0)} \Delta_x P(x, \sigma) f(\sigma) d\sigma = 0$ si verifica che $\Delta_x P(x, \sigma) = 0$

$$P(x, \sigma) = -\Delta_y G(x, y) \cdot \underline{n}(y) \Big|_{y=\sigma \in \partial B_R(x_0)}$$

$$\implies \Delta_x P(x, \sigma) = \Delta_x (-\Delta_y G(x, y) \cdot \underline{n}(y)) = -\Delta_y (\Delta_x G(x, y)) \cdot \underline{n}(y) = 0$$

So che per definizione $\Delta_y G(x, y) = -\delta_x$ e so che $G(x, y) = G(y, x)$

Quindi $\Delta_x G(x, y) = -\delta_y(x)$

Però $y \in \partial B_R(x_0)$ e $x \in B_R(x_0) \implies x \neq y \implies \delta_y(x) = 0$ quindi u è anche armonica

La dim del fatto che $u(x) \rightarrow f(\sigma)$ per $x \rightarrow \sigma$ si fa con una tecnica simile a quella vista nel caso del cerchio, sfruttando il fatto che: $\int_{\partial B_R(x_0)} P(x, \sigma) dS(\sigma) = 1$ e che $P(x, \sigma) > 0$

□

Oss. In generale queste proprietà derivano dal fatto che P sia un nucleo di Poisson, ma non si usa la sua formula analitica per dimostrarle

Oss. Abbiamo enunciato la formula di Green nel caso $n \geq 3$, perché per $n = 2$ è diversa.

Quando però ricavo in $n \geq 3$ il nucleo di Poisson dalla formula di Green ottengo lo stesso nucleo che si ottiene in $n = 2$ (non mostriamo i procedimenti per $n = 2$)

Oss. Il caso particolare delle funzioni armoniche sulla sfera in \mathbb{R}^n , che da soluzione C^∞ , diventerà un tassello

fondamentale nella risoluzione delle armoniche nel caso "generale"

1.11 Proprietà generali delle funzioni armoniche

TEOREMA: Proprietà della media.

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n , $u \in C^2(\Omega)$ tc $\Delta u = 0$ in Ω

Allora su ogni sfera $B_R(x_0) \subseteq \Omega$ si ha:

$$(i) \quad u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy$$

$$(ii) \quad u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS(y)$$

Dove con $|\Omega|$ si intende la misura di Ω sulla dimensione "giusta"

Si può sostituire nelle formule i valori delle misure:

$$\text{In } \mathbb{R}^n \quad |B_R(x_0)| = |B_R(0)| = \int_{B_R(0)} 1 dx = \omega_n \int_0^R \rho^{n-1} d\rho = \omega_n \frac{R^n}{n}$$

$|\partial B_R(x_0)| = \omega_n R^{n-1}$ che è facile da ricordare pensandolo come la derivata della misura della sfera

DIM. (Proprietà della media)

$$\text{Proviamo che } u(x_0) = \Phi(R) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS(y)$$

$$\Phi(R) = \left[\begin{array}{l} y = x_0 + R\sigma \quad \sigma \in \partial B_1(0) \\ dS(y) = R^{n-1} dS(\sigma) \end{array} \right] = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0 + R\sigma) R^{n-1} dS(\sigma)$$

$$\text{Allora derivando sotto integrale } \Phi'(R) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla u(x_0 + R\sigma) \cdot \sigma dS(\sigma)$$

Ma sulla sfera di centro origine e raggio 1, $\sigma = n_e$ perché equivale al versore del cerchio

$$\begin{aligned} \Phi'(R) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial n}(x_0 + R\sigma) dS(\sigma) = \left[\begin{array}{l} x_0 + R\sigma = y \\ dS(\sigma) = \frac{1}{R^{n-1}} dS(\sigma) \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n}(y) dS(y) \stackrel{\text{teo div}}{=} \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{B_R(x_0)} \underbrace{\Delta u(y)}_0 dy = 0 \end{aligned}$$

Quindi $\Phi'(R) = 0$ cioè il valore della media $\Phi(R) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x_0)} u(y) dS(y)$ non dipende dal raggio

In particolare, per ogni R per cui ha senso $\Phi(R) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u(y) dS(y) = u(x_0)$

Perché la media integrale sulle sfere con la misura della sfera che tende a zero è u
Questo dimostra la (ii)

Si calcola l'integrale sulla palla piena, ovvero la (i), partendo dall'integrale sulla superficie, ovvero dalla (ii)

$$\begin{aligned} \frac{n}{\omega_n \mathbb{R}^n} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy &= \frac{n}{\omega_n \mathbb{R}^n} \int_0^R \left[\int_{\partial B_\rho(x_0)} u(y) dS(y) \right] d\rho \stackrel{(ii)}{=} \frac{n}{\omega_n R^n} \int_0^R u(x_0) \underbrace{|\partial B_\rho(x_0)|}_{\omega_n \rho^{n-1}} d\rho \\ &= u(x_0) \frac{n}{R^n} \int_0^R \rho^{n-1} d\rho = u(x_0) \frac{n}{R^n} \frac{R^n}{n} = u(x_0) \end{aligned}$$

□

Oss. In questa dimostrazione abbiamo usato semplicemente il teorema della divergenza e le coordinate sferiche, non abbiamo usato nessuna proprietà complicata delle funzioni armoniche, avremmo potuto dimostrarla appena introdotte le funzioni armoniche

Conseguenze della formula di media:

Oss. Si vuole dimostrare che una funzione armonica può assumere massimi e minimi solo al bordo (a meno che non sia costante in tutto lo spazio)

Oss. Dimostriamo questo principio in generale, non solo per le funzioni armoniche

TEOREMA: Principio del massimo.

Sia Ω un dominio di \mathbb{R}^n e sia $u \in C^0(\Omega)$ che soddisfa la proprietà di media su ogni sfera $\overline{B_R(x_0)} \subseteq \Omega$

Allora se u assume massimo o minimo assoluto in un punto di Ω , la u è costante

DIM. (Principio del massimo)

Supponiamo che u assuma, ad esempio, massimo assoluto M in un punto $x_0 \in \Omega$

$$u(x_0) = M \geq u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

Sia $B_R(x_0) \subseteq \Omega$ mostriamo, per cominciare che $u(x) = M \quad \forall x \in B_R(x_0)$

Se per assurdo, u non fosse costante in $B_R(x_0)$, esisterebbe $\bar{x} \in B_R(x_0)$ tc $u(\bar{x}) < M$

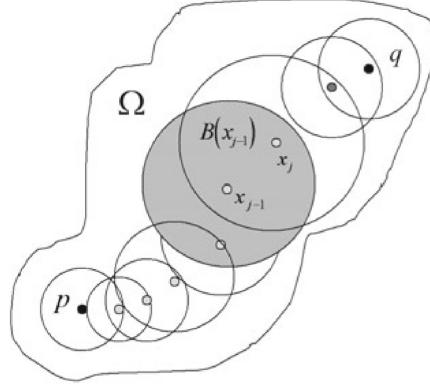
$$\text{So che } M = u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} u(y) dy$$

Essendo u continua, per la permanenza del segno $\exists r > 0$ tc $B_r(\bar{x}) \subset B_R(x_0)$ e $u(x) < M \quad \forall x \in B_r(\bar{x})$

$$\implies u(y) < M \quad y \in B_r(\bar{x}) \quad u(y) \leq M \quad y \in B_R(x_0)/B_r(\bar{x})$$

$$\implies M = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \left(\underbrace{\int_{B_r(\bar{x})} u(y) dy}_{< M|B_r(\bar{x})|} + \underbrace{\int_{B_R(x_0)/B_r(\bar{x})} u(y) dy}_{\leq M|B_R(x_0)/B_r(\bar{x})|} \right) < \frac{M}{|B_R(x_0)|} (|B_r(\bar{x})| + |B_R(x_0)/B_r(\bar{x})|)$$

Ma dato che $B_r(\bar{x}) \cup B_R(x_0)/B_r(\bar{x}) = B_R(x_0)$ otteniamo $M < M$ che è assurdo



A questo punto ho dimostrato che nella prima sfera $u(x) = M$ è costante, ma posso iterare il procedimento: posso prendere un qualsiasi punto della prima sfera e dire che un'altra sfera centrata in quel punto è anch'essa costante a M

Poiché Ω è connesso, di sfera in sfera, posso "invadere" tutta Ω e dimostrare la tesi □

COROLLARIO 1:

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n

Allora la soluzione del problema $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ è unica nella classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$

DIM.

Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ sono soluzioni dello stesso problema

Per linearità la funzione $u = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ e risolve il pb $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Poiché $\Delta u = 0$ in Ω , u soddisfa la proprietà della media

Poiché Ω è limitato e $u \in C^0(\bar{\Omega})$ u assume max e min assoluti in $\bar{\Omega}$

Per il principio di max, u assume max e min assoluto su $\partial\Omega$ (oppure è costante)

Ma dato che sul bordo u è zero allora $u \equiv 0$ e quindi vale l'unicità □

COROLLARIO 2: Dipendenza continua per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace

Siano Ω dominio limitato e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione di $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ con $g \in C^0(\partial\Omega)$

Allora $\max_{x \in \Omega} |u(x)| \leq \max_{\sigma \in \partial\Omega} |g(\sigma)|$

In particolare se $\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \Omega \\ u_1 = g_1 & \partial\Omega \end{cases}$ e $\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \Omega \\ u_2 = g_2 & \partial\Omega \end{cases}$ Posso dire che $\|u_1 - u_2\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \|g_1 - g_2\|_{C^0(\partial\Omega)}$

Oss. Questo corollario mi dice che se voglio trovare una buona approssimazione per la soluzione, mi basta valutare l'approssimazione sul bordo e così facendo ottengo il massimo errore su tutto Ω

COROLLARIO 3:

Se $f \in C^0(\partial B_R(x_0))$, la u assegnata dall'integrale di Poisson è l'unica soluzione di $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(x_0) \\ u = f & \text{su } \partial B_R(x_0) \end{cases}$ nella classe $C^2(B_R(x_0)) \cap C^0(\overline{B_R(x_0)})$

Oss. Siamo finalmente riusciti a generalizzare l'unicità da $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ a $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

Oss. Concludiamo la catena logica generalizzando $u \in C^\infty$ dalle geometrie particolari (cerchio e semipiano) agli aperti qualsiasi

TEOREMA: Regolarità delle funzioni armoniche.

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $u \in C^2(\Omega)$ tc $\Delta u = 0$ in Ω allora $u \in C^\infty(\Omega)$

DIM. (Regolarità delle funzioni armoniche)

Sia $\overline{B_R(x_0)} \subseteq \Omega$ mostriamo che $u \in C^\infty(B_R(x_0))$ (questo implicherà $u \in C^\infty(\Omega)$)

Consideriamo il problema $\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(x_0) \\ v = u & \text{su } \partial B_R(x_0) \end{cases}$

la soluzione v , assegnata dall'integrale di Poisson, è unica e $C^\infty(B_R(x_0))$

È evidente che anche u risolva lo stesso problema. Per l'unicità $v = u$ in $B_R(x_0)$ e $u \in C^\infty(B_R(x_0))$

Oss. Dato che u è derivabile infinite volte in ogni sfera contenuta in Ω , allora lo è anche in Ω

□

Vediamo un'altra conseguenza del teorema della media

TEOREMA: Inverso della media.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $u \in C^0(\Omega)$ che soddisfa la formula di media $\forall \overline{B_R(x_0)} \subseteq \Omega$

Allora $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω

Oss. Quindi le proprietà di media sono veramente un modo alternativo di identificare le funzioni armoniche

DIM. (Inverso della media)

Siano $\overline{B_R(x_0)} \subseteq \Omega$ e v la soluzione di $\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(x_0) \\ v = u & \text{su } \partial B_R(x_0) \end{cases}$

v , armonica, soddisfa la proprietà di media. u soddisfa la proprietà di media

Allora $v - u$ soddisfa la prapr. di media e quindi assume max e min assoluti in $\overline{B_R(x_0)}$ sul bordo $\partial B_R(x_0)$

Ma in $\partial B_R(x_0)$ $v - u = 0$, quindi $u = v$ in $B_R(x_0)$

$\Rightarrow u \in C^\infty(B_R(x_0))$ e $\Delta u = \Delta v = 0$ in $B_R(x_0)$

Per le genericità della sfera (ovvero dato che vale su ogni sfera in Ω) ho che $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω

□

2 Equazione del calore

2.1 Deduzione fisica del modello differenziale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un dominio che rappresenta un mezzo continuo in cui voglio studiare la temperatura $u(x, t)$

Sia $V \subseteq \Omega$ una generica regione di Ω , voglio trovare l'equazione di bilancio del calore nella regione V

Sia $e(x, t)$ la densità di energia interna nel continuo.

So che la densità è proporzionale alla temperatura $e(x, y) = c u(x, t)$

L'energia termica totale nella regione V è: $\int_V e(x, t) \rho(x, t) dx$ dove ρ è la densità di massa

Il tasso istantaneo di variazione dell'energia interna in V è: $\frac{d}{dt} \int_V c u(x, t) \rho(x, t) dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (c u \rho)(x, t) dx$

L'energia interna in V può variare per:

i) Energia prodotta o sottratta in V

Posto $r(x, t)$ = tasso istantaneo di calore prodotto o sottratto in (x, y) per unità di volume, allora avrò che il tasso istantaneo di calore prodotto o sottratto in tutto V è $\int_V r(x, t) \rho(x, t) dx$

ii) Saldo totale del flusso di calore entrante-uscente attraverso ∂V

Posto $\underline{q}(x, t)$ = densità di flusso termico, allora il saldo del flusso di calore è:

$$-\int_{\partial V} \underline{q}(x, t) \cdot \underline{n}_e dS(x) = -\int_V \nabla \cdot \underline{q}(x, t) dx$$

Complessivamente abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (c u \rho)(x, t) dt &= \int_V (r \rho)(x, t) dx - \int_V \nabla \cdot \underline{q}(x, t) dx \\ \implies \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} (c u \rho) + \nabla \cdot \underline{q} - r \rho \right) dx &= 0 \end{aligned}$$

Poiché questo deve essere vero $\forall V \subseteq \Omega$, ne segue che l'integranda è nulla in Ω

Quindi $\frac{\partial}{\partial t} (c u \rho) + \nabla \cdot \underline{q} = r \rho$

Vediamo da cosa dipende \underline{q} :

i) Dalla diffusione del calore, dal corpo più caldo a quello più freddo

Questo da un contributo parallelo e contrario al gradiente della temperatura, ovvero

$$\underline{q}(x, t) = -k(x) \nabla u(x, t) \quad \text{dove } k \text{ è il coefficiente di conduzione termica}$$

Vale sempre $k(x) > 0$, inoltre k è una funzione se il corpo non è omogeneo

Il corpo potrebbe non essere neppure isotropo e in tal caso avremo $\underline{q} \not\parallel -\nabla u$ e quindi $\underline{q}(x, t) = -A(x, t)\nabla u(x, t)$

Dove A è una matrice simmetrica definita positiva, questo implica che l'angolo tra \underline{q} e $-\nabla u$ rimane acuto

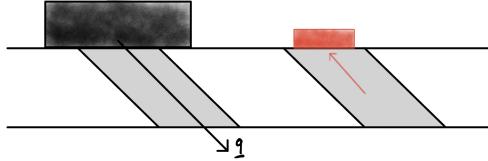


Figure 4: Siano i rettangoli zone calde e la sbarra con parti grigie conduttori e bianche isolanti. \underline{q} andrà nella direzione nera e non nella rossa

Poniamo $\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u) - \nabla(k(x) \cdot \nabla u) = r\rho$ (non consideriamo il caso con la matrice)

ii) Dalla convezione, cioè dallo spostamento di materie calde $\underline{q}(x, t) = \underline{v} \cdot \underline{u}$

Quindi: $\frac{\partial}{\partial t}(c u \rho) - \nabla \cdot (k(x) \nabla u + \underline{v} \cdot \underline{u}) = r \rho$ = equazione di diffusione e trasposto del calore

Supponiamo per semplicità che $c = \text{costante}$ e che il corpo sia omogeneo e isotopo $\rho = k = \underline{v} = \text{cost}$

Otteniamo: $c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u - \underline{v} \cdot \nabla u = r\rho$ e dividendo per $c\rho$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_D - \underbrace{\frac{k}{c\rho} \Delta u}_{\text{eq di diffusione}} - \underbrace{\frac{1}{c\rho} \underline{v} \cdot \nabla u}_\text{eq di trasporto} = \frac{r}{c} \quad \text{dove } D > 0 \text{ è il coefficiente di conducibilità o diffusione}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{eq di diffusione}} - \underbrace{\frac{D\Delta u}{c\rho}}_{\text{eq di trasporto}} = \underbrace{f(x, t)}_{\text{termine di sorgente}}$$

Quando si parla di equazione del calore si intende quella senza trasporto:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u}_H = f$$

Oltre che a descrivere la diffusione del calore, lo stesso modello può descrivere la diffusione di una sostanza in un solvente, dove $u(x, t)$ è la concentrazione del soluto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u + \underline{c} \cdot \nabla u + \gamma u = f$$

dove γu , con $\gamma > 0$ è il termine di reazione tra solvente e soluto

Nel contesto delle equazioni stazionarie, dove u non varia, troveremo la classe di equazioni

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + \underline{c} \cdot \nabla u + du = f$$

Equazione del 2° ordine stazionaria "in forma di divergenza"

Occupiamoci dell'equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(x, t)$$

Che tipo di problemi al contorno si possono studiare per queste equazioni?

2.2 Problema di Cauchy globale

Problema: $\begin{cases} Hu = f & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$

Dove $u(x, 0) = g(x)$ è la condizione di Cauchy, che è posta in questo modo perché l'equazione differenziale se vista nel tempo è del primo ordine

Lo spazio naturale in cui cercare soluzioni è quello delle u continue in (x, t) , per cui esistono continue le derivate $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$ con $i, j = 1 \dots n$

Che si indicherà con l'insieme $C^{2,1}$ = funzioni derivabili con continuità 2 volte rispetto allo spazio e 1 volta rispetto al tempo

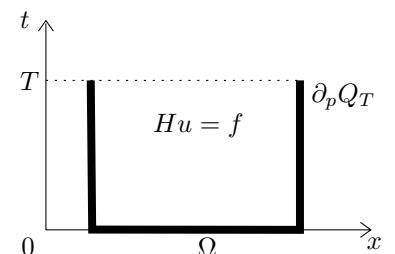
Se ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è dominio limitato, posso studiare il problema: $\begin{cases} Hu = f & x \in \Omega, t \in (0, T) \\ u(x, 0) = h(x) & x \in \Omega \\ + \text{condizioni al contorno per } x \in \partial\Omega, t \in (0, T) \end{cases}$

Dove le condizioni al contorno potranno essere di Dirichlet, Neumann, miste, robin ...

Oss. Per pb Neumann porre $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, equivale a chiedere l'isolamento termico

Studiamo l'equazione $Hu = f$ sul "cilindro" $Q_T = \Omega \times (0, T)$

Oss. Per il cilindro vediamo che sono importanti le relazioni sulla "base" e sulla "superficie laterale", non mi interessa il "coperchio", che sarebbe equivalente a porre condizioni sul dato finale



Definiamo frontiera parabolica del cilindro Q_T , la $\partial_p Q_T = \partial\Omega \times [0, T] \cup \Omega \times \{0\}$

Ovvero la figura formata dai 3 segmenti in grassetto

Osservazioni sulle simmetrie dell'equazione del calore:

- È invariante per traslazioni nello spazio e nel tempo, ovvero se $Hu(x, t) \equiv 0$, allora $H[u(x+x_0, t+t_0)] \equiv 0$
- È invariante per riflessioni in x , ovvero se $Hu(x, t) \equiv 0$, allora $H[u(-x, t)] \equiv 0$
- Non è invariante per riflessione in t , infatti:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta \right) (u(x, -t)) = \left(-\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u \right) (x, -t) \implies \frac{\partial u}{\partial t} + D\Delta u = f$$

Questa è detta "equazione del calore Retrograda" o "all'indietro" e si può mostrare che non ha soluzione

Oss. Quest'ultima condizione ci dice che la freccia del tempo è importante per l'equazione del calore, perché c'è irreversibilità. (A differenza dell'equazione delle onde dove la direzione del tempo non importa)

2.3 Principi di massimo e questioni di unicità

Pensiamo all'equazione del calore $Hu = 0 \quad u_t - D\Delta u = 0 \quad u_t = D\Delta u$

Pensiamo che $u(\cdot, t)$ abbia un certo grafico

Quindi nei punti con concavità negativa avrà $\Delta u \leq 0 \implies u_t \leq 0 \implies u$ tende a scendere

Mentre nei punti con concavità positiva avrà $\Delta u \geq 0 \implies u_t \geq 0 \implies u$ tende a salire

Oss. In generale andando avanti nel tempo il grafico tenderà ad appiattirsi e quindi ci aspettiamo che u assuma massimi e minimi assoluti su $\partial_p Q_T$

TEOREMA: Principio del max debole.

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ e $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$

(Per Weierstrass u ha max e min assoluti in $\overline{Q_T}$)

- (1) Se $Hu \leq 0$ in Q_T allora u assume il suo massimo assoluto su $\partial_p Q_T$
- (2) Se $Hu \geq 0$ in Q_T allora u assume il suo minimo assoluto su $\partial_p Q_T$
- (3) Se $Hu = 0$ in Q_T allora $\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\partial_p Q_T} |u|$

DIM. (Principio del max debole)

Basta provare (1), poi applicando (1) a $-u$ ottengo (2) e facendo (1)+(2), ottengo (3)

Prima di iniziare cerchiamo di capire l'idea della dimostrazione:

Iniziamo provando a dimostrare una tesi più forte, ovvero che il max assoluto di u sia assunto solo su $\partial_P Q_T$
 Proviamo a dimostrare ciò per assurdo, ovvero posto (\bar{x}, \bar{t}) il massimo assoluto provo a porre il massimo
 in A (dentro al cilindro) o in B (sul coperchio)

In A: massimo, vuol dire derivata rispetto al tempo nulla per Fermat, ovvero $u_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0$

$$\text{Massimo} \implies \text{concavità negativa} \implies \Delta u \leq 0 \implies Hu = (u_t - D\Delta u)(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$$

Per ipotesi avevamo $Hu \leq 0$, per renderlo un assurdo modifichiamo la u tc $Hu < 0$, per fare ciò basta fare
 $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t \implies Hu_\varepsilon = \underbrace{Hu}_{\leq 0} - \varepsilon < 0$

In B: u può essere non derivabile, poiché u è solo C^0 fino al bordo e quindi non potremmo fare gli stessi ragionamenti sul coperchio.

Allora andiamo a lavorare appena sotto al coperchio su $T - \varepsilon$

Dimostrazione:

Fissiamo $\varepsilon > 0$, sia $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ tc $Hu \leq 0$ in Q_T

Sia $u_\varepsilon = u(x, t) - \varepsilon t \implies Hu_\varepsilon < 0$ in Q_T e $u_\varepsilon \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$

Sia (\bar{x}, \bar{t}) un punto di massimo assoluto per u_ε su $\bar{Q}_{T-\varepsilon}$

Supponiamo per assurdo che (\bar{x}, \bar{t}) non stia su $\partial_P Q_{T-\varepsilon}$ e quindi siamo in uno dei seguenti:

- i) $(\bar{x}, \bar{t}) \in Q_{T-\varepsilon}$
- ii) $\bar{t} = T - \varepsilon$ $\bar{x} \in \Omega$

In entrambi i casi, vale che:

- $\Delta u_\varepsilon(\bar{x}, \bar{t}) \leq 0$ perché c'è concavità negativa
- $(u_\varepsilon)_t \geq 0$ perché i) $(u_\varepsilon)_t = 0$ per Fermat, mentre ii) $(u_\varepsilon)_t \geq 0$ perché si avvicina a T , dove ho il massimo

Quindi $Hu_\varepsilon(\bar{x}, \bar{t}) = (u_t - D\Delta u)(\bar{x}, \bar{t}) \geq 0$, che è assurdo perché ho $Hu_\varepsilon < 0$ in Q_T

Quindi $\max_{\bar{Q}_{T-\varepsilon}} |u_\varepsilon| = \max_{\partial_P Q_{T-\varepsilon}} |u_\varepsilon| \quad \forall \varepsilon > 0$

Per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ uniformemente in Q_T , quindi $\max_{\bar{Q}_T} |u| = \max_{\partial_P Q_T} |u|$

□

Oss. Abbiamo quindi dimostrato per u_ε il principio massimo forte, ovvero il massimo è assunto solo al bordo,

invece per u abbiamo $Hu \leq 0$ e quindi nulla esclude che u assuma il massimo anche all'interno, per questo è chiamato principio debole

COROLLARIO 1: Teorema di unicità

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e $Q_T = \Omega \times (0, T)$

Nella classe di funzioni $C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$, la soluzione di un problema di Cauchy-Dirichlet: $\begin{cases} Hu = 0 & \text{in } Q_T \\ u = g & \text{su } \partial_p Q_T \end{cases}$
se esiste è unica

Oss. Per $u = g$ si intende $u(x, 0) = g_1(x) \ x \in \Omega$ e $u(x, t) = g_2(x) \ x \in \partial\Omega \ t \in (0, T)$

DIM.

Se esistono due soluzioni $u_1, u_2 \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ dello stesso problema

Allora per linearità la $u = u_1 - u_2$ risolve $\begin{cases} Hu = 0 & Q_T \\ u = 0 & \partial_p Q_T \end{cases}$

Per il principio del massimo, vale $\max_{Q_T} |u| = \max_{\partial_p Q_T} |u| \implies u \equiv 0 \implies u_1 = u_2$

□

COROLLARIO 2: Teorema del confronto

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ e $u_1, u_2 \in C^2(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$

Se $Hu_1 \leq Hu_2$ in Q_T e $u_1 \leq u_2$ su $\partial_P Q_T$

Allora $u_1 \leq u_2$ in Q_T

DIM.

Sia $u = u_1 - u_2 \implies Hu \leq 0$ quindi per il principio del max u assume massimo sulla frontiera

$$u = u_1 - u_2 \leq 0 \text{ su } \partial_P Q_T \implies u \leq 0 \text{ in } Q_T \implies u_1 \leq u_2 \text{ in } Q_T$$

□

COROLLARIO 3: Stima di stabilità

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato e $Q_T = \Omega \times (0, T)$

Sia $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^0(\bar{Q}_T)$ soluzione del problema $\begin{cases} Hu = f & \text{in } Q_T \\ u = g & \text{su } \partial_p Q_T \end{cases}$

Allora $\max_{\bar{Q}_T} |u| \leq \max_{\partial_p Q_T} |g| + T \max_{\bar{Q}_T} |f|$

DIM.

$$\text{Sia } v_1(x, t) = u(x, t) + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$$

$$Hv_1 = Hu + \max_{\bar{Q}_T} |f| = f + \max_{\bar{Q}_T} |f| \geq 0 \quad \text{in } Q_T$$

$$\text{Su } \partial_P Q_T \text{ vale } v_1 = g + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_P Q_T} |g| \geq g + \max_{\partial_P Q_T} |g| \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} Hv_1 \geq 0 \text{ in } Q_T \\ v_1 \geq 0 \text{ su } \partial_p Q_T \end{array} \right\} \implies v_1 \geq 0 \text{ in } Q_T \quad \text{grazie al corollario di confronto}$$

$$\implies -u(x, t) \leq t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$$

$$\text{Facendo il procedimento analogo con } v_2(x, t) = -u(x, t) + t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$$

$$\text{Otteniamo } u(x, t) \leq t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$$

$$\implies |u(x, t)| \leq t \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g| \leq T \max_{\bar{Q}_T} |f| + \max_{\partial_p Q_T} |g|$$

□

Conseguenza della stima di stabilità, se ho 2 problemi:

$$\left. \begin{array}{l} Hu_1 = f_1 \quad Q_T \\ u_1 = g_1 \quad \partial_P Q_T \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} Hu_2 = f_2 \quad Q_T \\ u_2 = g_2 \quad \partial_P Q_T \end{array} \right\}$$

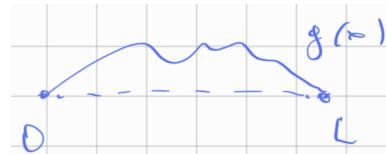
$$\text{Ottengo la stima di dipendenza continua } \max_{\bar{Q}_T} |u_1 - u_2| \leq \max_{\partial_p Q_T} |g_1 - g_2| + T \max_{\bar{Q}_T} |f_1 - f_2|$$

2.4 Equazione del calore nel segmento

2.4.1 Problema di Dirichlet sul segmento

Oss. Supponiamo di avere una sbarra metallica omogenea con una temperatura iniziale, di non fornire calore alla sbarra, di tenere la temperatura ambiente costante e che la temperatura possa fluire solo dagli estremi

$$\left. \begin{array}{l} u_t - Du_{xx} = 0 \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \quad = \text{temperatura iniziale} \end{array} \right.$$



Oss. So già di avere unicità in questo tipo di problema

Affrontiamo il problema con la tecnica della **separazione di variabili**:

Cerco $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$u_t - Du_{xx} = 0 \implies X(x)T'(t) - DX''(x)T(t) = 0 \implies XT' = DX''T$$

$$\underbrace{\frac{T'}{DT}(t)}_{\text{funzione di } t} = \underbrace{\frac{X''}{X}(x)}_{\text{funzione di } x} \quad \forall x \in (0, L) \quad \forall t > 0$$

$$\text{Quindi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tc } \frac{T'}{DT}(t) = \frac{X''}{X}(x) = \lambda \quad \forall x \in (0, L) \quad \forall t > 0$$

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad T'(\lambda) = \lambda DT(t)$$

Così tengo già conto delle condizioni agli estremi

Cerco soluzioni $X(x)$ del sistema non nulle. Dividiamo in 3 casi:

$$1) \lambda > 0 \quad X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$$\text{Se impongo } X(0) = X(L) = 0 \text{ ottengo} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} = 0 \end{cases} \quad \text{sistema omogeneo con det non nullo}$$

$$\implies c_1 = c_2 = 0 \implies X \equiv 0 \text{ che non è accettabile}$$

$$2) \lambda = 0 \quad X(x) = c_1 x + c_2$$

L'unica possibilità affinché la retta $X(x)$ passi per i punti $X(0) = X(L) = 0$ è che sia la retta nulla

$$\implies c_1 = c_2 = 0 \implies X \equiv 0 \text{ non accettabile}$$

$$3) \lambda < 0 \quad X(x) = c_1 \cos \sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{-\lambda}x$$

$$X(0) = c_1 = 0 \implies X(x) = c_2 \sin \sqrt{-\lambda}x$$

$$X(L) = c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \quad \text{voglio } c_2 \neq 0$$

Quindi $\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \implies \sqrt{-\lambda}L = n\pi \quad \text{per } n = 1, 2, \dots$ perché per $n = 0$ avrei $X(x) \equiv 0$

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{per } n=1,2,\dots \quad \text{Quindi } X_n = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

Oss. Chiedendo che X non fosse identicamente nulla siamo riusciti a ottenere un set discreto di valori partendo da un sistema differenziale con condizioni agli estremi

Ora voglio $T' = \lambda DT = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 DT$

$$T_n(t) = c'_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L}} \quad u_n(x, t) = b_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2..$$

Queste sono tutte e sole le soluzioni a variabili separate dell'equazione differenziale con condizioni agli estremi nulle

Oss. Adesso devo chiedere $u(x, 0) = g(x)$ però è improbabile che una delle soluzioni trovate o una combinazione lineare di queste risolva la condizione

Quindi l'idea è quella di cercare la soluzione del problema in forma di serie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{con } \{b_n\} \text{ da determinarsi}$$

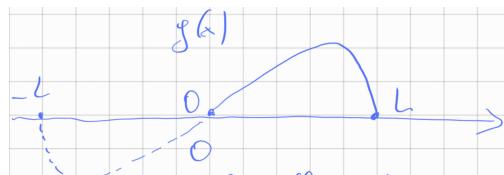
$$\text{Voglio che sia } u(x, 0) = g(x) \quad x \in (0, L) \quad \text{quindi} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

È una specie di sviluppo di Fourier di $g(x)$ ma ci sono solo funzioni seno

Nota: Il sistema trigonometrico adattato a $[0, L]$ è $\cos(n\omega x)$ $\sin(n\omega x)$ con $\omega = \frac{2\pi}{L}$

Tecnica dello sviluppo di Fourier in serie di sole funzioni seno

Data $g(x) \in [0, L]$, sia $\tilde{g}(x)$ la riflessa dispari di g su $[-L, L]$



$$\text{Allora } \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in [0, L] \\ -g(-x) & x \in [-L, 0] \end{cases}$$

Poiché $\tilde{g} : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari, lo sviluppo con Fourier avrà $a_n = 0$

$$\text{Inoltre } b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{g}(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{g}(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx$$

$$\text{Ma in } (0, L) \text{ ho } \tilde{g} = g, \quad \text{quindi} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(n \frac{2\pi}{2L} x\right) dx$$

Posso concludere che $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ con i b_n appena ricavati

Per il problema:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \end{cases}$$

Abbiamo trovato la candidata formula risolutiva:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$\text{Con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx$$

Verifica della candidata soluzione

(I) Continuità e derivabilità di $u(x, t)$ per $t > 0$

$$\left| b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right| \leq |b_n| e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}}$$

$$\text{Se } g \in L^1(0, L) \text{ allora } |b_n| \leq \frac{2}{L} \int_0^L |g(x)| dx = \frac{2}{L} \|g\|_{L^1}$$

Per $t = 0$ ottengo una costante che non converge, quindi ci mettiamo nella regione $t \geq t_0$ con $t_0 > 0$

$$\text{Allora } \left| b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right| \leq \frac{2}{L} \|g\|_{L^1} \cdot e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t_0}{L^2}} \leq c e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t_0}{L^2}}$$

Quindi abbiamo maggiorato il termine della serie con un termine di una serie convergente

$$\text{Dato che ha un esponenziale decrescente } \sum e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t_0}{L^2}} < \infty$$

Quindi la serie che rappresenta u converge totalmente per $t \geq t_0 > 0$

$$\implies u \in C^0([0, L] \times [t_0, +\infty)) \quad \forall t_0 > 0 \implies u \in C^0([0, L] \times (0, +\infty))$$

Oss. Avendo continuità posso valutare la serie di u per x che tende a 0 e L

$$\implies u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Oss. Continuità in $[t_0, +\infty)$ \implies continuità in $(0, +\infty)$. Però non posso dire lo stesso per la convergenza che è una proprietà globale (la continuità si valuta punto per punto)

Deriviamo termine a termine la serie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right) = -\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \left(b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \right) \right| \leq c n^k e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}}$$

C'è ancora convergenza totale (della serie derivata di ogni ordine), in ogni regione del tipo $t \geq t_0 > 0$

$$\implies u \in C^\infty([0, L] \times (0, \infty)) \quad \text{e} \quad u_t - D u_{xx} = 0 \quad \text{per } x \in (0, L) \quad t > 0$$

Abbiamo dimostrato che, sotto la sola ipotesi $g \in L^1(0, L)$, la u è C^∞ per $t > 0$, soddisfa l'eq diff e soddisfa le condizioni agli estremi

Dalla formula risolutiva leggiamo anche il comportamento per tempi lunghi:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

$$\text{Abbiamo detto che: } |u(x, t)| \leq \frac{2}{L} \|g\|_{L^1(0, L)} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \leq \frac{2}{L} \|g\|_{L^1} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n \pi^2 D t}{L^2}}$$

Posso vedere la serie che rimane come una serie geometrica con termine generale $\left(e^{-\frac{\pi^2 D t}{L^2}}\right)^n$

Oss. Sottraggo 1 perché la serie geometrica parte da $n = 0$ e non da $n = 1$

$$\begin{aligned} \implies u(x, t) &\leq \frac{2}{L} \|g\|_{L^1} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi^2 D t}{L^2}}} - 1 \right) = \frac{2}{L} \|g\|_{L^1} \frac{e^{-\frac{\pi^2 D t}{L^2}}}{1 - e^{-\frac{\pi^2 D t}{L^2}}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \\ \implies \max_{x \in [0, L]} |u(x, t)| &\leq c e^{-\frac{\pi^2 D t}{L^2}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi sotto la sola ipotesi $g \in L^1(0, L)$ la soluzione u tende a zero (uniformemente rispetto a x) per $t \rightarrow \infty$
Oss. Con velocità proporzionale a $\frac{D}{L^2}$, ovvero il corpo si raffredda più veloce se aumenta coefficiente di diffusione e più lento se la sbarra è più lunga

(II) In che senso è assunta la condizione iniziale

Sotto che ipotesi la condizione iniziale è assunta in senso classico:

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < \infty$ allora la serie che rappresenta u converge totalmente in $[0, L] \times [0, +\infty)$
Quindi la u è continua fino a $t = 0$

$\{b_n\}$ sono i coefficienti dello sviluppo di g in serie di soli seni in $[0, L]$

Cioè sono i coefficienti di Fourier della riflessa dispari g su $[-L, L]$

Affinché la serie di Fourier converga totalmente deve essere:

- i) \tilde{g} regolare a tratti su $[-L, L] \implies g$ regolare a tratti in $[0, L]$
- ii) \tilde{g} continua su $[-L, L] \implies g$ continua in $[0, L]$ e $g(0) = 0$ per non avere un salto di \tilde{g} in 0
- iii) $\tilde{g}(L) = \tilde{g}(-L) \implies g(L) = -g(L) \implies g(L) = 0$

Conclusione:

- Se $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, regolare a tratti e $g(0) = g(L) = 0$

Allora $\sum |b_n| < \infty$ e $u(x, t)$ assume la condizione iniziale in senso classico $u \in C^0([0, L] \times [0, +\infty))$

- Se g non è continua, ma $g \in L^2(0, T)$, mostriamo che la condizione iniziale è assunta in senso L^2 , cioè proviamo che $\int_0^L |u(x, t) - g(x)|^2 dx \rightarrow 0$ per $t \rightarrow 0^+$

Oss. La dimostrazione è identica a quella per il laplaciano sul cerchio

Abbiamo che $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ in senso L^2 e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 < \infty$

$$|u(x, t) - g(x)| = \left| \sum b_n \left(e^{-\frac{n^2\pi^2 D t}{L^2}} - 1 \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right|$$

$$\int_0^L |u(x, t) - g(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 D t}{L^2}} \right)^2 \int_0^L \left| \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right|^2 dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 D t}{L^2}} \right)^2}_{h_n(t)}$$

La serie ottenuta converge totalmente rispetto a $t \geq 0$ perché $|h_n(t)| \leq b_n^2$ e $\sum b_n^2 < \infty$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^L |u(x, t) - g(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2 D t}{L^2}} \right)^2 = 0$$

Esempio del tipico andamento della temperatura nel tempo con condizione di Dirichlet

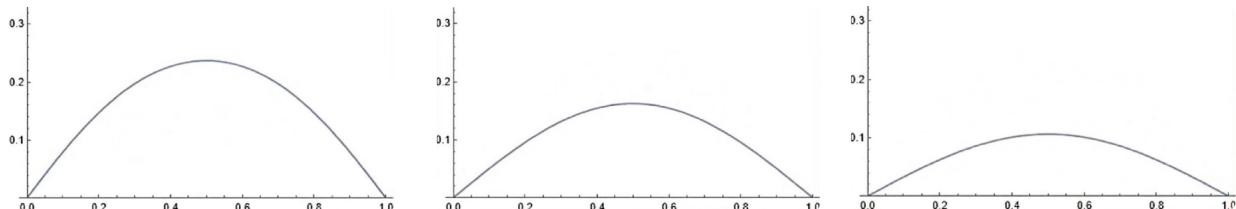


Figure 5: Andamento di $u(x, t) = \sum_{n=1}^{50} e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$ per $t \in (0, 1)$

2.4.2 Problema di Cauchy-Neumann sul segmento

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0 & x \in (0, L), t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 & (\text{sbarra termicamente isolata}) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Oss. Sbarra isolata con condizioni iniziali ci aspettiamo che tenda a una costante su tutta la sbarra

Oss. La soluzione è molto simile a quella per Dirichlet

Risolvendo per **separazione di variabili** si trova $u(x, t) = X(x)T(t)$ con le seguenti equazioni da risolvere:

$$\begin{cases} X'' = \lambda X & T' = \lambda DT \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

Separiamo nei diversi casi:

1) $\lambda > 0$ da soluzioni non accettabili

2) $\lambda = 0$ $X = \text{cost}$

3) $\lambda < 0$ $X(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$

$$\text{Da cui } X'(x) = \sqrt{-\lambda} (-c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x))$$

$$X'(0) = 0 \implies c_2 \sqrt{-\lambda} = 0 \implies c_2 = 0 \quad X'(L) = 0 \implies c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

$$\text{Dato che chiedo } c_1 \neq 0 \text{ ottengo, come prima, } \lambda = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$X_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$T' = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} DT \quad T_n(t) = c'_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}}$$

$$u_n(x, t) = b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 0, 1, \dots$$

Oss. In questo caso anche $n = 0$ è accettabile, da cui ottengo la costante

Per soddisfare anche la condizione iniziale:

$$u(x, t) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Voglio che sia $u(x, 0) = g(x)$, quindi dovrò scegliere i b_n tc $g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

Per sviluppare g su $[0, L]$ in serie di soli coseni definiamo la riflessa pari $\tilde{g} : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in [0, L] \\ g(-x) & x \in [-L, 0] \end{cases}$$

$$\tilde{g} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{con } a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \tilde{g}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Perciò abbiamo la candidata soluzione:

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 D t}{L^2}} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{Con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Verifica della soluzione e assunzione del dato al bordo

Oss. Non facciamo tutti i passaggi di prima dato che è evidente che siano analoghi

(I) Per $g \in L^1(0, L)$ ho: $u \in C^\infty$ per $t > 0$, che soddisfa l'equazione, le condizioni agli estremi e per $t \rightarrow +\infty$ $u(x, t) \xrightarrow{\text{unif in } x} \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx$

Ovvero la temperatura, per tempi lunghi, tende alla media integrale della temperatura iniziale

(II) In che senso è assunta la condizione iniziale

- La condizione iniziale è assunta in senso classico

Se (vedi caso precedente) la serie di Fourier di \tilde{g} converge totalmente, questo è vero se:

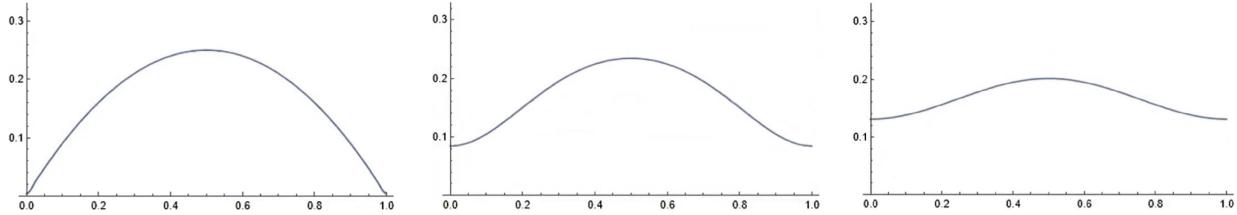
- i) \tilde{g} regolare a tratti su $[-L, L] \implies g$ regolare a tratti in $[0, L]$
- ii) \tilde{g} continua su $[-L, L] \implies g$ continua in $[0, L]$ (la riflessa pari è sempre continua in 0)
- iii) $\tilde{g}(L) = \tilde{g}(-L)$ sempre vero perché \tilde{g} è la riflessa pari

TEOREMA.

Se g è continua e regolare a tratti in $[0, L]$, la u assume la condizione iniziale in senso classico

- Se $g \in L^2$, la u assume la condizione iniziale in senso L^2 (dimostrazione analoga)

Esempio del tipico andamento della temperatura nel tempo con condizione di Neumann



Confrontiamo i due problemi di Cauchy-Neumann:

- C-N per equazione di calore
- Non c'è condizione di compatibilità
- Soluzione determinata
- C-N per equazione di Laplace
- C'è condizione di compatibilità $\int_{\partial\Omega} f dS = 0$
- Soluzione determinata a meno di una costante

Significato fisico della condizione di compatibilità è che nel caso di Laplace c'era stazionarietà e quindi serviva bilancio nullo dei flussi

Per risultato di unicità enunciamo il seguente:

TEOREMA.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e regolare (non basta lipschitziano)

Allora il problema di Cauchy-Neumann:
$$\begin{cases} Hu = f & Q_T = \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = h(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

Ha al più una soluzione nella classe di funzioni $C^2(Q_T) \cap C^0(\overline{Q_T})$ con $u_{x_i} \in C^0(\overline{\Omega} \times (0, T))$

2.5 L'equazione del calore in tutto lo spazio

Problema di Cauchy globale in \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Oss. È notevole il fatto che si tratta questo problema nello stesso modo per n qualunque

Affrontiamo il problema mediante la **trasformata di Fourier**

$$\widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u(x, t))(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) \\ \mathcal{F}(\Delta_x u)(\xi) &= -4\pi^2 |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + 4\pi^2 D |\xi|^2 \hat{u} = 0 & \xi \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi) \end{cases}$$

La prima equazione del sistema è una EDO del 1° ordine con ξ parametro: $\hat{u}' + k\hat{u} = 0 \implies \hat{u}(\xi, t) = c(\xi) e^{-kt}$

$$\hat{u}(\xi, t) = c(\xi) e^{-4\pi^2 D |\xi|^2 t}$$

Imponiamo la condizione iniziale: $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{g}(\xi) = c(\xi) e^0 \implies \hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) e^{-4\pi^2 D |\xi|^2 t}$

Ora si tratta di antitrasformare

Se conoscessi $k(x, t)$ tale che $\mathcal{F}(k(\cdot, t)) = e^{-4\pi^2 D |\xi|^2 t}$

Avrei: $\hat{u}(\xi, t) = \hat{g}(\xi) \hat{k}(\xi, t) = \mathcal{F}(k(\cdot, t) * g)(\xi)$ E di conseguenza, dato che due funzioni con la stessa trasformata coincidono, $u(x, t) = (k(\cdot, t) * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x - y, t) g(y) dy$

RIPASSO: Trasformata di Fourier di funzioni di tipo gaussiano

Si dimostra che $\mathcal{F}(e^{-\pi|x|^2})(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$

Abbiamo già visto le $f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ adesso vediamo le dilatate $f^\varepsilon(x) = f(\varepsilon x)$

Allora vale che $\widehat{(f_\varepsilon)} = \left(\widehat{f}\right)^\varepsilon$ e che $\widehat{f^\varepsilon} = \left(\widehat{f}\right)_\varepsilon$

Partiamo da $f(x) = e^{-\pi^2|x|}$

Sappiamo che $e^{-a|x|^2} = f^{\sqrt{\frac{a}{\pi}}}(x) = f\left(\sqrt{\frac{a}{\pi}}x\right)$

$$\implies \mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right) = \mathcal{F}\left(f^{\sqrt{\frac{a}{\pi}}}x\right) = \left(\widehat{f}\right)_{\sqrt{\frac{a}{\pi}}} = f_{\sqrt{\frac{a}{\pi}}} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{a}}$$

Abbiamo ottenuto: $\mathcal{F}\left(e^{-a|x|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{a}}$

Quindi, dato che la trasformata è L^1 , $\mathcal{F}\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{a}}\right)(\xi) = e^{-a|\xi|^2}$

Sto quindi cercando $k(x, t)$ tc $\mathcal{F}(k(\cdot, t))(\xi) = e^{-4\pi^2 D|\xi|^2 t}$ ovvero $a = 4\pi^2 D t$

$$\mathcal{F}\left(\left(\frac{\pi}{4\pi^2 Dt}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi^2|x|^2}{4\pi^2 Dt}}\right)(\xi) = e^{-4\pi^2 D|\xi|^2 t}$$

$$k_D(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} = \text{Nucleo di calore o "heat kernel"}$$

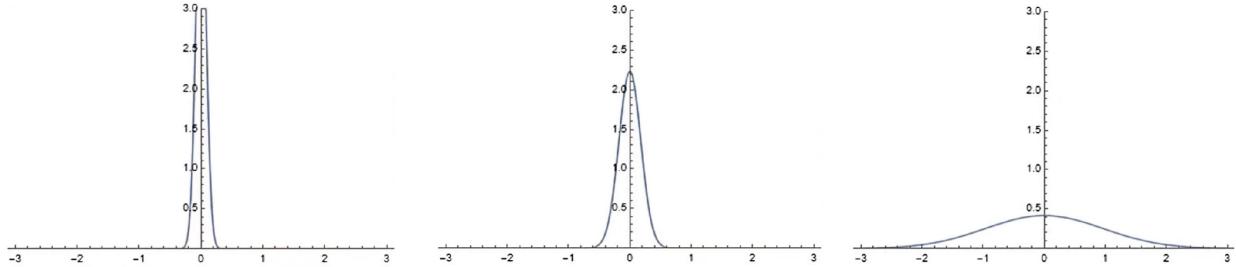
La candidata formula risolutiva per: $\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ è:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t)g(y) dy = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy$$

Oss. Stiamo quindi facendo la convoluzione in spazio con tempo fissato

Verifica delle ipotesi della soluzione e in che senso

Vediamo l'andamento tipico del nucleo di calore in funzione del tempo



Oss. Quindi per t molto piccolo il nucleo tende a una delta in $x = 0$

Ma in questo caso $x = x - y$ e quindi per x vicino a y , sostanzialmente $u(x, t)$ va a leggere quanto vale $g(y)$

Questo ci suggerisce che per t piccolo l'integrale tenda alla g

Mostriamo che infatti il nucleo del calore $k_D(x, t)$ si può vedere come una famiglia di nuclei regolarizzanti:

$$\text{Se definisco } \varphi_D(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4D}}}{(4\pi D)^{\frac{n}{2}}} > 0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\widehat{\varphi}_D(\xi) = e^{-4\pi D|\xi|^2} \implies \widehat{\varphi}_D(0) = 1 \implies \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_D(x) dx = 1$$

$$\text{Definiamo il nucleo regolarizzante } (\varphi_D)_{\sqrt{t}} = \varphi_{\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}}$$

$k_D(x, t) = \varphi_{\sqrt{t}}(x)$ $\{k_D(x, t)\}_{t>0} = \{\varphi_{\sqrt{t}}(x)\}_{t>0}$ è una famiglia di nuclei regolarizzanti

Quindi per le proprietà di questi, vale:

$$k_D(\cdot, t) * g \xrightarrow[L^P(\mathbb{R}^n)]{t \rightarrow 0^+} g \quad \text{per } 1 \leq P < \infty \text{ e } g \in L^P(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Ovvero: } \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t) - g(x)|^P dx \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

Se $g \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$, allora $u(x, t) \rightarrow g(x)$ uniformemente in \mathbb{R}^n per $t \rightarrow 0^+$

Ritorniamo alla formula risolutiva $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t)g(y) dy$

Ci chiediamo sotto che ipotesi su g si può affermare che u risolve l'equazione del calore

$$u_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t)g(y) dy = \{\text{se si può derivare sotto integrale}\} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial k_D}{\partial t}(x - y, t)g(y) dy$$

$$\text{Analogamente } \Delta_x u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta k_D}{\partial t}(x - y, t)g(y) dy$$

Allora, se si può derivare sotto integrale, otteniamo:

$$Hu(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} Hk_D(x - y, t)g(y) dy$$

Ci basta mostrare che per ogni $t > 0$ si può derivare u sotto integrale e che $Hk_D(x, t) = 0 \quad \forall t > 0$

Dove H è l'operatore dell'equazione del calore

$$\text{Adesso ci serve usare la formula } k_D(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}}$$

In ogni regione del tipo $t \geq \delta > 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$

k_D e le sue derivate di ogni ordine in x e t sono funzioni limitate

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h} \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t)g(y) dy \text{ è limitata, infatti } \left| \frac{\partial^h}{\partial x^h} k_D(x - y, t)g(y) \right| \leq c|g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per il teorema di derivazione sotto integrale la u è infinitamente derivabile in $t \geq \delta > 0$

$$\implies \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad u \in C^\infty \quad \text{per } t > 0$$

Devo ancora provare che $Hk_D(x, t) = 0$ per $t > 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta_x \right) \left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \right)$$

Siano $|\rho| = x$ e $\gamma(\rho, t) = \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}}}{t^{\frac{n}{2}}}$

Il laplaciano di una funzione radiale lo sappiamo risolvere anche in n variabili

Ci serve mostrare che: $\left(\frac{\partial}{\partial t} - D \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \right) \gamma(\rho, t) = 0 \quad \forall t > 0$ (è un esercizio di analisi II)

Abbiamo quindi mostrato che:

TEOREMA.

$\forall g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ la funzione $u(x, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy$

È infinitamente derivabile $\forall t > 0$, soddisfa $u_t - D\Delta u = 0$ in \mathbb{R}^n e vale $u(\cdot, t) \rightarrow g$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per $t \rightarrow 0^+$

Se inoltre $g \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$ allora $u(\cdot, t) \rightarrow g$ uniformemente per $t \rightarrow 0^+$ ed u è soluzione classica del problema

Oss. Non è necessario richiedere $g \in L^1$, si può indebolire la richiesta in vari modi, ma questa è la dimostrazione più facile

Vale per il problema di Cauchy globale un risultato di unicità

Oss. Ricordiamo che per l'unicità in problemi globali serve richiedere qualcosa sul comportamento all'infinito

TEOREMA: Unicità Cauchy globale.

Nella classe di funzioni $C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)) \cap C_b^0(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ dove per C_b si intende continue e limitate

La soluzione di $\begin{cases} u_t - D\Delta u = f & \mathbb{R}^n \quad t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \mathbb{R}^n \end{cases}$ se esiste è unica

Oss. Non stiamo ponendo una restrizione sul dato iniziale, ma sulla soluzione

Rimane la possibilità che ci sia una soluzione illimitata che non conosciamo

Torniamo alla soluzione:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x-y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) dy$$

E studiamone il comportamento per tempi lunghi, sia $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ allora

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy = \frac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Possiamo dire che $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x, t)| \leq \frac{\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente:

TEOREMA.

Se la condizione iniziale è $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora la soluzione $u \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$

Oss. Abbiamo usato la condizione $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per derivare sotto integrale e poter controllare ogni derivata dell'integrandi. Questo risultato possiamo ottenerlo con g limitata

Si può dimostrare che anche sotto l'ipotesi $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ la funzione $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t) g(y) dy$ è C^∞ e risolve l'equazione per $t > 0$

(idea della dim)

Presi $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ma non $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ci chiediamo se è possibile trovare una maggiorazione integrabile che vada bene per ogni x in un intorno di un certo x_0 e non necessariamente $\forall x \in \mathbb{R}^n$

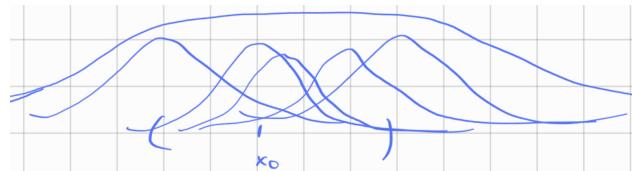


Figure 6: I k_D vanno come delle gaussiane

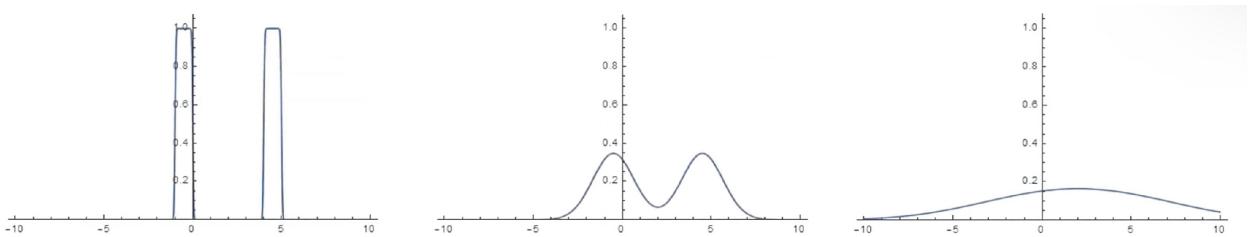
$$\left| \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} g(y) \right| \leq \|g\|_{L^\infty} k_D(x-y, t)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} k_D(x-y) \right| \leq c h(y) \quad \text{tc } h(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Se ad esempio $g \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$, ma non $L^1(\mathbb{R}^n)$ posso ancora dire che u è soluzione classica del problema, ma non è più detto che $u(x, t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$

Esempio: $u \equiv 1$ risolve $\begin{cases} Hu = 0 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases}$

Esempio del tipico andamento della temperatura nel tempo per un problema globale



Oss. Vediamo che la curva si "alliscia" velocemente e si perdono le informazioni, ovvero non si può ricostruire la curva passata da quella futura

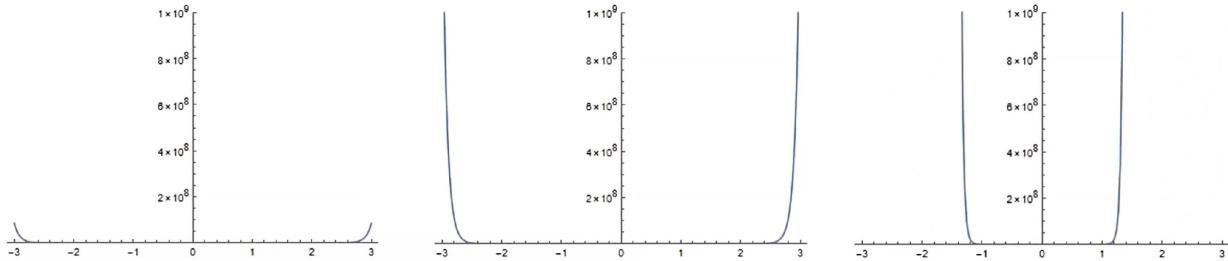
Oss. Vediamo che la u diverge se $g(y)$ supera k_D , che è un esponenziale negativo con y^2 e $\frac{1}{t}$ (per cui ci servono t piccoli per avere l'esponenziale piccolo)

Si può dimostrare che se $g(y)$ soddisfa le "condizioni di Tychonoff": $|g(y)| \leq c e^{Ay^2}$ per qualche $A > 0$, allora la $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t)g(y) dy$ è ancora C^∞ e soluzione dell'equazione $\forall t < T$ con $T < \frac{1}{4AD}$

Esempio: Se $g(y) = e^{y^2}$ $D = 1$ $n = 1$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} e^{y^2} dy$$

Questo integrale converge finché $-\frac{1}{4t} + 1 < 0$ ovvero $t < \frac{1}{4}$



Se poi $g(y) = e^{y^4}$ l'integrale diverge sempre

2.6 Equazione del calore non omogenea

Cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy globale:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Per il **principio di sovrapposizione**, separo in 2 sotto problemi:

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} u_t - D\Delta u = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Se u_1 risolve (1) e u_2 risolve (2) per linearità $u = u_1 + u_2$ risolve il pb di Cauchy non omogeneo

Risolviamo (2) con la trasformata di Fourier nello spazio $\mathcal{F}_x(u_t - D\Delta u) = \mathcal{F}_x(f(x, t))$

Il problema diventa:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) + 4\pi^2|\xi|^2 D\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t) \\ \hat{u}(\xi, 0) = 0 \end{cases}$$

E lo vedo come un EDO lineare del primo ordine non omogenea, dove ξ è un parametro

$$\text{Da questa ottengo come soluzione } \hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 D t} \left[c(\xi) + \int_0^t e^{4\pi^2|\xi|^2 D s} \hat{f}(\xi, s) ds \right]$$

Posta la condizione $\hat{u}(\xi, 0) = 0 \implies c(\xi) = 0$

$$\begin{aligned} \implies \hat{u}(\xi, t) &= \underbrace{\int_0^t e^{-4\pi^2|\xi|^2 D(t-s)} \hat{f}(\xi, s) ds}_{\mathcal{F}_x(k_D(\cdot, t-s)*f(\cdot, s))} = \mathcal{F}_x \left(\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} k_D(x-y, t-s) f(y, s) dy \right) ds \right) \\ \implies u(x, t) &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} k_D(x-y, t-s) f(y, s) dy \right) ds = \text{candidata formula risolutiva} \end{aligned}$$

Mostriamo un metodo alternativo per risolvere l'equazione non omogenea: **metodo di Duhamel**

Questo metodo funziona con diverse equazioni di evoluzione

$$\text{Consente di risolvere un pb di Cauchy} \quad \begin{cases} Lu = f \\ u = 0 \quad t = 0 \end{cases} \quad \text{se sappiamo già risolvere} \quad \begin{cases} Lu = 0 \\ u = g \quad t = 0 \end{cases}$$

Definiamo la funzione $w(x, t, s)$ con s un parametro e $x \in \mathbb{R}^n \quad t > 0 \quad s > 0$

$$\text{Chiedo che } w \text{ sia soluzione del problema} \quad \begin{cases} w_t - D\Delta_x w = 0 \quad t > s, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ w(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}$$

Poi pongo $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$ (integro rispetto al parametro)

$$\text{Allora affermo che } u \text{ risolve il problema} \quad \begin{cases} u_t - D\Delta u = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Vediamo, formalmente, perché il metodo dovrebbe funzionare:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t w(x, t, s) ds \quad u(x, 0) = \int_0^0 w(x, 0, s) ds = 0 \\ \Delta_x u(x, t) &= \int_0^t \Delta_x w(x, t, s) ds \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, s) ds + w(x, t, t) \\ u_t - D\Delta_x u &= \int_0^t \underbrace{(w_t - D\Delta_x w)}_0(x, t, s) ds + \underbrace{w(x, t, t)}_{f(x, t)} = f \end{aligned}$$

Quindi il metodo ha senso

Usiamo questo metodo per scrivere una formula risolutiva esplicita.

$$(3) \quad \begin{cases} w_t - D\Delta w = 0 & t > s \\ w(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}$$

L'equazione del calore è invariante per traslazioni temporali

$$\implies \text{se } u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t)g(y) dy \text{ risolve} \quad \begin{cases} Hu = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

$$\text{Allora traslando } w(x, t, s) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t - s)f(y, s) dy \text{ risolve (3)}$$

$$\text{Da cui otteniamo } u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t - s)f(y, s) dy ds$$

Vediamo andamenti tipici dell'equazione del calore non omogenea nel tempo, abbiamo una sorgente di calore f che tenderà a modificare il calore

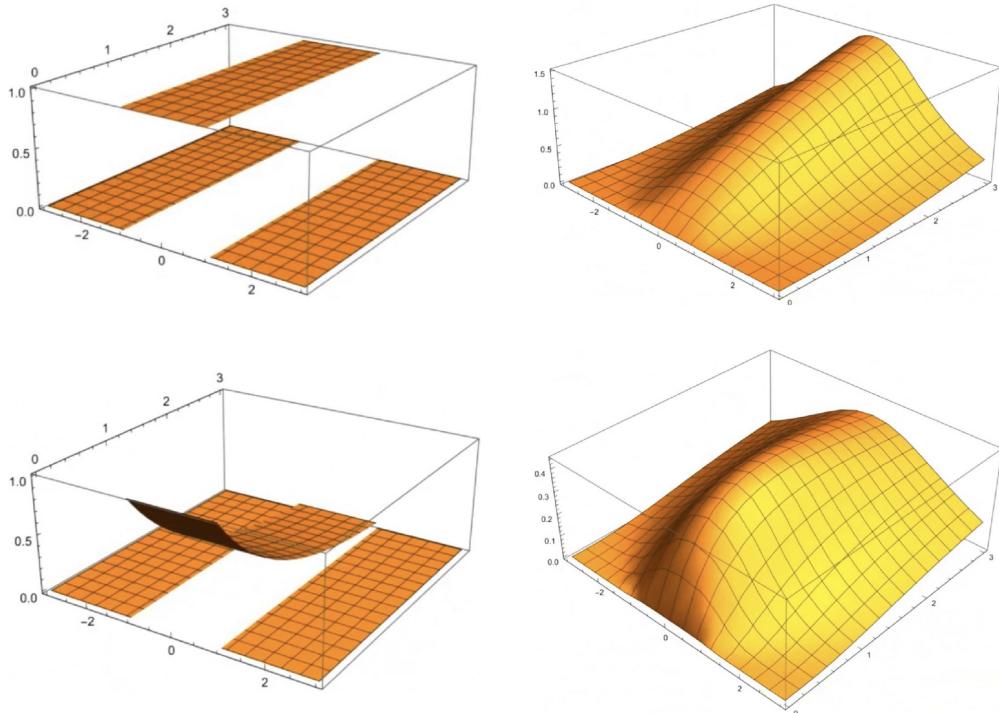


Figure 7: $f_1(x) = \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ costante quindi il calore continuerà ad aumentare
 $f_2(x) = e^{-t}\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ calore crescerà sempre meno, per poi allisciarsi

Oss. La formula ottenuta è problematica, infatti il nucleo del calore tende a una delta quando t tende a 0
A differenza della soluzione omogenea, dove la t era una costante, qua il tempo varia e quando s si avvicina a t, abbiamo problemi

Per ottenere un risultato preciso usiamo il linguaggio delle distribuzioni

Vogliamo vedere il nucleo del calore come soluzione fondamentale dell'operatore del calore

TEOREMA.

Sia $k_D(x, t)$ il nucleo del calore, allora k_D risolve:
$$\begin{cases} Hu = 0 & \text{per } t > 0 \\ u(\cdot, 0) = \delta_0 \end{cases}$$

Dove $u(\cdot, 0) = \delta_0$ del sistema è intesa nel senso che $u(\cdot, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_0$ in $D'(\mathbb{R}^n)$

RIPASSO: Convergenza distribuzionale

Dati $\{T_k\} \subseteq D'(\mathbb{R}^n)$ e $T \in D'(\mathbb{R}^n)$ si dice che $T_k \rightarrow T$ in $D'(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow +\infty$

Se $\langle T_k, \varphi \rangle \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$

DIM.

So già che $Hk_D(x, t) = 0$ per $t > 0$, mostriamo che $k_D \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \delta_0$ in $D'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle k_D(\cdot, t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, t)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(0 - y, t)\varphi(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}^n)$$

La convergenza ha senso perché $\varphi \in C_*^0(\mathbb{R}^n)$

□

k_D si può vedere anche come distribuzione in \mathbb{R}^{n+1}

TEOREMA.

Sia $k_D(x, t) = \begin{cases} \frac{|x|^2}{(4\pi Dt)^{\frac{n}{2}}} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ Allora $Hk_D = \delta_{(0,0)}$ nel senso $D'(\mathbb{R}^{n+1})$

Oss. In questo senso il nucleo del calore è la soluzione fondamentale dell'operatore del calore

DIM.

Tesi: $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \langle Hk_D, \varphi \rangle = \varphi(0, 0)$

Proveremo che lo stesso vale $\forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^{n+1})$ (C^∞ di conseguenza)

$$\langle \partial_t k_D, \varphi \rangle - D \langle \Delta_x k_D, \varphi \rangle = -\langle k_D, \varphi_t \rangle - D \langle k_D, \Delta \varphi \rangle = -\langle k_D, \varphi_t + D\Delta \varphi \rangle =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \underbrace{k_D(x, t)}_{0 \text{ per } t < 0} [\varphi_t + D\Delta\varphi](x, t) dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \dots = \underbrace{\int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \dots}_{A_\varepsilon} + \underbrace{\int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \dots}_{B_\varepsilon}$$

Vogliamo quindi provare che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} A_\varepsilon + B_\varepsilon = \varphi(0, 0)$

$$|A_\varepsilon| = \left| - \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, t)[\varphi_t + D\Delta\varphi](x, t) dx dt \right| \leq \max_{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}} |\varphi_t + D\Delta\varphi| \int_0^\varepsilon \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, t) dx dt}_1 = c \int_0^\varepsilon 1 dt = c\varepsilon \rightarrow 0 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$B_\varepsilon = - \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, t)[\varphi_t + D\Delta\varphi](x, t) dx dt =$$

Essendo in B_ε ($t > 0$), il nucleo del calore non mi da problemi e quindi posso derivare φ senza problemi

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} k_D(x, t)\varphi_t(x, t) dt \right) dx - D \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, t)\Delta\varphi(x, t) dx dt =$$

Integro per parti il primo addendo e sposto il laplaciano nel secondo

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\partial k_D}{\partial t}(x, t)\varphi(x, t) dt dx - D \int_\varepsilon^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Delta k_D(x, t)\varphi(x, t) dt dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \int_\varepsilon^{+\infty} \underbrace{Hk_D(x, t)\varphi(x, t)}_0 dt dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, \varepsilon)[\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)] dx + \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, \varepsilon)\varphi(x, 0) dx = C_\varepsilon + D_\varepsilon$$

$$|C_\varepsilon| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x, \varepsilon) - \varphi(x, 0)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, \varepsilon) dx}_1 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ per l'uniforme continuità di } \varphi$$

Inoltre dato che $k_D(*, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta_0$

$$D_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x, \varepsilon)\varphi(x, 0) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \delta_0, \varphi(\cdot, 0) \rangle = \varphi(0, 0)$$

□

Da questo segue facilmente che:

TEOREMA.

Se $f(x, t) \in C_0^2(\mathbb{R}^{n+1})$

Allora $u(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t - s)f(y, s) dy ds$ risolve $u_t - D\Delta u = f$ in \mathbb{R}^{n+1}

In particolare se $f(x, t) \equiv 0$ per $t \leq 0$

Allora $u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$ risolve $\begin{cases} u_t - D\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^{n+1} & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$

DIM.

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} k_D(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} k_D(y, s) f(x - y, t - s) dy ds$$

Poiché $f \in C_0^2(\mathbb{R}^{n+1})$ posso derivare u , quindi derivo sotto integrale

$$u_t - D\Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} k_D(y, s) \left(\frac{\partial}{\partial t} - D\Delta_x \right) [f(x - y, t - s)] dy ds$$

Definita $F(y, s) = f(x - y, t - s)$ posso riscrivere le derivate di f nel modo seguente:

$$\Delta f(x - y, t - s) = \Delta_y f(x - y, t - s) = \Delta_y F(y, s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x - y, t - s) = -\frac{\partial f}{\partial s}(x - y, t - s) = -\frac{\partial F}{\partial s}(y, s)$$

Per il teorema precedente, vale:

$$\langle Hk_D, \varphi \rangle = F(0, 0) = \langle k_D, -F_t - D\Delta F \rangle$$

$$(u_t - D\Delta u)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} k_D(y, s) \left[-\frac{\partial F}{\partial s} - D\Delta F \right] (y, s) dy ds = F(0, 0) = f(x, t)$$

□

Oss. $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} dy ds = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^t dy ds$ perché abbiamo $k_D = 0$ per $t - s < 0$ ovvero $s > t$

In particolare il problema $\begin{cases} Hu = f & \text{se } f \in C_0^2(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ e } g \in C_*^0(\mathbb{R}^n), \text{ ha soluzione (classica):} \\ u(x, 0) = g \end{cases}$

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t - s) f(y, s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} k_D(x - y, t) g(y) dy$$

2.7 Equazione del calore generale

Equazione di diffusione con termini di trasporto (convezione) e reazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{D\Delta u}_{\text{diffusione}} + \underbrace{\underline{v} \cdot \nabla u}_{\text{trasporto}} + \underbrace{\gamma u}_{\text{reazione}} = \underbrace{f(x, t)}_{\text{sorgente}} \quad \gamma > 0, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$$

Studiamo l'equazione completa nel caso baso con $n = 1$ (sulla retta)

$$u_t - Du_{tt} + vu_x + \gamma u = f \quad \gamma > 0$$

Consideriamo un problema di Cauchy globale di questo tipo:

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Oss. In questo problema abbiamo anche $vu_x + \gamma u$ che sono termini di ordine inferiore, non dovrebbero dare fastidio, dato che abbiamo già risolto con ordini superiori

Notiamo che il termine u_t è di primo ordine, però non vuol dire che la possiamo trascurare. Parliamo di ordini inferiori rispetto a quello massimo per ogni variabile, in questo caso è primo per il tempo e secondo per lo spazio

Usiamo il **metodo del cambio di variabili**:

Cerco $u(x, t) = e^{ax+bt}w(x, t)$ e cerco $a, b \in \mathbb{R}$ tali che u soddisfi il problema $\iff w_t - Dw_{xx} = 0$

$$\text{Quindi } u_x = e^{ax+bt}(w_x + aw) \quad u_{xx} = e^{ax+bt}(w_{xx} + 2aw_x + a^2w) \quad \text{e} \quad u_t = e^{ax+bt}(w_t + bw)$$

$$u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = 0 \implies e^{ax+bt}\{(w_t + bw) - D(w_{xx} + 2aw_x + a^2w) + v(w_x + aw) + \gamma w\} = 0$$

$$\implies w_t - Dw_{xx} + w_x(-2Da + v) + w(b - Da^2 + va + \gamma) = 0$$

Cerco a, b per cui sia: $\begin{cases} -2Da + v = 0 \\ b - Da^2 + va + \gamma = 0 \end{cases}$

$$\implies a = \frac{v}{2D} \quad b = Da^2 - va - \gamma = D \frac{v^2}{4D^2} - \frac{v^2}{2D} - \gamma = -\frac{v^2}{4D} - \gamma$$

$$u(x, t) = e^{\frac{v}{2D}x} e^{-\left(\frac{v^2}{4D} + \gamma\right)t} w(x, t)$$

Con $w_t - Dw_{xx} = 0$

$$u(x, 0) = g(x) = e^{\frac{v}{2D}x} w(x, 0)$$

$w(x, t)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} w_t - Dw_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x, 0) = g(x)e^{-\frac{vx}{2D}} \end{cases}$

$$w(x, t) = \int_{\mathbb{R}} k_D(x-y, t)g(y)e^{-\frac{vy}{2D}} dy$$

$$u(x, t) = e^{-\frac{vx}{2D}} e^{-\left(\frac{v^2}{4D} + \gamma\right)t} w(x, t) = e^{-\left(\frac{v^2}{4D} + \gamma\right)t} \cdot \int_{\mathbb{R}} k_D(x-y, t)g(y)e^{-\frac{v}{2D}(x-y)} dy$$

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} h_D(x-y, t)g(y) dy$$

Dove il nuovo nucleo di calore è $h_D(x, t) = k_D(x, t)e^{\frac{v}{2D}x}e^{-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)t}$ e $k_D(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{(4\pi Dt)^{\frac{t}{2}}}$

Se l'equazione non è omogenea: $\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$

Per il **principio di sovrapposizione**, sarà $u = u_1 + u_2$

Dove u_1 risolve il problema con $f = 0$ e u_2 risolve quello con $g = 0$

Risolviamo il seguente problema $\begin{cases} u_t - Du_{xx} + vu_x + \gamma u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$

Usiamo il **Metodo di Duhamel**:

Cerchiamo $w(x, t, s)$ soluzione del pb $\begin{cases} w_t - Dw_{xx} + vw_x + \gamma w = 0 & t > s, x \in \mathbb{R} \\ w(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}$

Allora $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$

Per trovare questa w prendo la formula di rappresentazione

Si prende la soluzione del problema omogeneo e si sostituisce $t \mapsto t-s$ e $g(y) \mapsto f(y, s)$ e così ottengo

$$\begin{aligned} w(x, t, s) &= e^{-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t-s)} \cdot \int_{\mathbb{R}} k_D(x-y, t-s) f(y, s) e^{-\frac{v}{2D}(x-y)} dy \\ u(x, t) &= \int_0^t w(x, t, s) ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{v^2}{4D}+\gamma\right)(t-s)} k_D(x-y, t-s) f(y, s) e^{-\frac{v}{2D}(x-y)} dy ds = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} H(x-y, t-s) f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

Oss. L'integrale in s va da 0 a t perché k_D è non nullo su $t-s > 0$ e perché la f, per sua natura (tempo > 0), c'è solo per $s > 0$

Oss. Con la trasformata di Fourier in x si può ottenere lo stesso risultato

$$(\text{È necessaria la proprietà } \mathcal{F}(f(x+a))(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i a \xi})$$

Le formule risolutive trovate funzionano anche nei casi particolari con $\gamma = 0$ e/o $v = 0$
(cioè senza i termini di reazione e trasporto)

$D = 0$ non è un caso particolare, perché non ho più l'equazione del secondo ordine

L'equazione di diffusione, anche con termini di trasporto e/o reazione, rimane fortemente regolarizzante
 Vediamo ora che se manca il termine di diffusione questo non è più vero

2.8 Equazione del trasporto (Lineare)

Nella deduzione dell'equazione del calore abbiamo trovato:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{q} = f(x, t)$$

E che la densità del flusso di calore \underline{q} dipende da diffusione e convezione

Se la parte di diffusione è trascurabile troviamo $\nabla \cdot (\underline{v}u) = \underline{v} \cdot \nabla u$ (se \underline{v} è costante)

Equazione del trasporto lineare:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla_x u + \underbrace{\gamma u}_{\text{termine reazione}} = \underbrace{f(x, t)}_{\text{termine sorgente}}$$

Ci sono modelli in cui $\underline{q}(u)$ è una funzione non lineare (sempre del primo ordine)

Questi diventano velocemente molto più complicati da risolvere

Iniziamo studiando il caso unidimensionale $u_t + vu_x + \gamma u = f(x, t)$

Risolviamo per **passi successivi**:

Step (1) $u_t + vu_x = 0 \quad v \in \mathbb{R}, v \neq 0$

Supponiamo che abbia soluzione $u(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Allora u è costante lungo tutte le rette del tipo $x - vt = \xi$, $\left(\text{ovvero } t = \frac{x}{v} - \frac{\xi}{v} \right)$

Verifichiamolo: se $x - vt = \xi$ allora $x = \xi + vt$

$$u(x, t) = u(\xi + vt, t) = U(t)$$

$$U \text{ è costante, infatti, } U'(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi + vt, t) \cdot v + \frac{\partial u}{\partial t}(\xi + vt, t) = (u_t + vu_x)(\xi + vt, t) \equiv 0$$

Quindi $U(t) = U(0) = u(\xi, 0) =: g(\xi)$

$$u(x, t) = g(\xi) = g(x - vt)$$

\Rightarrow Ogni soluzione $C^1(\mathbb{R}^2)$ dell'equazione $u_t + vu_x = 0$ ha la forma $u(x, t) = g(x - vt)$ dove $g \in C^1(\mathbb{R})$

Viceversa $\forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tc $g \in C^1(\mathbb{R})$ la $u(x, t) = g(x - vt)$ soddisfa l'equazione:

$$u_t + vu_x = -vg'(x - vt) + vg'(x - vt) = 0$$

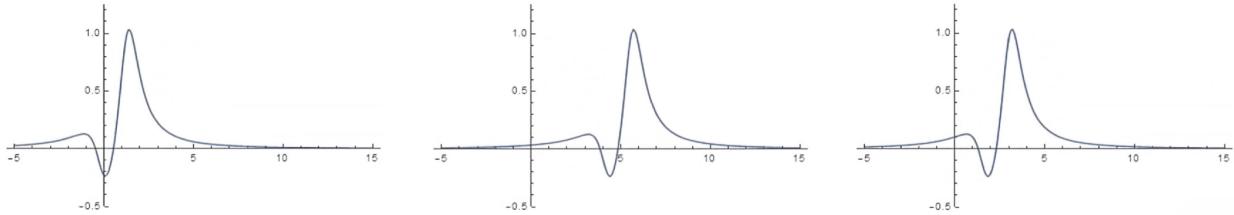
\Rightarrow L'integrale generale di $u_t + vu_x = 0$ è dato da $u(x, t) = g(x - vt)$ al variare di $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g \in C^1(\mathbb{R})$

Notando che $u(x, 0) = g(x)$ ho che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + vu_x = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

con $g \in C^1(\mathbb{R})$ assegnata, ha una sola soluzione $C^1(\mathbb{R}^2)$ data da $u(x, t) = g(x - vt)$

L'andamento dell'equazione del trasporto nel tempo è banalmente lo scorrimento della condizione iniziale:



Tutto ciò si generalizza a dimensione superiore:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla_{\underline{x}} u = 0 \\ u(\underline{x}, 0) = g(\underline{x}) \end{cases} \quad u(\underline{x}, t) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \quad u \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$$

Ha soluzione $u(\underline{x}, t) = g(\underline{x} - \underline{v}t)$ con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$

Step (2) Vediamo il caso non omogeneo:

$$u_t + vu_x = f(x, t)$$

Usiamo il **metodo di Duhamel**:

La soluzione di $\begin{cases} u_t + vu_x = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$ è data da $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$

Dove $w(x, t, s)$ risolve $\begin{cases} w_t + vw_x = 0 & t > s \\ w(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}$

Vediamo la motivazione formale:

$$u(x, 0) = 0 \quad u_x(x, t) = \int_0^t w_x(x, t, s) ds$$

$$u_t(x, t) = \underbrace{w(x, t, t)}_{f(x, t)} + \int_0^t w_t(x, t, s) ds$$

$$u_t + vu_x = f(x, t) + \int_0^t \underbrace{(w_t + vw_x)(x, t, s)}_0 ds = f(x, t)$$

Per scrivere $w(x, t, s)$ prendiamo la formula risolutiva di $\begin{cases} u_t + vu_x = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$ ovvero $u(x, t) = g(x - vt)$

e sostituiamo:

$$\begin{aligned} t &\mapsto t - s & g(x) &\mapsto f(x, s) \\ w(x, t, s) &= f(x - v(t - s), s) & u(x, t) &= \int_0^t w(x, t, s) ds = \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto la candidata formula risolutiva

Verifica della soluzione:

Oss. Devo derivare una volta in x e t , sotto l'integrale

Quindi f deve essere C^1 rispetto alla prima variabile (perché ci compaiono sia x che t)

E deve essere C^0 rispetto alla seconda variabile, perché quando applico la derivazione sotto integrale ho bisogno che l'integrandina sia continua rispetto alla variabile di integrazione

Se $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R}^2)$

Allora $u(x, t)$ assegnata come sopra è $C^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds & u(x, 0) &= 0 \\ u_t(x, t) &= f(x, t) + \int_0^t -vf_x(x - v(t - s), s) ds \\ u_x(x, t) &= \int_0^t f_x(x - v(t - s), s) ds \\ u_t + vu_x &= f(x, t) + \int_0^t \overline{((-vf_x(\dots) + vf_x(\dots)))} ds \end{aligned}$$

TEOREMA.

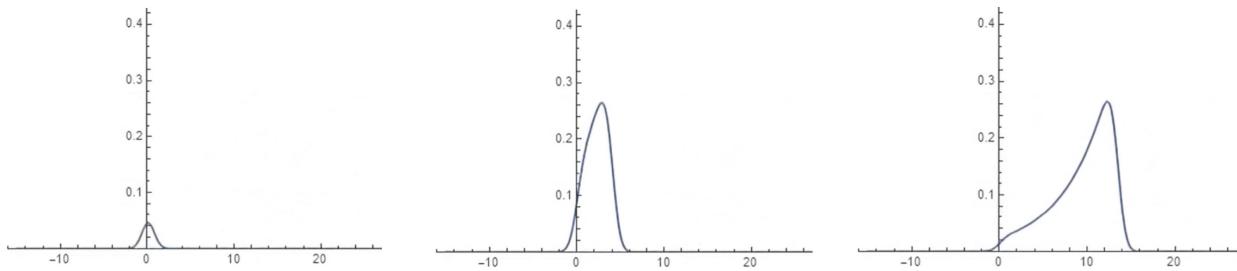
Il problema di Cauchy $\begin{cases} u_t + vu_x = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$

Sotto le ipotesi: $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, $\exists f_x \in C^0(\mathbb{R})$

Ha una sola soluzione $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ data da:

$$u(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t - s), s) ds$$

Vediamo l'andamento tipico dell'equazione del trasporto nel tempo con termine di sorgente (nel caso $g \equiv 0$)



Step (3) Se c'è un termine di reazione:

$$\begin{cases} u_t + vu_x + \gamma u = f \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Usiamo il cambio di variabili per liberarci del termine u_t , il termine in x non ci da problemi

Se ci fosse solo il termine in t $u_t + \gamma u = 0$ allora $u(t) = ce^{-\gamma t}$

Cerco $u(x, t) = e^{-\gamma t}w(x, t)$

$$u_t = e^{-\gamma t}(w_t - \gamma w) \quad u_x = e^{-\gamma t}w_x$$

$$u_t + vu_x + \gamma u = e^{-\gamma t}(w_t - \gamma w + vw_x + \gamma w) = e^{-\gamma t}(w_t + vw_x)$$

$$u_t + vu_x + \gamma u = f \iff w_t + vw_x = fe^{\gamma t}$$

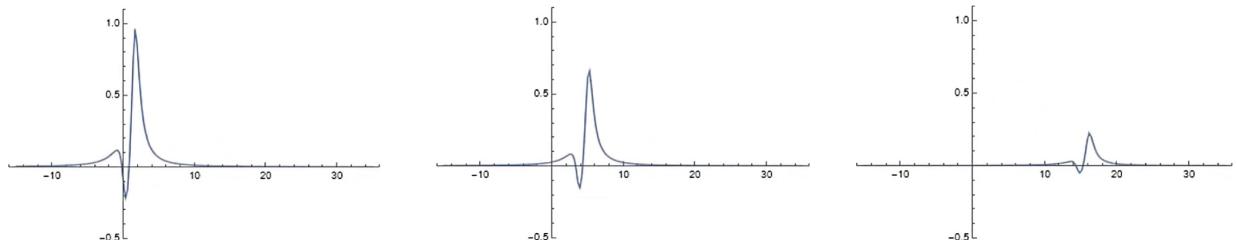
Ottengo: $\begin{cases} w_t + vw_x = fe^{\gamma t} \\ w(x, 0) = u(x, 0) = g(x) \end{cases}$ risolviamo questo problema

$$w(x, t) = \int_0^t f(x - v(t-s), s)e^{\gamma s} ds + g(x - vt)$$

$$u(x, t) = e^{-\gamma t}w(x, t) = e^{-\gamma t}g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s)e^{\gamma s}e^{-\gamma(t-s)} ds$$

Caso particolare $f \equiv 0$ ottengo $u(x, t) = w^{-\gamma t}g(x - vt)$

Ovvero come prima la condizione iniziale viene trasportata nel tempo, ma c'è un fattore di "decomposizione" che appiattisce la u , vediamo un esempio di questo caso:



Si generalizza tutto in dimensione n:

$$v \mapsto \underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad x \mapsto \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Il problema $\begin{cases} u_t + \underline{v} \cdot \nabla_x u + \gamma u = f(\underline{x}, t) \\ u(\underline{x}, t) = g(\underline{x}) \end{cases}$ da soluzione:

$$u(\underline{x}, t) = e^{-\gamma t} g(\underline{x} - \underline{v}t) + \int_0^t f(\underline{x} - \underline{v}(t-s), s) e^{-\gamma(t-s)} ds$$

Abbiamo trovato questa soluzione classica

$$f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \quad \text{se } g \in C^1(\mathbb{R}), \quad f \in C^0(\mathbb{R}^2) \quad \text{e } \exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

Soluzione debole dell'equazione del trasporto

La $u(x, t)$, come funzione, è ben definita anche se g e f soddisfano ipotesi più deboli di quelle richieste

Se f e g soddisfano ipotesi più deboli e quindi u è meno regolare di C^1 ha ancora senso dire che u risolve l'equazione differenziale?

Oss. Pensando alle formulazioni di tipo integrale si intuisce che una strada per indebolire il concetto di soluzione differenziale è quello di passare da una definizione puntuale (condizione richiesta in ogni punto) a una definizione integrale, vediamone un esempio:

Supponiamo prima che $u(x, t)$ sia $C^1(\mathbb{R}^2)$ soluzione classica del problema:

$$(1) \quad \begin{cases} u_t + vu_x = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Moltiplichiamo ambo i membri della prima equazione per una funzione $\varphi(x, t) \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

Oss. C_0^1 vuol dire C^1 a supporto compatto, ovvero l'insieme in cui può essere $\varphi \neq 0$ è compatto

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_t + vu_x - f)(x, t) \varphi(x, t) dx dt = 0$$

Faremo degli integrali per parti per scaricare le derivate sulla φ

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} u_t \varphi dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\left[(u\varphi)(x, t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u\varphi_t dt \right) dx = - \underbrace{\int_{\mathbb{R}} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx}_{g(x)} - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (u\varphi_t)(x, t) dt dx$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} u_x \varphi \, dx \right) dt = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \varphi_x \, dx \, dt$$

Quindi posso riscrivere la prima equazione del problema così:

$$-\int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x, 0) \, dx - \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u \varphi_t + v u \varphi_x + f \varphi) \, dx \, d\sigma \right) = 0$$

$$(2) \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (u(\varphi_t + v \varphi_x) + f \varphi) \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x, 0) \, dx = 0$$

Se u è soluzione classica di (1) allora $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vale la (2)

Oss. La cosa interessante di questa formula (2) è che la u non è mai derivata

Affinché abbia senso serve φ regolare, ma lo è per ipotesi e u, f, g tali che abbiano senso gli integrali, ovvero servono localmente integrabili, dato che sono moltiplicate per φ che ha supporto compatto

DEFINIZIONE.

Siano $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ e $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

Si dice che u è **soluzione classica in senso debole** del problema $\begin{cases} u_t + v u_x = f & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Se $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vale che:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (u(\varphi_t + v \varphi_x) + f \varphi) \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x, 0) \, dx = 0$$

Oss. Nel ricavare questa definizione abbiamo dimostrato che una soluzione classica è anche soluzione debole

TEOREMA.

Se $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ è soluzione del problema $\begin{cases} u_t + v u_x = f & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Con $g \in C^1(\mathbb{R})$ $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ e $f_x \in C^0(\mathbb{R}^2)$ allora u è anche soluzione in senso debole del problema

DIM.

Per la dimostrazione bastano i calcoli che abbiamo visto prima della definizione di soluzione debole

□

TEOREMA.

Sia $u(x, t)$ soluzione in senso debole di $\begin{cases} u_t + v u_x = f & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$ e supponiamo $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

$g \in C^1(\mathbb{R})$ $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ $f_x \in C^0(\mathbb{R}^2)$ allora u è anche soluzione classica

DIM.

Sappiamo che $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vale:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (u(\varphi_t + v\varphi_x) + \varphi f) dx dt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x, 0) dx = 0$$

Oss. Per semplicità risolviamo in due step, prima troviamo l'equazione del sistema liberandoci dell'integrale con g , dopo di che troviamo la condizione iniziale liberandoci del primo integrale

Applicando l'uguaglianza sulle $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, che sono un caso particolare di quelle di prima

Quindi $\varphi(x, 0) = 0$ perché è fuori dal supporto di conseguenza $\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x, 0) dx = 0$

Ora integro per parti, dove non avrò i termini di bordo dato che $\varphi(x, 0) = 0$ e $\varphi(x, +\infty) = 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (-(u_t + vu_x)\varphi + \varphi f) dx dt &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \varphi \{f - (u_t + vu_x)\} dx dt &= 0 \end{aligned}$$

Dato che vale $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ ed essendo $f - (u_t + vu_x)$ una funzione continua ho

$$u_t + vu_x = f \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

Per ottenere la condizione iniziale ripartiamo da

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (u(\varphi_t + v\varphi_x) + f\varphi) dx dt + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x, 0) dx = 0$$

Sulle $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ e integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} -\varphi \underbrace{(u_t + vu_x - f)}_0 dx dt - \int_{\mathbb{R}} u(x, 0)\varphi(x, 0) dx + \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x, 0) dx &= 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0)\{g(x) - u(x, 0)\} dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) &\implies u(x, 0) = g(x) \end{aligned}$$

□

TEOREMA.

Siano $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, $f \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

Allora la $u(x, t) = g(x - vt) + \int_0^t f(x - v(t-s), s) ds$ è soluzione in senso debole di $\begin{cases} u_t + vu_x = f \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$

DIM.

Dimostriamo nel caso $f \equiv 0$

Proviamo che $u(x, t) = g(x - vt)$ è soluzione debole di $\begin{cases} u_t + vu_x = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$

Cioè $\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} u(\varphi_t + v\varphi_x) dt dx}_A + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x, 0) dx}_B = 0$$

$$A = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x - vt)(\varphi_t + v\varphi_x)(x, t) dx dt = \left[x = \xi + vt \right] = \int_0^{+\infty} g(\xi) \underbrace{(\varphi_t + v\varphi_x)(\xi + vt, t)}_{U'_\xi} d\xi dt =$$

Perché posto $U_\xi(t) = \varphi(\xi + vt, t)$ ho $U'_\xi = \varphi_t(\xi + vt, t) + v\varphi_x(\xi + vt, t)$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \int_0^{+\infty} U'_\xi(t) dt d\xi = \int_{\mathbb{R}} g(\xi) (\underbrace{U_\xi(+\infty)}_0 - \underbrace{U_\xi(0)}_{\varphi(\xi, 0)}) d\xi = - \int_{\mathbb{R}} g(\xi) \varphi(\xi, 0), d\xi$$

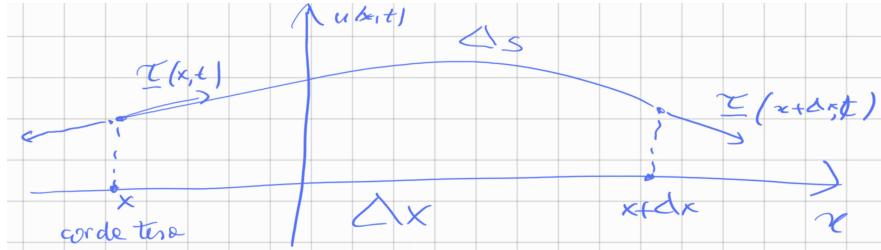
Quindi $A + B = 0$ e la $u(x, t) = g(x - vt)$ è soluzione debole

Oss. Con un calcolo simile, un po' più complicato si dimostra la con $g = 0$ e $f \neq 0$

□

3 Equazione delle onde

3.1 Equazione della corda vibrante



Ad ogni istante t il grafico di $u(x, t)$ descrive la posizione della corda

Orizzontalmente agisce solo la tensione della corda e non c'è movimento

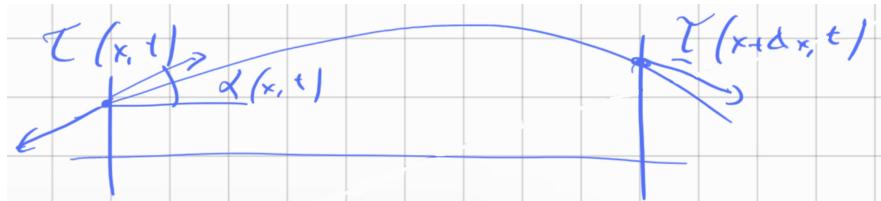
In verticale può agire una forza di carico di densità $f(x, t)$ che equivale a una forza per unità di massa

Per la conservazione della massa, la massa (costante) del tratto di corda tra x e $x + \Delta x$ è:

$$dm = \rho_0(x)\Delta x = \rho(x, t)\Delta s$$

Dove ρ_0 è la densità a riposo $\rho(x, t)$ è la densità in movimento e Δs è la lunghezza in movimento

La risultante della forza sull'asse x è nulla



Quindi posto α l'angolo tra la tensione e l'orizzontale

Tensione: $T_{\text{Oriz}}(x, t) = T(x, t) \cos \alpha(x, t)$ $T_{\text{Oriz}}(x + \Delta x, t) = T_{\text{Oriz}}(x, t)$

Cioè $T(x, t) \cos \alpha(x, t)$ è indipendente da x , ovvero $T(x, t) \cos \alpha(x, t) = T(t)$

Risultante delle forze in verticale = F_{Vert}

$$T_{\text{Vert}}(x, t) = T(x, t) \sin \alpha(x, t) = \frac{T(t)}{\cos \alpha(x, t)} \sin \alpha(x, t) = T(t) \tan \alpha(x, t) = T(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$$

$$\text{Quindi } F_{\text{Vert}} = T_{\text{Vert}}(x + \Delta x, t) - T_{\text{Vert}}(x, t) + f(x, t) dm = T(t) \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + f(x, t) \rho_0(x) \Delta x$$

$$\text{Però per la seconda legge di Newton } F_{\text{Vert}} = m \cdot \text{accelerazione verticale} = \rho_0 \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

$$\implies T(t) \frac{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]}{\Delta x} + f(x, t) \rho_0(x) = \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

Per $\Delta x \rightarrow 0$ ho la derivata seconda in x :

$$T(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) \rho_0(x) = \rho_0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{T(t)}{\rho_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t)$$

Ipotesi per semplificare l'equazione:

Supponiamo che la corda a riposo sia omogenea $\rho_0(x) = \text{cost} > 0$

Inoltre consideriamo delle vibrazioni piccole, ovvero con la corda molto tesa e mi discosto di poco dall'orizzontale $T(t)$ è circa costante $\frac{T(t)}{\rho_0(x)} = c^2 > 0$ dove c ha le dimensioni di una velocità

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

Questa è l'equazione della corda vibrante

Oss. È un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti che vale sotto le ipotesi fatte

Ci servirà il valore dell'energia meccanica totale della corda $[0, L]$ calcoliamola nell'ipotesi $f \equiv 0$

$$E_{cin} \text{ del tratto } (x, x + \Delta x) = \frac{1}{2} \rho_0(x) \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

$$E_{cin \ tot} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_0(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 (x, t) dx$$

E_{pot} = lavoro della forza di tensione = modulo della tensione per allungamento della corda

$$T = \sqrt{T_{vert}^2 + T_{orizz}^2} = \begin{bmatrix} T_{orizz} = T(t) \\ T_{vert} = T(t) \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = T(t) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \simeq T(t)$$

$$\text{Allungamento} = \Delta s - \Delta x = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - \Delta x = \Delta x \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \simeq \Delta x \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

$$\text{Lavoro elementare} = T \cdot \Delta s = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \Delta x T(t)$$

$$E_{pot \ tot} = \frac{1}{2} \int_0^L T(t) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 (x, t) dx \quad (\text{porto fuori } T \text{ perché supposto circa costante})$$

$$E_{tot}(t) = \frac{1}{2} \left\{ T \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \rho_0 \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dt \right\} = \frac{\rho_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] (x, t) dx$$

Per l'equazione della corda vibrante studiamo due tipi di problemi

Problema di Cauchy globale:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Dove abbiamo imposto le condizioni di Cauchy (che sono così perché l'equazione nel tempo è del 2° ordine)

Problemi sul segmento:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{condizioni di Dirichlet omogenee} \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & x \in [0, L] \end{cases}$$

Possiamo anche scrivere il problema anche con condizioni di Neumann al posto di quelle di Dirichlet, ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad t > 0$$

Il significato fisico con le condizioni di Dirichlet è quello della corda fissata agli estremi.

Mentre quello di Neumann equivale a una corda con gli estremi liberi di scorrere in verticale, ma vincolati in orizzontale (cioè tangente = 0)

3.2 Problema di Cauchy-Dirichlet sul segmento per la corda vibrante

Stabiliamo un risultato di unicità per i problemi sul segmento

TEOREMA.

Nella classe di funzioni $C^2((0, L) \times (0, T)) \cap C^1([0, L] \times [0, T])$ la soluzione di un problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) & x \in (0, L), t > 0 \\ \text{Condizioni di Dirichlet o di Neumann} \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x) & x \in [0, L] \end{cases}$$

Se esiste è unica

DIM.

Usiamo il metodo dell'energia

Siano u_1, u_2 due soluzioni dello stesso problema nella classe fissata, allora $u = u_1 - u_2$ soddisfa il seguente:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in (0, L), t \in (0, T) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{oppure} \quad u_x(0, T) = u_x(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 & x \in [0, L] \end{cases}$$

E abbiamo $u \in C^2((0, L) \times (0, T)) \cap C^1([0, L] \times [0, T])$

Vogliamo mostrare che $u \equiv 0$ in $[0, L] \times [0, T]$

Consideriamo l'energia meccanica totale della corda

$$E_{tot}(t) = \frac{\rho_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] (x, t) dx$$

Oss. Questa potrebbe essere una funzione qualsiasi, non è importante che sia la funzione dell'energia, è solo il motivo per cui abbiamo pensato di usarla

Vogliamo provare che: i) $E'(t) = 0 \forall t$ (quindi $E(t) = cost$) ii) $E(t) \equiv 0$ iii) $u \equiv 0$

$$E'(t) = \frac{1}{2} \rho_0 \int_0^L (2u_t \cdot u_{tt} + c^2 2u_x u_{xt}) dx = \rho_0 \left\{ \int_0^L u_t u_{tt} dx + c^2 \int_0^L u_x u_{xt} dx \right\}$$

Integrando per parti il secondo termine

$$\begin{aligned} \int_0^L u_x u_{xt} dx &= \left[u_x u_t \right]_0^L - \int_0^L u_{xx} u_t dx \\ \left[u_x u_t \right]_0^L &= u_x(L, t)u_t(L, t) - u_x(0, t)u_t(0, t) = 0 \end{aligned}$$

Perché se la condizione agli estremi di Neumann, allora $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$

Invece se la condizione è di Dirichlet $u(0, t) = u(L, t) = 0 \forall t \implies \frac{\partial}{\partial t}(u(0, t)) = \frac{\partial}{\partial t}(u(L, t)) = 0$

In ogni caso ottengo:

$$E'(t) = \rho_0 \int_0^L (u_t u_{tt} - c^2 u_t u_{xx}) dx = \rho_0 \int_0^L u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2 u_{xx})}_0 dx = 0$$

Perciò $E(t) = \text{costante}$ e in particolare

$$E(t) = E(0) = \frac{\rho_0}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) \right)^2 \right] (x, t) dx$$

Per le condizioni iniziali $u_t(x, 0) = 0$ e $u(x, 0) = 0 \forall x \implies u_x(x, 0) = 0$
 $\implies E(t) = \frac{\rho_0}{2} \int_0^L (u_t)^2 + c^2 (u_x)^2 dx = 0 \implies u_t \equiv 0, u_x \equiv 0 \implies u \equiv \text{costante}$
 Infine dato che $u(x, 0) = 0$ allora $u \equiv 0$ e quindi la soluzione è unica \square

Studiamo il problema nel caso di vibrazioni libere ($f(x, t) \equiv 0$) di una corda fissate agli estremi

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in (0, L), t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in (0, L) \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in (0, L) \end{cases}$$

So già che per questo problema c'è unicità nella classe $C^2((0, L) \times (0, T)) \cap C^1([0, L] \times [0, T])$

Uso la tecnica di **separazione di variabili**, ovvero cerco: $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$$

Dividendo per XT

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} \quad \forall x \in (0, L) \quad \forall t > 0$$

Quindi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tc

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \implies X''(x) = \lambda X(x) \quad T''(t) = c^2 \lambda T(t)$$

Se voglio che sia $u(0, t) = u(L, t) = 0$ dovrò chiedere $X(0) = X(L) = 0$

Cerco soluzioni $X(x)$ non identicamente nulle

È un problema già trovato con l'equazione del calore nel segmento, da cui ottengo:

$$\begin{aligned} X_n(x) &= c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ T'' &= c^2 \lambda T \quad T''(t) = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T(t) \quad T_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \end{aligned}$$

Soluzioni a variabili separate sono:

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\}$$

Ogni somma finita delle u_n risolve l'equazione differenziale e le condizioni agli estremi

Come al solito per soddisfare le condizioni di Cauchy cerco:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right\} \quad \text{con } a_n, b_n \text{ da determinarsi}$$

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$h(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(b_n \frac{n\pi c}{L}\right)}_{\beta_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Come abbiamo già fatto per l'equazione del calore, troviamo

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Che sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier in serie di soli seni di $g(x)$

E i β_n sono quelli di $h(x)$

$$\begin{aligned} b_n \frac{n\pi c}{L} &= \beta_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto la candidata formula risolutiva

Ci chiediamo sotto quali ipotesi la serie che definisce u converge

La serie che definisce u converge totalmente in $[0, L] \times [0, T]$ se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$

La serie delle derivate di u 1° e 2° in x, t converge totalmente se $\sum n(|a_n| + |b_n|) < \infty$ $\sum n^2(|a_n| + |b_n|) < \infty$

Il comportamento della serie per $t \geq \delta > 0$ non è migliore che per $t \in [0, T]$

Oss. Perché non abbiamo un problema con le condizioni iniziali, ma semplicemente stiamo chiedendo che la u sia derivabile

Ricordiamoci cosa sono i coefficienti a_n e β_n :

a_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $\tilde{g}(x)$ riflessa dispari di g in $[-L, L]$

$\beta_n = b_n \frac{n\pi c}{L}$ sono i coefficienti di Fourier della funzione \tilde{h} riflessa dispari di h in $[-L, L]$

Quindi $\sum n^2(|a_n| + |b_n|) < \infty$ se $\sum n^2|a_n| < \infty$ e $\sum n|\beta_n| < \infty$ perché $\beta_n = b_n \frac{n\pi c}{L}$

Oss. Vediamo sotto quali ipotesi su g e h queste serie convergono

TEOREMA: Rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier.

Sia $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che per un certo intero $s = 0, 1, 2, \dots$ valgano le ipotesi:

- 1) $f \in C^2[0, T]$
- 2) Condizioni di raccordo fino all'ordine s : $f(0) = f(T)$ $f'(0) = f'(T)$... $f^{(s)}(0) = f^{(s)}(T)$
- 3) $f^{(s)}$ sia regolare a tratti in $[0, T]$

Grazie a 1) e 2) la funzione $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ è T-periodica e $f \in C^{(s)}(\mathbb{R})$

Allora, detti a_n, b_n i coefficienti di Fourier di f $\sum n^s(|a_n| + |b_n|) < \infty$

In particolare la serie di Fourier di f si può derivare termine a termine s volte

Nel nostro caso, per sapere che $\sum n^2|a_n| < \infty$ devo chiedere che

- 1) $\tilde{g} \in C^2[-L, L]$
- 3) \tilde{g}'' è regolare a tratti
- 2.0) $\tilde{g}(L) = \tilde{g}(-L)$
- 2.1) $\tilde{g}'(L) = \tilde{g}'(-L)$
- 2.2) $\tilde{g}''(L) = \tilde{g}''(-L)$

$$\tilde{g} \text{ è dispari} \implies \tilde{g}' \text{ è pari} \implies \tilde{g}'' \text{ è dispari}$$

Quindi 2.0) $\implies \tilde{g}(L) = g(L) = 0$ 2.1) è automatica 2.2) $\implies \tilde{g}''(L) = g''(L) = 0$

1) Affinché \tilde{g} e \tilde{g}'' siano continue in 0, essendo dispari, dev'essere $g(0) = 0$ e $g''(0) = 0$

In conclusione se $g \in C^2[0, L] \quad g(0) = g(L) = 0 \quad g''(0) = g''(L) = 0$ e g'' è regolare a tratti

Allora $\sum n^2|a_n| < \infty$

Analogamente per h con $s = 1$

Se $h \in C^1[0, L] \quad h(0) = h(L) = 0$ e h' è regolare a tratti, allora $\sum n|\beta_n| < \infty$ e quindi $\sum n^2|b_n| < \infty$

TEOREMA.

Sotto le ipotesi su g e h scritte qui sopra, la $u \in C^2([0, L] \times [0, T])$ ed è soluzione classica del problema

Oss. A differenza delle equazioni di Laplace e del calore per questa non ha senso pensare a una soluzione debole, perché non appena indebolisco le ipotesi u non è più derivabile e l'equazione scritta non ha più senso

L'equazione della corda vibrante non regolarizza: le condizioni iniziali devono soddisfare ipotesi più forti rispetto alle proprietà della soluzione

Infatti per avere una soluzione C^2 devo chiedere $g \in C^2$ con la derivata seconda regolare a tratti (quasi C^3) E per h , che è uguale alla derivata prima di u (per cui l'ipotesi naturale sarebbe C^1), si richiede $h \in C^1$ con h' regolare a tratti (quasi C^2)

Stima di stabilità

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \underbrace{\left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right\}}_{\gamma_n(t)}$$

$$\int_0^L |u(x, t)|^2 dx = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(t)^2$$

Oss. Dove abbiamo usato il fatto che i γ_n sono a due a due ortogonali e $\int_0^L \left| \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right|^2 dx = \frac{L}{2}$

$$\text{Per } t \text{ fissato} \quad \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right)^2 \leq a_n^2 + b_n^2$$

$$\text{Perché } |A \cos\varphi + B \sin\varphi| \leq \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\text{Quindi} \quad \int_0^L |u(x, t)|^2 dx \leq \frac{L}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2)$$

Sia $g(x) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ tc $\int_0^L |g(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \sum a_n^2$ (in modo analogo a u)

Sia $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ tc

$$\int_0^L |h(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \sum \beta_n^2 = \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 \geq \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \left(\frac{\pi c}{L}\right)^2$$

$$\frac{L}{2} \sum b_n^2 \leq \left(\frac{L}{\pi c}\right)^2 \|h\|_{L^2}^2$$

Abbiamo quindi ottenuto una stima di stabilità:

$$\int_0^L |u(x, t)|^2 dx \leq \|g\|_{L^2(0, L)}^2 + \left(\frac{L}{\pi c}\right)^2 \|h\|_{L^2(0, L)}^2$$

$$\sup_t \int_0^L |u(x, t)|^2 dx \leq \|g\|_{L^2}^2 + \left(\frac{L}{\pi c}\right)^2 \|h\|_{L^2}^2$$

Consideriamo ora i singoli termini della serie

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right\}$$

$$\text{Pulsazione} = \omega_n = \frac{n\pi c}{L} \quad \text{periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi L}{n\pi c} = \frac{2L}{nc} \quad \text{frequenza} = \nu_n = n \left(\frac{c}{2L}\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

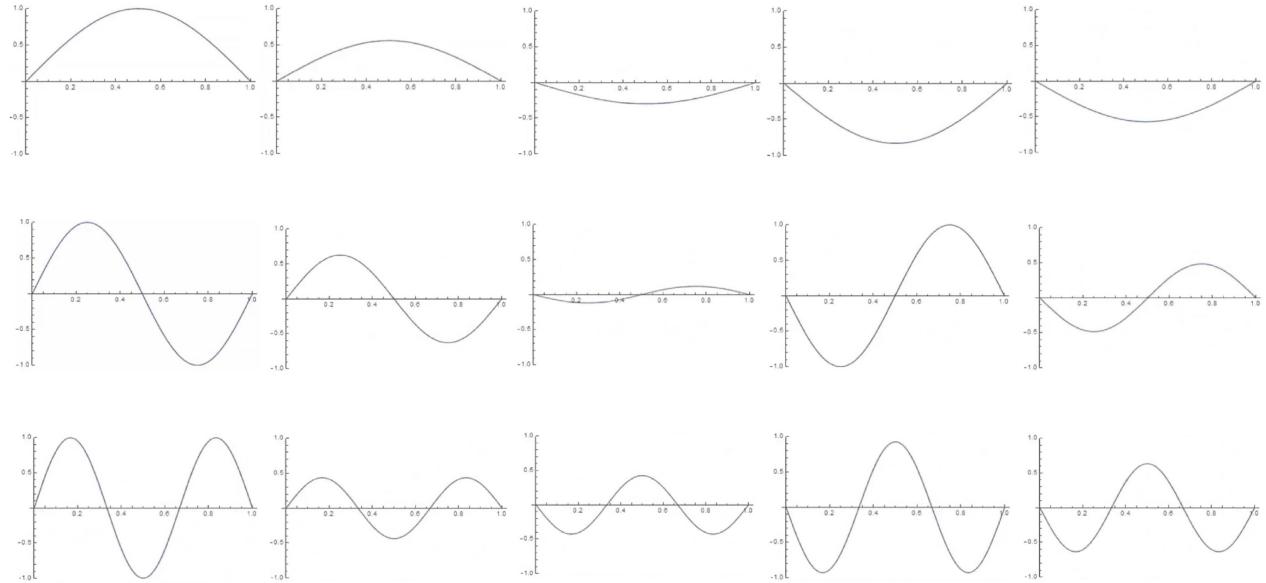
Ogni moto della corda fissata agli estremi sarà T-periodica con periodo $T = \frac{2L}{c}$

Perché è somma di moti con periodi $\frac{2L}{nc}$

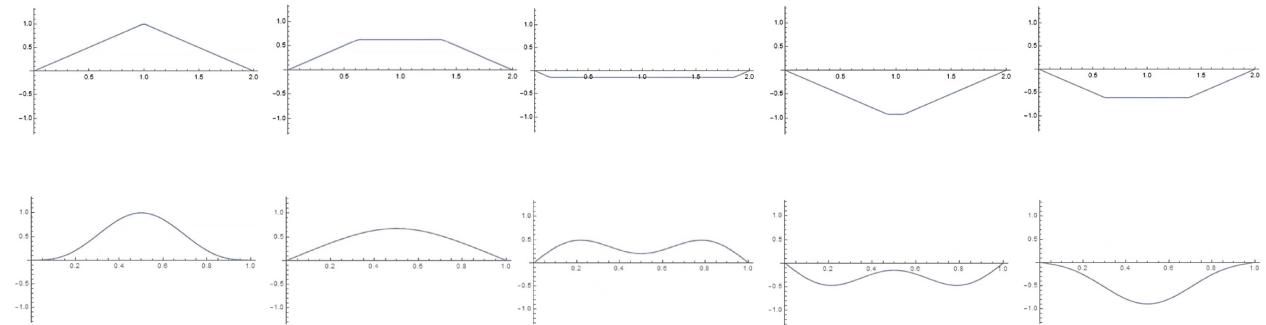
Ogni u_n ha una frequenza \mathcal{V}_n , multiple intere di $\mathcal{V}_1 = \frac{c}{2L}$ = "frequenza fondamentale"

Per $t = 0$ $u_1(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ che si annulla nei due estremi, $u_2(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ si annulla nei due estremi e nel centro. In generale u_n si annulla nei 2 estremi e in $(n - 1)$ punti interni detti nodi

Vediamo la tipica vibrazione delle u_1, u_2, \dots, u_n (con i rispettivi nodi) sono anche dette armoniche fondamentali



Vediamo degli andamenti tipici della corda vibrante per il problema di Cauchy-Dirichlet sul segmento



3.3 Problema di Cauchy globale per la corda vibrante

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Non abbiamo ancora un risultato di unicità per questo problema

Oss. Questo non ci disturba perché in questo caso si riesce a scrivere l'integrale generale dell'equazione e quindi troveremo tutte e sole le uniche soluzioni (l'unicità è data dalla risoluzione con condizioni necessarie)

Per risolvere l'equazione differenziale (omogenea)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Usiamo il metodo di **cambiamento di variabili**:

$$\begin{cases} x + ct = \xi \\ x - ct = \eta \end{cases}$$

Riscriviamo l'equazione differenziale in termini delle nuove variabili ξ, η

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi}}_1 \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_1 + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \eta}}_1 \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_1 = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \xi}}_c \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{-c} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \eta}}_{-c} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_c = c \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) c \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= c^2 (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - c^2 (u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 &\iff -4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \iff u_{\xi\eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \end{aligned}$$

Quindi $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, avendo derivata in ξ nulla, non dipende da ξ

Possiamo porre $\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) = F(\eta) \implies u(\xi, \eta) = \int F(\eta) d\eta + c(\xi) = G_1(\eta) + F_1(\xi)$
con $F_1, G_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $F_1, G_1 \in C^2(\mathbb{R})$

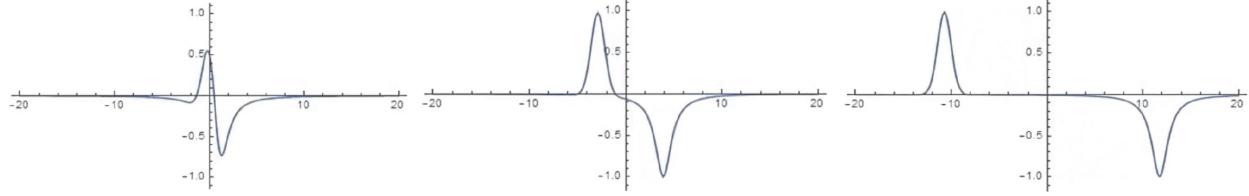
Quindi l'integrale generale dell'equazione della corda vibrante illimitata è data da

$u(x, t) = F_1(x + ct) + G_1(x - ct)$ al variare di F_1, G_1

Oss. $g(x - ct)$ era l'integrale generale dell'equazione del trasporto che era un'onda viaggiante

La generica u soluzione è sovrapposizione di un'onda progressiva e un'onda regressiva (generiche)

Quindi avrà un andamento di questo tipo:



Imponendo le condizioni iniziali per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

$$u(x, 0) = F(x) + G(x) = g(x)$$

$$u_t(x, t) = cF'(x + ct) - cG'(x - ct) \quad u_t(x, 0) = c(F'(x) - G'(x)) = h(x)$$

Cerco $F(x), G(x)$

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = g(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{h(x)}{c} \end{cases}$$

Derivo la prima equazione

$$\begin{cases} F'(x) + G'(x) = g'(x) \\ F'(x) - G'(x) = \frac{h(x)}{c} \end{cases}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(g'(x) + \frac{h(x)}{c} \right) \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left(g'(x) - \frac{h(x)}{c} \right)$$

$$\begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} \left(g(x) + \frac{1}{c} \int_0^x h(y) dy \right) + c_1 \\ G(x) = \frac{1}{2} \left(g(x) - \frac{1}{c} \int_0^x h(y) dy \right) + c_2 \end{cases}$$

Prima di derivare, avevamo $F(x) + G(x) = g(x)$

$$\implies F(x) + G(x) = g(x) + c_1 + c_2 = g(x) \implies c_1 + c_2 = 0$$

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct) = \frac{1}{2}g(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} h(y) dy + c_1 + \frac{1}{2}g(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} h(y) dy + c_2$$

$$u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy = \text{ Formula di d'Alembert}$$

Oss. Per fare due derivate alla u devo poter fare due derivate alla g e una derivata alla h

TEOREMA.

L'unica soluzione $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & \text{con } g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R}) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

è data dalla formula di d'Alembert

Oss. È unica perché l'integrale generale è un problema equivalente, tutti i passaggi fatti sono invertibili e abbia trovato solo questa soluzione, non ne abbiamo mai scartate

Verifichiamo che la soluzione risolva l'equazione

$$u_1(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} \quad u_1(x, 0) = g(x)$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy \quad u_2(x, 0) = 0$$

$$\implies u(x, 0) = g(x)$$

$$(u_1)_t(x, t) = \frac{cg'(x + ct) - cg'(x - ct)}{2} \quad (u_1)_t(x, 0) = 0$$

$$(u_2)_t(x, t) = \frac{1}{2c} \{ch(x + ct) + ch(x - ct)\} \quad (u_2)_t(x, 0) = \frac{1}{2c} 2ch(x) = h(x)$$

$$\implies (u_t)(x, 0) = h(x)$$

$$(u_1)_{tt}(x, t) = \frac{c^2 g''(x + ct) + c^2 g''(x - ct)}{2}$$

$$(u_1)_{xx}(x, t) = \frac{g''(x + ct) + g''(x - ct)}{2}$$

$$(u_1)_{tt} - c^2(u_1)_{xx} = 0$$

$$(u_2)_{tt} = \frac{1}{2} \{ch'(x + ct) - ch'(x - ct)\}$$

$$(u_2)_x = \frac{1}{2c} \{h(x + ct) - h(x - ct)\} \quad (u_2)_{xx} = \frac{1}{2c} \{h'(x + ct) - h'(x - ct)\}$$

$$(u_2)_{tt} - c^2(u_2)_{xx} = 0$$

$$\implies (u)_{tt} - c^2(u)_{xx} = 0$$

Stima di stabilità che si deduce dalla formula di d'Alembert

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]} |u(x, t)| &\leq \sup_{y \in \mathbb{R}} |\frac{1}{2}g(y)| + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |h(y)| dy \\ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |h(y)| dy &\leq \frac{1}{2c} \sup_{y \in \mathbb{R}} |h(y)| \cdot 2ct \leq T \sup_{y \in \mathbb{R}} |h(y)| \\ \sup_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]} |u(x, t)| &\leq \sup_{\mathbb{R}} |g| + T \sup_{\mathbb{R}} |h| \end{aligned}$$

Si chiama stima di stabilità perché per linearità, se u_1, u_2 sono soluzioni di problemi con g_1, h_1 e g_2, h_2

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \sup_{\mathbb{R}} |g_1 - g_2| + T \sup_{\mathbb{R}} |h_1 - h_2|$$

Quindi riesco a controllare l'errore della soluzione con lo scarto delle condizioni iniziali (per tempi corti)

Riprendiamo la formula di d'Alembert e vediamone delle proprietà:

$$u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$$

1. L'equazione della corda vibrante non regolarizza

Per ottenere che $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ devo richiedere $g \in C^2(\mathbb{R})$ $h \in C^1(\mathbb{R})$

(a posteriori, risulta $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$)

In particolare: per condizioni iniziali meno regolari di così non esistono soluzioni classiche

Oss. Dato che è "fisicamente sensato" che esistano condizioni iniziali meno regolari, servirà una nozione di soluzione in senso debole

2. Chiediamoci in quali punti la soluzione $u(\bar{x}, \bar{t})$ dipenda dai valori di g e h

Indicheremo queste regioni con il nome domini di dipendenza

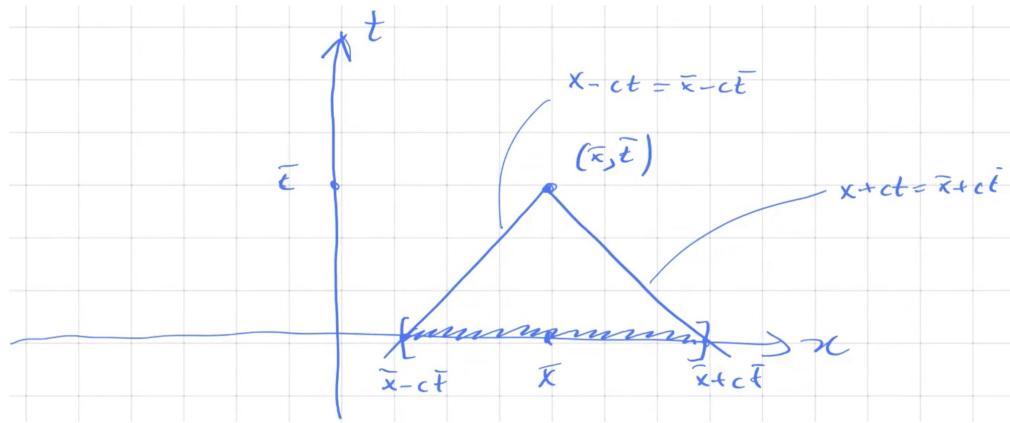
Dalla formula di d'Alembert leggo che il valore $u(\bar{x}, \bar{t})$ dipende

dai valori di g nei punti $\bar{x} + c\bar{t}$ $\bar{x} - c\bar{t}$

dai valori di h nei punti dell'intervallo $[\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}]$

Preso un punto nello spazio-tempo (\bar{x}, \bar{t})

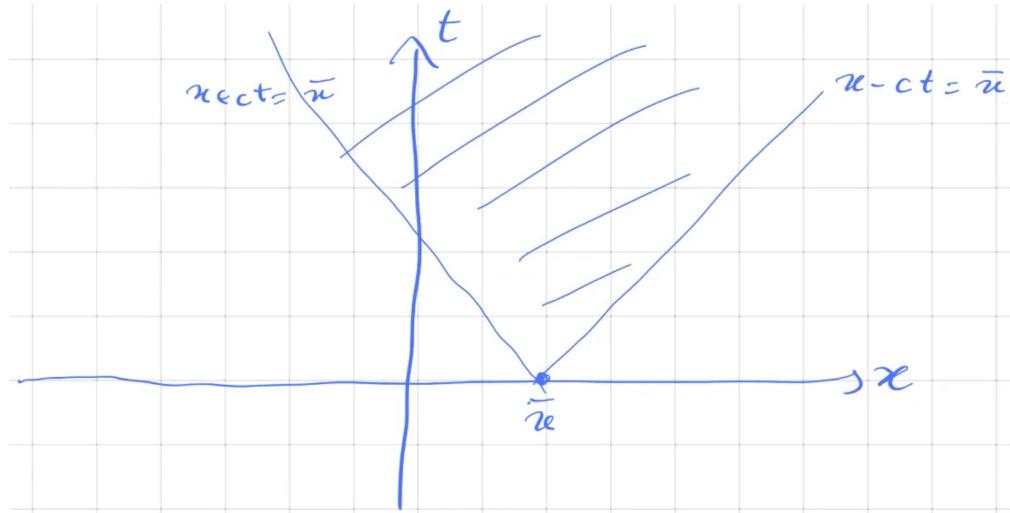
$u(\bar{x}, \bar{t})$ dipende dai valori delle condizioni iniziali nei punti dell'intervallo $[\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}]$



La motivazione fisica è che l'informazione viaggia con velocità finita (c) e quindi partendo da (\bar{x}, \bar{t}) traccio le linee che contengono i punti "raggiungibili" con velocità c

3. Viceversa, cerchiamo in quale regione (x, t) , i valori delle condizioni iniziali in un certo punto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ influenzano i valori della soluzione $u(x, t)$

La regione si chiama dominio di influenza e la troviamo facendo un processo inverso a quello di prima e quindi sarà l'area compresa tra le rette con velocità c



I valori di g, h in \bar{x} influenzano u nel dominio:

$$D_{\bar{x}} = \{(x, t) : \bar{x} - ct \leq x \leq \bar{x} + ct\}$$

Le rette di questo tipo: $x + ct = \xi$ $x - ct = \eta$ sono le due famiglie di rette caratteristiche

Il metodo che abbiamo usato per scrivere l'integrale generale è anche detto **metodo delle caratteristiche**

L'integrale generale che abbiamo ottenuto

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$$

Ci dice che l'informazione viaggia lungo le linee caratteristiche

Risolviamo adesso il problema di Cauchy per l'equazione non omogenea della corda vibrante illimitata

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Per linearità (principio di sovrapposizione), ci basta risolvere il problema (*):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Usiamo il **metodo di Duhamel**

Sia $w(x, t, s)$ la soluzione del problema:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > s \\ w(x, s, s) = 0 \\ w_t(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}$$

Allora $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$ risolve (*)

Oss. A differenza del metodo di Duhamel nel caso dell'equazione del trasporto abbiamo dovuto aggiungere una condizione nel problema di w

Giustifichiamo formalmente il problema:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \int_0^0 w(x, t, s) ds = 0 \\ u_t(x, t) &= \underbrace{w(x, t, t)}_0 + \int_0^t w_t(x, t, s) ds \\ u_t(x, 0) &= \int_0^0 w(x, t, s) ds = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{tt}(x, t) &= \underbrace{w_t(x, t, t)}_{f(x, t)} + \int_0^t w_{tt}(x, t, s) ds \\
u_{xx}(x, t) &= \int_0^t w_{xx}(x, t, s) ds \\
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= f(x, t) + \int_0^t \underbrace{[w_{tt} - c^2 w_{xx}](x, t, s)}_0 ds = f(x, t)
\end{aligned}$$

Applichiamo il metodo di Duhamel al nostro caso

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & t > s \\ w(x, s, s) = 0 \\ w_t(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}$$

Dobbiamo prendere la formula di d'Alembert con $g \equiv 0$

$$\begin{aligned}
t &\mapsto t - s & h(y) &\mapsto f(y, s) & w(x, t, s) &= \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \\
u(x, t) &= \int_0^t w(x, t, s) ds = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds
\end{aligned}$$

È la candidata formula risolutiva del problema (*)

Verifica delle ipotesi:

Se $f \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ la u è ben definita

Vediamo sotto quali ipotesi ulteriori abbiamo $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

(Calcoliamo le derivate e vediamo che condizioni richiedono)

$$\begin{aligned}
u_t(x, t) &= \frac{1}{2c} \left\{ \underbrace{\int_{x-c(t-t)}^{x+c(t-t)} f(y, s) dy}_{\int_x^x \dots = 0} + \int_0^t [cf(x + c(t-s), s) + cf(x - c(t-s), s)] ds \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t [f(x + c(t-s), s) + f(x - c(t-s), s)] ds \\
u_t(x, 0) &= \int_0^0 \dots = 0 \\
u_{tt}(x, t) &= \frac{1}{2} \left\{ f(x, t) + f(x, t) + \int_0^t [cf_x(x + c(t-s), s) - f_x(x - c(t-s), s)] ds \right\}
\end{aligned}$$

Per questo ci serve $f_x \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t [f(x + c(t-s), s) - f(x - c(t-s), s)] ds$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t [f_x(x + c(t-s), s) - f_x(x - c(t-s), s)] ds$$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) + \frac{c}{2} \int_0^t f_x(\dots) - f_x(\dots) ds - c^2 \frac{1}{2} \int_0^t f_x(\dots) - f_x(\dots) ds = f(x, t)$$

TEOREMA.

Se $f(x, t) \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ ed $\exists \frac{\partial f}{\partial x} \in C^0(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ allora la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

è:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) ds \right) ds$$

La soluzione del problema completo

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

è:

$$u(x, t) = \frac{g(x+ct) + g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy + \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y, s) dy \right) ds$$

3.4 Soluzione debole per il problema di Cauchy globale per la corda vibrante

Vogliamo dare senso al concetto di soluzione quando i dati iniziali sono meno regolari di quanto richiesto affinché esista soluzione classica

Oss. Vediamo nel caso della corda illimitata, si potrebbe ripetere analogo nel caso della corda sul segmento

Oss. L'idea delle soluzioni deboli è di supporre tutto regolare e cercare una formulazione integrale equivalente
Dopodiché si richiedono le regolarità imposte dalla nuova formulazione

Prendiamo il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Supponiamo prima che sia $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_{tt} - c^2 u_{xx}) \varphi(x, t) dx dt = 0$$

$$0 = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} (u_{tt}\varphi)(x, t) dt \right) dx}_{A} - c^2 \underbrace{\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (u_{xx}\varphi)(x, t) dx dt}_{B}$$

Oss. In B è facile perché φ ha supporto compatto e quindi integrando per parti non ho i termini di bordo

$$B = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u \varphi_{xx} dx dt$$

Per A:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \varphi u_{tt} dt &= [\varphi u_t(x, t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi_t u_t dt = -\varphi(x, 0) \underbrace{u_t(x, 0)}_{h(x)} - \left\{ [\varphi_t u(x, t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi_{tt} u dt \right\} = \\ &= -\varphi(x, 0) h(x) + \varphi_t(x, 0) g(x) + \int_0^{+\infty} \varphi_{tt} u dt \\ \implies A &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \varphi_{tt} u dt dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi_t(x, 0) g(x) - \varphi(x, 0) h(x) dx \end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme, ottengo:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (\varphi_{tt} - c^2 \varphi_{xx}) u dt dx + \int_{\mathbb{R}} [\varphi_t(x, 0) g(x) - \varphi(x, 0) h(x)] dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty)) \quad (2)$$

Abbiamo dimostrato che se $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ è soluzione classica del problema di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Con $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$, allora $\forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vale la (2)

DEFINIZIONE.

Sia $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ si dice che u è **soluzione in senso debole** del problema di Cauchy (1), con $g \in C^0(\mathbb{R})$ $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ se $\forall \varphi \in C_0^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ vale la (2)

Abbiamo dimostrato che se u è soluzione classica allora è anche soluzione debole

Valgono anche i seguenti risultati:

TEOREMA.

Se $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ è soluzione debole di (1) con $g \in C^2(\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R})$

Allora u è anche soluzione in senso classico

TEOREMA.

Siano $g \in C^0(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $u(x, t) = \frac{g(x + ct) + g(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy$

Allora $u \in C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ ed è soluzione in senso debole del problema di Cauchy (1)

Vediamo una precisazione sull'unicità della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione della corda vibrante, divisa in 3 step:

1. Usando il metodo di d'Alembert abbiamo provato esistenza e unicità del per il problema di Cauchy per l'equazione omogenea

2. Col metodo di Duhamel abbiamo provato l'esistenza di soluzione per l'equazione non omogenea

3. L'unicità nel caso non omogenea segue da quella per il caso omogeneo perché se u_1, u_2 sono 2 soluzioni

$$\text{del problema } \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(x, 0) = g \\ u_t(x, 0) = h \end{cases} \quad \text{allora } u = u_1 - u_2 \text{ risolve } \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u = 0 \\ u_t = 0 \end{cases}$$

E per questo problema so già che l'unica soluzione è quella $\equiv 0$

3.5 Modelli fisici delle onde

(I) Membrana Vibrante

In dimensione $n=2$, l'equazione della membrana vibrante è $u_{tt} - c^2 \Delta u = f$

A cui sono aggiunte le condizioni di Cauchy e se sono in un dominio anche le condizioni al contorno

Quindi il problema tipico sarà di Cauchy-Dirichlet con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

(II) Onde sonore

In $n=3$, posta ρ_0 è la densità dell'aria a riposo e $\rho(x, t)$ la densità variabile con $x \in \mathbb{R}^3$, abbiamo

$\rho = \rho_0(1 + s)$ dove s è la condensazione (che sarà relativamente piccola)

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c^2 \Delta s = 0 \quad \text{dove } c \text{ ha le dimensioni della velocità}$$

(II) Onde elettromagnetiche

In $n=3$, in assenza di sorgenti, nel vuoto, ogni componente del campo elettrico e magnetico soddisfa:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{dove } c \text{ è la velocità della luce nel vuoto}$$

3.6 Equazione delle onde su domini limitati

Oss. L'equazione delle onde non è uguale in tutte le dimensioni, per questo non possiamo affrontarla una volta sola per tutte le dimensioni

Vediamo un risultato di unicità per il problema di Cauchy-Dirichlet (o Cauchy-Neumann) per l'equazione delle onde su domini limitati, che vale in tutte le dimensioni

TEOREMA.

Sia $Q_T = \Omega \times (0, T)$ un "cilindro" tale che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e lipschitziano

Tra le funzioni $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$, la soluzione dei seguenti problemi se esiste è unica

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{in } Q_T \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f & \text{in } Q_T \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Oss. La dimostrazione imita quella della corda vibrante fissata agli estremi, ovvero il metodo dell'energia

DIM.

Siano u_1, u_2 soluzioni dello stesso problema (uno di quelli visti nell'enunciato)

$u_1, u_2 \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$ allora $u = u_1 - u_2$ è $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$ e vale:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } Q_T \\ u = 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Voglio provare che $u \equiv 0$

Definiamo l'energia $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2)(x, t) dx$

Quindi vogliamo provare che:

1. $E'(t) = 0$ quindi $E(t) = E(0)$
2. $E(0) = 0$ quindi $E(t) = 0$
3. $u \equiv 0$

$$\begin{aligned} \text{Dato che} \quad |\nabla u|^2 &= \sum u_{x_i}^2 \\ E'(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(2u_t u_{tt} + 2c^2 \sum u_{x_i} u_{x_i,t} \right) dx \\ \int_{\Omega} \sum u_{x_i} u_{x_i,t} &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u_t dx \stackrel{\text{I Green}}{=} - \int_{\Omega} u_t \Delta u + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ E'(t) &= \int_{\Omega} u_t \underbrace{(u_{tt} - c^2 \Delta u)}_0 dx + \int_{\partial\Omega} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS \end{aligned}$$

Se le condizioni al contorno sono $\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \implies E'(t) = 0$

Se invece le condizioni sono $u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad \forall t > 0 \implies u_t(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega \quad \forall t > 0 \implies E'(t) = 0$

Quindi $E(t)$ è costante $E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2(x, 0) + c^2 |\nabla u(x, 0)|^2) dx$
 $u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega \implies \nabla u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$, inoltre $u_t(x, 0) = 0 \implies E(t) \equiv 0$

Ho quindi dimostrato che $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2)(x, t) dx = 0$

Dato che i due termini sono entrambi positivi, l'unico modo è se $u_t \equiv 0$ e $\nabla u = 0$

$\implies u = \text{costante}$, ma poiché $u(x, 0) = 0$, allora $u \equiv 0$

□

Consideriamo un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde omogenea su un cilindro limitato in dimensione n.

Sia $Q_T = \Omega \times (0, T)$ un "cilindro limitato" tale che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato (lipschitziano per unicità)

$$\text{Il problema sarà: } \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in } Q_T \\ u = 0 & x \in \partial \Omega \quad t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \Omega \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Impostiamo il problema per **separazione di variabili** cercando:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$XT'' - c^2 T \Delta X = 0 \quad (\text{dividiamo per } XT)$$

$$\frac{\Delta X}{X}(x) = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} \quad \forall t > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tc} \quad \begin{cases} \Delta X = \lambda X & \text{in } \Omega \\ X = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad T''(t) = \lambda c^2 T(t) \quad \text{per } t > 0$$

Dobbiamo risolvere, come sotto problema, il problema agli autovalori per il laplaciano, ovvero

$$\text{Determinare } X \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \quad X \not\equiv 0 \text{ e } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tc} \quad \begin{cases} \Delta X = \lambda X & \text{in } \Omega \\ X = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Vediamo che troviamo lo stesso problema se consideriamo il problema analogo per l'equazione del calore:

$$\begin{cases} u_t - D \Delta u = 0 & Q_T \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T) \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Per la separazione delle variabili $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$XT' - DT \Delta X = 0 \quad \frac{\Delta X}{X}(x) = \frac{T'}{DT}(t) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall t > 0$$

$$\implies \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tc} \quad \begin{cases} \Delta X = \lambda X & \text{in } \Omega \\ X = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \quad T'(t) = \lambda D T(t) \quad \text{per } t > 0$$

Quindi è utile saper risolvere il problema agli autovalori per il laplaciano, per risolvere entrambi i problemi

Cerco $X \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tc $X \not\equiv 0$

$$\begin{cases} \Delta X = \lambda X & \Omega \\ X = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \text{ dominio limitato e lipschitziano e con } \lambda \in \mathbb{R}$$

TEOREMA.

Ogni eventuale autovalore λ del problema agli autovalori del laplaciano è $\lambda < 0$

DIM.

Oss. Stiamo supponendo che ci sia un autovalore e quindi c'è anche la sua autofunzione

Sia $(X, \lambda) = (\text{autofunzione, autovalore})$

$$\Delta X = \lambda X \implies \int_{\Omega} (X \Delta X)(x) dx = \lambda \int_{\Omega} X^2(x) dx$$

Per la I identità di Green:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (X \Delta X)(x) dx &= - \int_{\Omega} |\nabla X|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \underbrace{X}_{0} \frac{\partial X}{\partial n} dS \quad \text{perché ho } X(x) = 0 \text{ su } \partial\Omega \\ \lambda &= - \frac{\int_{\Omega} |\nabla X|^2 dx}{\int_{\Omega} X^2 dx} \leq 0 \quad \text{Quoziente di Rayleigh} \end{aligned}$$

Oss. Il denominatore è diverso da 0 perché X per essere autofunzione deve essere non nulla

Inoltre se fosse $\int_{\Omega} |\nabla X|^2 dx = 0$ allora $\nabla X = 0 \implies X = \text{cost}$, ma essendo $X = 0$ su $\partial\Omega$, vorrebbe dire $X \equiv 0$ che non è accettabile $\implies \lambda < 0$

□

Poiché $\lambda < 0$ le soluzioni di $T''(t) = \lambda c^2 T(t)$ sono trigonometriche, del tipo:

$$a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad \text{con } \omega = c\sqrt{-\lambda}$$

Per il calore, invece $T'(t) = \lambda D T(t)$ $T(t) = ce^{\lambda D t}$ che è un'esponenziale decrescente

Se troveremo una successione X_n, λ_n di autofunzioni e autovalori del laplaciano, per il problema di C-D per le onde, allora la candidata soluzione avrà la forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x) \{a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\} \quad \text{con } \omega_n = c\sqrt{-\lambda_n}$$

Imponendo le condizioni iniziali troveremo:

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n X_n(x) \quad \text{e} \quad h(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x) b_n \omega_n$$

Per risolvere il problema dovremo saper sviluppare i dati iniziali in serie di autofunzioni $X_n(x)$

Oss. L'obiettivo è che la successione di autofunzioni sia abbastanza completa (per esempio un sistema ortonormale completo), in questo modo riusciremo a sviluppare le condizioni iniziali del problema in serie di quelle autofunzioni

TEOREMA.

Siano (X, λ) e (Y, μ) due coppie autofunzione-autovalore del problema

$$\begin{cases} \Delta X = \lambda X & \Omega \\ X = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con } \lambda \neq \mu$$

Allora $\int_{\Omega} (XY)(x) dx = 0$, cioè X, Y sono ortogonali in $L^2(\Omega)$

DIM.

$$\begin{aligned} \Delta X &= \lambda X & \Delta Y &= \mu Y \\ Y\Delta X &= \lambda XY & X\Delta Y &= \mu XY \\ Y\Delta X - X\Delta Y &= (\lambda - \mu)XY \\ \int_{\Omega} (Y\Delta X - X\Delta Y) dx &= (\lambda - \mu) \int_{\Omega} XY dx \\ \text{II di Green} \quad \int_{\Omega} (Y\Delta X - X\Delta Y) dx &= \int_{\partial\Omega} \left(Y \frac{\partial X}{\partial n} - X \frac{\partial Y}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (X = 0, Y = 0 \text{ in } \partial\Omega) \\ &\implies (\lambda - \mu) \int_{\Omega} XY dx = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Per ipotesi } \lambda \neq \mu \implies \int_{\Omega} XY dx = 0$$

□

Si può dimostrare il seguente:

TEOREMA.

$\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato, esiste una successione $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ di autovalori di

$$\begin{cases} \Delta X = \lambda X & \Omega \\ X = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

tale che $\lambda_n \rightarrow -\infty$ ed esiste un sistema ortonormale completo di $L^2(\Omega)$ $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ di autofunzioni

Il problema degli autovalori per il laplaciano su domini limitati si sa risolvere esplicitamente in geometrie molto semplici, come:

Rettangoli, cerchi e triangoli equilateri in $n=2$

Parallelepipedi, sfere e cilindri in $n=3$

Oss. Troviamo esplicitamente la formula delle autofunzioni nel caso del rettangolo che è il più semplice

Oss. Nelle geometrie elencate l'approccio è quello di semplificare ulteriormente il problema con la separazione delle variabili

Problema agli autovalori per il laplaciano sul rettangolo

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = \lambda u(x, y) & \Omega \\ u(x, y) = 0 & \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con } \Omega = [0, a] \times [0, b]$$

Risolvo per separazione di variabili, cerco $u(x, y) = X(x)Y(y)$

$$X''Y + XY'' = \lambda XY \quad (\text{divido per } XY)$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = \lambda \implies \frac{X''}{X}(x) = \lambda - \frac{Y''}{Y}(y)$$

$$\exists \mu \in \mathbb{R} \quad \text{tc} \quad \frac{X''}{X}(x) = \mu \quad \text{e} \quad \lambda - \frac{Y''}{Y}(y) = \mu$$

Voglio che la u sia nulla su tutti i bordi, quindi $X(0) = X(a) = 0$ e $Y(0) = Y(b) = 0$

$$\begin{array}{l} \text{(come visto in precedenza)} \quad \begin{cases} X'' = \mu X & x \in [0, a] \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \implies X(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \mu_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ \implies \frac{Y''}{Y} = \lambda - \mu = \gamma \end{array}$$

$$\begin{cases} Y''(y) = \gamma Y(y) \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases} \implies Y(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \gamma_m = -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

Abbiamo una successione a 2 indici di autovalori $\lambda_{n,m} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \quad n, m = 1, 2, \dots$

E autofunzioni $u_{n,m}(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ s. on. c. di $L^2(\Omega)$

Conseguenza sulla membrana vibrante rettangolare:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \Omega, t > 0 \\ u = 0 & \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = h(x, y) \end{cases}$$

Se $\Omega = (0, a) \times (0, b) \subseteq \mathbb{R}^2$ allora per il problema

La candidata soluzione ha la forma: $u(x, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \{a_{n,m} \cos(\omega_{n,m} t) + b_{n,m} \sin(\omega_{n,m} t)\}$

Con $\omega_{n,m} = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} = c\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$ e le frequenze $\frac{\omega_{n,m}}{2\pi} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$

$$a_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{\omega_{n,m}} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx$$

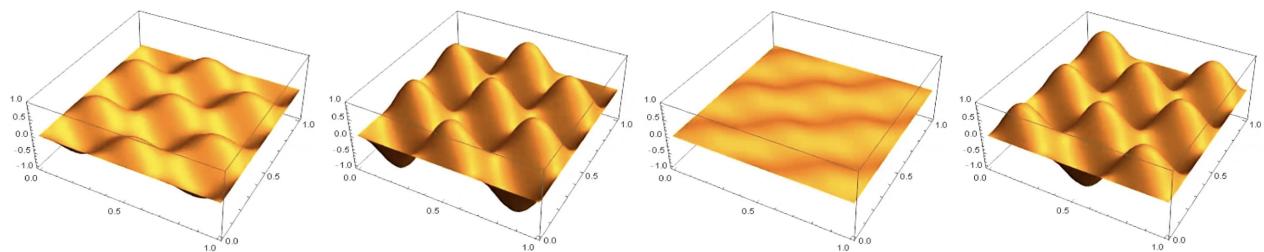
Oss. In $n=2$ le frequenze si comportano in modo diverso dal caso della corda:

Per una membrana vibrante rettangolare la frequenza fondamentale è: $\mathcal{V}_{1,1} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$

Le frequenze successive $\mathcal{V}_{n,m}$ non sono multiple intere di $\mathcal{V}_{1,1}$

Oss. Anche nella membrana avremo i nodi, come nel caso della corda, in particolare potremmo avere delle linee nodali su cui $u_{n,m} = 0$

Vediamo l'andamento di una membrana vibrante



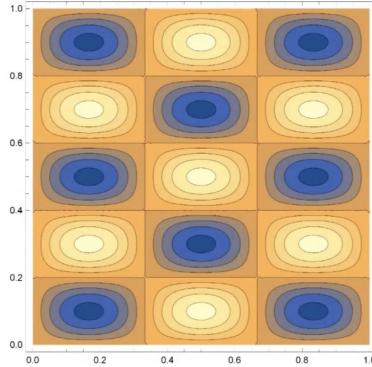


Figure 8: Linee di livello per un t fissato, che mostrano le linee di nodali

Nel caso della membrana quadrata possiamo avere dei problemi:

$$\text{Infatti se } a = b, \text{ allora } \omega_{n,m} = \frac{c\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2} \implies \omega_{n,m} = \omega_{m,n}$$

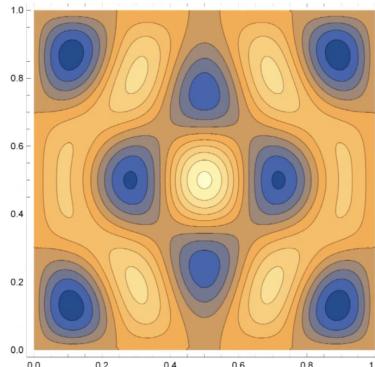
Ma il fatto che due pulsazioni diverse siano uguali, vuol dire che queste nonostante abbiano dati spaziali diversi, avranno dati temporali uguali

Ovvero esistono autofunzioni diverse dello stesso autovalore

Questo ha una conseguenza sulle linee nodali:

Per esempio $u_{2,3}(x, y) + u_{3,2}(x, y)$ è una autofunzione e quindi genera una vibrazione stazionaria (periodica)

Adesso le linee nodali sono le soluzioni di $u_{2,3}(x, y) + u_{3,2}(x, y) = 0$ che mi darà una soluzione più complicata, vediamone un esempio



Causa il fenomeno della degenerazione della membrana quadrata, ovvero esistono vibrazioni stazionarie con linee nodali di forma complicata

Con queste stesse autofunzioni si risolve il problema di C-D per l'equazione del calore sul rettangolo

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = 0 & \Omega = (0, a) \times (0, b), t > 0 \\ u = 0 & \partial\Omega \quad t > 0 \\ u(x, y, 0) = g(x, y) \end{cases}$$

Ottengo analogamente $\lambda_{n,m} = -\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$

$$T' = D\lambda t \quad T_{n,m}(t) = e^{-D\pi \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)t}$$

La candidata soluzione del problema di C.-D. si scrive:

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) c_{n,m} e^{-D\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)t}$$

$$\text{con } c_{n,m} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy dx$$

3.7 Problema di Cauchy globale per l'equazione delle onde

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Oss. Partiremo dallo studio nel caso n qualsiasi, dopodiché riusciremo a procedere richiedendo n=3

Trovata questa ricaveremo n=2, mentre non vedremo i casi con $n \geq 4$

Vogliamo decomporre il problema in sotto problemi più semplici:

Proposizione:

$$\text{Sia } u \text{ soluzione di } \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

$$\text{E sia } w(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \text{ allora } w \text{ (formalmente) soddisfa } \begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ w(x, 0) = h(x) \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Oss. Dico "formalmente" perché non sto facendo attenzione alle ipotesi della proposizione, avrei dovuto chiedere, per esempio, $u \in C^3$

DIM. (Proposizione)

Se $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ allora $u_{ttt} - c^2 \Delta u_t = 0$ ovvero $w_{tt} - c^2 \Delta w = 0$ ($w = u_t$)

$w(x, 0) = u_t(x, 0) = h(x)$

$w_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) = c^2 \Delta u(x, 0)$ ma $u(x, 0) \equiv 0 \Rightarrow \Delta u(x, 0) \equiv 0 \Rightarrow w_t(x, 0) = 0$

□

Quindi se sappiamo risolvere $\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$

Allora sappiamo anche risolvere $\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$

TEOREMA: Unicità.

Nella classe di funzioni $C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ la soluzione u di un problema $\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$

se esiste è unica

Si dice che $\Gamma(x, t)$ è soluzione fondamentale dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ se Γ risolve:

$$\begin{cases} \Gamma_{tt} - c^2 \Delta \Gamma = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \Gamma(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \\ \Gamma_t(x, 0) = \delta_0(x) & \text{in } D'(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

Se Γ è soluzione fondamentale, allora la soluzione del problema $\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$

sarà data, formalmente, da $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) h(y) dy \quad t > 0$

$$\begin{aligned}
\text{Perché } (u_{tt} - c^2 \Delta u)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x \Gamma \right)}_0 (x - y, t) h(y) dy = 0 \\
u(x, 0) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Gamma(x - y, 0)}_0 h(y) dy = 0 \\
u_t(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_t(x - y, t) h(y) dy \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \langle \delta_x(\cdot), h \rangle = h(x)
\end{aligned}$$

Avevamo mostrato che se u risolve il problema con $g = 0$, allora $w = u_t$ risolve il problema con $h = 0$

$$\begin{aligned}
\text{Quindi con il principio di sovrapposizione, scriviamo la soluzione di:} \quad & \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) h(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) g(y) dy \\
u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) h(y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_t(x - y, t) g(y) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Infine troviamo la soluzione per (*) :} \quad & \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \\
\text{Con il metodo di Duhamel, sia } w(x, t, x) \text{ soluzione di} \quad & \begin{cases} w_{tt} - c^2 \Delta w = 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, t > s \\ w(x, s, s) = 0 \\ w_t(x, s, s) = f(x, s) \end{cases}
\end{aligned}$$

Allora $u(x, t) = \int_0^t w(x, t, s) ds$ risolve il problema (*)

$$\begin{aligned}
w(x, t, s) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy \\
u(x, t, s) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \text{candidata soluzione di (*)}
\end{aligned}$$

Per risolvere il problema, ci rimane solo da ricavare la Γ

$$\begin{aligned}
\text{Per fare ciò, ci concentreremo sul problema:} \quad & \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}
\end{aligned}$$

E poi dalla formula di rappresentazione di questo, risaliremo alla Γ

Impostiamo il problema per n qualsiasi, ma lo risolveremo esplicitamente per $n = 3$

Utilizziamo il **metodo delle medie sferiche**:

Sia $u(x, t)$ una funzione $C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, definiamo la sua media sferica, ovvero la media integrale di u sulla superficie sferica di centro x e raggio r

$$\begin{aligned} M_u(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y, t) dS(y) = \left[\begin{array}{l} y = x + rz \quad z \in \partial B_1(0) \\ dS(y) = r^{n-1} dS(z) \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz, t) r^{n-1} dS(z) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz, t) dS(z) \end{aligned}$$

Oss. Un cambio di variabili di questo tipo lo faremo spesso, perché mi conviene sempre togliere le variabili dall'insieme di integrazione

Riscritta in questo modo non ho r al denominatore e viene comoda perché ha senso anche se $r \leq 0$

In particolare se $r = 0$, non ho più z nell'integrale e quindi $M_u(x, 0, t) = u(x, t)$

Inoltre $M_u(x, -r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x - rz, t) dS(z) = [z = -w] = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rw, t) dS(w) = M_u(x, r, t)$

Quindi $M_u(x, r, t)$ è definita $\forall r \in \mathbb{R}$, è pari rispetto a r e vale $M_u(x, 0, t) = u(x, t)$

TEOREMA.

Se $u(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, allora $M_u(x, r, t)$ definita come sopra, soddisfa l'equazione di Darboux in (x, r) :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) = \Delta_x M_u(x, r, t)$$

DIM.

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz, t) dS(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \nabla_x u(x + rz, t) \cdot z dS(z) =$$

Dato che z è sulla sfera di raggio 1, equivale al vettore normale

$$\stackrel{\text{Teo Div}}{=} \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \nabla_z \cdot \nabla_x u(x + rz, t) dz =$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} r \underbrace{\nabla_x \cdot \nabla_x}_{\Delta_x u} u(x + rz, t) dz = \Delta_x \left(\frac{r}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rz, t) dz \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{l} x + rz = y \quad y \in B_r(x) \\ r^n dz = dy \end{array} \right] = \frac{\Delta_x}{\omega_n} \int_{B_r(x)} r u(y, t) \frac{dy}{r^n} = \Delta_x \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} u(y, t) dy \right) = \\
&= \Delta_x \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \left(\int_{\partial B_\rho(x)} u(y, t) dS(y) \right) d\rho \right) = \Delta_x \left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \omega_n \rho^{n-1} M_u(x, \rho, t) d\rho \right)
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_u}{\partial r}(x, r, t) &= \Delta_x \left(\frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r \rho^{n-1} M_u(x, \rho, t) d\rho \right) \\
r^{n-1} \frac{\partial M_u}{\partial r} &= \Delta_x \int_0^r \rho^{n-1} M_u(x, \rho, t) e\rho \\
\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial M_u}{\partial r} \right) &= \Delta_x (r^{n-1} M_u(x, r, t)) \\
(n-1)r^{n-2} \frac{\partial M_u}{\partial r} + r^{n-1} \frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} &= r^{n-1} \Delta_x M_u \\
\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial M_u}{\partial r} &= \Delta_x M_u
\end{aligned}$$

□

TEOREMA.

Se $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ soddisfa $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ allora anche $M_u(x, r, t)$ soddisfano

$$\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x M_u = 0$$

DIM.

$$\begin{aligned}
M_u(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} u(x + rx, t) dS(z) \\
\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2}(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + rz, t) dS(z) \\
\Delta_x M_u(x, r, t) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \Delta_x u(x + rz, t) dS(z) \\
\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x M_u &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x u \right)}_0 (x + rx, t) dS(z) = 0
\end{aligned}$$

□

Quindi se $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ e soddisfa $u_{tt} - c\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$, allora

$$\frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial M_u}{\partial r} = \Delta_x M_u = \frac{1}{c^2} (M_u)_{tt}$$

Moltiplicando per rc^2

$$r \frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} = c^2 \left(r \frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2} + (n-1) \frac{\partial M_u}{\partial r} \right)$$

$$\text{Dato che } \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_u) = \frac{\partial}{\partial r} \left(M_u + r \frac{\partial M_u}{\partial r} \right) = 2 \frac{\partial M_u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 M_u}{\partial r^2}$$

$$\text{Se } n=3 \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(rM_u) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rM_u)$$

Cioè $v(r, t) = rM_u(x, r, t)$, con x parametro, soddisfa l'equazione della corda vibrante illimitata in (r, t)

In $n=3$ possiamo riscrivere in modo comodo, avendo $\omega_3 = 4\pi$

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz, t) dS(z)$$

Riprendendo il problema e le condizioni da cui siamo partiti, abbiamo $u(x, 0) = 0$ e $u_t(x, 0) = h(x)$

$$\begin{aligned} \implies v(r, 0) &= rM_u(x, r, 0) = r \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \underbrace{u(x + rz, 0)}_0 dS(z) = 0 \\ \implies v_t(r, 0) &= r \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}(x + rz, 0)}_{h(x+rz)} dS(z) = rM_h(x, r) \end{aligned}$$

$$\text{Abbiamo scoperto che } v(r, t) = rM_u(x, r, t) \text{ soddisfa: } \begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0 \\ v(r, 0) = 0 \\ v_t(r, 0) = rM_h(x, r) \end{cases}$$

Per la formula di d'Alembert abbiamo:

$$rM_u(x, r, t) = v(r, t) = \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_h(x, s) ds$$

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{2rc} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_h(x, s) ds$$

Per $r \rightarrow 0^+$

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_h ds$$

Dato che $\int_{r-cr}^{r+cr} sM_h ds \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} \int_{ct}^{ct} sM_h ds$ e $M_h(x, s)$ è pari per s

Avrà $sM_h(x, s)$ dispari per s e di conseguenza $\int_{-ct}^{ct} sM_h(x, s) ds = 0$

Quindi ho un limite che tende a $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ calcoliamolo con De l'Hopital

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2c} \left\{ (r + ct) M_h(x, r + ct) - (r - ct) M_h(x, r - ct) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2c} \left\{ ct M_h(x, ct) + ct M_h(x, -ct) \right\} = \frac{1}{2c} 2ct M_h(x, ct) \quad \text{perché } M_h \text{ è pari}$$

$$u(x, t) = t M_h(x, ct) = t \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} h(x + ctz) dS(z) = t \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(y) dS(y)$$

$$\implies \text{Se } u \text{ soddisfa il problema di Cauchy} \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

$$\text{Allora } u(x, t) = t \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(y) dS(y)$$

$$\text{La candidata soluzione di} \begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbb{R}^3 \quad t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

È data dalla formula di Kirchhoff:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(y) dy + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} g(y) dy \right)$$

Oss. Vediamo i passaggi della verifica della candidata che non faremo

Dovremo spostare le variabili dentro la h e la g , togliendole dagli insiemi di integrazione

$$u(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} h(x + ctz) dS(z) + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} g(x + ctz) dS(z) + \frac{t}{4\pi} \int_{\partial B_1(0)} \Delta g(x + ctz) \cdot cz dS(z)$$

Da qua vedo che per avere $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ dovrò chiedere che siano $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$

TEOREMA.

Se $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ e $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$, allora l'unica soluzione $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

è data dalla formula di Kirchhoff

L'equazione delle onde in \mathbb{R}^3 mostra una perdita di regolarità della soluzione, ovvero all'istante iniziale deve essere C^3 (e con derivata C^2) per poter essere C^2 in seguito

Oss. Si dice che la soluzione "consuma" una derivata

Oss. Per la corda vibrante illimitata andava meglio: bastava $g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$

Leggiamo dalla formula di Kirchhoff il dominio di dipendenza e influenza:

I valori di g e h in un punto y (all'istante $t=0$) influenzano il valore di $u(x, t)$ solo se y è su $\partial B_{ct}(x)$
 $\implies |x - y| = ct$, cioè $g(y)$ e $h(y)$ influenzano u solo all'istante $t = \frac{|x - y|}{c}$

Principio di Huygens forte: una sorgente di segnale concentrata può propagare un segnale istantaneo.

Dalla formula di Kirchoff leggiamo anche la soluzione fondamentale:

$$\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(y) dS(y) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x - y, t) h(y) dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B_\rho(x)} \Gamma(x - y, t) h(y) dS(y) \right) d\rho$$

Oss. Quindi di tutti questi integrali deve rimanere solo quello con $\rho = ct$, quindi la Γ sarà una delta:

$$\Gamma(x - y, t) = \frac{\delta(|x - y| - ct)}{4\pi c^2 t} \quad \Gamma(x, t) = \frac{\delta(|x| - ct)}{4\pi c^2 t} = \frac{\delta(|x| - ct)}{4\pi c |x|}$$

Quindi la soluzione fondamentale dell'equazione delle onde in \mathbb{R}^3 non è una funzione, ma una particolare distribuzione (misura concentrata su superfici)

Vediamo il **metodo della discesa** di Hadamard per dedurre una formula risolutiva per il problema di Cauchy globale per $n = 2$ a partire dal caso $n = 3$

So che per $n = 3$ la soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

Si rappresenta con $u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} h(y) dS(y)$ e voglio risolvere l'analogo problema in $\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$

Sia $u(x, t) = u(x_1, x_2, t)$ soluzione di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty) \\ u(x_1, x_2, 0) = 0 \\ u_t(x_1, x_2, 0) = h(x_1, x_2) \end{cases}$$

Allora u , vista come funzione di (x_1, x_2, x_3, t) , con $x_3 = 0$, soddisfa

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty) \\ u(x_1, x_2, 0) = 0 \\ u_t(x_1, x_2, 0) = h(x_1, x_2) \end{cases}$$

Dove nel laplaciano compare $u_{x_3 x_3} = 0$

Posso applicare la formula di Kirchhoff:

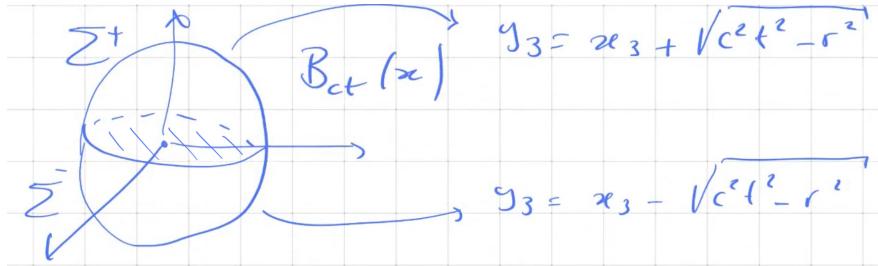
$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x-y|=ct} h(y_1, y_2) dS$$

$$\text{Con } y = (y_1, y_2, y_3) \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad y \in \partial B_{ct}(x) \iff |x-y| = ct$$

$$\text{Definisco } r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \implies (x_3 - y_3)^2 + r^2 = c^2 t^2 \implies y_3 = x_3 \pm \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$$

Divido la superficie della sfera $B_{ct}(x)$ in due semisfere con superfici:

$$\Sigma^+ \text{ che ha } y_3 = x_3 + \sqrt{c^2 t^2 - r^2} = f^+(y_1, y_2) \quad \Sigma^- \text{ che ha } y_3 = x_3 - \sqrt{c^2 t^2 - r^2}$$



Oss. Possiamo riscrivere l'integrale. Invece che vederlo sulla superficie della sfera B_{ct} , si fanno variare y_1 e y_2 nel cerchio che unisce le due semisfere. La y_3 sarà fissata di conseguenza. Invece x_3 non è importante perché la u non dipende da x_3 .

Riscriviamo $\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\Sigma^+} h(y_1, y_2) dS$ dove $dS = \sqrt{1 + |\nabla f^+|^2} dy_1 dy_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^+}{\partial y_i} &= \frac{1}{2\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} (2(x_i - y_i)) \implies |\nabla f^+|^2 = \frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{c^2 t^2 - r^2} = \frac{r^2}{c^2 t^2 - r^2} \\ \implies dS &= \sqrt{1 + \frac{r^2}{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

Dato che h non dipende da y_3 e $|\nabla f^+|^2 = |\nabla f^-|^2$, allora i due integrali sono uguali

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \left\{ \int_{\Sigma^+} \dots + \int_{\Sigma^-} \dots \right\} = \frac{1}{4\pi c^2 t} \left\{ 2 \int_{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq c^2 t^2} \frac{h(y_1, y_2) ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi c} \int_{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq c^2 t^2} \frac{h(y_1, y_2)}{\sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2}} dy_1 dy_2 = \\ u(x, t) &= \frac{1}{2\pi c} \int_{|x-y| \leq ct} \frac{h(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy = \text{ Formula di Poisson} \end{aligned}$$

TEOREMA.

Se $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$

Allora l'unica soluzione classica ($C^2(\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty))$) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \\ u_t(x, 0) = h(x) \end{cases}$$

è assegnata dalla formula di Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|x-y| < ct} \frac{h(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{|x-y| < ct} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy \right)$$

Non dimostriamo il teorema, ma per capire da dove arrivano le richieste su h e g , facciamo il solito cambio

di variabili: $\begin{bmatrix} y = x + ctz \\ dy = x^2 t^2 dz \end{bmatrix} \quad |x-y| < ct \iff |z| < 1$ posso riscrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi c} \int_{|z| < 1} \frac{h(x+ctz)}{\sqrt{c^2 t^2 - c^2 t^2 |z|^2}} c^2 t^2 dz &= \frac{t}{2\pi} \int_{|z| < 1} \frac{h(x+ctz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{|x-y| < ct} \frac{g(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy \right) &= \{ \text{analogamente} \} = \frac{1}{2\pi} \int_{|z| < 1} \frac{g(x+ctz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz + \frac{ct}{2\pi} \int_{|z| < 1} \frac{\nabla g(x+ctz) \cdot z}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \end{aligned}$$

Dalla formula di Poisson leggiamo l'espressione della soluzione fondamentale per $n = 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi c} \int_{|x-y| < ct} \frac{h(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \Gamma(x-y, t) h(y) dy \\ \Gamma(x-y, t) &= \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} \chi_{B_{ct}(x)}(y) \\ \Gamma(x, t) &= \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}} \chi_{B_{ct}(0)}(x) = \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}} H(c^2 t^2 - |x|^2) \end{aligned}$$

Oss. La χ_A è la funzione caratteristica che vale 1 in A e 0 fuori

Mentre la funzione $H(\cdot)$ è la funzione di Heaviside

Dominio di influenza:

Il valore del dato iniziale h in un certo y influenza il valore di u in un certo x quando $|x-y| \leq ct$
cioè in tutti gli istanti $t \geq \frac{|x-y|}{c}$

Oss. In generale quando n è pari, l'onda si comporta così, ovvero una volta raggiunto un punto continua ad avere influenza in quel punto. Mentre per n dispari, come per $n=3$, l'influenza è istantanea

Ricaviamo la soluzione fondamentale dell'operatore delle onde in \mathbb{R}

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \Gamma(x - y, t) h(y) dy \\ \Gamma(x - y, t) &= \frac{1}{2c} \chi_{(x-ct, x+ct)}(y) \\ \Gamma(x, t) &= \frac{1}{2c} \chi - (-ct, ct)(x) = \frac{1}{2c} \{H(x + ct) - H(x - ct)\} \end{aligned}$$

Oss. Non la ricaviamo, ma per la soluzione delle onde con $n \geq 3$ dispari, al crescere di n , le richieste di regolarità dei dati è maggiore, più precisamente si richiede $g \in C^{m+1}$ e $h \in C^m$ dove $m = \frac{n+1}{2}$

Oss. Mentre nel caso di n pari, ricaveremo la soluzione direttamente da $n+1$ dispari e si richiede regolarità $g \in C^{m+1}$ e $h \in C^m$ dove $m = \frac{n+2}{2}$

Sintesi sui metodi di risoluzione esplicita visti

Significato probabilistico delle EDP

Confronti e classificazione delle EDP lineari del secondo ordine

Concetti diversi di soluzione per le EDP

4 Teoria moderna

4.1 Spazi di Sobolev

Oss. Gli spazi di Sobolev sono gli spazi di funzioni in cui si ambienta la teoria delle soluzioni deboli dei problemi ai limiti

Quindi si tratta di costruire degli spazi di funzioni derivabili in un qualche senso debole e che muniti di una norma di tipo integrale risultino essere spazi di Banach

DEFINIZIONE.

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si dice che f è **derivabile in senso debole** in \mathbb{R} se $\exists g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}) \quad (\text{o anche } C_0^\infty(\mathbb{R}))$$

Oppure, sia $f \in L^1_{loc}(a, b)$ si dice che f è **derivabile in senso debole** in (a, b) se $\exists g \in L^1_{loc}(a, b)$ tale che

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x) dx = - \int_a^b g(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(a, b) \quad (\text{o anche } C_0^\infty(a, b))$$

In entrambi i casi si dice che $g = f'$, ovvero che g è la derivata in senso debole di f

Se $f \in C^1(\mathbb{R})$ allora è derivabile in senso debole e la derivata debole è la sua derivata classica

Vediamo che relazione c'è col concetto di derivata distribuzionale

Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ posso considerare $T_f \in D'(\mathbb{R})$ $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R})$
Ogni distribuzione è derivabile, infatti $\forall T \in D'(\mathbb{R}) \quad \exists T' \in D'(\mathbb{R}) \quad \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$

In particolare: $\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx$

Se la distribuzione $(T_f)'$ si rappresenta mediante una funzione $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, allora $\langle (T_f)', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) dx$
Oss. Però non è detto che la derivata distribuzionale si rappresenti con una funzione

Esempi:

- $f(x) = |x|$ calcoliamo, se c'è, la derivata debole

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^0 -x\varphi'(x) dx + \int_0^{+\infty} x\varphi'(x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\{\forall \varphi \in C_0^1(\mathbb{R})\} &= [-x\varphi(x)]_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + [x\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \\ &= \left\{ \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx \right\} = - \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) sign(x) dx\end{aligned}$$

Quindi $g(x) = sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ è la derivata debole di $|x|$ in \mathbb{R}

Oss. Non è la stessa cosa della derivata classica che infatti non era definita nell'origine

Oss. In generale la derivata debole è definita in \mathbb{R}^n , non potrò mai definirla ovunque tranne in un punto, come facevo per la derivata classica

- Funzione di Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$$\langle (T_H)', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle$$

$$(T_H)' = \delta \text{ in } D'(\mathbb{R})$$

Però $\nexists g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ tc $\int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$

Quindi $H(x)$ non è derivabile in senso debole

DEFINIZIONE.

Sia $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio si dice che $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in senso debole,

se $\exists g \in L_{loc}^1(\Omega)$ tc $\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$ (o $C_0^\infty(\Omega)$)

In tal caso si scrive $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$

La derivata debole di una funzione se esiste è unica

Infatti se g_1 e g_2 sono derivate deboli $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

$$\text{Allora } \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = - \int_{\Omega} g_1(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} g_2(x) \varphi(x) dx$$

$$\implies \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \int_{\Omega} [g_1 - g_2] \varphi dx = 0$$

$$\implies g_1 - g_2 = 0 \text{ q.o. in } \Omega$$

TEOREMA.

Se Ω è un dominio di \mathbb{R}^n (aperto, connesso) e $f \in L_{loc}^1(\Omega)$

Allora se esistono le derivate deboli $\frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv 0$ in $\Omega \implies f \equiv \text{costante}$

DEFINIZIONE: Spazi di Sobolev.

Sia Ω un dominio di \mathbb{R}^n e $p \in [1, +\infty]$

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) \text{ (a valori reali) tc esistono le derivate deboli } \frac{\partial f}{\partial x_1} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \in L^p(\Omega) \right\}$

Per $p = 2$ $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

In $H^1(\Omega)$ si definisce il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n f_{x_i}g_{x_i} dx$$

TEOREMA.

$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)}$ è un prodotto scalare che rende H^1 uno spazio di Hilbert

$$\|f\|_{H^1(\Omega)}^2 = \langle f, f \rangle = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx$$

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2}$$

DIM.

$\langle , \rangle_{H^1(\Omega)}$ è bilineare e commutativo per la definizione e le proprietà integrali

$$\langle f, f \rangle = \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 \geq 0$$

E se $\langle f, f \rangle = 0 \implies \|f\|_{L^2}^2 = 0 \implies f = 0$ q.o.

$\implies \langle , \rangle$ è un prodotto scalare, perciò $H^1(\Omega)$ è uno spazio prehilbertiano

Proviamo che è completo

Sia $\{f_k\} \subseteq H^1(\Omega)$ una successione di Cauchy

$\|f_k - f_h\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ per $k, h \rightarrow +\infty$ questo ha due conseguenze:

$\|f_k - f_h\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ cioè $\{f_k\}$ è una succ di Cauchy in L^2

$\left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - \frac{\partial f_h}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ cioè $\left\{ \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right\}_{k=1}^{\infty}$ è di Cauchy in $L^2(\Omega)$

Ma $L^2(\Omega)$ è completo quindi:

$$\exists f \in L^2(\Omega) \text{ tc } \|f_k - f\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$$

$$\exists g_j \in L^2(\Omega) \text{ tc } \left\| \frac{\partial f_k}{\partial x_j} - g_j \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, n$$

Voglio provare che $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \forall j$

Sappiamo che $\forall k = 1, 2, \dots$

$$\int_{\Omega} f_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

$$\text{Per } k \rightarrow +\infty \text{ ho } f_k \rightarrow f \text{ in } L^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \rightarrow g_j \text{ in } L^2$$

In uno spazio di Hilbert se $f_k \rightarrow f$ allora $\langle f_k, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle$

Quindi portando al limite entrambi i termini dell'equazione sopra ottengo:

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} g_j(x) \varphi(x) dx$$

Quindi $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}$ in senso debole, che è uguale a g_j

$$f_k \xrightarrow{L^2} f \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \xrightarrow{L^2} \frac{\partial f}{\partial x_j} \implies f_k \xrightarrow{H^1(\Omega)} f \in H^1(\Omega)$$

Quindi H^1 è completo

□

TEOREMA.

$W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, +\infty]$ e con la norma $\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = (\|f\|_{L^p}^p + \|\nabla f\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$ è uno spazio di Banach

Oss. $\forall p \in [1, +\infty]$ sono di Banach, ma solo per $p = 2$ è di Hilbert

Oss. Vediamo, per $n = 1$, quanto irregolari possono essere le funzioni negli spazi di Sobolev

TEOREMA: di caratterizzazione di H^1 in una dimensione.

$f \in H^1(a, b)$ se e solo se valgono i seguenti:

- $f \in L^2(a, b) \cap C^0(a, b)$ • per q.o. $x \in (a, b) \exists f'(x)$ (derivata classica) e $f' \in L^2(a, b)$
- $f(x_1) - f(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$

Esempio: $f(x) = x^\alpha$ per quali α ho $f \in H^1(0, 1)$?

$$f \in L^2(0, 1) \quad \int_0^1 x^{2\alpha} dx < +\infty \quad 2\alpha > -1 \quad \alpha > -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad f' \in L^2 \quad \text{se} \quad \int_0^1 x^{2\alpha-2} dx < \infty \quad 2\alpha - 2 > -1 \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

$$f(x) = x^\alpha \in H^1(0, 1) \quad \text{per } \alpha > \frac{1}{2}$$

In più variabili. per quali valori α $f(x) = |x|^\alpha$ è $H^1(B_1(0))$?

$$f \in L^2 \quad \int_{B_1(0)} |x|^{2\alpha} dx < \infty \iff \omega_n \int_0^1 \rho^{2\alpha} \rho^{n-1} d\rho < \infty$$

$$2\alpha + n - 1 > -1 \quad \alpha > -\frac{n}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \alpha |\alpha|^{\alpha-1} \frac{x_j}{|x|} \in L^2(B_1(0)) \quad \text{se} \quad \int_{B_1(0)} |x|^{2\alpha-2} dx < \infty$$

$$\text{Se } \int_0^1 \rho^{2\alpha-2} \rho^{n-1} d\rho < \infty \quad 2\alpha - 2 + n - 1 > 1 \quad 2\alpha > 2 - n \quad \alpha > 1 - \frac{n}{2}$$

Se $n \geq 3$, per gli α tc $1 - \frac{n}{2} < \alpha < 0$ ho un esempio di funzione $H^1(\Omega)$ discontinua e illimitata

Per fare un esempio di funzioni "brutte" in \mathbb{R}^2 consideriamo $f(x) = (-\log|x|)^\alpha$ in $B_1(0)$

Per quali α è $f \in H^1(B_1(0))$?

$$f \in L^2 \quad \text{se} \quad \int_{B_1(0)} (-\log|x|)^{2\alpha} dx < \infty \iff \int_0^1 (-\log \rho)^{2\alpha} \rho d\rho < +\infty \iff \text{sempre}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (-\log|x|)^\alpha = \frac{-\alpha(-\log|x|)^{\alpha-1}}{|x|} \frac{x_j}{|x|} \in L^2$$

$$\text{Se } \int_0^1 \frac{(-\log \rho)^{2\alpha-2}}{\rho^2} \rho d\rho < \infty \quad 2\alpha - 2 < -1 \quad 2\alpha < 1 \quad \alpha < \frac{1}{2}$$

Per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ $f(x) = (-\log|x|)^\alpha$ è una funzione discontinua, illimitata, ma $H^1(B_1(0))$

Oss. Quindi in dimensione maggiore di 1 esistono funzioni negli spazi di Sobolev discontinue e illimitate

Però la discontinuità, come quella che abbiamo in dimensione 1 per la funzione di Heaviside non si può avere neanche in dimensione maggiore, ovvero un salto che ha dimensione $n - 1$

In \mathbb{R}^n $f(x) = \chi_{B_1(0)}(x)$ non sta in H^1 (non ha derivate deboli)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = \int_{B_1(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx = \int_{\partial B_1(0)} \varphi(x) x_j d\sigma(x)$$

$$\nexists g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ tc } \int_{\partial B_1(0)} \varphi(x) x_j d\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \varphi(x) dx \quad \text{perché la superficie ha dimensione inferiore}$$

La derivata distribuzionale è una misura, non una funzione

Calcolo delle derivate con derivata debole

TEOREMA: di Rellich.

Se f è lipschitziana in Ω

Allora è derivabile in senso classico q.o. in Ω , le sue derivate classiche sono anche deboli e $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$

$$Lip(\Omega) \subseteq W^{1,\infty}(\Omega) \underset{\text{se } \Omega \text{ limitato}}{\subseteq} H^1(\Omega)$$

TEOREMA: Derivata del prodotto.

Se $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in Lip(\Omega)$

Allora $fg \in H^1(\Omega)$ e $\frac{\partial}{\partial x_j}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x_j}g + f\frac{\partial g}{\partial x_j}$ (dove la derivata di fg è intesa in senso debole)

Funzione nulla al bordo di un dominio

Ci servirà il concetto di funzione nulla su $\partial\Omega$ per un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nel contesto degli spazi di Sobolev
Oss. Però questo è difficile da definire perché il bordo ha misura nulla e le funzioni sono definite q.o.

DEFINIZIONE.

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : \exists \{f_k\} \subseteq D(\Omega) (\text{o } C_0^1(\Omega)) \text{ tc } \|f_k - f\|_{H^1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0\}$$

$H_0^1(\Omega)$ è la chiusura di $D(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$

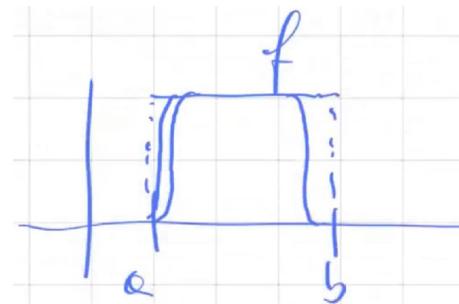
$H_0^1(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni che sono limiti in H^1 di successioni di funzioni test

$$D(\Omega) \text{ è denso in } H_0^1(\Omega) \quad D(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega) \subseteq H^1(\Omega)$$

Vediamo due esempi di funzioni, la prima è $H_0^1(\Omega)$ infatti è limite in H^1 di una successione H^1

La seconda invece è limite di una successione H^1 , ma è limite solo in L^2

Per essere limite in H^1 serve che la derivata della funzione sia limite in L^2 della successione delle derivate



In una variabile, dove so che le funzioni sono continue si può dimostrare il seguente:

TEOREMA.

$$f \in H_0^1(a, b) \iff f \in H^1(a, b), f \in C[a, b] \text{ e } f(a) = f(b) = 0$$

Proprietà dello spazio H_0^1

TEOREMA: Integrazione per parti.

Siano $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in H_0^1(\Omega)$ allora

$$\int_{\Omega} f_{x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} f g_{x_i} \, dx$$

DIM.

Sia $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq D(\Omega)$ tc $g_k \rightarrow g$ in $H^1(\Omega)$

Quindi $g_k \rightarrow g$ in L^2 e $(g_k)_{x_i} \rightarrow g_{x_i}$ in L^2

Per definizione di derivata debole di f , poiché $g_k \in D(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f_{x_i} g_k = - \int_{\Omega} f (g_k)_{x_i}$$

Per $k \rightarrow +\infty$ i due termini tendono, per continuità del prodotto scalare in L^2 , ai valori

$$\int_{\Omega} f_{x_i} g = - \int_{\Omega} f g_{x_i}$$

□

TEOREMA: Disuguaglianza di Poincarè.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, allora $\exists C_{\Omega} > 0$ tc $\forall f \in H_0^1(\Omega)$ si ha:

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$$

Oss. Quindi riesco a controllare il valore della funzione con la derivata, grazie al fatto che è nulla al bordo

DIM.

È sufficiente provarla per $f \in D(\Omega)$, poi per densità segue per $f \in H_0^1(\Omega)$

Supponiamo di averlo già dimostrato per $f \in D(\Omega)$ e sia $f \in H_0^1(\Omega)$

Sia $\{f_k\} \subseteq D(\Omega)$ tc $f_k \rightarrow f$ in $H^1(\Omega)$

So che $\|f_k\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|\nabla f_k\|_{L^2}$

Ma facendo convergere i due termini per $k \rightarrow +\infty$ ottengo $\|f\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|\nabla f\|_{L^2}$

Sia $f \in D(\Omega)$ calcoliamo

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(xf(x)^2) dx \stackrel{\text{teo div}}{=} \int_{\partial\Omega} \underbrace{xf(x)^2}_0 \cdot n d\sigma = 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(xf(x)^2) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i f(x)^2) = \sum_{i=1}^n \left(f(x)^2 + x_i 2f(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = nf(x)^2 + 2f(x)x \cdot \nabla f(x) \\ &\int_{\Omega} [nf(x)^2 + 2f(x)x \cdot \nabla f(x)] dx = 0 \\ n \int_{\Omega} f(x)^2 dx &= -2 \int_{\Omega} f(x)x \cdot \nabla f(x) dx \end{aligned}$$

$$n\|f\|_{L^2}^2 \leq 2 \int_{\Omega} |f(x)| |x| |\nabla f(x)| dx$$

So che Ω è limitato, quindi preso R tc $\Omega \subseteq B_R(0) \implies |x| \leq R$

$$n\|f\|_{L^2}^2 \leq 2R\|f\|_{L^2}\|\nabla f\|_{L^2}$$

$$\|f\|_{L^2} \leq \frac{2R}{n} \|\nabla f\|_{L^2} \quad C_{\Omega} = \frac{2R}{n}$$

□

COROLLARIO 1:

Se Ω è un dominio limitato di \mathbb{R}^n

Allora in $H_0^1(\Omega)$ la norma $\|f\|_{H^1}$ è equivalente alla norma $\|\nabla f\|_{L^2}$

DIM.

Per la diseguaglianza di Poincaré $\|f\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|\nabla f\|_{L^2}$

$$\implies \|\nabla f\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{H^1}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2 \leq C_{\Omega}^2 \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2$$

$$\implies \|\nabla f\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^1} \leq \sqrt{1 + C_{\Omega}^2} \|\nabla f\|_{L^2}$$

Quando valgono due diseguaglianze di questo tipo si dice che le norme sono equivalenti

□

Spazio duale di $H_0^1(\Omega)$

Sia $T \in H_0^1(\Omega)^*$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz

$$\exists! f \in H_0^1(\Omega) \text{ tc } \forall g \in H_0^1(\Omega) \quad T(g) = \langle g, f \rangle_{H^1} = \int_{\Omega} gf dx + \int_{\Omega} \sum g_{x_i} f_{x_i} dx$$

Poiché $D(\Omega) \subseteq H_0^1(\Omega)$ (anzi, è denso in $H_0^1(\Omega)$)

$$\forall \varphi \in D(\Omega) \quad T(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi f \, dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i} f_{x_i} \, dx = \left\langle \varphi, f - \sum_{i=1}^n (f_{x_i})_{x_i} \right\rangle \implies f - \sum_{i=1}^n (f_{x_i})_{x_i} \in D'(\Omega)$$

In altre parole il funzionale lineare continuo T su $H_0^1(\Omega)$, ristretto allo spazio $D(\Omega)$, coincide con la distribuzione: $T = f - \sum_{i=1}^n (f_{x_i})_{x_i}$

$$f \in H_0^1(\Omega) \subseteq L^2 \quad f_{x_i} \in L^2$$

Viceversa, fissate $n+1$ funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$, consideriamo la distribuzione $T = f_0 - \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i}$

Poiché T è un funzionale lineare continuo su $D(\Omega)$, che è denso in $H_0^1(\Omega)$, T si può prolungare per densità, in modo unico, a un $\tilde{T} \in H_0^1(\Omega)^*$

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \left\langle f_0 - \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \left(f_0 \varphi + \sum_{i=1}^n f_i \varphi_{x_i} \right) dx = \tilde{T}(\varphi) \quad \text{che ha senso } \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ |\langle T, \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \left(f_0 \varphi + \sum_{i=1}^n f_i \varphi_{x_i} \right) dx \right| \leq \|f_0\|_2 \|\varphi\|_2 + \sum \|f_i\|_2 \|\varphi_{x_i}\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dato che } \|\varphi\|_2 &\leq \|\varphi\|_{H^1} \quad \text{e} \quad \|\varphi_{x_i}\|_2 \leq \|\varphi\|_{H^1} \implies |\langle T, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{H^1} \left(\|f_0\|_2 + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_2 \right) \\ &\implies \|T\|_{H_0^1(\Omega)^*} \leq \sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L^2} \end{aligned}$$

Conclusione: Il duale di $H_0^1(\Omega)$ si identifica con lo spazio delle distribuzioni del tipo

$$\begin{aligned} T &= f_0 - \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i} \quad \text{con } f_i \in L^2(\Omega) \quad i = 0 \dots n \\ \text{e } \|T\|_{H_0^1(\Omega)^*} &\leq \sum_{i=0}^n \|f_i\|_2 = \inf \left\{ \sum_{i=0}^n \|f_i\|_2 \text{ tc } T = f_0 - \sum_{i=1}^n (f_i)_{x_i} \right\} \end{aligned}$$

Si chiamerà $H_0^1(\Omega)^* = H^{-1}(\Omega)$

Oss. Chiamata così perché è l'insieme delle funzioni che sono derivate di funzioni L^2

Esempi di elementi di $H^{-1}(\Omega)$

Dimensione $n = 1$:

$\delta = H'(x)$ la delta di Dirac è la derivata distribuzionale del gradiente di Heaviside

$H(x) \in L^2(-1, 1)$ $\delta = H'$

Poiché la δ è la derivata distribuzionale di una funzione L^2 , allora $\delta \in H^{-1}(-1, 1)$

Dimensione $n \geq 2$:

$$f(x) = \chi_{B_r(0)}(x) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \chi_{B_r(0)}(x) \notin H^1(\mathbb{R}^n)$$

$$\partial_{x_i} f = \partial_{x_i} \chi_{B_r(0)}(x) \in H^{-1}(\mathbb{R}^n)$$

$$T : \varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^n) \longmapsto \langle \partial_{x_i} \chi_{B_r(0)}(x), \varphi \rangle = - \langle \chi_{B_r(0)}, \varphi_{x_i} \rangle = - \int_{B_r(0)} \varphi_{x_i}(x) dx$$

Oss. La derivata f non esiste come funzione, ma esiste come distribuzione

Spazi di Sobolev di funzioni derivabili m volte $H^m(\Omega)$ $m = 2, 3, \dots$

Per esempio $H^2(\Omega) = \left\{ f \in H^1(\Omega) \text{ tc } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ ha derivate deboli } \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i, j \right\}$

In modo iterativo si definisce:

$H^m(\Omega) = \left\{ f \in H^{m-1}(\Omega) \text{ tc ogni derivata debole di } f \text{ di ordine } m-1 \text{ a sua volta ha le } n \text{ derivate deboli } \frac{\partial}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}$

Prodotto scalare in $H^m(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{H_m} &= \int_{\Omega} fgh dx + \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} f D^{\alpha} g dx \\ \|f\|_{H^m(\Omega)} &= \sqrt{\langle f, f \rangle_{H_m}} = \left(\|f\|_{L^2}^2 + \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

TEOREMA.

$H^m(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert

Talvolta si pone $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

Oss. Ovvvero le funzioni derivabili zero volte, inoltre così si capisce ancora meglio il simbolo H^{-1}

I "teoremi di immersione di Sobolev"

Dicono che se $f \in H^m(\Omega)$ (per m abbastanza grande), allora $f \in C^k(\bar{\Omega})$ per un intero k (abbastanza grande) dipendente da m e dalla dimensione n

In particolare: se $f \in H^m(\Omega) \forall m = 1, 2, \dots$ allora $f \in C^{\infty}(\Omega)$

Teoremi di approssimazioni di funzioni in spazi di Sobolev mediante funzioni regolari

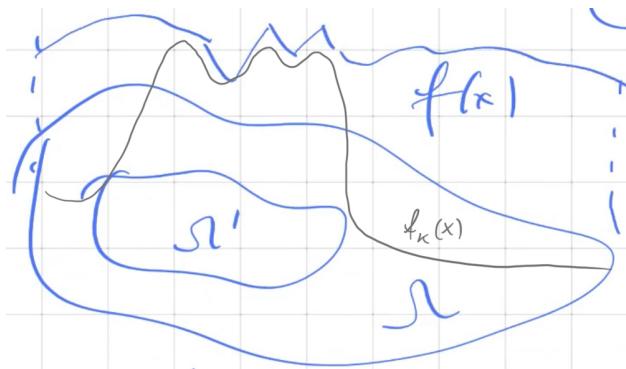
- Citiamo un risultato locale di approssimazione

TEOREMA.

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $\Omega' \Subset \Omega$

Allora $\forall f \in H^1(\Omega) \quad \exists \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq D(\Omega)$ tc $\|f_k - f\|_{H^1(\Omega')} \rightarrow 0$

Oss. $\Omega' \Subset \Omega$ vuol dire contenuto con completezza, ovvero Ω' è un aperto, limitato tale che $\overline{\Omega'} \subseteq \Omega$



- Citiamo due risultati globali

TEOREMA.

$D(\mathbb{R}^n)$ è denso in $H^1(\mathbb{R}^n)$ (In altre parole $H^1(\mathbb{R}^n) = H_0^1(\mathbb{R}^n)$)

Oss. Ovvero su $H^1(\mathbb{R}^n)$ posso approssimare le funzioni con le funzioni test

Approssimazione globale su un dominio

Dato un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $D(\overline{\Omega}) = \left\{ \varphi|_{\overline{\Omega}} : \varphi \in D(\mathbb{R}^n) \right\}$ (Con $\varphi|_{\overline{\Omega}} = \varphi$ ristretto su $\overline{\Omega}$)

TEOREMA.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e lipschitziano oppure sia Ω un semispazio di \mathbb{R}^n

Allora $\forall f \in H^1(\Omega) \quad \exists \{f_k\} \subseteq D(\overline{\Omega})$ tc $\|f_k - f\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$

In particolare $C^1(\overline{\Omega})$ è denso in $H^1(\Omega)$

Conseguenza: formula di derivata del prodotto

Avevamo visto per $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in Lip(\Omega)$ la formula $(fg)_{x_i} = f_{x_i}g + fg_{x_i}$

Utilizzando il teorema di approssimazione, questo risultato si estende a $f, g \in H^1(\Omega)$

TEOREMA.

$\forall f, g \in H^1(\Omega)$ (con le ipotesi precedenti su Ω) vale che:

$$(fg)_{x_i} = f_{x_i}g + fg_{x_i}$$

E in particolare $fg \in W^{1,1}(\Omega)$

DIM.

Sia $\{g_k\} \subseteq C^1(\bar{\Omega}) \subseteq Lip(\Omega)$: $g_k \xrightarrow{H^1} g$

Sappiamo che $f \in H^1$ e $g_k \in Lip(\Omega)$ quindi $(fg_k)_{x_i} = f_{x_i}g_k + f(g_k)_{x_i}$

Per $k \rightarrow +\infty$ facendo tendere i termini singolarmente ottengo

$$(fg)_{x_i} = f_{x_i}g + fg_{x_i}$$

□

Traccia di una funzione $H^1(\Omega)$ su $\partial\Omega$

Oss. Per traccia si intende restrizione

Dato $f \in H^1(\Omega)$ ha senso chiedersi quanto vale f su $\partial\Omega$, ovvero riesco a definire $f|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$?

Problema: $\partial\Omega$ ha misura nulla e f in generale è definita q.o.

Se fosse $f \in L^2(\Omega)$, allora non sarebbe possibile definire univocamente $f|_{\partial\Omega}$

Vediamo un esempio: Le funzioni caratteristiche del quadrato, con il bordo incluso o escluso

$$f(x, y) = \chi_{[0,1] \times [0,1]}(x, y)$$

$$\tilde{f}(x, y) = \chi_{(0,1) \times (0,1)}(x, y)$$

f e \tilde{f} sono la stessa funzione in $L^2(\Omega)$, infatti $f = \tilde{f}$ q.o. ma sono diverse al bordo:

$$f|_{\partial\Omega} = \chi_{[0,1]} \quad \tilde{f}|_{\partial\Omega} \equiv 0$$

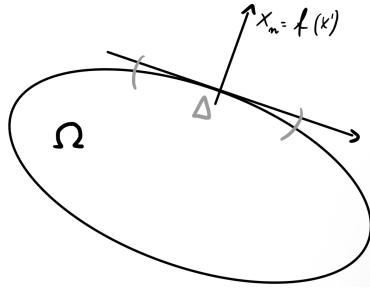
Oss. Quindi per $L^2(\Omega)$ non c'è speranza

Vediamo cosa significa $L^2(\partial\Omega)$

Nel caso più semplice con Ω un semispazio di \mathbb{R}^n , avremo $\underline{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $f(\underline{x}', x_n)$

Allora sarà $L^2(\partial\Omega) = \{f(\underline{x}', 0) \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})\}$

Se Ω è un dominio con frontiera regolare o lipschitziana, userò una rappresentazione locale come nel grafico



$$\text{Con } dS = \sqrt{1 + |\nabla f(\underline{x}')|^2} d\underline{x}' \quad \text{e} \quad g \in L^2(\partial\Omega) \text{ se } \int_{\Delta} g(\underline{x})^2 \sqrt{1 + |\nabla f(\underline{x}')|^2} d\underline{x}'$$

TEOREMA: di traccia.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e lipschitziano oppure sia Ω un semispazio di \mathbb{R}^n

Allora \exists un operatore lineare continuo $\tau_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ chiamato “operatore di traccia” tale che:

$$\forall f \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \tau_0 f = f|_{\partial\Omega} \quad \text{inoltre } \text{Ker } \tau_0 = H_0^1(\Omega)$$

Oss. Ovvero τ_0 restituisce quando vale una funzione sul bordo e ha nucleo $= H_0^1$ perché hanno traccia nulla

TEOREMA: Integrazione per parti tra funzioni H^1 .

Sia Ω come nel teorema precedente e siano $f, g \in H^1(\Omega)$, allora

$$\int_{\Omega} f_{x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} f g_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\tau_0 f)(\tau_0 g) n_i \, dS$$

DIM.

Siano $\{f_k\} \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ $f_k \xrightarrow{H^1} f$ e $\{g_k\} \subseteq C^1(\bar{\Omega})$ $g_k \xrightarrow{H^1} g$

$$\text{Quindi, essendo } \tau_0 \text{ continuo, } f_k|_{\partial\Omega} = \tau_0 f_k \xrightarrow{L^2(\partial\Omega)} \tau_0 f \quad g_k|_{\partial\Omega} = \tau_0 g_k \xrightarrow{L^2(\partial\Omega)} \tau_0 g$$

So che per funzioni regolari vale:

$$\int_{\Omega} (f_k)_{x_i} g_k \, dx = - \int_{\Omega} f_k (g_k)_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} f_k g_k n_i \, dS$$

Per $k \rightarrow +\infty$ e per la continuità del prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ ho

$$\int_{\Omega} f_{x_i} g \, dx = - \int_{\Omega} f g_{x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\tau_0 f)(\tau_0 g) n_i \, dS$$

□

Quindi $\tau_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ è lineare e continua. Inoltre vale $\|\tau_0 f\|_{L^2} \leq c \|f\|_{H^1(\Omega)}$

Oss. Questo ci servirà nei problemi con valori al contorno, per dare senso al dato al bordo come funzione definita solo sul bordo

Problema di caratterizzare lo spazio delle tracce di funzioni $H^1(\Omega)$

Dato che $\forall f \in L^2(\partial\Omega) \ \nexists F \in H^1(\Omega) \text{ tc } \tau_0 F = f$, allora si introduce lo spazio immagine di τ_0

$$\mathcal{I}m(\tau_0) \subsetneq L^2(\partial\Omega)$$

Chiamiamo: $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{f \in L^2(\partial\Omega) : \exists F \in H^1(\Omega) \text{ tc } \tau_0 F = f\}$

Se $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, allora la F tc $\tau_0 F = f$ non è unica. Ogni F di questo tipo si dice un rilevamento di f

$$\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf\{\|F\|_{H^1(\Omega)} : \tau_0 F = f\}$$

$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ si dice spazio delle tracce

4.2 Spazi di Hilbert, forme bilineari e problemi variazionali astratti

RIPASSO: Spazi di funzioni

DEFINIZIONE.

X è uno **spazio vettoriale normato** se esiste $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ tale che

1. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in X \implies \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3. diseguaglianza triangolare $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

DEFINIZIONE.

Si dice che una **successione** $\{x_n\} \subseteq X$ è **di Cauchy** se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.c. $\forall n, m \geq n_0 \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

DEFINIZIONE.

Uno **spazio di Banach** è uno spazio vettoriale normato $(X, \|\cdot\|)$ completo, ovvero se ogni successione $\{x_n\} \subseteq X$ di Cauchy è convergente

DEFINIZIONE.

Sia V uno spazio vettoriale, si dice che è uno **spazio con prodotto scalare** se è definita l'operazione "prodotto scalare" $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
3. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

TEOREMA.

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con prodotto scalare, allora:

1. Vale la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \sqrt{\langle u, u \rangle} \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \forall u, v \in V$$

2. Se definiamo $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ allora $\|\cdot\|$ è una norma (detta norma del prodotto scalare)
3. Vale l'uguaglianza del parallelogramma:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 \|v\|^2) \quad \forall u, v \in V$$

DEFINIZIONE.

Si dice **spazio pre-hilbertiano** uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e munito della norma del prodotto scalare

DEFINIZIONE.

Si dice **spazio di Hilbert** uno spazio pre-hilbertiano completo rispetto alla sua norma

Uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach la cui norma proviene da un prodotto scalare

DEFINIZIONE.

Sia V , uno spazio vettoriale pre-hilbertiano

$a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **forma bilineare** su V se è lineare su entrambi gli ingressi, fissato l'altro:

$$a(\lambda u + \mu v, w) = \lambda a(u, w) + \mu a(v, w) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall u, v, w \in V$$

$$a(w, \lambda u + \mu v) = \lambda a(w, u) + \mu a(w, v) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall u, v, w \in V$$

Diamo altre definizioni utili:

Data una forma bilineare $a(\cdot, \cdot)$ su uno spazio pre-hilbertiano V , diciamo che la forma è:

- Continua se $\exists M > 0$ tc $|a(u, v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$
- Simmetrica se $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$
- Non negativa se $a(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in V$
- Coercitiva se $\exists \lambda > 0$ tc $a(u, u) \geq \lambda\|u\|_V^2$

(Se è coercitiva è anche non negativa)

Esempio: Il prodotto scalare su V $a(u, v) = \langle u, v \rangle$ è una forma bilineare

Simmetrica (per gli assiomi di prodotto scalare)

Continua $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_V\|v\|_V$ (per Cauchy-Schwarz con $M=1$)

Coercitiva $\langle u, u \rangle = \|u\|^2$ (non negativo)

Esempio: $V = H = H^1(a, b)$

$$a(f, g) = \int_a^b (\alpha f'g' + \beta fg' + \gamma fg) dx$$

Affinché $a(f, g)$ sia ben definita serve che le funzioni $\alpha, \beta, \gamma \in L^\infty(a, b)$

In questo caso $a(f, g)$ è una f.b. (forma bilineare) su $H^1(a, b)$

Ed è anche continua:

$$|a(f, g)| \leq \|\alpha\|_{L^\infty}\|f'\|_{L^2}\|g'\|_{L^2} + \|\beta\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2}\|g'\|_{L^2} + \|\gamma\|_{L^\infty}\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2} \leq M\|f\|_{H^1}\|g\|_{H^1}$$

$$\text{con } M = \|\alpha\|_{L^\infty} + \|\beta\|_{L^\infty} + \|\gamma\|_{L^\infty}$$

La f.b. è simmetrica se $\beta \equiv 0$

Oss. Infatti $f'g' = g'f' \quad fg = gf \quad fg' \neq gf'$

Supponiamo che a sia simmetrica, e chiediamoci se la forma è coercitiva

$$a(u, u) = \int_a^b [\alpha(u')^2 + \gamma(u)^2] dx$$

Per essere coercitiva ci servono $\alpha(x) \geq c_1 > 0$ e $\gamma(x) \geq c_2 > 0$ per q.o. $u \in (a, b)$

$$a(u, u) \geq \min(c_1, c_2)\|u\|_{H^1}^2$$

Esempio: Sia $V = C_0^1(a, b)$ con prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_a^b (fg + f'g) dx$ e norma $\|f\|_V^2 = \int_a^b (f^2 + (f')^2) dx$

$$\text{Sia } a(f, g) = \int_a^b (\alpha f'g' + \gamma fg) dx \quad \text{con } \alpha, \gamma \in L_{loc}^1(a, b)$$

$a(f, g)$ è ben definita $\forall f, g \in C_0^1(a, b)$ ma $\nexists M >= \text{tc } |a(f, g)| \leq M\|f\|_{H^1}\|g\|_{H^1}$ ovvero non è continua

DEFINIZIONE.

Sia H uno spazio di Hilbert e $a(u, v)$ una forma bilineare su H

Si dice **problema variazionale astratto** il seguente:

Assegnato $T \in H^*$ determinare $u \in H$ tc $a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H$

Mi interesserà fare delle ipotesi sulla forma bilineare sotto le quali provare che il problema è ben posto, ovvero:

$$\forall T \in H^* \quad \exists! u \in H \text{ soluzione di } a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H$$

E inoltre $\|u\|_H \leq c\|T\|_{H^*}$ con c indipendente da T

TEOREMA: di buona posizione.

Sia H uno spazio di Hilbert e $a(u, v)$ una forma bilineare simmetrica, continua e coerciva su H

Allora $\forall T \in H^*$ il P.V.A. ha una e una sola soluzione $u \in H$ e inoltre

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda} \|T\|_{H^*}$$

Dove λ è la costante di coercività della f.b.

DIM.

Passo 1: Proviamo che se $a(u, v)$ è una f.b. simmetrica, continua e coerciva su H , allora

$$\langle u, v \rangle_a = a(u, v) \text{ è un prodotto scalare in } H$$

$$\text{E posto } \|u\|_{H_a} = \sqrt{\langle u, u \rangle_a} = \sqrt{a(u, u)}$$

Questa norma risulta essere equivalente a quella di partenza $\|u\|_H = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

$$\text{Equivalenza norme: } \exists c_1, c_2 \text{ tc } c_1 \|u\|_H \leq \|u\|_{H_a} \leq c_2 \|u\|_H$$

Dimostriamo il passo 1:

Poiché $a(u, v)$ è f.b. $\langle u, v \rangle_a$ è bilineare

Poiché $a(u, v)$ è simmetrica $\langle u, v \rangle_a$ è commutativo

Poiché $a(u, v)$ è coerciva $\langle u, u \rangle_a = a(u, u) \geq \lambda \|u\|_H^2$

Possiamo dire che $\langle u, u \rangle_a \geq 0 \quad \forall u$ e $\langle u, u \rangle_a = 0 \iff u = 0$

Quindi $\langle u, u \rangle_a$ è prodotto scalare e $\|u\|_{H_a}$ è una norma

Grazie alla coercività e alla continuità di a , ricavo:

$$\lambda \|u\|_H^2 \leq \|u\|_{H_a}^2 = a(u, u) \leq M \|u\|_H \|u\|_H$$

$$\implies \sqrt{\lambda} \|u\|_H \leq \|u\|_{H_a} \leq \sqrt{M} \|u\|_H$$

Passo 2 Proviamo il teorema di buona posizione del P.V.A.

Ovvero dato $T \in H^*$ trovare $u \in H$ tc $a(u, v) = T(v) \forall v \in H$

Mostriamo che T è un funzionale lineare su H continuo anche rispetto a $\|\cdot\|_{H_a}$

$$\begin{aligned} |T(v)| &\leq \|T\|_{H^*} \|v\|_H \leq \left(\|T\|_{H^*} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \|v\|_{H_a} \\ \implies T \in H_a^* \text{ e } \|T\|_{H_a^*} &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|T\|_{H^*} \end{aligned}$$

Per il teorema di rappresentazione di Riesz su H_a $\exists! u \in H_a$ tc $T(v) = \langle u, v \rangle_a = a(u, v) \forall v \in H$

Quindi $\exists! u$ soluzione del P.V.A.

Inoltre (sempre per Riesz) $\|u\|_{H_a} = \|T\|_{H_a^*}$

$$\begin{aligned} \implies \sqrt{\lambda} \|u\|_H &\leq \|u\|_{H_a} = \|T\|_{H_a^*} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|T\|_{H^*} \\ \implies \|u\|_H &\leq \frac{1}{\lambda} \|T\|_{H^*} \end{aligned}$$

□

Questo teorema è un caso particolare del teorema di Lax-Milgram che afferma le stesse cose senza bisogno dell'ipotesi che la f.b. sia simmetrica

Oss. Questo teorema ha dimostrazione più complicata che non vediamo

Quando useremo il teorema dimostrato lo chiameremo teorema di Lax-Milgram

Esiste una relazione tra la soluzione di un PVA e la soluzione di un problema di minimo funzionale

TEOREMA.

Sia H uno spazio di Hilbert e $a(u, v)$ una forma bilineare su H simmetrica e non negativa

Allora dato un $T \in H^*$:

$$\begin{array}{ccc} \text{u è soluzione del P.V.A.} & \iff & \text{u rende minimo in } H \text{ il funzionale} \\ a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H & & J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - T(v) \\ & & \text{Cioè } J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H \end{array}$$

DIM.

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H \iff J(u) \leq J(u + \varepsilon v) \quad \forall v \in H \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Oss. Le due condizioni sono ovviamente analoghe, ma nel secondo modo la pensiamo in un intorno di u , considerando ε piccolo, che è ragionamento che si fa per il calcolo delle variazioni

Quindi

$$\frac{1}{2}a(u, u) - T(u) \leq \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - T(u + \varepsilon v)$$

Usando la linearità e la simmetria di $a(,)$ e la linearità di $T()$, ottengo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(u, u) - T(u) &\leq \frac{1}{2}a(u, u) + \varepsilon a(u, v) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v) - T(u) - \varepsilon T(v) \\ \varepsilon\{a(u, v) - T(v)\} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v) &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ho dimostrato che $J(u) \leq J(v) \forall v \in H$ se e solo se vale (1)

Proviamo che (1) è equivalente a

$$(2) \quad a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H$$

$$(2) \implies (1) \quad (1) \text{ diventa: } \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v)$$

Ma $a(v, v) \geq 0$ perché la f.b. è non negativa, quindi vale (1)

Viceversa valga (1), proviamo (2)

Fissiamo $v \in H$ e mostriamo che $a(u, v) = T(v)$ Per assurdo sia $a(u, v) - T(v) \neq 0$

Per $|\varepsilon| << 1$ il segno di $\varepsilon\{a(u, v) - T(v)\} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 a(v, v)$ è il segno di $\varepsilon\{a(u, v) - T(v)\} \neq 0$

\implies scelgo ε discorde da $\{a(u, v) - T(v)\}$ e ottengo che il primo membro di (1) è negativo, che è assurdo

□

4.3 Formulazione debole del problema di Dirichlet per equazioni ellittiche

Consideriamo il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + d(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Che è un'equazione di diffusione con eventuale termine di reazione, stazionaria, con termine di sorgente per un continuo non omogeneo con $a(x)$ coefficiente di conducibilità

Per dare formulazione debole, partiamo dal caso in cui u è soluzione classica e tutto sia regolare ovvero $u \in C^2(\bar{\Omega})$ Ω limitato e lipschitziano $a(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ $d, f \in C^0(\bar{\Omega})$

Moltiplico l'equazione per $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ e integro per parti

$$\int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot (a \nabla u) \varphi + du \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

$$\int_{\Omega} \left(a \nabla u \cdot \nabla \varphi + du \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

(non c'è integrale di bordo perché $\varphi \in C_0^1(\Omega)$)

L'ipotesi minima affinché la seconda uguaglianza abbia senso è:

$$u \in H^1(\Omega) \quad a, d \in L^\infty(\Omega) \quad f \in L^2(\Omega)$$

Inoltre se è vera $\forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$ per densità è vera $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

DEFINIZIONE.

Si dice che u è **soluzione debole** del problema

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x) \nabla u) + d(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{dove } a, d \in L^\infty(\Omega) \quad f \in L^2(\Omega)$$

$$\text{Se } u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} \left(a \nabla u \cdot \nabla \varphi + du \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Per i passaggi fatti per arrivare alla definizione, se u è soluzione classica e a, d, f, Ω sono regolari quanto serve (visto prima) allora u è anche soluzione debole

Viceversa, supponiamo che $u \in C^2(\bar{\Omega})$ sia soluzione debole del problema, con $a \in C^1(\bar{\Omega}) \quad d, f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ e Ω limitato e lipschitziano. Proviamo che u è soluzione classica

DIM.

Sia $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\int_{\Omega} \left(-\nabla u \cdot \nabla \varphi + du \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$
 $u \in H_0^1(\Omega) \implies \tau_0(u) \equiv 0$ e d'altro canto essendo $u \in C^2(\bar{\Omega}) \quad \tau_0(u) = u|_{\partial\Omega}$ quindi $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$

Applichiamo la formula della soluzione debole a $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ e integriamo per parti

(non ci saranno i termini al bordo perché φ è a supporto compatto)

$$\int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot (a \nabla u) + du \right) \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

$$\int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot (a \nabla u) + du - f \right) \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

$$\implies -\nabla \cdot (a \nabla u) + du - f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

Quindi u è soluzione classica

□

Sia $H = H_0^1$ spazio di Hilbert

Consideriamo la f.b. $a(u, v) = \int_{\Omega} (a(x)\nabla u \cdot \nabla v + d(x)u \cdot v) dx$

u è soluzione debole di $\begin{cases} Lu = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases} \iff u$ è soluzione del P.V.A.

Dove per P.V.A. si intende il problema per cui dobbiamo trovare u tale che $a(u, v) = T(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

con $T(v) = \int_{\Omega} vf dx$

T è lineare $\|T(v)\| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}$

Quindi $T \in H^{-1}(\Omega)$ e $\|T\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2}$

Dati $u, v \in H_0^1(\Omega)$ la f.b. è ben definita se $a, d \in L^\infty(\Omega)$ e sotto queste ipotesi è continua perché

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |a|\|\nabla u\|\|\nabla v\| + |d|\|u\|\|v\| \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|d\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \\ &\leq M\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1} \quad \text{con } M = \|a\|_{L^\infty} + \|d\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

È evidente che la f.b. sia simmetrica

Adesso proviamo che la f.b. è coerciva: $a(u, u) = \int_{\Omega} (a(x)|\nabla u|^2 + d(x)u(x)^2) dx$

Supponiamo che sia $a(x) \geq \lambda > 0$ (operatore unif ellittico)

$$\implies a(u, u) \geq \lambda\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} d(x)u^2 dx$$

Supponiamo che sia $d(x) \geq 0$

$$a(u, u) \geq \lambda\|\nabla u\|_{L^2}^2 \stackrel{?}{\geq} c\|u\|_{H^1}^2$$

Per la diseguaglianza di Poincarè per $u \in H_0^1(\Omega)$ con Ω dominio limitato

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq (1 + C_\Omega^2)\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

$$a(u, u) \geq \frac{\lambda}{1 + C_\Omega^2}\|u\|_{H^1}^2 \implies \text{la forma è coercitiva}$$

Applicando il teorema di buona posizione del P.V.A. abbiamo provato il seguente:

TEOREMA.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio limitato $a, d \in L^\infty(\Omega)$ $a(x) \geq \lambda > 0$ $d(x) \geq 0$

Allora $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di $\begin{cases} -\nabla \cdot (a \nabla u) + du = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

$$\text{E inoltre } \|u\|_{H^1} \leq \frac{1 + C_\Omega^2}{\lambda} \|f\|_{L^2}$$

Oss. Non saremo mai in grado di scriverla esplicitamente, però sappiamo che c'è, che è unica e che dipende con continuità dal termine noto

Nella seconda parte del corso useremo questo teorema principalmente sul laplaciano

Vediamo come applicarlo in quel caso:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

u è soluzione debole di (1) con $f \in L^2(\Omega)$ se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$ $\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$

$$\forall f \in L^2(\Omega) \quad \exists! u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{tc} \quad \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \|u\|_{H^1} \leq c \|f\|_{L^2}$$

Nella situazione del teorema appena visto possiamo anche applicare il risultato sul minimo del funzionale

Poiché $a(u, v) = \int_{\Omega} a(x) \nabla u \nabla v + d(x) u v$ è simmetrica e non negativa (nelle ipotesi del teorema)

Allora la soluzione u del P.V.A. è anche la funzione di $H_0^1(\Omega)$ che rende minimo il funzionale

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - T(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [a(x) |\nabla u(x)|^2 + d(x) u(x)^2 - f(x) u(x)] \, dx$$

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \text{se } u \text{ è la soluzione di} \quad \begin{cases} Lu = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Quindi nel caso del problema (1) u è soluzione debole $\iff J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Con $J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 - fv) \, dx$ detto l'integrale di Dirichlet o integrale dell'energia

4.4 Soluzione debole del problema di Neumann per equazioni ellittiche

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + d(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Vogliamo dare una definizione di soluzione debole per questo problema

Oss. Per il problema di Dirichlet la condizione al bordo era incorporata nello spazio di funzioni, bastava porre le funzioni test $C_0^1(\Omega)$ che facevano sparire l'integrale sul bordo, invece in questo caso la condizione al bordo è più difficile da incorporare, bisogna far uscire l'integrale di bordo, useremo delle funzioni test $C^1(\bar{\Omega})$

Supponiamo prima che u sia soluzione classica del problema di Neumann e sia tutto regolare, cioè:

Ω dominio limitato e lipschitziano, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ $a \in C^1(\bar{\Omega})$ $f, d \in C^0(\bar{\Omega})$

Moltiplichiamo per $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ e applichiamo teorema divergenza:

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (a\nabla u) \cdot \varphi \, dx + \int_{\Omega} d u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

$$\nabla \cdot (\varphi a \nabla u) = \varphi \nabla \cdot (a \nabla u) + a \nabla u \nabla \varphi$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi a \nabla u) = \int_{\partial\Omega} \varphi a \nabla u \cdot \underline{n} \, dS \quad \text{con } \nabla u \cdot \underline{n} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla \cdot (a \nabla u) \cdot \varphi = - \int_{\Omega} a \nabla u \nabla \varphi - \underbrace{\int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi a \nabla u)}_0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} (a \nabla u \nabla \varphi + d u \varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$$

Oss. Abbiamo ottenuto la stessa identità integrale, ma l'abbiamo ottenuta con un altro percorso, perché sono diversi gli spazi di funzione

In realtà questa identità ha senso sotto ipotesi più leggere: $u \in H^1(\Omega)$ $a, d \in L^\infty$ $f \in L^2(\Omega)$

Poste queste ipotesi e posto che l'identità valga $\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ allora per densità sarà vera $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$

DEFINIZIONE.

Siano $a, d \in L^\infty(\Omega)$ $f \in L^2(\Omega)$ si dice che u è **soluzione debole** di $\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + d(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

se $u \in H^1(\Omega)$ e se $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$ vale:

$$\int_{\Omega} (a \nabla u \nabla \varphi + d u \varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx$$

Il calcolo fatto prima della definizione mostra che se u è soluzione classica e "tutto è regolare", allora u è anche soluzione debole

Mostriamo che se u è soluzione debole ma so che "tutto è regolare" allora u è soluzione classica

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla \varphi + d u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Integriamo per parti

$$\int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot (a \nabla u) + du - f \right) \varphi dx = 0$$

Dove non c'è l'integrale su $\partial\Omega$ perché $\varphi \in C_0^1(\Omega)$

Applico il teorema di annullamento sapendo che $\left(-\nabla \cdot (a \nabla u) + du - f \right) \in C^0(\bar{\Omega})$
 $\implies -\nabla \cdot (a \nabla u) + du - f = 0$ in Ω cioè è soluzione classica dell'equazione

Ora riscrivo la definizione di soluzione debole $\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \left(a \nabla u \cdot \nabla \varphi + d u \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx$$

Integro per parti il primo termine e ottengo:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla \cdot (a \nabla u) \varphi dx - \int_{\partial\Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} \varphi dS \\ & \int_{\Omega} \left(-\nabla \cdot (a \nabla u) + du - f \right) \varphi dx - \int_{\partial\Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} \varphi dS = 0 \end{aligned}$$

Per la prima parte della dim il primo integrale è nullo e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} a \frac{\partial u}{\partial n} \varphi dS = 0 \quad \forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}) & \implies a \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ su } \partial\Omega \\ \text{Se } a(x) \geq \lambda > 0 & \implies \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{aligned}$$

Mostriamo che il problema è ben posto, formuliamolo come PVA

$$u \text{ è soluzione debole di } \begin{cases} -\nabla \cdot (a(x) \nabla u) + d(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Se e solo se u è soluzione del seguente PVA:

Data $f \in L^2(\Omega)$ trovare $u \in H^1(\Omega)$ tc $a(u, v) = \int_{\Omega} fv dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$

$$\text{dove } a(u, v) = \int_{\Omega} \left(a(x) \nabla u \cdot \nabla v + d u v \right) dx$$

Voglio provare che il problema è ben posto applicando il teorema di buona posizione di PVA che abbiamo dimostrato

Siano $a, d \in L^\infty(\Omega)$ allora $\forall u, v \in H^1(\Omega)$ $a(u, v)$ è ben definita ed è continua

$$|a(u, v)| \leq \|a\|_\infty \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \|d\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \text{con } M = \|a\|_\infty + \|d\|_\infty$$

È evidente che $a(u, v)$ sia simmetrica

Mostriamo sotto quali ipotesi $a(u, v)$ è coerciva su $H^1(\Omega)$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \left(a(x) |\nabla u|^2 + d(x) u(x)^2 \right) dx$$

$$a(x) \geq \lambda > 0 \quad (\text{unif. ellitticità}) \quad d(x) \geq d_0 > 0$$

In queste ipotesi posso dire che:

$$a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2 + d_0 \|u\|_2^2 \geq \min(\lambda, d_0) \left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \right) = C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}^2$$

TEOREMA.

Sia Ω un dominio di \mathbb{R}^n $a, d \in L^\infty(\Omega)$ $a(x) \geq \lambda > 0$ $d(x) \geq d_0 > 0$

Allora $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists! u \in H^1(\Omega)$ tc u è soluzione debole di

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x) \nabla u) + d(x) u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Inoltre $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\min(\lambda, d_0)} \|f\|_{L^2}$

Se $d \equiv 0$ cade l'unicità, infatti se u è soluzione allora anche $u(x) + \text{costante}$ è soluzione

Se $d \equiv 0$ non può esserci soluzione u $\forall f \in L^2(\Omega)$ infatti

$$\int_{\Omega} a(x) \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega)$$

Scegliendo $\varphi \equiv 1$ per quest'equazione otteniamo $\int_{\Omega} f(x) dx = 0$

È una condizione necessaria (di compatibilità) sul termine noto

Usando un'altra teoria si può dimostrare che se $d \equiv 0$ e $\int_{\Omega} f dx = 0$ allora la soluzione del problema esiste ed è unica a meno di costante additiva

Nelle ipotesi del teorema di buona approssimazione per il problema di Neumann la forma bilineare è simmetrica e non negativa (perché coerciva)

Quindi u è soluzione debole di $\begin{cases} -\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + d(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \iff J(u) \leq J(v) \forall v \in H^1(\Omega)$

con $J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (a(x)|\nabla v|^2 + dv^2 - fv) dx$

4.5 Soluzione debole per un operatore ellittico completo

Consideriamo un operatore ellittico più generale:

$$Lu = -\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + c(x) \cdot \nabla u + d(x)u(x) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + d(x)u(x)$$

Oss. C'è un vincolo fisico per l'angolo che si forma tra l'opposto del gradiente $(-\nabla u)$ e il calore q , quest'angolo deve essere acuto, si traduce nel fatto che A sia una matrice semi definita positiva

Inoltre A deve essere uniformemente definita positiva per riuscire a risolvere il problema matematicamente

Ci serviranno le seguenti condizioni:

- $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ $c_i \in L^\infty(\Omega)$ $d \in L^\infty(\Omega)$
- $A(x)$ matrice simmetrica e uniformemente definita positiva (operatore uniformemente ellittico), ovvero

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \implies \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} \geq \lambda |\nabla u|^2 \right)$$

DEFINIZIONE.

Si dice u è **soluzione debole** di $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ con $a_{ij}, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ $f \in L^2(\Omega)$

$$\text{Se } u \in H_0^1(\Omega) \text{ e } \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + \sum c_i u_{x_i} \varphi + du\varphi = \int_{\Omega} f\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Forma bilineare:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum c_i u_{x_i} v + duv \right) dx$$

La f.b. non è più simmetrica, per la presenza del termine $\sum c_i u_{x_i}$

Quindi dovremo applicare il teorema di Lax-Milgram nella forma generale che non abbiamo dimostrato

Sotto le ipotesi $a_{ij}, c_i, d \in L^\infty$ la f.b. è ben definita e continua

$$|a(u, v)| \leq \dots \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad M = \sum (\|a_{ij}\|_\infty + \|c_i\|_\infty + \|d\|_\infty)$$

Verifichiamo la ceorcività su $H_0^1(\Omega)$

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \left(\sum a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + \sum c_i u_{x_i} u + du^2 \right) dx$$

Per l'uniforme ellitticità e supponendo $d(x) \geq d_0 > 0$

$$a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2 + \underbrace{\int_{\Omega} \sum c_i u_{x_i} u dx}_B$$

Per liberarci di B, l'idea è quella di ottenere $|B| \leq k$ per ricavare $a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2 - k$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sum c_i u_{x_i} u dx \right| &\leq \int_{\Omega} |\underline{c}| |\nabla u| |u| dx \leq \|\underline{c}\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \|\underline{c}\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_2^2 C_{\Omega} \\ \implies a(u, u) &\geq (\lambda - C_{\Omega} \|\underline{c}\|_{L^\infty}) \|\nabla u\|_2^2 \end{aligned}$$

Oss. Per trovare la corecività mi serve $\lambda - C_{\Omega} \|\underline{c}\|_{L^\infty} > 0$

Supponiamo che i coefficienti $c_i(x)$ siano abbastanza piccoli, in modo più quantitativo supponiamo:

$$\begin{aligned} \|\underline{c}\|_{L^\infty} &\leq \frac{\lambda}{2C_{\Omega}} \implies (\lambda - C_{\Omega} \|\underline{c}\|_{L^\infty}) \geq \frac{\lambda}{2} \\ \implies a(u, u) &\geq \frac{\lambda}{2} \|\nabla u\|_2^2 \stackrel{\text{Poincaré}}{\geq} \frac{\lambda}{2} \frac{1}{1+C_{\Omega}^2} \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Abbiamo appena dimostrato il seguente:

TEOREMA.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato, sia C_{Ω} la sua costante di Poincaré e sia L come sopra con $a_{ij}, c_i, d \in L^\infty$ a_{ij} simmetrica, unif. ellittica con costante λ $d(x) \geq 0$ e $\|\underline{c}\|_{L^\infty}(\Omega) \leq \frac{\lambda}{2C_{\Omega}}$

Allora $\forall f \in L^2(\Omega)$ $\exists! u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione debole di $\begin{cases} Lu = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$ e inoltre $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2(1+C_{\Omega}^2)}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$

Qui la forma bilineare non è simmetrica e quindi questa soluzione u non ha il significato di punto di minimo di un funzionale

Problema di Dirichlet con dato al bordo non nullo

Sia L l'operatore generale come sopra, ci chiediamo cosa significa risolvere $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

Per semplicità invece che prendere g definita solo sul bordo, supponiamo prima che $g \in H^1(\Omega)$

(In particolare g ha una traccia su $\partial\Omega$, ma è definita su tutto Ω)

Cerco una u per cui $u - g = 0$ su $\partial\Omega$

Ossia, data l'ipotesi fatta su g , cerco $u \in H^1(\Omega)$ tale che $u - g \in H_0^1(\Omega)$

Sia $w = u - g \in H_0^1(\Omega)$ se $Lu = f$ allora $Lw = Lu - Lg = f - Lg$

È come dire: cerco $w \in H_0^1(\Omega)$ tc $\begin{cases} Lw = f - Lg & \Omega \\ w = 0 & \partial\Omega \end{cases}$

Trovata w , la u che cerco è $u = w + g$

Però il termine noto non è una funzione, ma una distribuzione, vediamo perché:

$$f - Lg = f - (-\nabla \cdot (A\nabla g) + \underline{c} \cdot \nabla g + dg) = T \text{ con } g \in H^1$$

Ho che $f, A\nabla g, \underline{c} \cdot \nabla g, dg \in L^2$ però ho la divergenza di una funzione L^2

So che gli elementi del duale di H_0^1 sono del tipo funzioni L^2 più derivate di funzioni L^2

Allora posso dire che $T \in H^{-1}(\Omega)$ è un funzionale lineare continuo su $H_0^1(\Omega)$

Se $\tilde{T} = f_0 - \sum(f_i)_{x_i} \in H^{-1}$ allora vale $\|\tilde{T}\|_{H^{-1}} \leq \sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L^2}$

$$\|T\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_2 + \sum \|a_{ij}\|_\infty \|\nabla g\|_2 + \|\underline{c}\|_\infty \|\nabla g\|_2 + \|d\|_\infty \|g\|_2 \leq \|f\|_2 + c\|g\|_{H^1}$$

Quindi vale la seguente equivalenza

$$(1) \quad \begin{cases} Lu = f & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases} \iff u = w + g \text{ con } \begin{cases} Lw = T & \Omega \\ w = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Oss. Avevamo dimostrato esistenza e unicità con termine noto funzione, ma vale anche nel caso più generale di termine noto funzionale lineare continuo

Nelle stesse ipotesi del teorema precedente $\forall f \in L^2$ e $g \in H^1$

$\exists! u \in H^1(\Omega)$ soluzione di (1) e si ha $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|g\|_{H^1} + \|w\|_{H^1} \leq \|g\|_{H^1} + c\|T\|_{H^{-1}} \leq c\{\|f\|_2 + \|g\|_{H^1}\}$

Se vogliamo assegnare il dato al bordo come funzione definito solo su $\partial\Omega$, possiamo prendere $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

Allora $\exists \tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tc $\tau_0(\tilde{g}) = g$

Risolviamo il problema $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = \tilde{g} & \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$

$\exists! u \in H^1(\Omega)$ che risolve il problema e ha $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\{\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)}\}$

Avevamo definito le infinite \tilde{g} che hanno traccia g , nel modo seguente:

$$\|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \inf \left\{ \|\tilde{g}\|_{H^1(\Omega)} : \tau_0(\tilde{g}) = g \right\}$$

Quindi nella maggiorazione di $\|u\|$ passo all'estremo inferiore e ottengo:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right\}$$

TEOREMA.

Sotto le ipotesi precedenti $\forall f \in L^2(\Omega) \ \forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \ \exists! u \in H^1(\Omega)$ tc

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \tau_0(u) = g \end{cases}$$

Problema di Neumann per l'operatore completo

$$\begin{cases} Lu = -\nabla \cdot (A(x)\nabla u) + d(x)u = f(x) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Ricaviamo la definizione naturale di soluzione debole.

Sia u soluzione classica, supponendo tutto regolare, ovvero:

$$a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega}), u \in C^2(\bar{\Omega}), \underline{c}, d, f \in C^0(\bar{\Omega}), g \in C^0(\partial\Omega) \quad \text{e } \Omega \text{ limitato e lipschitziano}$$

Moltiplico per $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})$ ed integro

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (A(x)\nabla u) \varphi \, dx + \int_{\Omega} d(x)u \varphi \, dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi \, dx$$

Valgono i seguenti:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varphi A \nabla u) &= A \nabla u \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot (A \nabla u) \\ \text{Teo div} \implies \int_{\Omega} \nabla \cdot (\varphi A \nabla u) \, dx &= \int_{\partial\Omega} \varphi A(\nabla u) \cdot \underline{n} \, dS \\ \implies -\int_{\Omega} \varphi \cdot \nabla \cdot (A \nabla u) \, dx &= \int_{\Omega} A \nabla u \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \varphi (A \nabla u) \cdot \underline{n} \, dS \\ (A \nabla u) \cdot \underline{n} &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} n_j = \nabla u \cdot \underbrace{(A \underline{n}^T)}_{\underline{n}_A} = \frac{\partial u}{\partial n_A} = \text{derivata conormale} \end{aligned}$$

Oss. Le condizioni di Neumann logiche da prendere diventano $\frac{\partial u}{\partial n_A} = g$

Sostituendo la f e la g , otteniamo la seguente formulazione integrale:

$$\int_{\Omega} (A \nabla u \nabla \varphi + \underline{c} \nabla u \varphi + du \varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi g \, dS$$

DEFINIZIONE.

Si dice che u è **soluzione debole** di $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_A} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ con $a_{ij}, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ $f \in L^2(\Omega)$ $g \in L^2(\partial\Omega)$

Se $u \in H^1(\Omega)$ e $\forall \varphi \in H^1(\Omega)$ vale $\int_{\Omega} (A\nabla u \nabla \varphi + \underline{c}\nabla u \varphi + du \varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \varphi g dS$
 (dove $\int_{\partial\Omega} g \varphi dS = \int_{\partial\Omega} g \tau_0(\varphi) dS$)

Mostriamo sotto quali ipotesi il problema è ben posto

- 1) Ω limitato e lipschitziano (affinché sia ben definita la traccia di una funzione $H^1(\Omega)$)

Consideriamo la forma bilineare

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum c_i u_{x_i} v + d u v \right) dx$$

Consideriamo il funzionale (su $H^1(\Omega)$)

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\partial\Omega} g \tau_0(\varphi) dS$$

T è lineare, mostriamo che è continuo:

$$|T(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\tau_0(\varphi)\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

E per il teorema della traccia è $\|\tau_0(\varphi)\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$ quindi

$$|T(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \{ c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)} \}$$

$$\|T\|_{H^1(\Omega)^*} \leq c \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

- 2) Se $a_{ij}, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$ la f.b. è ben definita e continua, non è simmetrica

Per la coercività dovremo supporre

3.1) L'uniforma ellitticità : $\sum a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$

Quindi $\int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla u \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2$

3.2) $d(x) \geq d_0 > 0$

$$a(u, u) \geq \lambda \|\nabla u\|_2^2 + \int_{\Omega} \underline{c} \cdot \nabla u \cdot u dx + d_0 \|u\|_{L^2}^2$$

Usiamo un procedimento analogo a quello visto per Dirichlet:

$$\left| \int_{\Omega} \underline{c} \cdot \nabla u \cdot u \right| \leq \int_{\Omega} |\underline{c}| |\nabla u| |u| \leq \|\underline{c}\|_{L^\infty} \int_{\Omega} |\nabla u| |u| \leq \|\underline{c}\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 \leq \|\underline{c}\|_{L^\infty} \|u\|_{H^1}^2$$

$$a(u, u) \geq \min(\lambda, d_o) \|u\|_{H^1}^2 - \|\underline{c}\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_2 \|u\|_2 \geq (\min(\lambda, d_o) - \|\underline{c}\|_{L^\infty}) \|u\|_{H^1}^2$$

3.3) Avremo coercività se il valore tra parentesi è positivo

Se ad esempio $\|\underline{c}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{2} \min(\lambda, d_0)$ allora $a(,)$ è coerciva a una costante $\frac{1}{2} \min(\lambda, d_0)$

TEOREMA.

Se Ω limitato e lipschitziano, $A(x)$ simmetrica e uniformemente ellittica di costante λ $a_{ij}, c_i, d \in L^\infty(\Omega)$
 $d(x) \geq d_0 > 0$ $\|\underline{c}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \min(\lambda, d_0)$

Allora $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$ $\forall g \in L^2(\partial\Omega)$ $\exists! u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole di $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_A} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

E inoltre $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\min(\lambda, d_0)} \{ \|f\|_{L^2(\Omega)} + c \|g\|_{L^2(\Omega)} \}$

Notiamo che se $d \equiv 0$ non può valere l'unicità, infatti se u è soluzione anche $u + \text{costante}$ lo è

Con una teoria più raffinata si può dimostrare che se $d \equiv 0$ ed è soddisfatta una certa condizione di compatibilità, la soluzione esiste unica a meno di costante additiva

4.6 Teoremi di regolarizzazione e soluzione forte

Il concetto di soluzione debole permette di dimostrare risultati di esistenza e unicità

La soluzione trovata, però, sta in $H^1(\Omega)$, cioè ha derivate 1° ma non 2° (se non in senso distribuzionale)

Esistono risultati di regolarizzazione che dicono che se gli ingredienti del problema sono più regolari del minimo richiesto, la soluzione u è derivabile 2 volte (nel senso degli spazi di Sobolev)

TEOREMA: di regolarizzazione.

Supponiamo che Ω sia un dominio di classe C^2 , i coefficienti a_{ij}, c_i, d siano lipschitziani, $f \in L^2(\Omega)$ e

u sia soluzione debole di $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ (quindi a priori $u \in H_0^1(\Omega)$)

Allora $u \in H^2(\Omega)$ e $-\sum (a_{ij}(x)u_{x_j})_{x_j} + \sum c_i(x)u_{x_i} + du = f$ è vero q.o. in Ω

(Si dice anche che u è soluzione forte dell'equazione $Lu = f$)

Oss. L'idea della soluzione forte è quella di avere le derivate "per davvero" e non in senso distribuzionale, oltre ad avere l'equazione con il termine noto come un'uguaglianza tra funzioni e non distribuzionale

Il risultato si può estendere a gradi di regolarità superiori, ottenendo che se il dominio e i coefficienti sono abbastanza regolari, la soluzione debole u sta in $H^m(\Omega)$ $m = 2, 3, \dots$

Se tutti gli ingredienti del problema sono C^∞ (e anche Ω)

Allora $u \in H^m(\Omega) \forall m = 1, 2, \dots$ e quindi $u \in C^\infty(\Omega)$

Il concetto di soluzione forte è quello naturale per le equazioni non in forma di divergenza, ovvero del tipo

$$\begin{cases} Lu = \sum a_{ij}(x)u_{x_i x_j} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{con A unif. ellittica}$$

La definizione di soluzione debole qui non funziona, per integrare per parti dovrei derivare il prodotto tra φ e a_{ij} per cui dovrei chiedere più regolarità agli a_{ij}

DEFINIZIONE.

Si dice che u è soluzione forte dell'equazione $\begin{cases} \sum a_{ij}(x)u_{x_i x_j} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ con $f \in L^p(\Omega)$

Se $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ e $\sum a_{ij}u_{x_i x_j} = f$ q.o. in Ω $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ allora

$$u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

Si trova che per avere un risultato di buona posizione (nell'ipotesi di uniforme ellitticità) non è sufficiente $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ solitamente si chiede $a_{ij} \in C^0(\bar{\Omega})$.