

MECCANICA RAZIONALE E DEI CONTINUI

Dalle lezioni del Prof. Michele Correggi
per il corso di Ingegneria Matematica

Dispense di Simone Paloschi

Politecnico di Milano
A.A. 2022/2023

Indice

1 Cinematica	3
1.1 Cinematica del Punto Materiale	3
1.2 Moto in Coordinate Intrinseche	4
1.3 Cinematica del Corpo Rigido	4
1.4 Cinematica Relativa	7
1.5 Moti e Atti di moto Rigidi	7
1.6 Vincoli	8
2 Leggi della Dinamica	10
2.1 Principi della Dinamica	10
2.2 Forze	10
3 Statica	12
3.1 Equazioni Cardinali della Statica	12
3.2 Sistemi di Forze	12
3.3 Vincoli Ideali	13
3.4 Statica dei Sistemi Olonomi	14
3.5 Statica del Corpo Rigido	14

4	Dinamica	15
4.1	Quantità Meccaniche	15
4.2	Quantità Meccaniche per il Corpo Rigido	15
4.3	Equazioni Cardinali della Dinamica	16
4.4	Dinamica dei Sistemi Olonomi	17
4.5	Analisi Qualitativa del moto (in 1D)	17
4.6	Stabilità alla Lyapunov	19
5	Meccanica Lagrangiana	21
5.1	Equazioni di Lagrange	21
5.2	Simmetrie	21
5.3	Moti Centrali	22
5.4	Campo Gravitazionale	23
5.5	Piccole Oscillazioni	23
6	Meccanica Hamiltoniana	24
6.1	Principi Variazionali	24
6.2	Equazioni di Hamilton	25
7	Esempi di sistemi meccanici	26
7.1	Moti rigidi liberi	26
7.2	Meccanica relativa	27
8	Meccanica dei Continui	28
8.1	Deformazioni	28
8.2	Moti	30
8.3	Leggi di bilancio	32
8.4	Classi costitutive	33

1 Cinematica

1.1 Cinematica del Punto Materiale

Spazio delle configurazioni di un punto materiale in $d \in \mathbb{N}$ dimensioni è lo spazio euclideo di dim d: \mathcal{E}_d

Spazio vettoriale è un insieme V con 2 proprietà: $\bullet : V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ $+ : V + V \rightarrow V$ Allora:

- $(V, +)$ è detto gruppo algebrico
- Se $\dim V = n$ allora $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$ linearmente indipendenti è una base di V
- Data la base, $\forall \bar{z} \in V \quad \exists! \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \quad t.c. \quad \bar{z} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{u}_j$

Prodotto scalare : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = \sum_{j=1}^n u_j v_j$

Prodotto vettoriale : $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (\bar{u} \wedge \bar{v})_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_j v_k$ e valgono:

- $\bar{u} \wedge \bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
- $\bar{u} \wedge \bar{v} = -\bar{v} \wedge \bar{u}$ (è anticommutativo)
- $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) \neq (\bar{u} \wedge \bar{v}) \wedge \bar{w}$ (non è associativo)
- $\bar{u} \wedge (\bar{v} \wedge \bar{w}) = (\bar{u} \cdot \bar{w})\bar{v} - (\bar{u} \cdot \bar{v})\bar{w}$ (+dim)
- $(\bar{u} + \bar{v}) \wedge \bar{w} = \bar{u} \wedge \bar{w} + \bar{v} \wedge \bar{w}$ (è distributivo)

Modulo di un vettore : $|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$ valgono:

- $\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \cos \theta$
- $\bar{u} \wedge \bar{v} = |\bar{u}| |\bar{v}| \sin \theta$

Spazio euclideo \mathcal{E}_d è un insieme di punti \mathcal{E}_d e un'applicazione A: $\mathcal{E}_d \times \mathcal{E}_d \rightarrow V$ (spazio vettoriale) t.c.

- $P, Q \in \mathcal{E}_d \rightarrow \overline{PQ} \in V \quad \bullet \quad \overline{PQ} = -\overline{QP}$
- $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR} \quad \bullet \quad \forall P \in \mathcal{E}_d, \forall \bar{u} \in V \quad \exists! Q \in \mathcal{E}_d \mid \overline{PQ} = \bar{u}$

Def. Un osservatore, o sistema di riferimento, in \mathcal{E}_d è un insieme: $\mathcal{O} = \{O; \hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d\}$ t.c.

$O \in \mathcal{E}_d$ e $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_d\}$ è un sistema ortonormale in \mathbb{R}^d

La configurazione del punto materiale P si può assegnare con le **coordinate** $\bar{n} \in \mathbb{R}^d$ di P rispetto a \mathcal{O}

Le coordinate $\bar{x}(t)$ di P rispetto al tempo si possono vedere come:

- punto nello spazio-tempo $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ che individua la linea di universo di P
- funzione $\bar{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ è detta **traiettoria** (o moto)

Def. Data la traiettoria e assunta $\bar{x}(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ **velocità**: $\bar{v}(t) = \frac{d\bar{x}}{dt}(t)$ **accelerazione**: $\bar{a}(t) = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}(t)$

1.2 Moto in Coordinate Intrinseche

Sia $\bar{x}(\cdot) \in C^2([t_0, t_1])$ la traiettoria di P. Assumendo che $\bar{x}(t)$ abbia solo zeri isolati allora:

l'ascissa curvilinea è la lunghezza dell'arco di curva percorsa tra t_0 e t: $s(t) = \int_{t_0}^t \dot{s}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t |\dot{\bar{x}}(\tau)| d\tau$

Oss: $s(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ anche detta legge oraria del moto del punto, è una funzione monotona crescente.

di conseguenza $s(\cdot)$ è invertibile $\Rightarrow \exists t(\cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $s(t(\sigma)) = \sigma$ e $\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{|\dot{\bar{x}}(t(s))|} \quad \forall t \mid \bar{v}(t) \neq 0$

Oss: Possiamo quindi parametrizzare ugualmente le curve con il tempo o con la distanza percorsa

Notazione: $\dot{f} = \frac{df}{dt} \quad f' = \frac{df}{ds}$

Poste le ipotesi su $\bar{x}(\cdot)$ sono definiti la parametrizzazione $\bar{\gamma} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^d$ t.c. $\bar{\gamma}(s) = \bar{x}(t(s))$ e i versori:

- **tangente** $\hat{\tau}(s) := \bar{\gamma}'(s)$
- **normale** $\hat{n}(s) := \frac{\hat{\tau}'(s)}{|\hat{\tau}'(s)|}$
- **binormale** $\hat{b}(s) := \hat{\tau}(s) \wedge \hat{n}(s)$

Inoltre possiamo definire i seguenti valori:

- **curvatura** della traiettoria $k : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.c. $k(s) := |\hat{\tau}'(s)|$
- **torsione** della curva $h : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.c. $h(s) := |\hat{b}'(s)|$

Teorema: **Formule di Frenet-Serret** (+dim)

Sotto le ipotesi di $\bar{x}(\cdot)$ e $\forall s \in [0, L]$ t.c. $\bar{\gamma}'(s) \neq 0$

- $\hat{\tau}(s), \hat{n}(s), \hat{b}(s)$ formano una terna ortonormale in \mathbb{R}^3
- $$\begin{cases} \hat{\tau}'(s) = k(s)\hat{n}(s) \\ \hat{n}'(s) = -k(s)\hat{\tau}(s) + h(s)\hat{b}(s) \\ \hat{b}'(s) = -h(s)\hat{n}(s) \end{cases}$$

Prop: Poste le ipotesi su $\bar{x}(\cdot)$ si ha: $\bullet \bar{v}(t) = \dot{s}(t)\hat{\tau} \quad \bullet \bar{a}(t) = \ddot{s}(t)\hat{\tau} + k\dot{s}^2(t)\hat{n} \quad (+dim)$

1.3 Cinematica del Corpo Rigido

Def. Un **corpo rigido** è un sistema di $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ punti materiali che soddisfano:

$|\overline{OP}_i(t) - \overline{OP}_j(t)| = \text{cost } \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in \{1 \dots N\}$ ovvero la distanza tra i punti del sistema rimane costante

Per identificare univocamente la configurazione del corpo rigido in 3D per $N \geq 3$ servono $3N-6$ coordinate.

Def. Un osservatore, o anche sistema di riferimento, è **solidale** ad un corpo rigido se le posizioni del corpo rispetto a $\theta = \{O', \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ non dipendono dal tempo.

Teorema: Un sistema di punti materiali è un corpo rigido se e solo se $\exists \theta$ solidale (+dim)

Oss: La posizione di un punto nello spazio è assegnata univocamente dalle distanze da 3 punti non collineari.

Prop: La configurazione di un corpo rigido piano è determinata univocamente da 3 coordinate (+dim)

Prop: Per la configurazione di un C tridimensionale sono necessarie e sufficienti 6 coordinate (+dim)

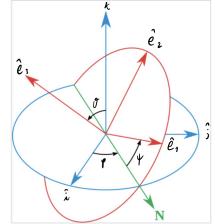
Prop: Ogni rotazione in \mathbb{R}^3 è rappresentata da una matrice ortonormale $R \in \Theta_3$,

Che equivale al prodotto di 3 rotazioni attorno agli assi $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

Gli **Angoli di Eulero** sono coordinate angolari che identificano univocamente

la posizione di un sistema solidale, nell'ipotesi $O=O'$:

- θ angolo di **mutazione** $\in [0, \pi]$: $\cos\theta := \hat{e}_3 \cdot \hat{k}$;
- ϕ angolo di **precessione** $\in [0, 2\pi]$: $\cos\phi := \hat{i} \cdot \frac{\hat{k} \wedge \hat{e}_3}{|\hat{k} \wedge \hat{e}_3|}$;
- ψ angolo di **rotazione propria** $\in [0, 2\pi]$: $\cos\psi := \hat{e}_1 \cdot \frac{\hat{k} \wedge \hat{e}_3}{|\hat{k} \wedge \hat{e}_3|}$;



Prop: Vale sempre, per un corpo rigido: $(\bar{V}_P - \bar{V}_Q) \cdot \bar{Q}\bar{P} = 0$ dove $\bar{Q}\bar{P} = \bar{X}_P - \bar{X}_Q$

Teorema: Poisson (+dim)

Dato un corpo rigido C e una terna ortonormale solidale, $\exists! \bar{\omega} \in \mathbb{R}^3$ detta **velocità angolare** t.c.

$$\dot{\hat{e}}_j = \bar{\omega} \wedge \hat{e}_j \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$$

Teorema: formula fondamentale della cinematica rigida (+dim)

Per ogni corpo rigido C, $\exists! \bar{\omega} \in \mathbb{R}^3$ detta velocità angolare t.c.

$$\bar{V}_P(t) - \bar{V}_Q(t) = \bar{\omega}(t) \wedge \bar{Q}\bar{P}(t) \quad \forall P, Q \in C \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

DEF. Il **moto** di un corpo rigido C è:

- **traslatorio** se $\bar{V}_P = \bar{V}_Q \quad \forall P, Q \in C$
- **piano** se $\begin{cases} \exists \hat{k} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \bar{V}_P(t) \perp \hat{k} \quad \forall P \in C \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \bar{P}\bar{Q}(t) \parallel \hat{k} \implies \bar{V}_P(t) = \bar{V}_Q(t) \end{cases}$
- **polare** se \exists **polo** $O \in C$ t.c. $\bar{V}_O(t) = \bar{0} \quad \forall t$
- **rotatorio** se \exists **asse di rotazione** r t.c. $\forall P \in r \bar{V}_P(t) = \bar{0} \quad \forall t$
- **rototraslatorio** se è una combinazione di un moto rotatorio e uno traslatorio

Un corpo rigido è **piano** se $\exists \hat{k} \in \mathbb{R}^3$ t.c. $\bar{x}_j \perp \hat{k} \quad \forall j \in C$

Prop: Moto di un corpo rigido è traslatorio $\iff \bar{\omega}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (+dim)

Prop: Moto di un corpo rigido è rototraslatorio $\iff \bar{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k}$ con \hat{k} costante (+dim)

Lemma: Moto di un corpo rigido è rototraslatorio $\iff \exists \hat{e}_j$ solidale t.c. $\dot{\hat{e}}_j = 0$ (+dim)

Oss: • Un moto traslatorio non è necessariamente rettilineo • l'asse di rotazione r ha equazione: $\bar{x} = \lambda \hat{k} + \bar{z}(t)$

Prop: Un moto rigido è piano $\iff \begin{cases} \exists \hat{k} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \bar{\omega}(t) = \omega(t)\hat{k} \\ \exists Q \in C \text{ t.c. } (\bar{x}_Q(t) - \bar{x}_Q(0)) \cdot \hat{k} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{cases}$ (+dim)

Corollario: Ogni moto rigido piano è rototraslatorio

DEF. L'atto di moto di un sistema di punti materiali al tempo t è: $A(t) = \{(\bar{x}_j(t), \bar{v}_j(t)), j \in \{1, \dots, N\}\}$

- **traslatorio** se $\bar{v}_i = \bar{v}_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$
 - **piano** se $\begin{cases} \exists \hat{k} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \bar{v}_j \perp \hat{k} \quad \forall j \in \{1, \dots, N\} \\ \text{se } (\bar{x}_i - \bar{x}_j) \parallel \hat{k} \implies \bar{v}_i = \bar{v}_j \end{cases}$
 - **rigido** se è compatibile con il vincolo di rigidità
 - **rototraslatorio** se $\exists \hat{e} \text{ t.c. } \forall P, Q \in C \text{ con } \overline{PQ} \parallel \hat{e} \implies \bar{v}_P = \bar{v}_Q$
 - **elicoidale** se è rototraslatorio ed $\exists r : \bar{x} = \lambda \hat{e} + \bar{z} \text{ con } \bar{v}_P = \bar{v}_Q = \mu \hat{e} \quad \forall P, Q \in r \cap C$
 - **rotatorio** se è rototraslatorio e \exists asse di istantanea rotazione $r_{ir} : \bar{x} = \lambda \hat{e} + \bar{z} \text{ t.c. } \bar{v}_P = \bar{0} \quad \forall P \in r_{ir} \cap C$
- Prop: Ogni atto di moto rigido è rototraslatorio (+dim)

DEF. L'invariante scalare di un atto di moto rigido è la quantità $I = \bar{\omega} \cdot \bar{v}_P$ con $P \in C$

Oss: I non dipende dalla scelta di P per la formula cinematica rigida: $\bar{\omega} \cdot \bar{v}_Q = \bar{\omega} \cdot (\bar{v}_P + \bar{\omega} \wedge \overline{PQ}) = \bar{\omega} \cdot \bar{v}_P$

Teorema: Mozzi (+dim)

Un atto di moto rigido di velocità angolare $\bar{\omega}$ è:

- traslatorio $\iff \bar{\omega} = \bar{0}$
- rotatorio $\iff \bar{\omega} \neq \bar{0}$ e $I = 0$, in tal caso l'asse di istantanea rotazione è $r_{ir} : \bar{x} = \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_P}{|\bar{\omega}|^2} + \bar{x}_p$
- elicoidale $\iff \bar{\omega} \neq \bar{0}$ e $I \neq 0$, in tal caso l'asse di mozzi è $r_{mozzi} : \bar{x} = \lambda \bar{\omega} + \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{v}_P}{|\bar{\omega}|^2} + \bar{x}_p$

L'asse di mozzi ha le seguenti proprietà: i) $\bar{v}_P \parallel \bar{\omega}$ e $\bar{v}_P = \frac{I \bar{\omega}}{|\bar{\omega}|^2} \quad \forall P \in r_{mozzi}$

ii) $|\bar{v}_P|$ è minima in C se $P \in r_{mozzi}$ iii) se $\overline{PQ} \parallel r_{mozzi} \implies \bar{v}_P = \bar{v}_Q$

Oss: Ogni atto di moto rotatorio è anche piano con $\hat{k} = \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}$

Corollario: Ogni atto di moto rigido piano è • traslatorio $\iff \bar{\omega}(t) = \bar{0}$ • rotatorio $\iff \bar{\omega}(t) \neq \bar{0}$

DEF. Il centro di istantanea rotazione è il punto t.c. $r_{ir} \cap \Pi = \{CIR\}$ con Π il piano del moto

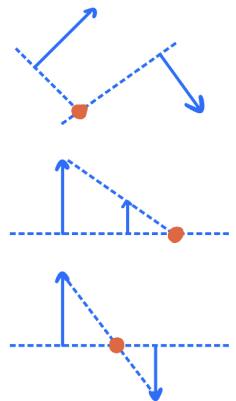
Oss: In un atto di moto rigido piano la posizione del CIR identifica univocamente l'atto di moto

Inoltre il CIR può anche essere fuori dal corpo rigido

Teorema: Chasles (+dim)

La posizione del CIR in un atto di moto rigido piano si trova:

- all'intersezione delle rette perpendicolari a \bar{v}_P e \bar{v}_Q passanti per P e Q
- sulla retta \perp a $\bar{v}_P \parallel \bar{v}_Q$ t.c. $\frac{|\bar{v}_P|}{|CP|} = \frac{|\bar{v}_Q|}{|CQ|}$



1.4 Cinematica Relativa

Prop: Trasformate di Galileo (o legge di trasformazioni della velocità) (+dim)

\exists matrice ortogonale $R \in \theta_3$ t.c $\bar{x}_P = R\bar{x}'_P + \overline{OO'}$ e un vettore $\bar{\omega} \in \mathbb{R}^3$ t.c.

$\bar{v}_P = \bar{v}'_P + \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \wedge \bar{x}'_P$ dove $\bar{v}_{O'}$ è velocità relativa e $\bar{\omega}$ è velocità di trascinamento

Teorema: Coriolis (+dim)

Dati due osservatori θ e θ' con accelerazione relativa $\bar{a}_{O'}$ e velocità angolare $\bar{\omega}$, allora:

$$\bar{a}_P = \bar{a}'_P + \bar{a}_{O'} + \dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{x}'_P + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{x}'_P) + 2\bar{\omega} \wedge \bar{v}'_P$$

dove $\bar{a}_{O'}$ è l'accelerazione di trascinamento, $\bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{x}'_P)$ è l'acc. centrifuga e $2\bar{\omega} \wedge \bar{v}'_P$ è l'acc. di Coriolis

Oss: Affinché θ e θ' abbiano le stesse accelerazioni ($\bar{a}_P = \bar{a}'_P$), serve $\bar{a}_{O'} = \bar{\omega} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{0}$

allora θ e θ' sono osservatori relativamente inerziali e sono in moto relativo rettilineo uniforme

Corollario: Rivals (+dim)

Dati P e Q di un corpo rigido si ha $\bar{a}_P = \bar{a}_Q + \dot{\bar{\omega}} \wedge \overline{QP} + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \overline{QP})$

Corollario: Dato un corpo rigido con $\bar{\omega}, \dot{\bar{\omega}} \neq \bar{0}$,

$$\exists! C \text{ centro delle accelerazioni t.c. } \bar{a}_C = \bar{0} \text{ e } \forall P \in C \quad \overline{PC} = \frac{\dot{\bar{\omega}} \wedge \bar{a}_P - \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{a}_P)}{\omega^4 + \dot{\omega}^2}$$

1.5 Moti e Atti di moto Rigidi

Riassunto Moti piani:

- Traslatorio ha atto di moto traslatorio $\forall t$
- Rotatorio, Rototraslatorio, Polare hanno atto di moto rotatorio $\forall t$

Per gli atti di moto rotatorio piani abbiamo:
$$\begin{cases} \bar{\omega}(t) = \dot{\theta} \hat{k} \\ \overline{V}_P = \bar{\omega}(t) \wedge \overline{CP} \end{cases}$$

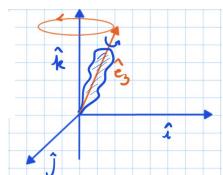
Prop: Composizione velocità angolari (+dim)

Siano $\bar{\omega}_C$, $\bar{\omega}'_C$ e $\bar{\omega}$ le velocità angolari di C rispetto a θ e θ' e di θ' rispetto a θ , allora: $\bar{\omega}_C = \bar{\omega}'_C + \bar{\omega}$

Oss: Questa legge può essere utile per decomporre, con osservatori mobili, il moto in moti più semplici

DEF. Un moto di C è **Precessionale** se si possono scegliere θ e θ' t.c. $\hat{e}_3 \cdot \dot{\hat{k}} = \text{cost}$ con \hat{e}_3 asse di rotazione propria e \hat{k} asse di precessione

Prop: Un moto di C è una precessione $\iff \bar{\omega} = \lambda(t)\hat{k} + \mu(t)\hat{e}_3$ (+dim)



1.6 Vincoli

DEF. Un **vincolo** è una restrizione delle possibili configurazioni, moti e atti di un sistema di punti materiali.

Un vincolo è della forma $F(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_N, t) \geq 0$ dove $F : \mathbb{R}^{dN} \times \mathbb{R}^{dN} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2dN} \times \mathbb{R})$

Oss: Ogni vincolo è uno scalare, noi quindi scriveremo un "vettore" di vincoli.

I vincoli possono essere:

- **olonomo** se F non dipende dalle velocità
- **anolonomo** se F dipende dalle velocità
- **fisso** se F non dipende dal tempo
- **unilatero** se il vincolo è $F(\dots) \geq 0$
- **bilatero** se il vincolo è $F(\dots) = 0$

Oss: Un vincolo anolonomo è integrabile se è equivalente a un vincolo olonomo

Le **coordinate libere**, o lagrangiane, sono un insieme minimale di parametri sufficiente a caratterizzare univocamente un sistema di punti materiali, Il **grado di libertà** g è il numero di coordinate libere

Dati N punti materiali senza vincoli ottengo $g_0 = dN$ gradi

Varietà delle configurazioni di un sistema vincolato (olonomi, bilateri) al tempo t è:

$$\Sigma_t := \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N) \in \mathbb{R}^{dN} \text{ t.c. } \vec{F}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, t) = 0\}$$

Dati M vincoli [$\vec{F} = (F_1, \dots, F_M)$] olonomi e bilateri, si dicono:

- **compatibili** se $\Sigma_t \neq \emptyset \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- **indipendenti** se $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \implies \text{rank}(J_F) \text{ è massimo } \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{allora } \text{rank}(J_F) = \min\{M, dN\}$

Teorema: Dato un sistema di $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ punti materiali, sottoposto a $M \leq dN$ vincoli

Olonomi, bilateri, compatibili, indipendenti e fissato t , allora esistono:

D_t (intorno di Σ_t) $\subset \mathbb{R}^{dN}$, un aperto $E_t \subset \mathbb{R}^g$ con $g=dN-M$,

Una funzione invertibile $\Phi : E_t \rightarrow D_t$ t.c. $\Phi \in C^\infty(D_t)$ e $\vec{F}(\vec{\Phi}(\bar{q}), t) = \vec{0}$

Oss: Questo teorema equivale alla generalizzazione a dN variabili del teorema della funzione implicita (Dini).

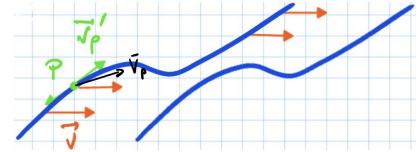
Oss: Dato un sistema con g_0 gradi di libertà iniziali, dopo l'applicazione di M vincoli

Compatibili e indipendenti, avrò: $g = g_0 - M$ (ovviamente se $g_0 \leq M$ avrò $g=0$)

Dato un punto materiale P , \bar{v}'_P è una sua **velocità virtuale** se (\bar{x}_P, \bar{v}'_P) è un atto di moto possibile per P .

$\delta\bar{x}'_P$ è un suo **spostamento virtuale** se $\exists \delta t > 0$ t.c. $\delta\bar{x}'_P = \bar{v}'_P \delta t$

L'insieme delle velocità e spostamenti virtuali sono indicati con $V'_P(\bar{x}_P)$ e $S'_P(\bar{x}_P)$



Oss: I valori virtuali dipendono dai vincoli.

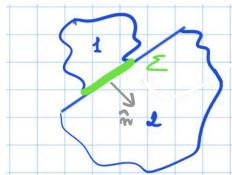
Oss: A volte la velocità virtuale ha poco a che fare con quella reale

Per esempio quando il vincolo si muove (\bar{v}), abbiamo $\bar{v}_P = \bar{v}'_P + \bar{v}$

Le velocità virtuali sono **reversibili** se per ogni \bar{v}'_P che è velocità virtuale, allora anche $-\bar{v}'_P$ lo è.

Vale lo stesso per gli spostamenti e gli spostamenti virtuali sono reversibili se e solo se lo sono le velocità.

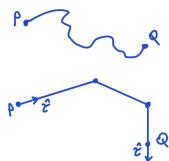
Valori virtuali associati a vincoli bilateri sono sempre reversibili.



Vincoli anolonomi tra superfici Σ (di contatto o di appoggio):

contatto (bilatero) $\bar{v}_{P_1} \cdot \hat{n} = \bar{v}_{P_2} \cdot \hat{n} \quad \forall P \in \Sigma$

appoggio (unilatero) $(\bar{v}_{P_1} - \bar{v}_{P_2}) \cdot \hat{n} \leq 0 \quad \forall P \in \Sigma$ (vincolo vale finché c'è contatto)



Vincoli olonomi su un Filo:

inestensibile (unilatero) $|\overline{PQ}| \leq l$

in tensione (bilatero) $\bar{V}_P \cdot \hat{\tau} = \bar{V}_Q \cdot \hat{\tau} \quad \forall P, Q$ nel filo

Puro Rotolamento è un vincolo anolonomo e

- unilatero se disco è appoggiato $\bar{v}_P \cdot \hat{j} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ t.c. $y_P(t) = 0$
- bilatero se disco è vincolato a rotolare sulla guida, quindi $y_P(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Inoltre abbiamo il vincolo $\bar{v}_{P_{disco}} = \bar{v}_{P_{guida}}$ (anche se i punti di contatto cambiano)

Oss: Se la guida è fissa $\bar{v}_P = 0$

Oss: Essendo un corpo piano $g_0 = 3$ e avendo i due vincoli (contatto e rotolamento), otterremo $g=1$

Oss: In ogni istante il punto P (di contatto) sarà il CIR e $\bar{x}_C(t) = \bar{x}_C(0) + R(\theta(t) - \theta(0))\hat{i}$

Oss: In generale i vincoli di contatto possono essere di **strisciamento** se: $\bar{v}_{A_1} \cdot \hat{\tau} \neq \bar{v}_{A_2} \cdot \hat{\tau}$

DEF. Un **sistema olonomo** è un sistema sottoposto a M vincoli bilateri, olonomi e fissi che assumeremo

Compatibili e indipendenti, allora avrà g = gradi di libertà = dN - M

Per ogni sistema olonomo esistono delle coordinate libere $\bar{q} \in \mathbb{R}^g$, per le quali ho un cambiamento di base

Regolare e invertibile t.c. $\bar{x} = X(\bar{q})$ e $\bar{q} = Q(\bar{x}) = X^{-1}(\bar{x})$

2 Leggi della Dinamica

Oss: A differenza della statica la dinamica dipenderà dalla scelta dell'osservatore

2.1 Principi della Dinamica

DEF. I principio dinamica o principio d'Inerzia

Esiste almeno un sistema (osservatore) di riferimento inerziale.

Oppure: Esiste una classe non vuota di sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme (stesse accelerazioni)

DEF. II principio dinamica o legge di Newton

Dato un punto materiale P e un osservatore inerziale, \exists massa inerziale $m > 0$, forza $\bar{F} \in \mathbb{R}^d$ t.c.

$$m\ddot{\vec{x}} = \bar{F}$$

Oss: Legge di Newton è covariante, cioè è invariante per cambiamento di osservatore inerziale ($\bar{a} = \bar{a}'$)

Infatti sia R il cambio di base, allora $m\ddot{\vec{x}} = \bar{F} \Leftrightarrow mR\ddot{\vec{x}'} = R\bar{F}'$

Oss: La Forza è una grandezza fisica data, non è definita da legge Newton

Oss: \bar{F} è un vettore applicato, serve definire il punto di applicazione (\bar{F}, P)

Oss: Posso anche definire $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)$ con $\bar{F} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ t.c. $(\bar{F} \in C^\infty)$

Questo equivale a un pb. di Cauchy di d equazioni differenziali del 2° ordine:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) \\ \dot{\vec{x}}(0) = \bar{v}_0 \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$$

Condizione di esistenza e unicità: \bar{F} Lipschitz su $A \subset \mathbb{R}^{2d}$ (aperto, limitato) e continua in T (posto $t \in [0, T]$)

Oss: Condizione necessaria affinché \bar{f} sia Lipshitziana in A aperto è che esistano finite tutte le derivate parziali

Oss: In un sistema di riferimento non inerziale la forza \bar{F}' segue dal II principio e teorema di Coriolis:

$$m\ddot{\vec{a}'} = \bar{F}' - m\{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{x}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}') + 2\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{x}}'\} \quad (\text{ovvero } F \text{ reale - forze apparenti})$$

DEF. III principio dinamica

L'iterazione tra due punti materiali è data da due forze uguali e contrarie dirette lungo la congiungente:

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2 = f \frac{\overline{P_1 P_2}}{|P_1 P_2|}$$

Una **coppia di forze** è data da due forze con stessa intensità, applicate a punti diversi: (\bar{f}, P) e $(-\bar{f}, P')$

2.2 Forze

Tipi di Forze $\bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)$:

- **interna** se dovuta dall'interazione con altri punti del sistema (III principio)
- **esterna** altrimenti

- **costante** se $\bar{F} = \bar{F}_0 \in \mathbb{R}^d$
- **posizionale** se $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x})$
- **centrale** se è posizionale ed $\exists O \in \mathcal{E}_d$ (centro) t.c. $\bar{F}(\bar{x}) = f(|\bar{x} - \bar{x}_0|) \cdot \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{|\bar{x} - \bar{x}_0|}$

DEF. Data una forza posizionale $\bar{F}(\bar{x})$ e una curva Γ parametrizzata da $\bar{\gamma} : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^d$

Il lavoro compiuto da \bar{F} lungo Γ è $L = \int_{s_0}^{s_1} \bar{F}(\bar{\gamma}(s)) \cdot \bar{\gamma}'(s) ds$

Oss: Il lavoro infinitesimo di \bar{F} in $d\bar{x}$ è $dL = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ cioè una 1-forma differenziale

Una 1-forma differenziale è $\omega = \sum_{j=1}^3 f_j(\bar{x}) dx_j$ e in A aperto di \mathbb{R}^3 è:

- **esatta** se $\exists g : A \rightarrow \mathbb{R}^3, g \in C^1(A)$ t.c. $\omega = dg = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j$
- **chiusa** se $d\omega = 0$ dove $d\omega = \sum_{j=1}^3 \partial F_j / \partial x_j$

Oss: La forma differenziale del lavoro in un dominio semplicemente connesso A è esatta $\Leftrightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \forall \bar{x} \in A$

Oss: Se dL è esatta e $\bar{F} \in C^1(A) \Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ in A

Teo: Ogni forma ω esatta è anche chiusa, ovvero $d^2\omega = 0$

Teo: In un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^n ogni 1-forma differenziale chiusa è anche esatta

Prop: Se la forma dL è esatta $\Rightarrow \int_{\Gamma_0} dL = 0 \quad \forall \Gamma_0$ curva chiusa (+dim)

Teo: Condizione necessaria affinché dL sia esatta è che \bar{F} sia posizionale (+dim)

DEF. \bar{F} posizionale è **conservativa** in $A \subset \mathbb{R}^3$ se \exists **potenziale** $U \in C^2(A)$ t.c. $\bar{F}(\bar{x}) = -\nabla U(\bar{x})$

Teo: In A aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^3 \bar{F} posizionale e conservativa $\Leftrightarrow \nabla \wedge \bar{F} = \bar{0}$ (+dim)

dove $(\nabla \wedge \bar{F})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k$

Una forza \bar{F} si dice **attiva** se è nota a priori la sua dipendenza da $\bar{x}, \dot{\bar{x}}$ e t cioè $\bar{F} = \bar{F}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)$

In ogni altro caso si dice **reazione vincolare** $\bar{\Phi}$ ed è dovuta dalla presenza di un vincolo

Oss: La legge di Newton si può riscrivere: $m\ddot{\bar{a}} = \bar{F}^{(att)} + \bar{\Phi}$

Esempi di forze e potenziali:

- Forza **peso** è una forza costante, $\bar{F}_g = m\bar{g}$ con $\bar{g} = -g\hat{j}$
Le forze costanti sono conservative con $U(\bar{x}) = -\bar{F}_0 \cdot \bar{x}$ per \bar{F}_g : $U_g(\bar{x}) = mg\bar{y}$
- Forza **elastica** è una forza posizionale, $\bar{F}_{el}(\bar{x}) = -k(\bar{x} - l)\hat{x}$ $U_{el}(\bar{x}) = \frac{1}{2}k(|\bar{x}| - l)^2$
- Forza **gravitazionale** è una forza posizionale, $\bar{F}_{1,2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$ ($\bar{r} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$)
Se $m_2 = M \gg m = m_1$ allora diventa una forza centrale in \bar{x}_2 e avremo $f(\bar{r}) = \bar{F}_{1,2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$
Le forze centrali sono conservative con $U(\bar{r}) = g(|\bar{r}|)$ dove g è la primitiva di $-f(\bar{r})$ $U_G(\bar{r}) = -\frac{GMm}{r}$

3 Statica

3.1 Equazioni Cardinali della Statica

DEF. Le equazioni del moto $\bar{F} = m\bar{a}$ per un punto materiale ammettono una **soluzione di quiete** in $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ se $\bar{x}(t) = \bar{x}_0, \forall t \in \mathbb{R}$ è soluzione delle eq. stesse

DEF. Un sistema di N punti materiali sottoposto alle forze $\{\bar{F}_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_N, t)\}$ Ha una **configurazione di equilibrio** $\{\bar{x}_{j \in \{1 \dots N\}}^{(0)}\}$ se $\bar{F}_j(\bar{x}_1^{(0)}, \dots, \bar{x}_N^{(0)}, \bar{0}, \dots, \bar{0}, t) = \bar{0} \quad \forall t, j$

Oss: Se la forza è Lipschitz, $\{\bar{x}_{j \in \{1 \dots N\}}^{(0)}\}$ è soluzione di quiete se e solo se è configurazione di equilibrio

Oss: Le forze si possono sempre scomporre: $\bar{F}_j = \bar{F}_j^{(ext)} + \bar{F}_j^{(int)} = \bar{F}_j^{(att)} + \bar{\Phi}_j$

DEF. Data una forza (\bar{f}, \bar{x}_P) applicata in P , il suo **momento** rispetto al **polo** O è $\bar{m} = (\bar{x}_P - \bar{x}_O) \wedge \bar{f}$

Oss: Avremo $|\bar{m}| = |\overline{OP}| |\bar{f}| |sen\theta|$ e $\bar{m} = m \hat{k}$

Un **sistema di forze** $\mathcal{S} = \{(\bar{f}_1, \bar{x}_1), \dots, (\bar{f}_n, \bar{x}_n)\}$ è una collezione di vettori applicati

La **risultante** e il Momento risultante di \mathcal{S} rispetto a O sono: $\bar{R} = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j \quad \bar{M}_O = \sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - \bar{x}_0) \wedge \bar{f}_j$

Teorema: Condizione necessaria per un sistema meccanico in configurazione di equilibrio è che il sistema di forze esterne rispetti le **equazioni cardinali della statica**: $\bar{R}^{(ext)} = \bar{0}, \bar{M}_O^{(ext)} = \bar{0} \quad \forall O \in \mathcal{E}_3$ (+dim)
Lemma: Per ogni sistema meccanico il sistema di forze interne ha: $\bar{R}^{(int)} = \bar{0}, \bar{M}_O^{(int)} = \bar{0} \quad \forall O \in \mathcal{E}_3$ (+dim)

Oss: Dato un sistema in una conf di eq, le equazioni cardinali valgono anche per i suoi sottosistemi

Prop: Trasporto del momento (+dim)

Dato un sistema di forze \mathcal{S} e due poli $O, O' \in \mathcal{E}_d$ si ha: $\bar{M}_{O'} = \bar{M}_O + \overline{OO'} \wedge \bar{R}$

3.2 Sistemi di Forze

DEF. Due sistemi di forze $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ si dicono **equivalenti** $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ se $\bar{R} = \bar{R}'$ e $\bar{M}_O = \bar{M}'_O \quad \forall O \in \mathcal{E}_3$

Oss: L'equivalenza tra sistemi di forze è una relazione di equivalenza, cioè valgono le proprietà:

- i) riflessiva: $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}$
- ii) simmetrica: $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \Leftrightarrow \mathcal{S}' \sim \mathcal{S}$
- iii) transitiva: $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ e $\mathcal{S}' \sim \mathcal{S}'' \implies \mathcal{S} \sim \mathcal{S}''$

DEF. L'**invariante scalare** di \mathcal{S} rispetto a O è $I = \bar{R} \cdot \bar{M}_O$ I non dipende dal polo scelto

Prop: Dato \mathcal{S} con $\bar{R} \neq \bar{0}$, $\exists h$ retta dell'**asse centrale** t.c. $\bar{M}_P \parallel \bar{R} \quad \forall P \in h$ e $h : \bar{x} = \lambda \bar{R} + \frac{\bar{R} \wedge \bar{M}_A}{|\bar{R}|^2} + \bar{x}_A$ con $A \in \mathcal{E}_3$ qualsiasi E se $I=0$, h è detto asse di applicazione della risultante e $\bar{M}_P = \bar{0}$ (+dim)

Prop: Ogni sistema di forze è equivalente al più a una forza più una coppia di forze. (+dim)

Teo: Dato un sistema di forze \mathcal{S} si ha uno dei seguenti casi: (+dim)

- i) $\bar{R} = \bar{0}$, $\bar{M}_O = \bar{0} \Leftrightarrow \mathcal{S} \sim \emptyset$
- ii) $\bar{R} = \bar{0}$, $\bar{M}_O \neq \bar{0} \Leftrightarrow \mathcal{S} \sim$ coppia di forze
- iii) $\bar{R} \neq \bar{0}$, $I = \bar{0} \Leftrightarrow \mathcal{S} \sim \{(\bar{R}, P)\}, P \in h$
- iv) $\bar{R} \neq \bar{0}$, $I \neq \bar{0} \Leftrightarrow \mathcal{S} \sim \{(\bar{R}, O), (\bar{f}, O), (-\bar{f}, P)\}$

Lemma: Siano $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ t.c. $\bar{R} = \bar{R}'$ e $\bar{M}_O = \bar{M}'_O$ per un centro $O \in \mathcal{E}_3 \Leftrightarrow \mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$ (+dim)

Def. Il **centro di massa** è per un sistema discreto $\bar{x}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \bar{x}_j$ dove $M = \sum_{j=1}^N m_j$

Per un sistema continuo $\exists \rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ detta distribuzione di massa t.c. $m_A = \int_A \rho(\bar{x}) d\bar{x}$ è la massa in A

Allora la massa totale diventa $M = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\bar{x}) d\bar{x}$ e $\bar{x}_{cm} = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{x} \rho(\bar{x}) d\bar{x}$

Oss: La forza peso applicata a un sistema è equivalente alla forza $\bar{F}_P = M\bar{g}$ applicata nel centro di massa

3.3 Vincoli Ideali

Dato un punto materiale con velocità \bar{v} , la **potenza istantanea** generata dalle forze \bar{F} è $\Pi = \bar{F}(\bar{x}, \bar{v}, t) \cdot \bar{v}$

Dato un moto $\bar{\gamma}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ di un punto soggetto a $\bar{F}(\bar{x}, \bar{v}, t)$, allora il lavoro è:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{\gamma}}(\tau) \cdot \bar{F}(\bar{\gamma}(\tau), \dot{\bar{\gamma}}(\tau), \tau) d\tau = \int \Pi(\tau) d\tau$$

Def. Dato un sistema di punti P_j sottoposti alle forze \bar{F}_j , il **lavoro** e la **potenza virtuali** sono:

$$\delta L' = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j \cdot \delta x'_j \text{ con } \delta x'_j \in S'_j \quad \forall j \in \{1 \dots N\} \quad \Pi' = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j \cdot v'_j \text{ con } v'_j \in V'_j \quad \forall j$$

Def. I vincoli a cui è sottoposto un sistema di punti sono **ideali** se generano solo reazioni vincolari $\{\bar{\Phi}_j\}_{j \in \{1 \dots N\}}$ che producono lavoro virtuale o potenza virtuale non negativa

$$\text{Ovvero } \sum_{j=1}^N \bar{\Phi}_j \cdot \delta x'_j \geq 0 \quad \forall \delta x'_j \in S'_j \quad \forall j \quad \text{oppure se } \sum_{j=1}^N \bar{\Phi}_j \cdot v'_j \geq 0 \quad \forall v'_j \in V'_j \quad \forall j$$

Oss: Un vicolo **perfetto** è un vincolo ideale e bilatero (al posto del \geq c'è =)

Un vicolo è liscio se non produce attrito e quindi la reazione vincolare è \perp alla superficie di contatto

Oss: Tutti i vincoli che useremo sono ideali: incastro, cerniera, manicotto, carrello,

puro rotolamento, filo in tensione, guida e appoggio in assenza di attrito

Def. Un'**equazione pura** caratterizza statica e dinamica di un sistema e non contiene reazioni vincolari

Teorema: Principio dei lavori virtuali, o PLV (+dim)

Dato un sistema di punti sottoposto a vincoli ideali e fissi la configurazione $\{P - j^{(0)}\}_{j \in \{1 \dots N\}}$ è di equilibrio se e solo se $\delta L'^{(att)} = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^{(att)} \cdot \delta x'_j \leq 0 \quad \forall \delta x'_j \in S'_j \quad \forall j$ (per vincoli perfetti c'è = invece di \leq)

3.4 Statica dei Sistemi Olonomi

Siano: $g = \#\text{g.d.l.}$ $\bar{q} = \text{coordinate libere}$ $\bar{X}(\bar{q})$ fornisce coordinate originali in funzione di quelle libere.

$$\text{Gli spostamenti virtuali } \delta\bar{x}'_j = \sum_{i=1}^g \frac{\partial\bar{x}_j}{\partial q_i} \cdot \delta q'_i \quad (\text{analogo per velocità virtuali})$$

Prop: Lavoro virtuale delle forze attive per sistema olonomo è $\delta L'^{(att)} = \sum_{k=1}^g Q_k \delta q'_k$

$$\text{Dove } Q_K \text{ sono le componenti generalizzate delle forze attive} \quad Q_k = \sum_{j=1}^N \bar{F}_j^{(att)} \frac{\partial\bar{x}_j}{\partial q_k} \quad (+\text{dim})$$

Prop: Un sistema olonomo è in equilibrio in $\bar{q}^{(0)}$ $\Leftrightarrow Q_k(\bar{q}^{(0)}) = 0 \quad \forall k \in \{1\dots g\}$ (+dim)

Oss: Se le forze attive sono conservative, cioè $\exists \tilde{U} : \mathbb{R}^{dN} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\bar{F}_j^{(att)} = -\nabla_j \tilde{U}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$,

$$\text{Si definisce il potenziale in funzione delle coordinate generalizzate} \quad U(\bar{q}) = \tilde{U}(\bar{x}_1(\bar{q}), \dots, \bar{x}_N(\bar{q}))$$

Teo: Sistema olonomo con forze attive conservative è in equilibrio in $\bar{q}(0) \Leftrightarrow \frac{\partial U}{\partial q_k}(\bar{q}^{(0)}) = 0 \quad \forall k$ (+dim)

DEF. Per un sistema olonomo avremo **configurazioni ordinarie** se $\bar{q} \in \Sigma^0$ (parte interna)

Di confine se $\bar{q} \in \partial\Sigma$ dove Σ è lo spazio delle soluzioni ammissibili (serve per vincoli unilateri)

Oss: Lo spazio degli spostamenti virtuali cambia in base al tipo di configurazione: $S'(\bar{q}) = \begin{cases} \mathbb{R}^g & \text{se } \bar{q} \in \Sigma^0 \\ \neq \mathbb{R}^g & \text{se } \bar{q} \in \partial\Sigma \end{cases}$

Prop: Una configurazione $\bar{q}^{(0)}$ ordinaria è di equilibrio $\Leftrightarrow Q_k(\bar{q}^{(0)}) = 0 \quad \forall k$

Una $\bar{q}^{(0)}$ è di confine allora $\exists \tilde{k} \in \{1\dots g\}$ t.c. $\delta q'_{\tilde{k}} \geq 0$ oppure $\delta q'_{\tilde{k}} \leq 0$

$$\text{Inoltre } \bar{q}^{(0)} \text{ è di equilibrio} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_k(\bar{q}^{(0)}) = 0 \quad \forall k \text{ t.c. } \delta q'_k \in \mathbb{R} \\ Q_k(\bar{q}^{(0)}) \geq 0 \quad \forall k \text{ t.c. } \delta q'_k \leq 0 \\ Q_k(\bar{q}^{(0)}) \leq 0 \quad \forall k \text{ t.c. } \delta q'_k \geq 0 \end{cases}$$

3.5 Statica del Corpo Rigido

Prop: Un corpo rigido sottoposto a $\mathcal{S}^{(ext)}$, vale: $\delta L' = \bar{R}^{(ext)} \cdot \delta \bar{x}'_C + \bar{M}_C^{(ext)} \cdot \bar{\varepsilon}$ con $\bar{\varepsilon} = \bar{\omega} \delta t \in \mathbb{R}^3$ (+dim)

Prop: Per un corpo rigido con vincoli ideali e fissi equazioni cardinali \Leftrightarrow configurazioni di equilibrio (+dim)

DEF. Il **Poligono di appoggio** di un corpo rigido appoggiato su un piano Π in un numero finito di punti è l'unico poligono t.c. i) ogni vertice è un punto d'appoggio (non viceversa) ii) il poligono è convesso iii) i punti di appoggio che non sono vertici, non sono esterni al poligono

Prop: Un corpo rigido appoggiato è in equilibrio \Leftrightarrow la proiezione di G su Π è dentro al poligono (+dim)

4 Dinamica

4.1 Quantità Meccaniche

Dato un punto materiale di massa $m > 0$, le sue quantità meccaniche sono:

- **quantità di moto**, o impulso, $\bar{Q} = m\bar{v}$
- **momento angolare** rispetto al polo O $\bar{K}_O = \bar{OP} \wedge \bar{Q}$
- **energia cinetica** $T = \frac{1}{2}m|\bar{v}|^2$
- **potenza** $\Pi = \bar{F} \cdot \bar{v}$

Oss: Le quantità meccaniche dipendono dall'osservatore e sono estensive (somma dei sottosistemi)

Prop: Legge trasporto momento angolare $\bar{K}_{O'} = \bar{K}_O + \bar{O}'\bar{O} \wedge \bar{Q}$ (+dim)

Prop: L'impulso complessivo di un sistema è $\bar{Q} = M\bar{v}_G$ (con G= baricentro) (+dim)

Prop: Sia O' un osservatore solidale al centro di massa G di un sistema, allora $\bar{Q}' = \bar{0}$ (+dim)

Teo: (König 1) Per ogni sistema di punti materiali $T = \frac{1}{2}M|\bar{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N m_j|\bar{v}'_j|^2$ (+dim)

Oss: In entrambi i teoremi \bar{v}'_j sono le velocità relative a θ' solidale a G e in moto traslatorio rispetto a θ

Teo: (König 2) (+dim)

Per ogni sistema $\bar{K}_O = \bar{K}'_G + M\bar{OG} \wedge \bar{v}_G$ dove $\bar{K}'_G = \sum_{j=1}^N m_j\bar{CP}_j \wedge \bar{v}'_j$ è indipendente dal polo scelto C

4.2 Quantità Meccaniche per il Corpo Rígido

Def. Il **Momento inerzia** di un corpo rigido rispetto a un asse $r : \lambda\hat{u} + \bar{x}_Q$ è: $I_r = \begin{cases} \sum_{j=1}^N m_j dist^2(P_j; r) & \text{discreto} \\ \int_{\mathbb{R}^d} d\bar{x} \rho(\bar{x}) dist^2(P; r) & \text{continuo} \end{cases}$

Oss: La distanza punto-retta è data da: $dist(P; r) = |\bar{QP} \wedge \hat{u}|$

Teo: (Huygens-Steiner) (+dim)

Dato un asse $r : \lambda\hat{u} + \bar{x}_Q$, $I_r = I_{r_G} + M dist^2(G; r)$ dove r_G è l'asse // r passante per il centro di massa G

Def. Il **Tensore di inerzia** di un sistema meccanico rispetto a O è la matrice simmetrica $\mathbb{I} \in M_3^{sym}(\mathbb{R})$

$$\text{data da: } \mathbb{I}_{lk}^{(O)} = \begin{cases} \sum_{j=1}^N m_j \{|\bar{OP}_j|^2 \delta_{lk} - (\bar{OP}_j)_l (\bar{OP}_j)_k\} & \text{con } k, l \in \{1, 2, 3\} \\ \int_{\mathbb{R}^3} d\bar{x} \rho(\bar{x}) \{|\bar{x} - \bar{x}_O|^2 \delta_{lk} - (\bar{x} - \bar{x}_O)_l (\bar{x} - \bar{x}_O)_k\} d\bar{x} \end{cases}$$

Prop: Dato un asse $r : \bar{x} = \lambda\hat{u} + \bar{x}_Q$ si ha $I_r = \hat{u} \mathbb{I}^{(Q)} \hat{u} = \sum_{l,k=1}^3 \hat{u}_l \mathbb{I}_{lk}^{(Q)} \hat{u}_k$ (+dim)

Def. $\mathbb{I}^{(O)}$ simmetrica e quindi diagonalizzabile con una matrice ortogonale O t.c. $O \mathbb{I}^{(O)} O^T = diag(I_1, I_2, I_3)$

Gli autovalori di $\mathbb{I}^{(O)}$, cioè $I_1, I_2, I_3 \in \mathbb{R}^+$ sono detti **momenti principali di inerzia**

I relativi autovettori sono i vettori direttori di 3 assi passanti per O detti **assi principali di inerzia**

$$\text{Prop: } \forall \bar{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{I}^{(O)}\bar{u} = \begin{cases} \sum_{j=1}^N m_j \overline{OP}_j \wedge (\bar{u} \wedge \overline{OP}_j) \\ \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\bar{x})(\bar{x} - \bar{x}_O) \wedge [\bar{u} \wedge (\bar{x} - \bar{x}_O)] d\bar{x} \end{cases} \quad (+\dim)$$

$$\text{Prop: Il momento angolare di C rispetto a un polo } O \in \mathcal{E}_3 \text{ soddisfa: } \bar{K}_O = \begin{cases} M \overline{OG} \wedge \bar{v}_G + \mathbb{I}^{(G)}\bar{\omega} \\ M \overline{OG} \wedge \bar{v}_O + \mathbb{I}^{(O)}\bar{\omega} \end{cases} \quad (+\dim)$$

Oss: Il momento angolare si può scomporre in quello di G più quello di relativo a G

Oss: Se O è G o un punto fisso (anche CIR), allora $\bar{K}_O = \mathbb{I}^{(O)}\bar{\omega}$

Prop: Energia cinetica di corpo rigido C : $T = \frac{1}{2}M|\bar{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}\mathbb{I}^{(G)}\bar{\omega}$ $(+\dim)$

Oss: Se ho un moto piano, allora $T = \frac{1}{2}I_r\omega^2(t)$ con $r : \bar{x} = \lambda\hat{k} + \bar{x}_{cir}$

DEF. L'ellissoide di inerzia associato a un corpo rigido è il luogo geometrico $\mathcal{E} := \{\bar{\omega} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{\omega}\mathbb{I}^{(O)}\bar{\omega} = 1\}$

Oss: Gli assi dell'ellissoide sono gli assi principali di inerzia e vale $\mathcal{E} := \{\bar{\omega} \in \mathbb{R}^3 \mid I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 1\}$,

Quindi i semiassi sono lunghi $\frac{1}{\sqrt{I_j}}$.

Oss: Se $I_1 < I_2 < I_3$ allora i tre assi sono univocamente determinati e perpendicolari

Oss: Se due semiassi sono uguali, allora l'ellissoide è invariante per rotazione rispetto al terzo asse \hat{e}_3
e qualsiasi asse $\perp \hat{e}_3$ è di inerzia, l'ellissoide si dirà di rotazione e il corpo associato giroscopio

Oss: Viceversa se due assi di inerzia non sono ortogonali, i rispettivi momenti coincidono

DEF. Un C ha un **asse di simmetria** di ordine $n \geq 2$ se C si sovrappone a se stesso dopo

una rotazione di $\frac{2\pi}{n}$ attorno a tale asse, inoltre se $n \in \mathbb{N}_0$ si dirà asse di simmetria rotazionale

Oss: Asse sim per C di ordine n \implies asse sim per \mathcal{E} di ordine $\geq n$

- r asse principale di inerzia \Leftrightarrow r asse sim ordine ≥ 2 per \mathcal{E}
- asse sim ordine > 2 per \mathcal{E} è asse sim rotazionale
- 2 assi sim ordine 2 per \mathcal{E} con angolo $\neq \frac{\pi}{2} \implies \mathcal{E}$ è ellissoide di rotazione
- 2 assi sim ordine > 2 per $\mathcal{E} \implies \mathcal{E}$ è una sfera
- 2 assi sim, uno con ordine > 2 e angolo $\neq \frac{\pi}{2} \implies \mathcal{E}$ è una sfera
- C ha un asse di simmetria di ordine $\geq 2 \implies$ è un asse principale di inerzia
- C ha 2 assi di simmetria di ordine $> 2 \implies \mathcal{E}$ è una sfera e $I_1 = I_2 = I_3$
- C ha 2 assi di simmetria uno con ordine > 2 e angolo $\neq \frac{\pi}{2} \implies \mathcal{E}$ è una sfera e $I_1 = I_2 = I_3$

Prop: Se C ha un asse di simmetria r allora $G \in r$, se ne ha due G è all'intersezione dei due

4.3 Equazioni Cardinali della Dinamica

Teo: Lungo qualunque moto di un sistema di punti sono verificate le **equazioni cardinali della dinamica**:

$$\dot{\bar{Q}} = \bar{R}^{(ext)} \quad \dot{\bar{K}}_O = \bar{M}_O^{(ext)} - \dot{\bar{x}}_O \wedge \bar{Q} \quad \forall O \in \mathcal{E}_3 \quad (+\dim)$$

Oss: Le eq. cardinali della dinamica sono condizioni necessarie ma non sufficienti per determinare il moto

Oss: Il polo O non deve appartenere al sistema

Oss: $\dot{\bar{x}}_O$ non indica la velocità del punto del sistema, ma quella del polo che può spostarsi rispetto al sistema

Oss: Le equazioni cardinali non sono equazioni pure (essendoci i vincoli)

Cor: Se O è G o un punto fisso (anche il CIR), allora $\dot{\bar{K}}_O = \bar{M}^{(ext)}$ (+dim)

Teo: (dell'energia cinetica) Lungo ogni moto del sistema meccanico $\dot{T} = \Pi =$ potenza complessiva (+dim)

Cor: Se il sistema è sottoposto a vincoli perfetti e fissi, allora $\dot{T} = \Pi^{(att)}$ (+dim)

Oss: Per un corpo rigido il teorema dell'energia cinetica è equivalente alle eq. cardinali della dinamica

Oss: Un sistema non rigido può avere $\Pi^{(int)} \neq 0$

Teo: Dato un sistema sottoposto solo a forze conservative di potenziale U, allora l'**energia meccanica**

$E = T + U$ è un integrale primo del moto, cioè è t.c. $\dot{E} = 0$ lungo qualunque moto del sistema (+dim)

4.4 Dinamica dei Sistemi Olonomi

Prop: L'energia meccanica di un sistema olonomo (vincoli fissi) è conservativo

$$E = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}A(\bar{q})\dot{\bar{q}} + U(\bar{q}) \text{ è un integrale primo del moto (+dim)}$$

Lemma: Dato un sistema olonomo, che ha vincoli fissi, si ha: $T = T(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}A(\bar{q})\dot{\bar{q}}$ dove $A(\bar{q}) \in M_g^{sym}(\mathbb{R})$

è detta **matrice di massa**, è simmetrica $g \times g$ ed è data da $[A]_{lk} = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial q_l} \cdot \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial q_k}$ (+dim)

Oss: Si può generalizzare al caso di vincoli tempo-dipendenti:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}A(\bar{q}, t)\dot{\bar{q}} + \bar{b}(\bar{q}, t) \cdot \dot{\bar{q}} + c(\bar{q}, t) \quad \text{con } b_k = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial t} \quad \text{e} \quad c = \sum_{j=1}^N m_j \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial t}$$

Prop: La matrice di massa $A(\bar{q})$ è t.c. $\forall \bar{q} \in \mathbb{R}^g \quad A(\bar{q}) > 0$ e $A(\bar{q})$ è invertibile (+dim)

4.5 Analisi Qualitativa del moto (in 1D)

Consideriamo un sistema olonomo conservativo con $g=1$, per cui $E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q)$ è conservata

(vincoli fissi e matrice di massa indipendente da q)

DEF. Lo spazio delle fasi $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme delle possibili coppie (q, \dot{q}) del sistema

DEF. Dato un valore di E, la **curva di livello** corrispondente è $\Gamma_E := \{(q, v) \in \Gamma \mid \frac{1}{2}mv^2 + U(q) = E\}$

Oss: Ogni moto del sistema $q(t)$ individua un punto $(q, \dot{q}) \in \Gamma$ ed appartiene ad una sola curva di livello

Prop: Proprietà delle curve di livello: (+dim)

- sono simmetriche rispetto all'asse q • $\Gamma_E \cap \Gamma_{E'} = \emptyset$ per $E \neq E'$ (non si intersecano)
- $supp(\Gamma_E) \subset \{q \in \mathbb{R} \mid U(q) \leq E\}$ • l'equazione delle curve di livello è $v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(q))}$

Oss: Non tutti i valori di E sono ammessi: $E \geq inf_{q \in \mathbb{R}} U(q)$

DEF. Le **orbite** γ_E del sistema sono date da $\gamma_E := \{(q(t), \dot{q}(t)) \in \Gamma_E \text{ al variare di } t \in \mathbb{R}\}$
dove $q(t)$ è un moto del sistema di energia E

Un'orbita è: • chiusa quando la curva γ_E è chiusa • aperta altrimenti

- limitata quando $\text{supp}(\gamma_E)$ è contenuto in un compatto • illimitata altrimenti

- periodica se $\exists T > 0$ t.c. $q(t+T) = q(t) \forall t \in \mathbb{R}$

Prop: • le orbite sono percorse da sinistra a destra nel semipiano superiore e da dx a sx in quello inferiore

- fissate $q_1 < q_2 \in \text{supp}(\gamma_E)$ t.c. $v_1, v_2 \neq 0$ Il tempo impiegato a percorrere l'orbita

$$\text{da } q_1 \text{ a } q_2 \text{ è } T = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}} \quad (+\dim)$$

DEF. I **valori critici** Λ_C di E sono:

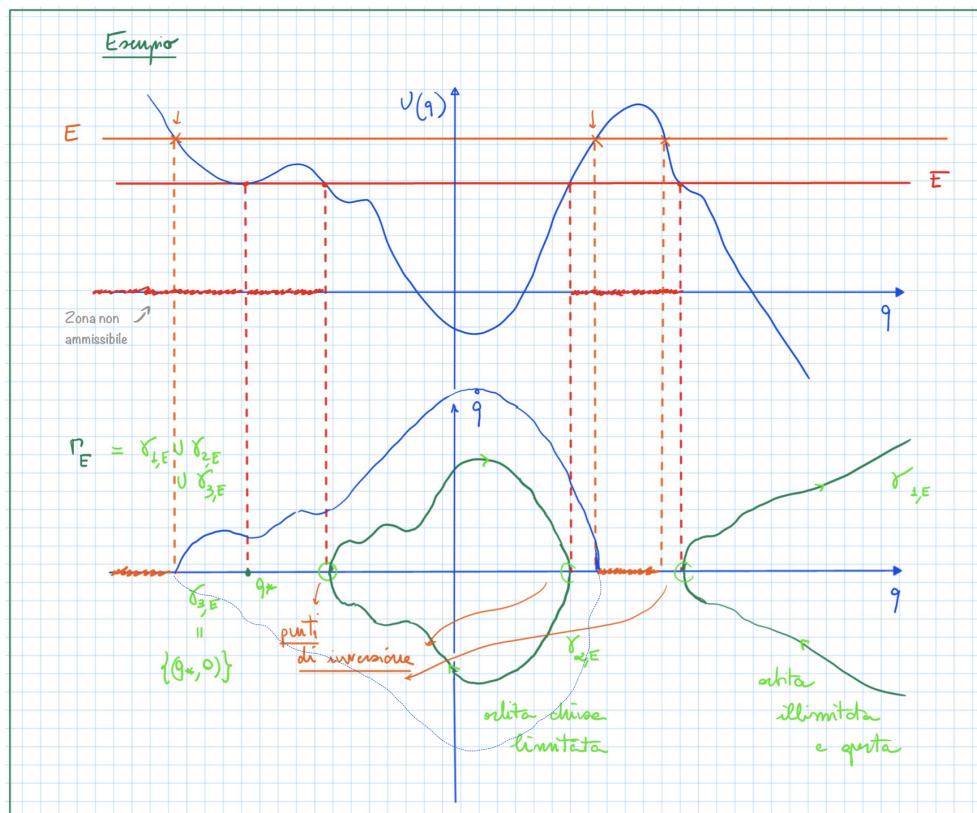
- I punti critici di U , cioè $q^* \text{ t.c. } U'(q^*)=0$ • Asintoti orizzontali di U , cioè $\lim_{q \rightarrow \pm\infty} U(q)$

DEF. I **punti di inversione** sono della forma $(q_0, 0) \in \gamma_E$ se $U(q_0) \notin \Lambda_C$

Prop: Sia $E \in \mathbb{R}$ t.c. $E \notin \Lambda_C$ allora ogni punto di γ_E è raggiunto da ogni altro in un tempo finito $(+\dim)$

Cor: Sia $E \notin \Lambda_C$, se γ_E è chiusa e limitata, allora è periodica, di periodo $T = 2 \int_{q_0^{(1)}}^{q_0^{(2)}} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(q))}}$
dove $q_0^{(i)}$ sono i due punti di inversione dell'orbita

Prop: Nei punti di inversione il grafico di γ_E è verticale e la funzione $v(q)$ è non derivabile $(+\dim)$



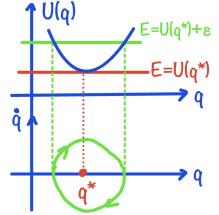
Consideriamo ora i valori $E \in \Lambda_C$ t.c. $E = U(q^*)$, $U'(q^*) = 0$

Oss: $U^{(n)}(q^*) \neq 0 \Rightarrow$ 1) minimo se n pari e $U^{(n)} > 0$ 2) massimo se n pari e $U^{(n)} < 0$ 3) flesso se n dispari

- q^* punto di **minimo isolato** di U stabile

$\exists \gamma_E = \{(q^*, 0)\}$ orbita che corrisponde al solo punto di equilibrio

Valori vicini di E producono orbite chiuse, limitate e periodiche

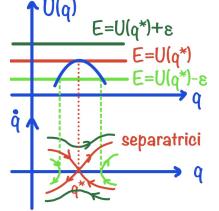


- q^* **massimo isolato** instabile

$\exists \gamma_E = \{(q^*, 0)\}$ e per $E = U(q^*)$ $\exists \gamma_{*,j} \subset \Gamma_E$ 4 separatrici, disgiunte

Valori di E vicini a $U(q^*)$ producono orbite che si allontanano da q^*

Prop: Da ogni punto della separatrice, si raggiunge q^* in tempo ∞ (+dim)

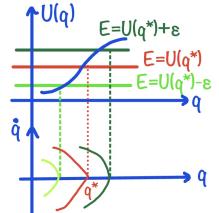


- q^* **flesso** ascendente o discendente instabile

$\exists \gamma_E = \{(q^*, 0)\}$ e per $E = U(q^*)$ $\exists \gamma_{*,j} \subset \Gamma_E$ 2 separatrici, disgiunte

Valori vicini di E producono orbite lungo cui il sistema si allontana

Prop: La prolunga delle separatrici nel punto di eq non è verticale (+dim)



4.6 Stabilità alla Lyapunov

Def. Un **sistema dinamico** è un problema di Cauchy: $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$ con $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{f} \in C^\infty$

Def. Una configurazione \bar{x}_0 è di **equilibrio** se $\bar{f}(\bar{x}_0, \bar{v}, t) = \bar{v}$

Stabilità alla Ljapunov: Una configurazione di equilibrio \bar{x}_* di un sistema dinamico, sarà:

- **stabile** se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |\bar{x}(0) - \bar{x}_*| < \delta \implies |\bar{x}(t) - \bar{x}_*| < \epsilon, \forall t \in \mathbb{R}^+$
- **asintoticamente stabile** se stabile e $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{x}(t) = \bar{x}_*$
- **instabile** se non è stabile

Oss: Nel piano delle fasi le stabilità secondo Ljapunov di un punto di equilibrio equivale a:

Fissato il raggio $\epsilon > 0$ del disco D_ϵ con centro q^* , \exists sempre un disco D_δ (in q^* e raggio $\delta > 0$) t.c.

$\forall (q(0), \dot{q}(0)) \in D_\delta \implies (q(t), \dot{q}(t)) \in D_\epsilon \ \forall t \in \mathbb{R}$, cioè l'orbita non esce mai dal disco D_ϵ

Oss: Condizioni di equilibrio per sistemi olonomi conservativi sono del tipo (\bar{q}_*, \bar{v})

di conseguenza le condizioni diventano: $|\bar{q}(0) - \bar{q}_*|^2 + |\dot{\bar{q}}(0)|^2 < \delta^2 \implies |\bar{q}(t) - \bar{q}_*|^2 + |\dot{\bar{q}}(t)|^2 < \epsilon^2, \forall t$

Ovvero partendo vicino a q_* con velocità piccola si resta in un intorno del punto di equilibrio

Oss: Un sistema olonomico conservativo con matrice di massa A , avrà: $\bar{x} = (\bar{q}, \bar{v}) \quad \dot{\bar{x}} = (A^{-1}\bar{v}, -\nabla U)$

Oss: Il problema dinamico si può riscrivere $\dot{\bar{x}} = A(\bar{x} - \bar{x}_*) + Q(\bar{x})$ per sviluppo di Taylor con $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_*} \frac{|Q(\bar{x})|}{|\bar{x} - \bar{x}_*|}$

Oss: Dato un problema dinamico del tipo $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A\bar{x} \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases}$ l'unica soluzione sarà $\bar{x}(t) = e^{At}\bar{x}_0$

Oss: L'esponenziale di una matrice è $e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At)^k}{k!}$ e so che questa serie è ben definita

Oss: Se A è diagonalizzabile, allora \exists base ortonormale t.c. il problema diventa $\dot{x}_j = \lambda_j x_j$
e la soluzione $x_j(t) = e^{\lambda_j t}(\bar{x}_0)_j$

Oss: In generale siano λ_j gli autovalori di A e n_j le corrispettive molteplicità, allora \exists base t.c.
soluzioni sono: $x_j(t) = e^{\lambda_j t} P_j(t)$ $P_j(t) = \sum_{k=0}^{n_j-1} c_k t^n$

DEF. Il linearizzato di (D) attorno a \bar{x}_* punto di equilibrio è (L) $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(\bar{x} - \bar{x}_*) \\ \bar{x}(0) = \bar{x}_0 \end{cases} \quad A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x}_*)$

Teo: (Criterio linearizzato per stabilità) (+dim)

Dato (L) con λ_j autovalori di A . Se $\exists c > 0$ t.c. $\operatorname{Re} \lambda \leq -c < 0 \forall \lambda_j$ allora \bar{x}_* è un pt di eq asintoticamente stabile ed \exists una costante $C_0 < +\infty$ e un intorno di \bar{x}_* $B(\bar{x}_*)$ t.c. $|\bar{x}(t) - \bar{x}_*| \leq C_0 e^{-c\frac{t}{2}} |\bar{x}_0 - \bar{x}_*| \quad \forall \bar{x}_0 \in B(\bar{x}_*)$

Lemma di Gronwall: Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, g \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $\exists k > 0, \dot{g} \leq kg \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies g(t) \leq e^{kt}g(0)$ (+dim)

Cor: Se $\exists \lambda$ autovalore della matrice A del linearizzato t.c. $\operatorname{Re} \lambda > 0$ allora \bar{x}_* è instabile

Oss: Il criterio linearizzato non funziona sempre (se $\operatorname{Re} \lambda = 0$)

Teo: (Ljapunov) (+dim) Sia \bar{x}_* un pt. di eq. del sistema dinamico (D).

Se esiste una funzione $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (funzione di Ljapunov) definita in un intorno $B(\bar{x}_*)$ di \bar{x}_* e di classe C^1

Se valgono: i) $W(\bar{x}_*) = 0, W(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_*)/\{\bar{x}_*\}$ ii) $\dot{W}(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_*)$ Allora \bar{x}_* è stabile

Oss: Se inoltre $\dot{W}(\bar{x}) < 0 \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_*)/\{\bar{x}_*\}$ (Quindi $\dot{W}(\bar{x}_*) = 0$) allora \bar{x}_* asintoticamente stabile

Cor: Se invece ii) $\dot{W}(\bar{x}_*) \geq 0$ e $\dot{W}(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_*)/\{\bar{x}_*\}$ allora \bar{x}_* è instabile (+dim)

Oss: $\dot{W}(\bar{x}) = \dot{\bar{x}} \cdot \nabla W = \bar{f}(\bar{x}; \dot{\bar{x}}; t) \cdot \nabla W(\bar{x})$

Teo: (Dirichlet) Dato un sistema olonomo conservativo

I punti di minimo isolati di U sono punti di equilibrio stabili del sistema (+dim)

Oss: Questa condizione è sufficiente ma non necessaria

Prop: Per un sistema olonomo conservativo unidimensionale

se q^* è un punto di massimo di U con $U''(q^*) < 0$, allora q^* è instabile (+dim)

Oss: La generalizzazione multidimensionale richiede \exists autovalore negativo di $Hess_U(\bar{q}^*)$

5 Meccanica Lagrangiana

5.1 Equazioni di Lagrange

DEF. La **Lagrangiana** di un sistema olonomo è:

$$\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}; t) := T(\bar{q}; \dot{\bar{q}}; t) - U(\bar{q}; t) \quad \text{con } T(\bar{q}; \dot{\bar{q}}; t) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} A(\bar{q}; t) \dot{\bar{q}} + \bar{b}(\bar{q}; t) \cdot \dot{\bar{q}} + \bar{c}(\bar{q}; t)$$

Teo: (Equazioni di Eulero-Lagrange) (+dim)

Dato un sistema olonomo conservativo, $\bar{q}(t) : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^g$ è un moto del sistema se e solo se sono soddisfatte

le equazioni di Lagrange: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \quad \forall k \in \{1 \dots g\}, \forall t \in (t_0, t_1)$

Lemma: Ponendo $\tau_k := \sum_{j=1}^N m_j \bar{a}_j \cdot \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \dot{q}_k}$ (componenti generalizzate delle forze inerziali)

$$\text{si ha lungo ogni moto del sistema } \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \tau_k \quad (+\text{dim})$$

Oss: Se le forze attive non sono conservative le eq. di Lagrange diventano:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad \forall k \in \{1 \dots g\} \quad Q_k \text{ componenti generalizzate delle forze}$$

Oss: • se U è C^2 il moto ammette unica soluzione (essendo un sistema diff 2° ord)

- se $A(\bar{q})$ non dipende da t , allora $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \frac{\partial A(\bar{q})}{\partial \dot{q}_k} \dot{\bar{q}} - Q_k$
- se A non dipende da \bar{q} , allora $\ddot{\bar{q}} = A^{-1} \bar{Q}$

Prop: (conservazione dell'energia) (+dim)

Se $\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) = T(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) - U(\bar{q})$ non dipende esplicitamente da t , $E = T(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) + U(\bar{q})$ con $T(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} A(\bar{q}) \dot{\bar{q}}$, allora E è un integrale primo del moto (cioè $E(t) = E(0) + \dot{E}(0) t$)

5.2 Simmetrie

DEF. Una coordinata q_k è **ciclica** per la Lagrangiana $\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}, t)$ se \mathcal{L} non dipende da q_k ovvero $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$

Prop: Sia q_k una coordinata ciclica per $\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}, t)$, allora il **momento coniugato** $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$ è un integrale primo del moto, cioè $\dot{p}_k = 0$ (+dim)

Una **simmetria** è una trasformazione $\bar{\Phi} : \mathbb{R}^g \rightarrow \mathbb{R}^g$ C^∞ invertibile t.c. $\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) = \mathcal{L}(\bar{q}'; \dot{\bar{q}}')$ $\bar{q}' = \bar{\Phi}(\bar{q})$

Un **gruppo ad un parametro di simmetrie** è una famiglia di diffeomorfismi $\{\bar{\Phi}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}} : \mathbb{R}^g \rightarrow \mathbb{R}^g$ t.c.

Sia derivabile in ε , $\bar{\Phi}_\varepsilon$ simmetria $\forall \varepsilon$ e i) $\bar{\Phi}_0(\bar{q}) = \bar{q} \quad \forall \bar{q} \in \mathbb{R}^g$ ii) $\bar{\Phi}_{\varepsilon_1}(\bar{\Phi}_{\varepsilon_2}(\bar{q})) = \bar{\Phi}_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}(\bar{q}) \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}$

Teo: (Noether) (+dim)

Se un sistema di Lagrangiana $\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}})$ ammette una famiglia ad 1 parametro di simmetrie $\{\bar{\Phi}_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$,

Allora la seguente quantità è un integrale primo del moto: $I(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) = \nabla_{\dot{\bar{q}}} \mathcal{L} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \sum_{k=1}^g \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \cdot \frac{\partial (\bar{\Phi}_\varepsilon)_k}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$

Oss: Esistono integrali primi del moto che non derivano dalla presenza di simmetrie

Oss: Conseguenza di Noether è che la simmetria per rotazioni attorno ad un asse implica

la conservazione del momento angolare lungo quell'asse

5.3 Moti Centrali

Consideriamo sistema di due corpi in interazione interna con una forza $\bar{F}_{ij} = f(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|)\hat{x}_{ij}$

Prop: Nelle coordinate $\bar{X} := \frac{m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2}{m_1 + m_2}$ e $\bar{r} := \bar{x}_1 - \bar{x}_2$, la Lagrangiana del sistema è:

$$\mathcal{L}(\bar{X}; \dot{\bar{X}}; \bar{r}; \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)|\dot{\bar{X}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\bar{r}}|^2 - U(|\bar{r}|)$$

dove $\mu = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})^{-1}$ è la massa ridotta e U una primitiva di $-f$ (cioè $U' = -f$) (+dim)

Oss: Lagrangiana ciclica rispetto $\bar{X} \implies \bar{p}_X := (m_1 + m_2)\dot{\bar{X}}$ (momento totale) è integrale primo del moto.

Quindi esiste un osservatore solidale al centro di massa, rispetto ad esso $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\bar{r}; \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu|\dot{\bar{r}}|^2 - U(|\bar{r}|)$

Oss: \mathcal{L} non dipende esplicitamente dal tempo $\implies E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\bar{r}}|^2 + U(|\bar{r}|)$ è integrale primo del moto

Prop: Il momento angolare $\bar{L} := m\bar{r} \wedge \dot{\bar{r}}$ è un integrale primo (in 3D) del moto (+dim)

Oss: In un campo centrale $\mathcal{L}(\bar{r}; \dot{\bar{r}}) = \frac{1}{2}\mu|\dot{\bar{r}}|^2 - U(|\bar{r}|)$ e $\bar{F}(\bar{r}) = -U'(|\bar{r}|)\hat{r}$

Prop: Il moto di un sistema in un campo centrale è:

- i) rettilineo se $\bar{L}(0) = \bar{0}$
- ii) piano se $\bar{L}(0) \neq \bar{0}$ (sul piano \perp a $\bar{L}(0)$) (+dim)

DEF. La **velocità areolare** $\dot{A}(t)$ è la derivata sul tempo dell'area coperta dalla traiettoria al variare di t

Teo: (II legge di Keplero) In un campo centrale la velocità areolare $\dot{A}(t)$ è costante (+dim)

Oss: In coordinate polari $\mathcal{L}(\rho; \theta; \dot{\rho}; \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\mu(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - U(\rho)$

Prop: Ogni moto centrale con $L \neq 0$ si decompone in: (+dim)

- i) un moto radiale unidimensionale in ρ con energia conservata $E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + U_{eff}(\rho)$

dove il potenziale efficace è $U_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)$

- ii) un moto angolare unidimensionale in $\theta(t)$ soluzione di $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu\rho^2(t)}$

Inoltre la curva nel piano ρ, θ ha eq. soluzione di $\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \frac{\mu\rho^2}{L} \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_{eff}(\rho))}$

Prop: Se $E \in \Lambda_C(U_{eff})$ (non asintoto), allora una soluzione del moto è $\rho(t) = \rho_*$

il moto complessivo è circolare uniforme $\theta(t) = \theta_0 + \omega t$ con $\omega = \frac{L}{\mu\rho_*^2}$

Prop: Se $E \notin \Lambda_C(U_{eff})$ e $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^2 U(\rho) = 0$, il moto si svolge all'interno di $[\rho_m, +\infty)$ $\rho_m > 0$ (+dim)

Oss: Le orbite radiali limitate per $E \notin \Lambda_C(U_{eff})$ sono chiuse e periodiche

Prop: Un moto centrale è periodico se e solo se (+dim)

- i) il moto radiale è periodico di periodo T oppure di quiete

- ii) la variazione di θ di un T soddisfa $\Delta\theta := \theta(T) - \theta(0) = \int_0^T \frac{L^2}{\mu\rho^2(\tau)} d\tau = \frac{p}{q}2\pi$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$

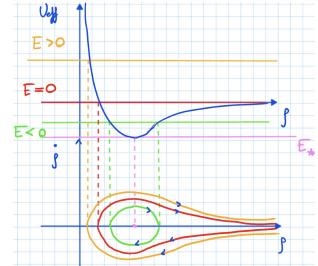
e in tal caso il periodo complessivo è nT con n il più piccolo q t.c. la condizione è soddisfatta

Oss: Ogni orbita radiale che non corrisponda a valori critici dell'energia è periodica ma la condizione non è soddisfatta, allora l'orbita è aperta e limitata nella corona circolare di raggi ρ_-, ρ_+ punti di inversione

5.4 Campo Gravitazionale

Nel campo gravitazionale valgono:

- $U(\rho) = -\frac{k}{\rho}$ $U_{eff}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{k}{\rho}$ $k > 0$
- $\min U_{eff}(\rho) = U_{eff}(\rho_*) = -\frac{k^2 m}{2L^2} = E_*$
- $\rho_* = \frac{L^2}{km}$ è un pt. di minimo assoluto
- i valori ammissibili sono $E \in [E_*, +\infty)$ e quelli critici $\Lambda_C = \{0, E_*\}$
- l'eccentricità è $e := \sqrt{1 - \frac{E}{E_*}}$



Prop: L'eq. delle orbite in un campo gravitazionale è: $\rho(\theta) = \frac{\rho_*}{1+e \cdot \cos(\theta)}$ (+dim)

Di conseguenza le orbite sono: i) ellissi se $e < 1$ ii) parbole se $e = 1$ iii) iperboli se $e > 1$

In particolare, le orbite limitate ($e < 1$) sono periodiche con periodo T del moto radiale

Oss: Il tipo di una conica di eq. $\bar{x}A\bar{x} = 0$, è dato dal determinante della sottomatrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Teo: (Leggi di Keplero) (+dim.)

Per ogni moto in un campo gravitazionale, valgono:

- le orbite sono ellissi, in cui il centro della forza occupa uno dei due fuochi
- la velocità areolare è costante
- il quadrato del periodo dell'orbita è proporzionale al cubo del semiasse maggiore $T^2 \propto a^3$

Oss: Le traiettorie ellittiche hanno un fuoco in O, quindi asimmetriche $\implies T = T_{radiale}$ e $\Delta\theta = 2\pi$

Oss: Per l'oscillatore armonico, le orbite ellittiche sono simmetriche con centro in O $\implies T = 2T_{radiale}$

Oss: Sia per il campo gravitazionale che per l'oscillatore, tutte le orbite limitate sono anche periodiche

Teo: In un campo centrale tutte le orbite limitate sono chiuse $\iff U(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}k\rho^2 & \text{oscillatore armonico} \\ -\frac{k}{\rho} & \text{campo gravitazionale} \end{cases}$

Oss: Per un potenziale centrale generico (non gravitazionale o armonico)

l'insieme dei dati iniziali che generano orbite chiuse ha misura di Lebesgue nulla

I potenziali gravitazionale e armonico sono particolari perché hanno più simmetrie dei campi centrali generici

Prop: Per ogni moto in un campo gravitazionale il **vettore di Runge-Lenz**

$$\bar{R} = m(\dot{\bar{x}} \wedge \bar{L} - k\hat{r}) \text{ è un integrale primo del moto} \quad (+\text{dim})$$

5.5 Piccole Oscillazioni

Consideriamo il sistema olonomo conservativo di Lagrangiana $\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{q}}A(\bar{q})\dot{\bar{q}} - U(\bar{q})$ $\bar{q} \in \mathbb{R}^g$

Prop: Il sistema dinamico linearizzato attorno un pos. di eq. stabile \bar{q}_* del sistema olonomo conservativo

ha equazioni del moto $A\ddot{\bar{u}} = -B\bar{u}$ ed è descritto dalla Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}(\bar{u}; \dot{\bar{u}}) = \frac{1}{2}\dot{\bar{u}}A\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{u}B\bar{u}$

dove $A = A(\bar{q}_*)$ $B = \text{Hess}_U(\bar{q}_*)$ $\bar{u} = \bar{q} - \bar{q}_*$ (+dim)

DEF. Le piccole oscillazioni rispetto a \bar{q}_* stabile sono i moti descritti dalla Lagrangiana $\tilde{\mathcal{L}}$ del linearizzato. Ogni singola oscillazione e la sua frequenza sono dette modo normale e frequenza propria

Teo: (piccole oscillazioni) (+dim)

Dato il sistema linearizzato con $B > 0$ i modi normali sono: $z_i(t) = z_i(0) \cos \omega_i t + \frac{\dot{z}_i(0)}{\omega_i} \sin \omega_i t \quad i \in \{1 \dots g\}$

Le relative frequenze proprie ω_i sono soluzioni dell'equazione caratteristica $\det(B - \omega^2 A) = 0$

Più precisamente $\exists C = (\bar{\xi}_1 | \dots | \bar{\xi}_g)$ t.c. la soluzione del moto è data da $\bar{u}(t) = C \bar{z}(t)$ con $\bar{\xi}_i$ t.c. $(B - \omega_i^2 A) \bar{\xi}_i = 0$

Oss: Le piccole oscillazioni hanno la forma $\bar{u}(t) = \sum_{i=1}^g z_i(t) \bar{\xi}_i$

Lemma1: Per A, B simmetriche con $A > 0$, $\exists C$ invertibile t.c. $CAC^{-1} = \mathbb{1}$, $CBC^{-1} = \text{diag}(\beta_1 \dots \beta_g)$ (+dim)

Cor: Le soluzioni del linearizzato corrispondono a vere oscillazioni $\iff \omega_i > 0 \forall i$, altrimenti \bar{q}_* è instabile

Lemma2: A, B simmetriche $A > 0$, gli autovalori ε_i di $A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}$ sono le soluzioni di $\det(B - \lambda A) = 0$ (+dim)

6 Meccanica Hamiltoniana

6.1 Principi Variazionali

Mostriamo che la descrizione lagrangiana di un sistema olonomo conservativo si può ricavare da un principio variazionale, senza passare dalle equazioni di Newton

Lo spazio delle traiettorie è: $\mathcal{M}_{\bar{q}_0, \bar{q}_T, T} := \{\bar{q}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \bar{q}(0) = \bar{q}_0, \bar{q}(T) = \bar{q}_T, \bar{q} \in C^1([0, T])\}$

Lo spazio delle deformazioni è: $\mathcal{M}_{0, T} := \{\bar{\eta}(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \bar{\eta}(0) = \bar{\eta}(T) = 0, \bar{\eta} \in C^1([0, T])\}$

Sia X uno spazio vettoriale normato, un **funzionale** è un'applicazione $\mathcal{F}[f] : X \rightarrow \mathbb{R}$

Un funzionale \mathcal{F} ha un **estremale** in f_0 se \exists un intorno U di f_0 t.c. $\text{sign}(\mathcal{F}[f] - \mathcal{F}[f_0])$ è lo stesso $\forall f \in U$
(minimo se ≥ 0 , massimo se ≤ 0)

Un funzionale continuo \mathcal{F} è **differenziabile** in f se $\Delta \mathcal{F}[\eta] := \mathcal{F}[f + \eta] - \mathcal{F}[f] = \delta \mathcal{F}[f](\eta) + \varepsilon(\eta) \|\eta\| \forall \eta$

dove $\delta \mathcal{F}$ è una funzione lineare, detta differenziale e $\lim_{\|\eta\| \rightarrow 0^+} \varepsilon(\eta) = 0$

Teo: Se \mathcal{F} , differenziabile in X_0 , ha un estremale in $f \in X_0$, allora

$\delta \mathcal{F}[f](\eta) = 0 \forall \eta \in X_0$ cioè f è un punto stazionario di \mathcal{F} (+dim)

Consideriamo ora i funzionali $\mathcal{F}[f] := \int_a^b F(f; f'; x) dx$ con $F \in C^2$ e $f \in X = \{f \in C^1[a, b] \mid f(a) = f(b) = 0\}$

Teo: (equazioni di Eulero-Lagrange) (+dim)

\mathcal{F} differenziabile in X ha un punto stazionario in $f_0 \in X \iff \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f}|_{f=f_0} = 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Lemma: Sia $g \in C[a, b]$ t.c. $\int_a^b g(x) f(x) dx = 0 \quad \forall f \in X$ allora $g=0$ (+dim)

Oss: La generalizzazione a \mathbb{R}^d è ovvia: $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'_k} - \frac{\partial F}{\partial f_k} = 0 \quad \forall k$

Oss: La generalizzazione a funzionali $\mathcal{F}[\bar{f}]$, $\bar{f} \in X$ affine su X_0 con $X = \{\bar{f} \in C^2[a, b] \mid \bar{f}(a) = \bar{A}, \bar{f}(b) = \bar{B}\}$

DEF. Il **funzionale d'azione** è il funzionale sullo spazio affine $\mathcal{M}_{\bar{x}_0, \bar{x}_T, T}$ dato da $\mathcal{A}(\bar{q}) := \int_0^T \mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}; t) dt$

Teo: (Princio di Hamilton) Assumendo T e $U \in C^2$

ogni moto del sistema olonomo conservativo rende stazionario il funzionale d'azione,

cioè se $\bar{q}_{ol}(t)$ risolve l'eq del moto in $[0, T]$, allora $\delta \mathcal{A}[\bar{q}_{ol}] = 0$ (+dim)

Teo: (Principio di minima azione) Assumendo $T, U \in C^2$ e $\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} > 0$ (come matrice)

$\exists T > 0$ t.c. se $\bar{q}(t)$ rende stazionaria $\mathcal{A}[\bar{q}]$ in $[0, T]$ allora $\mathcal{A}[\bar{q}]$ ha un minimo relativo in \bar{q} (+dim)

Teo: Sia $X_G := \{\bar{f} \in C^2([a, b]) \mid \bar{f}(a) = \bar{A}, \bar{f}(b) = \bar{B}, \mathcal{G}[\bar{f}] = l \in \mathbb{R}\}$

dove $\mathcal{G}[\bar{f}] := \int_a^b G(\bar{f}; \bar{f}'; x) dx$ con $G \in C^2$ (Vincolo) Allora, posto $\lambda \in \mathbb{R}$ **moltiplicatore di Lagrange**

\bar{f}_0 è un pt. stazionario di $\mathcal{F}[\bar{f}] := \int_a^b F(\bar{f}; \bar{f}'; x) dx$ su $X_G \iff \bar{f}_0$ pt. stazionario di $\mathcal{F}[\bar{f}] + \lambda \mathcal{G}[\bar{f}]$

6.2 Equazioni di Hamilton

DEF. La **trasformata di Legendre** di $f(\bar{x}) \in C^2$ convessa ($\det \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} > 0$) è $g(\bar{p}) := \sup_{\bar{x} \in \mathbb{R}} \{\bar{p} \cdot \bar{x} - f(\bar{x})\}$

Oss: Se $\sup = \max$ allora $\exists \bar{x}(\bar{p})$ t.c. $g(\bar{p}) = \bar{x}(\bar{p})\bar{p} - f(\bar{x}(\bar{p}))$, cioè $\nabla_{\bar{x}}(\bar{x}\bar{p} - f(\bar{x}))|_{\bar{x}(\bar{p})} = 0 \implies \bar{p} = (\nabla f)(\bar{x}(\bar{p}))$

Oss: Se f è C^2 e strettamente convessa $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^d$, allora il sup è il max (cioè non ci sono asintoti obliqui)

Oss: se $d=1$ $p = f'(x(p))$ la pendenza della tangente alla funzione in x

Prop: La trasformata di Legendre g è C^2 , convessa e involutiva, cioè f è la trasformata di g (+dim)

Oss: Inoltre se f è C^k con $k > 2 \implies g$ è C^k

DEF. L'**Hamiltoniana** è la trasformata rispetto $\dot{\bar{q}}$ di una Lagrangiana $H(\bar{q}; \bar{p}; t) := \sup_{\bar{\eta} \in \mathbb{R}^d} \{\bar{p}\bar{\eta} - \mathcal{L}(\bar{q}; \bar{\eta}; t)\}$

Chiamiamo $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}(\bar{p}); t)$ il momento coniugato di q_k e la coppia (\bar{q}, \bar{p}) variabili canoniche

Prop: Sia $\mathcal{L}(\bar{q}; \dot{\bar{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} A(\bar{q}) \dot{\bar{q}} - U(\bar{q})$ ($A, U \in C^2$ e $A > 0$), allora $H(\bar{q}; \bar{p}) = \frac{1}{2} \bar{p} A^{-1}(\bar{q}) \bar{p} + U(\bar{q})$ (+dim)

DEF. Le **equazioni di Hamilton** sono il sistema di eq. differenziali (H) :
$$\begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{cases}$$

Prop: Sia $(\bar{q}(t), \bar{p}(t))$ una soluzione delle eq. di Hamilton, allora $\frac{d}{dt} H(\bar{q}(t); \bar{p}(t); t) = \frac{\partial H}{\partial t}(\bar{q}(t); \bar{p}(t); t)$ (+dim)

Cor: Se H non dipende esplicitamente da t , allora $\frac{dH}{dt} = 0$ (H è integrale primo)

Oss: Il **flusso hamiltoniano** è la funzione: $t \rightarrow (\bar{q}(t), \bar{p}(t))$

Oss: Le equazioni di Hamilton sono formalmente equivalenti a quelle di Lagrange

Oss: L'insieme delle (\bar{q}, \bar{p}) è detto spazio delle fasi Γ e può essere dotato di una struttura **simplettica**

Oss: Le eq di H $\dot{\bar{x}} = \bar{f}_H(\bar{x}; t)$ si possono riscrivere con la matrice simplettica standard $J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \in M_{2g}$
e il campo vettoriale Hamiltoniano $\bar{f}_H(\bar{x}; t) := J \nabla_{\bar{x}} H = (\nabla_{\bar{q}} H, -\nabla_{\bar{p}} H)$

Oss: Come per eq di \mathcal{L} , da quelle di H si ottengono dalla stazionarietà di $\mathcal{A}[(\bar{q}, \bar{p})] := \int_0^T \{\bar{p} \cdot \dot{\bar{q}}(\bar{p}) - H(\bar{q}; \dot{\bar{q}}; t)\} dt$
nello spazio delle traiettorie $\mathcal{N}_{\bar{q}_0, \bar{q}_T, T} := \{(\bar{q}, \bar{p}) \mid \bar{q}(0) = \bar{q}_0, \bar{q}(T) = \bar{q}_T\}$

Oss: H è definita a meno di C additiva (\mathcal{L} a meno di $\dot{f}(t)$)

Teo: (Liouville) (+dim)

Il flusso hamiltoniano conserva il volume nello spazio delle fasi, cioè $\forall \mathcal{D} \subset \Gamma, |\mathcal{D}_t| = |\mathcal{D}|$

dove $\mathcal{D}_t := \{(\bar{q}(t), \bar{p}(t)) \mid \exists (\bar{q}_0, \bar{p}_0) \in \mathcal{D} \text{ e } (\bar{q}(0), \bar{p}(0)) = (\bar{q}_0, \bar{p}_0)\}$

Oss: Qualunque sistema dinamico $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}; t)$ conserva il volume se \bar{f} è a divergenza nulla

Teo: (Eterno ritorno di Poincarè) (+dim)

Sia $\bar{x}(t)$ un flusso Hamiltoniano t.c. $\bar{x}(\cdot; t) : \Omega \rightarrow \Omega$ con $\Omega \subset \Gamma$ compatto.

Allora $\forall B \subset \Omega$ palla aperta e $\forall t > 0 \exists \bar{t} > t$ t.c. $B_{\bar{t}} \cap B \neq \emptyset$

Cor: $\forall \bar{x}_0 \in \mathcal{D}$ la traiettoria deve tornare in \mathcal{D} infinite volte (a meno di un insieme a misura nulla) (+dim)

Oss: Non esistono equilibri asintoticamente stabili

Esempio: Dialetto di Maxwell

7 Esempi di sistemi meccanici

7.1 Moti rigidi liberi

Prop: Dato un corpo rigido con punto fisso O, in assenza di forze esterne, $\dot{\bar{K}}'_O = \bar{K}'_O \wedge \bar{\omega}$
con \bar{K}'_O = momento angolare rispetto ad O misurato sul sistema solidale (+dim)

Cor: Usando come sistema solidale quello fissato dagli assi principali di inerzia,

$$\text{le eq del moto prendono la forma delle equazioni di Eulero} \quad \begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

Oss: Se il sistema non è libero, ma sottoposto a forze esterne di momento \bar{M}_0 (E')= $\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + M_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_1\omega_3 + M_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + M_3 \end{cases}$

Prop: Sono integrali primi del moto le quantità: (+dim)

$$\text{Energia } E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 I_j \omega_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{K_j^2}{I_j}$$

$$\text{Momento angolare } |\bar{K}'_0| = \sum_{j=1}^3 K_j^2 = \sum_{j=1}^3 I_j^2 \omega_j^2$$

Prop: I moti si svolgono sull'intersezione dell'ellissoide di inerzia $\bar{K}'_0 \mathbb{I}^{-1} \bar{K}'_0 = 2E$ e la sfera $|\bar{K}'_0|^2 = \text{cost}$

Le **rotazioni stazionarie** sono le soluzioni di (E) in cui $\bar{\omega} = \text{cost}$

Prop: Ogni corpo rigido con punto fisso O in assenza di forze esterne ammette rotazioni stazionarie attorno a ciascun asse di inerzia (+dim)

Vediamo in generale tutti i moti possibili in assenza di forze esterne, dividendo in 3 casi:

1] $I_1 < I_2 < I_3$ con $a_i = \sqrt{2EI_i}$ $K \in [\sqrt{2EI_1}, \sqrt{2EI_3}]$

- $\bar{K} = (0, 0, \pm\sqrt{2EI_1})$ e $\bar{K} = (\pm\sqrt{2EI_3}, 0, 0)$ sono 2 punti antipodali che generano rotazioni stazionarie, dato che le equazioni di Eulero possiamo riscriverle $\dot{\bar{\omega}} = \bar{f}(\bar{\omega})$ allora $\omega = \text{cost} \implies$ punti di equilibrio
- $\bar{K} = (0, \pm\sqrt{2EI_2}, 0)$ e $\bar{K} = (\pm\sqrt{2EI_1}, 0, 0)$ due punti antipodali e due circonferenze che li contengono
- $\pm\sqrt{2EI_1} < |K| < \pm\sqrt{2EI_3}$ per ogni valore di $|K|$ ci sono due curve chiuse in un intorno dei punti antipodali più vicini

2] $I_1 = I_2 < I_3$

- $\bar{K} = (0, 0, \pm\sqrt{2EI_3})$ sono 2 punti antipodali, rotazioni stazionarie
- $\pm\sqrt{2EI_1} < |K| < \pm\sqrt{2EI_3}$ curve chiuse
- $|K| = \sqrt{2EI_1}$ è una circonferenza di punti di equilibrio

Attorno ad ogni asse del piano \hat{e}_1, \hat{e}_2 ci sono rotazioni stazionarie

Prop: Se $I_1 = I_2$ ogni soluzione delle eq di Eulero diversa dalle rotazioni stazionarie è periodica (+dim)

3] $I_1 = I_2 = I_3$

È l'intersezione tra due sfere, che genera una sfera di punti di equilibrio

Teo: Se $I_1 < I_2 < I_3$ le rotazioni stazionarie attorno a \hat{e}_1 e \hat{e}_3 sono stabili, in \hat{e}_2 sono instabili (+dim)

Oss: Invece il moto del corpo rigido risulta sempre instabile, a differenza dei corrispondenti moti di $\bar{\omega}$

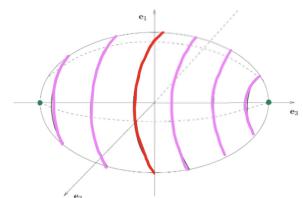
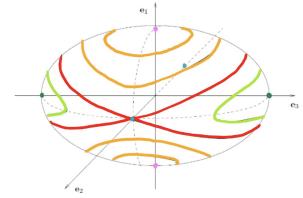
Perché è descritto dalla matrice di rotazione $R(t)$ che con piccole oscillazioni non rimane vicino all'asse

7.2 Meccanica relativa

Prop: Dato un osservatore θ' , la Lagrangiana di un punto materiale diventa:

$$\mathcal{L}(\bar{q}'; \dot{\bar{q}}') = \frac{1}{2} m |\dot{\bar{q}}'|^2 + m \dot{\bar{q}}' \cdot \bar{\omega} \wedge \bar{q}' + \frac{1}{2} m |\bar{\omega} \wedge \bar{q}'|^2 - m \bar{a}_{O'} \cdot \bar{q}' - U(\bar{q}') \text{ con } \bar{\omega} \text{ la vel angolare di } \theta' \quad (+\text{dim})$$

Esempio: Pendolo di Foucault



8 Meccanica dei Continui

8.1 Deformazioni

DEF. La **Configurazione di riferimento** $\mathcal{C}^* \subset \mathbb{R}^3$ di un corpo continuo (sistema meccanico continuo) è la regione dello spazio occupata dal corpo

Oss: Assumeremo sempre che $\partial\mathcal{C}^*$ sia sufficientemente regolare e che $\exists \rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ **densità di massa** una funzione integrabile t.c. la massa contenuta in $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ sia $m(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \rho(\bar{x}; t) d\bar{x}$

DEF. Una **deformazione** è un diffeomorfismo (C^1 invertibile con inversa C^1) $\bar{\chi} : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}$ che individua lo spostamento dei punti materiali del corpo. Chiameremo **deformazione inversa** $\bar{\Pi} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$ $\bar{\Pi} = \bar{\chi}^{-1}$

Oss: Le richieste sulle deformazioni derivano da ipotesi fisiche:

- $\bar{\chi} \in C^1$ perché la deformazione non può generare discontinuità (fratture)
- $\bar{\chi}$ iniettiva perché non ci può essere sovrapposizione tra due punti materiali

DEF. Lo **spostamento** del punto materiale \bar{x} è dato da $\bar{u}(\bar{x}) = \bar{\chi}(\bar{x}) - \bar{x}$ e vale $\bar{u} = \bar{x} - \bar{\Pi}(\bar{x})$

DEF. Dato uno spazio vettoriale V , un tensore di ordine n su V è un'applicazione multilineare: $V^n \rightarrow \mathbb{R}$

Il **gradiente di deformazione** è il tensore di secondo ordine dato dal differenziale di $\bar{\chi}$

ovvero la trasformazione lineare $d\bar{\chi} : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $(d\bar{\chi})_{jk} = \frac{\partial \chi_j}{\partial x_k}$

Oss: Si ha quindi $\bar{\chi}(\bar{x}^* + \bar{h}) = \bar{\chi}(\bar{x}^*) + d\bar{\chi}(\bar{x}^*)\bar{h} + o(\bar{h})$ per $\bar{h} \rightarrow \bar{0}$

Oss: Richiederemo sempre che $J(\bar{x}^*) := \det(d\bar{\chi})(\bar{x}^*) > 0 \forall \bar{x}^* \in \mathcal{C}$

Oss: È immediato dimostrare che $d\bar{\Pi}(\bar{x}) = (d\bar{\chi})^{-1}(\bar{x})$

DEF. Una deformazione è **omogenea** se è t.c. $d\bar{\chi} = D = \text{costante}$ e $\bar{\chi}(\bar{x}^*) = \bar{\chi}(\bar{y}^*) + D(\bar{x}^* - \bar{y}^*)$

Esempi di deformazioni omogenee:

- Traslazione: $D = \mathcal{I}$ $\bar{\chi}(\bar{x}^*) = \bar{x}^* + \bar{u}$
- Deformazione con punto fisso, se esiste $\bar{z}^* \in \mathcal{C}^*$ t.c. $\bar{\chi}(\bar{z}^*) = \bar{z}^*$ $\bar{\chi}(\bar{x}^*) = \bar{z}^* + D(\bar{x}^* - \bar{z}^*)$
- Rototraslazione: $D = R \in O_3$ (R è rotazione) $\bar{\chi}(\bar{x}^*) = \bar{\chi}(\bar{y}^*) + R(\bar{x}^* - \bar{y}^*)$
- Rotazione è una rototraslazione con un punto fisso $\bar{\chi}(\bar{x}^*) = \bar{z}^* + R(\bar{x}^* - \bar{z}^*)$
- Deformazione pura: $D \in L_{sym}^+(\mathbb{R}^3)$ (operatori lineari simmetrici positivi)
- Stiramento di intensità $\lambda \in \mathbb{R}^+$ nella direzione \hat{e} è una deformazione pura $\bar{\chi}(\bar{x}^*) = \bar{x}^* + (\lambda - 1)[(\bar{x}^* - \bar{y}^*) \cdot \hat{e}] \hat{e}$

Prop: Ogni deformazione omogenea $\bar{\chi}$ è ottenibile come combinazione lineare di

una deformazione con punto fisso e una traslazione (+dim)

Oss: Data una rotazione di asse \hat{e} e punto fisso \bar{z}^* , i punti della retta $\bar{x}^* = \lambda \hat{e} + \bar{z}^*$ sono lasciati fissi

Prop: Date due deformazioni $\bar{\chi}_1$ e $\bar{\chi}_2$, il gradiente della composta è: $d(\bar{\chi}_1 \circ \bar{\chi}_2) = d\bar{\chi}_1 \cdot d\bar{\chi}_2$ (+dim)

Lemma: (decomposizione polare) (+dim)

Per ogni $D \in L^+(\mathbb{R})$, $\exists! R \in O_3$ e $U, V \in L_{sym}^+(\mathbb{R}^3)$ t.c. $D = RU = VR$

Prop: Ogni deformazione omogenea con gradiente D è scrivibile come $\bar{\chi} = \bar{\rho} \circ \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 \circ \bar{\rho}$

dove $\bar{\rho}$ è una rotazione di gradiente R e $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ sono delle deformazioni pure di gradienti U e V (+dim)

Oss: Per definizione e linearità del differenziale ogni deformazione è almeno localmente omogenea

e si può approssimare con una deformazione omogenea: $\bar{\chi}(\bar{x}^* + \bar{h}) = \bar{\chi}(\bar{x}^*) + d\bar{\chi}(\bar{x}^*)\bar{h} + o(\bar{h})$

DEF. Data una deformazione $\bar{\chi}$ i **tensori di Cauchy-Green** destro e sinistro sono rispettivamente:

$$B := d\bar{\chi} \cdot d\bar{\chi}^T \quad C := d\bar{\chi}^T \cdot d\bar{\chi}$$

Oss: $B, C \in L_{sym}^+(\mathbb{R}^3)$ e data la decomposizione polare $d\bar{\chi} = RU = VR$ si ha:

- $B = U^2 \quad C = V^2 \quad C = R^T BR$ - autovalori di B = autovalori di C

- $I_j(B) = I_j(C) \quad \forall j \in \{1, 2, 3\}$ dove I_j sono gli invarianti ortogonali

DEF. Un **invariante ortogonale** è una funzione $f : L(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $f(RA) = f(A) \quad \forall R \in O_3$ e $\forall A \in L(\mathbb{R}^3)$

Prop: Gli invarianti ortogonali sono le funzioni: $I_1(A) := \text{tr}(A) \quad I_2(A) := \frac{1}{2}[\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)] \quad I_3(A) := \det(A)$

Oss: Il polinomio caratteristico di un tensore in $L(\mathbb{R}^3)$ si esprime come $p(\lambda) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$

e in effetti per ogni $A \in L(\mathbb{R}^3)$ $-A^3 + I_1(A)A^2 - I_2(A)A + I_3(A) = 0$

Oss: Il gradiente di deformazione può essere pensato come trasformazione: $\mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C} \quad dx_i = \sum_{j=1}^3 (d\bar{\chi})_{ij} dx_j^*$

Oss: Allo stesso modo $d\bar{\chi}^T$ è applicazione lineare: $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^*$ e quindi i tensori $B : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ e $C : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$

DEF. Data una curva $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^*$ t.c. $\begin{cases} \bar{\gamma}(s^*) = \bar{x}^* \\ \bar{\gamma}'(s^*) = \hat{e} \end{cases}$ costruiamo una curva deformata $\begin{cases} \tilde{\gamma}(s) = \bar{\chi}(\bar{\gamma}(s)) \\ \tilde{\gamma}'(s) = D\bar{\gamma}'(s^*) = D\hat{e} \end{cases}$

Lo **stiramento** in direzione \hat{e} è $\delta(\hat{e}) := \frac{ds}{ds} = |D\hat{e}|$ e la **deformazione longitudinale** è $\lambda(\hat{e}) := \delta(\hat{e}) - 1$

Oss: $\delta^2(\hat{e}) = \hat{e}(C\hat{e}) = \hat{e}'B\hat{e}'$

Prop: (deformazione tra due punti vicini) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|\bar{\chi}(\bar{x}^* + \varepsilon\hat{e})|^2}{\varepsilon^2} = \hat{e}C\hat{e}$ (+dim)

DEF. Date due curve $\bar{\gamma}_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}^*$ e posti $\begin{cases} \bar{\gamma}_i(s^*) = \bar{x}^* \\ \bar{\gamma}'_i(s^*) = \hat{e}_i \end{cases} \quad \bar{\chi}'(\bar{\gamma}_i(s^*)) = d\bar{\chi} \cdot \hat{e}_i$

L'**angolo di scorrimento** è la quantità $\gamma(\hat{e}_1, \hat{e}_2) := \frac{\pi}{2} - \theta(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ dove θ è l'angolo formato tra $d\bar{\chi}\hat{e}_1$ e $d\bar{\chi}\hat{e}_2$

Prop: $\text{sen}(\gamma(\hat{e}_1, \hat{e}_2)) = \frac{\hat{e}_1 C \hat{e}_2}{\sqrt{\hat{e}_1 C \hat{e}_1} \sqrt{\hat{e}_2 C \hat{e}_2}}$ (+dim)

Oss: Le componenti di C diventeranno $C_{ii} = \delta_i^2 \quad C_{ij} = \delta_i \delta_j \text{sen}(\gamma_{ij})$

Prop: Data una deformazione $\bar{\chi}$, $\forall \bar{x}^* \in \mathcal{C}^*$ \exists terna ortonormale $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ t.c. C è diagonale in tale terna $C = \text{diag}\{\tilde{\delta}_1^2, \tilde{\delta}_2^2, \tilde{\delta}_3^2\}$ e $\bar{\chi}$ rispetto alla terna è data da 3 stiramenti lungo gli assi, che individuano le direzioni principali di deformazione, inoltre rispetto a tale base $\tilde{\delta}_i$ sono detti stiramenti principali

Oss: Siano $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{C}^*$ un insieme misurabile e $\mathcal{D} = \{\bar{x} \in \mathcal{C} \mid \exists \bar{x}^* \in \mathcal{D}^*, \bar{x} = \bar{\chi}(\bar{x}^*)\}$ l'insieme

$$\text{trasformato, allora } |\mathcal{D}| = \int_{\mathcal{D}^*} \det(d\bar{\chi}(\bar{x}^*)) d\bar{x}^*$$

Oss: Le deformazioni che non cambiano i volumi (isocore) sono tutte e sole quelle con $\det(d\bar{\chi}) = 1 \forall \bar{x}^* \in \mathcal{C}^*$

Oss: Dato un campo scalare $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vale: $\int_{\mathcal{D}} \Phi(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{\mathcal{D}^*} \det(d\bar{\chi}(\bar{x}^*)) \Phi(\bar{\chi}(\bar{x}^*)) d\bar{x}^*$

DEF. Data una **deformazione infinitesima**, cioè t.c. $\bar{u}(\bar{x}^*) = \bar{\chi}(\bar{x}^*) - \bar{x}^* \ll 1$

$$\text{il gradiente di deformazione infinitesimo è } E := \frac{1}{2}(d\bar{u} + d\bar{u}^T) = \frac{1}{2}(d\bar{\chi} + d\bar{\chi}^T) - \mathbf{1}$$

Oss: Data una deformazione infinitesima, abbiamo:

- $C = \mathbf{1} + 2E + O(\varepsilon^2)$
- $U = \mathbf{1} + E + O(\varepsilon^2)$
- $R = \mathbf{1} + d\bar{u} - E + O(\varepsilon^2) = \mathbf{1} + W + O(\varepsilon^2)$ dove $W := \frac{1}{2}(d\bar{u} - d\bar{u}^T)$ è la componente antisimmetrica di $d\bar{u}$

Oss: Dato uno stiramento infinitesimo in direzione \hat{e} , abbiamo:

- $\delta(\hat{e}) = 1 + \hat{e}E\hat{e} + O(\varepsilon^2)$
- $\lambda(\hat{e}) = \hat{e}E\hat{e}$
- $\text{sen}[\gamma(\hat{e}_i, \hat{e}_j)] = 2\hat{e}_i E \hat{e}_j + O(\varepsilon^2)$
- Per quanto riguarda la variazione di volume $d\bar{x} = \det(d\bar{\chi}) d\bar{x}^* \implies d\bar{x} = (1 + \text{Tr}E + O(\varepsilon^2)) d\bar{x}^*$

8.2 Moti

DEF. La configurazione attuale è $\mathcal{C}_t := \bar{\chi}(\mathcal{C}^*; t)$

Un **moto** di un corpo continuo è una famiglia di deformazioni: $\{\bar{\chi}(\cdot, t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, $\bar{\chi}(\cdot, \cdot) : \mathcal{C}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$

La **traiettoria** di un punto materiale \bar{x}^* è $\bar{x}(t) := \bar{\chi}(\bar{x}^*; t)$

La traiettoria del sistema è $\mathcal{C}_{\bar{x}} = \{(\bar{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid \exists \bar{x}^* \in \mathcal{C}^*, \bar{x} = \bar{\chi}(\bar{x}^*, t)\} = \{\mathcal{C}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$

La velocità e l'accelerazione di \bar{x}^* al tempo t sono: $\dot{\bar{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\chi}(\bar{x}^*; t)$ $\ddot{\bar{x}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\chi}(\bar{x}^*; t)$

Oss: Assumeremo sempre che $\bar{\chi}$ sia C^2 nei suoi argomenti

Oss: L'invertibilità di $\bar{\chi}$ garantisce che $\forall t \exists \bar{\Pi} : \mathcal{C}_t \rightarrow \mathcal{C}^*$ t.c. $\bar{\Pi}(\bar{\chi}(\bar{x}^*; t); t) = \bar{x}^*$ e $\bar{\chi}(\bar{\Pi}(\bar{x}; t); t) = \bar{x}$

Oss: Posso vedere lo spostamento in due modi:

- 1) Descrizione Lagrangiana o materiale, prendendo i punti e studiandone l'evoluzione nel tempo
 - 2) Descrizione Euleriana o spaziale, fissando il tempo e studiando velocità e accelerazione per ogni punto
- $$\bar{v}(\bar{x}; t) = \dot{\bar{x}}(\bar{\Pi}(\bar{x}; t), t) \quad \bar{a}(\bar{x}; t) = \ddot{\bar{x}}(\bar{\Pi}(\bar{x}; t), t)$$

Campo spaziale $\bar{\Phi} : \mathcal{C}_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\bar{\Phi}(\bar{x}; t)$ Campo materiale $\bar{\Psi} : \mathcal{C}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\bar{\Psi}(\bar{x}^*; t)$

Oss: È sempre possibile passare da un campo all'altro: $\bar{\Phi}_m(\bar{x}^*; t) := \bar{\Phi}(\bar{\chi}(\bar{x}^*; t), t)$ $\bar{\Psi}_s(\bar{x}; t) := \bar{\Psi}(\bar{\Pi}(\bar{x}; t); t)$

Prop: Indicando con $\dot{\bar{x}}, \ddot{\bar{x}}$ e \bar{v}, \bar{a} rispettivamente i campi materiali e spaziali di velocità e accelerazione

$$\text{si ha, } d_* \dot{\bar{x}} = d\bar{v} \quad d_* \ddot{\bar{x}} = d\ddot{\bar{x}} \quad d_* \bar{v} = d\bar{a} \quad d_* \bar{a} = d\ddot{\bar{x}} \quad (+\dim)$$

Oss: Dove i gradienti d e d_* sono calcolati rispetto a coordinate diverse, rispettivamente \bar{x} e \bar{x}^*

$$\text{Oss: Di conseguenza valgono } d\bar{v} = d\dot{\bar{x}}d\bar{x}^{-1} \quad d\bar{a} = d\ddot{\bar{x}}d\bar{x}^{-1}$$

Oss: Posti $(d_* \bar{\Psi})_{ij} = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^*}$ $(d\bar{\Phi})_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$, è ovvio che $d_* \bar{\Psi} = d\bar{\Psi}_s d_* \bar{x}$ e $d\bar{\Phi} = d_* \bar{\Phi}_m d\bar{x}^{-1}$

Oss: Analogamente per divergenze $\nabla_* \cdot \bar{\Psi} := \text{tr}(d_* \bar{\Psi})$ $\nabla \cdot \bar{\Phi} := \text{tr}(d\bar{\Phi})$

Oss: Per i campi spaziali vale $\dot{\bar{\Phi}}(\bar{x}; t) = d\bar{\Phi} \cdot \bar{v} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}$ e in particolare per l'accelerazione $\bar{a}(\bar{x}; t) = d\bar{v} \cdot \bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$

DEF. Un campo spaziale è **stazionario** se $\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = 0$ per $t \in [t_0, t_1]$

Oss: Associate alla doppia descrizione materiale e spaziale del moto, abbiamo una doppia tipologia di curve

- Linee di corrente che descrivono le traiettorie dei singoli punti materiali $\bar{x}(t) = \bar{\chi}(\bar{x}^*; t)$
- Linee di flusso che fissato il tempo, sono tangenti in ogni punto al campo di velocità $\bar{x}'(s) = \bar{v}(\bar{x}(s); t)$

Oss: Se il campo spaziale delle velocità è stazionario allora le linee di flusso coincidono con le linee di corrente

DEF. Dato un campo spaziale di velocità, il suo gradiente si decomponne $d\bar{v} = D + W$

$$D = \frac{1}{2}(d\bar{v} + d\bar{v}^t)$$
 è il tensore di **deformazione di velocità** e $W = \frac{1}{2}(d\bar{v} - d\bar{v}^t)$ è il tensore di **vorticità**

Oss: Poiché W è antisimmetrica, $\exists \bar{w} \in \mathbb{R}^3$ (vorticità) t.c. $\forall \bar{u} \in \mathbb{R}^3$ $W\bar{u} = \frac{1}{2}\bar{w} \wedge \bar{u}$ $\bar{w} = \nabla \wedge \bar{v}$

Teo: Il moto di un campo continuo è rigido $\iff D = 0$ ($+\dim$)

Prop: Fissato un versore \hat{e} si ha $\frac{\dot{\delta}(t)}{\delta(t)} = \hat{e} D \hat{e}$ dove $\dot{\delta}(t)$ è la velocità di stiramento in direzione \hat{e} ($+\dim$)

Prop: Dati due versori \hat{e}_1, \hat{e}_2 perpendicolari si ha $\dot{\theta}(t) = -2\hat{e}_1 D \hat{e}_2$ dove $\dot{\theta}$ è la velocità di scorrimento ($+\dim$)

Prop: Sia $\mathcal{D}_t \in \mathcal{C}_t$ misurabile, allora $\frac{d}{dt} |\mathcal{D}_t| = \int_{\mathcal{D}_t} \nabla \cdot \bar{v} \, d\bar{x}$ ($+\dim$)

Lemma: Sia $T(t)$ un tensore derivabile e invertibile $\forall t \in \mathbb{R}$ allora $(\det \dot{T}(t)) = \det T \cdot \text{tr}(\dot{T}T^{-1})$ ($+\dim$)

Oss: Il volume di un continuo è conservato (incomprimibilità) $\Leftrightarrow \nabla \cdot \bar{v} = 0$

Quindi $D=0 \Leftrightarrow$ continuo rigido e $\text{tr}D = 0 \Leftrightarrow$ incomprimibilità

Teo (Trasporto di Reynolds) ($+\dim$)

Siano $\bar{\Phi}(\bar{x}, t)$ un campo spaziale regolare e $\mathcal{D}_t \subset \mathcal{C}_t$ con bordo regolare, allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \bar{\Phi}(\bar{x}, t) d\bar{x} = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(\bar{x}, t) d\bar{x} + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \bar{v} \cdot \hat{n} \bar{\Phi}(\bar{x}, t) d\bar{\sigma} \quad \text{dove } \hat{n} \text{ è la normale uscente da } \mathcal{D}_t$$

8.3 Leggi di bilancio

Dato un corpo continuo, esistono misurabili le funzioni massa:

$$\exists \rho^* : \mathcal{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad m(\mathcal{D}^*) = \int_{\mathcal{D}^*} \rho^*(\bar{x}^*) d\bar{x}^*$$

$$\exists \rho(\bar{x}, t) : \mathcal{C}_t \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad m(\mathcal{D}_t) = \int_{\mathcal{D}_t} \rho(\bar{x}, t) d\bar{x}$$

Prop: La massa contenuta in ciascuna parte del continuo è conservata se e solo se

$$\rho_t = \det(d\bar{\chi})\rho_m \quad \text{dove } \rho_m \text{ è il campo materiale associato a } \rho \quad (+\dim)$$

Lemma (di localizzazione): $(+\dim)$

Sia $\bar{\Phi} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuo t.c. $\int_{\mathcal{D}} \bar{\Phi}(\bar{x}) d\bar{x} = \bar{0} \quad \forall \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ misurabile $\implies \bar{\Phi} = 0$ in \mathcal{C}

Teo: La massa di un continuo è conservata lungo il moto se e solo se vale l'equazione di continuità

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (1^\circ \text{ legge di bilancio}) \quad (+\dim)$$

Cor: $\forall \bar{\Phi}$ campo spaziale regolare e $\forall \mathcal{D}_t \subset \mathcal{C}_t$ misurabile ho che $\frac{d}{dt} (\int_{\mathcal{D}_t} \rho \bar{\Phi} d\bar{x}) = \int_{\mathcal{D}_t} \rho \frac{d}{dt} \bar{\Phi} d\bar{x} \quad (+\dim)$

Oss: Incomprimibilità $\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \rho = 0$

Quantità meccaniche per un continuo sono: $\bar{Q} = \int_{\mathcal{C}_t} \rho(\bar{x}; t) \bar{v} d\bar{x} \quad \bar{K}_0 = \int_{\mathcal{C}_t} (\bar{x} - \bar{x}_0) \wedge \bar{v} \rho(\bar{x}; t) d\bar{x}$

Forze (esterne):

- di volume se $\exists \bar{f}_v(\bar{x}, t)$ t.c. $\bar{F}(\mathcal{D}_t) = \int_{\mathcal{D}_t} \bar{f}_v(\bar{x}, t) d\bar{x}$
- di superficie se $\exists \bar{f}_s(\bar{x}, t)$ t.c. $\bar{F}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} \bar{f}_s(\bar{x}, t) d\bar{\sigma}$

Forze (interne), ipotesi di Cauchy:

\exists una densità superficiale di forza $\bar{f}_{s,int}(\bar{x}, \hat{n})$ t.c. la forza esercitata da \mathcal{C}_t^+ a \mathcal{C}_t^- sia $\bar{F}_{+-} = \int_{\Sigma} \bar{f}_{s,int}(\bar{x}, \hat{n}(\bar{x})) d\bar{x}$

Teo: (Cauchy) $(+\dim)$

Siano $\bar{\Phi}(\bar{x})$ e $\bar{S}(\bar{x}, \hat{n})$ due campi spaziali continui sui loro argomenti $\bar{x} \in \mathcal{C}_t$ e $\hat{n} \in \mathcal{N}$ t.c.

$$\int_{\mathcal{D}_t} \bar{\Phi}(\bar{x}) d\bar{x} + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \bar{S}(\bar{x}; \hat{n}(\bar{x})) d\bar{\sigma} = 0 \quad \forall \mathcal{D}_t \subset \mathcal{C}_t \quad \text{allora } \exists \text{ tensore } T(\bar{x}) \text{ t.c. } \bar{S}(\bar{x}; \hat{n}) = T(\bar{x}) \hat{n}$$

Oss: Il teorema di Cauchy è una manifestazione del principio di azione e reazione, perché $\bar{S}(\bar{x}; -\hat{n}) = -\bar{S}(\bar{x}; \hat{n})$

Teo: Per ogni continuo, valgono: $(+\dim)$

$$\text{i) } \exists T(\bar{x}; t) \in L(\mathbb{R}^3) \text{ tensore degli sforzi t.c. } \bar{f}_s(\bar{x}; \hat{n}; t) = T(\bar{x}, t) \hat{n}$$

$$\text{ii) I eq indefinita } \operatorname{div} T + \bar{f}_v = \rho \bar{a}$$

$$\text{iii) II eq indefinita } T = T^t$$

Oss: $\operatorname{div} T(\bar{x}; t) := \operatorname{tr}(dT(\bar{x}; t))$

Oss: T deve soddisfare le condizioni al contorno $T(\bar{x}, t) \hat{n}(\bar{x}) = \bar{f}_s(\bar{x}, \hat{n}(\bar{x}), t) \quad \forall \bar{x} \in \partial \mathcal{C}_t$

con f_s la densità di forze esterne agenti su $\partial \mathcal{C}_t$

Oss: $T(\bar{x})$ permette di calcolare la forza agente sulle superfici del corpo passanti per \bar{x}

Oss: Per applicare il teorema di Cauchy abbiamo assunto che ρ, \bar{a}, \bar{f}_v e \bar{f}_s siano campi continui

Oss: T simmetrica $\implies \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j \wedge (T \hat{e}_j) = \bar{0}$

Oss: La distribuzione superficiale di forza agente su Σ è $T(\bar{x})\hat{n}(\bar{x})$ con \hat{n} normale uscente da Σ
ma non è detto che sia $\parallel \hat{n}(\bar{x})$

Def. Si diranno sforzo normale $\bar{S}_n = (\hat{n}T\hat{n})\hat{n}$ e sforzo di taglio $\bar{S}_\tau = T\hat{n} - \bar{S}_n$

Oss: $\forall \bar{x} \in \mathcal{C}_t \exists \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ t.c. le superfici $\perp \hat{e}_j$ in \bar{x} sono soggette solo a sforzi normali

Gli \hat{e}_j sono gli autovettori di $T(\bar{x})$ e sono detti direzioni principali di sforzo
i valori corrispondenti (autovalori di $T(\bar{x})$) sono detti sforzi principali

Oss: Quindi le equazioni del moto per un continuo sono

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot d\bar{v} \right) = \bar{f}_v + \operatorname{div} T \\ \sum_{j=1}^3 \hat{e}_j \wedge (T\hat{e}_j) = \bar{0} \end{cases}$$

Vanno aggiunte le condizioni iniziali: $\rho(\bar{x}, 0) = \rho_0(\bar{x}) \quad \bar{v}(\bar{x}, 0) = \bar{v}_0(\bar{x})$

e quelle al contorno: $T(\bar{x}, t)\hat{n}(\bar{x}, t) = \bar{f}_{s,ext}(\bar{x}, t) \quad \forall \bar{x} \in \partial \mathcal{C}_t$

Oss: In totale avrà 10 incognite, ma solo 4 equazioni

8.4 Classi costitutive

Oss: È necessario specificare le proprietà del continuo, ovvero fornire relazioni costitutive della risposta
del continuo a sollecitazioni esterne e quindi la dipendenza di T da ρ e \bar{v}

Oss: Delle possibili restrizioni possono essere:

- invarianza rispetto al cambio di osservatore
- simmetrie del continuo
- vincoli interni

Def. Un **fluido** è un continuo t.c. all'equilibrio lo sforzo di taglio è sempre nullo $\bar{S}_\tau = \bar{0}$

Per ogni fluido all'equilibrio \exists campo spaziale $p(\bar{x})$ chiamato di **pressione idrostatica** t.c. $T(\bar{x}) = -p(\bar{x})\mathbb{1}$

Un **fluido perfetto** è un continuo t.c. $\exists p(\bar{x}, t)$ campo di pressione t.c. $T(\bar{x}, t) = -p(\bar{x}, t)\mathbb{1}$

Oss: Per un fluido all'equilibrio il campo delle velocità è stazionario $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \bar{0}$

Prop: Un fluido è all'equilibrio $\iff \nabla \wedge \bar{f}_v = \bar{0}$, in tal caso le eq indefinite si riducono alle

equazioni di Stevino:
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 & (+\text{dim}) \\ \nabla p = \bar{f}_v \end{cases}$$

Oss: Rimangono 5 incognite e 4 equazioni, quindi per chiudere le eq del moto di un fluido all'equilibrio

È necessario aggiungere una relazione costitutiva $\Phi(\rho, p) = 0$

- $p = p(\rho)$ e $\operatorname{div}(v) = 0$, cioè p costante e fluido incomprimibile
- $p = K\rho$ gas perfetto isotermo
- $p = K\rho^\gamma$ gas perfetto adiabatico

Oss: Per un fluido stazionario la condizione al contorno diventa $-p(\bar{x})\hat{n}(\bar{x}) = \bar{f}_{s,ext}(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in \partial \mathcal{C}_t$

Oss: Per fluidi perfetti le condizioni al contorno diventano $\bar{v} \cdot \hat{n} = 0 \quad \forall \bar{x} \in \partial \mathcal{C}_t$

Oss: Per i fluidi perfetti le equazioni sono

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot d\bar{v} \right) + \nabla p = \bar{f}_v \end{cases}$$

Oss: Se inoltre i fluidi perfetti sono incompressibili e omogenei \implies densità costante $\rho(\bar{x}, t) = \rho = \text{cost}$

le equazioni diventano le eq di Eulero

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot d\bar{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \frac{\bar{f}_v}{\rho} \end{cases} \quad \bar{f} \text{ è la forza per unità di massa}$$

Teo: (Bernoulli) (+dim)

Dato un fluido perfetto, incompressibile e omogeneo se il campo \bar{v} è stazionario e le forze di volume sono conservative, allora la quantità $E = \frac{1}{2}|\bar{v}|^2 + \frac{p}{\rho} + \frac{U}{\rho}$ è costante lungo le linee di flusso

Lemma: $\bar{v} \cdot d\bar{v} = \frac{1}{2}\nabla|\bar{v}|^2 - \bar{v} \wedge (\nabla \wedge \bar{v})$ (+dim)

DEF. Fluido **newtoniano**, o **viscoso**, è un continuo con relazione costitutiva: $T = -p\mathbb{1} + \lambda \operatorname{div}(\bar{v})\mathbb{1} + 2\mu D$
dove $\lambda, \mu > 0$ sono i coefficienti di viscosità e D è il tensore di velocità di deformazione $D = \frac{1}{2}(d\bar{v} + d\bar{v}^t)$

Prop: Le equazioni del moto di un fluido newtoniano sono le equazioni di Navier-Stokes (+dim)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot d\bar{v} \right) - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(\bar{v}) - \mu \Delta \bar{v} + \nabla p = \bar{f}_v \end{cases}$$

Oss: Le condizioni al contorno tipiche sono "no slip", cioè la velocità relativa tra fluido e contenitore è nulla