关于调和级数的部分和的推导及证明

陈昌维, 杨炜明 *

(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘 要: 中世纪后期, 数学家 Oresme 证明了所有调和级数都是发散的, 但是调和级数的拉马努金和存在, 且为 Euler 常数. Euler 在 1734 年利用 Newton 的成果, 首先给出了调和级数的部分和的表达式. 通过分析 Ross,S.M. 对经典概率论问题 "优惠券收集问题" 的解决方法, 得到了调和级数的部分和的不同表达式, 并运用数学归纳法, 变量代换证明了表达式的正确性.

关键词: 调和级数; 部分和; 优惠券收集问题; 数学归纳法

1 引言

众所周知, 调和级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}+\cdots$$

是发散的. 对于调和级数的部分和 $\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$ 的估计, Euler 曾得著名公式

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\ln N+\gamma+\varepsilon_N$$

其中 γ 是 Euler 常数, $\varepsilon_N\to 0(N\to+\infty)$. 特别地, Euler 在 1734 年获得了调和级数的部分和的值

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}=\ln(N+1)+\gamma$$

其中 γ 为 Euler 常数, 约为 0.5772156649. 对于 Euler 得到的著名公式存在不足之处, 没有给出无穷小量 ε_N 的估计. 刘诚等人 [1] 针对此不足之处进行了讨论, 对公式进行了进一步的推广, 给出了余项 ε_N 的估计

$$\varepsilon_N=\frac{1}{2N}-\sum_{k=N}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\int_{k}^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)$$

包那 [2] 用初等方法证明了

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=C+\ln N+\frac{1}{2N}-\frac{1}{12N^2}+\frac{1}{120N^4}+o(\frac{1}{N^6})$$

收稿日期: 2020-03-02
资助项目: 重庆市教委科研基金 (KJQN201900806); 重庆市自然科学基金 (cstc2018jcyjAX0823)
* 通信作者

吴福朝[3] 利用 Bernoulli 数给出了可以精确到任意 $o(\frac{1}{n^{2m}})$ 阶的 Euler 公式, 即对任意自然数 m, 总有

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=C+\ln N+\frac{1}{2N}-\sum_{i=1}^{m}\frac{B_{2i}}{2i}\cdot\frac{1}{N^{2i}}+o(\frac{1}{N^{2(m+1)}})$$

其中, $B_{2i}(i=1,2,3,\cdots)$ 为 Bernoulli 数, C 为 buler 常数.

本文通过分析 Ross,S.M. 对经典概率论问题[4] "优惠券收集问题" 的解决方法, 得到了调和级数的部分和的表达式, 并运用数学归纳法, 变量代换证明了表达式的正确性.

2 优惠券收集问题和调和级数的部分和

2.1 优惠券收集问题

假设市面上有 N 种优惠券, 每次收集一张, 且每种优惠券都以相同的可能性被收集到, 假定各次收集是相互独立的. 记 X 表示收集到全套优惠券时所收集的优惠券的总张数, X_i 为首次收集到 $i-1$ 种优惠券之后开始到首次收集到第 i 种优惠券所需要收集的张数, 其中 $i=1,2,\cdots,N$, $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 相互独立, 则有

$$X=\sum_{i=1}^{N}X_i$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N}E(X_i)$$

这里考虑两种情况.

情况 1 等可能收集优惠券. 已经收集到 $i-1$ 种优惠券情况下, 下一次收集到一张新的优惠券的概率为

$$1-\frac{i-1}{N}$$

于是有

$$P(X_i=k)=\left(\frac{i-1}{N}\right)^{k-1}\left(1-\frac{i-1}{N}\right),k\geq 1$$

易知

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N}\frac{N}{N-i+1}=N\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\tag{1}$$

情况 2 考虑每种优惠券被收集到的可能性不等的情形. 对于上述讨论的问题将优惠券 i 被收集到的概率记为 p_i, 其中

$$\sum_{i=1}^{N}p_i=1$$

记 Y_i 表示收集到第 i 种优惠券时所收集到的优惠券张数, 其中 $i=1,2,\cdots,N$. 则

$$X=\max_{i=1,\cdots,N}Y_i$$

由极大极小恒等式, 我们有

$$X=\sum_{i}Y_i-\sum_{1\leq i<j\leq N}\min(Y_i,Y_j)+\cdots+(-1)^{N+1}\min(Y_1,\cdots,Y_N)$$

因此

$$E(X)=\sum_{i}E(Y_i)-\sum_{1\le i<j\le N}E\left[\min(Y_i,Y_j)\right]+\cdots+(-1)^{N+1}E\left[\min(Y_1,\cdots,Y_N)\right] \tag{2}$$

根据几何分布的性质可知

$$\begin{aligned}&E(Y_i)=\tfrac{1}{p_i}\\&E\left[\min(Y_i,Y_j)\right]=\tfrac{1}{p_i+p_j}\\&E\left[\min(Y_i,Y_j,Y_k)\right]=\tfrac{1}{p_i+p_j+p_k}\end{aligned}$$

将上式代入 (2) 式有

$$E(X)=\sum_{i}\frac{1}{p_i}-\sum_{1\le i<j\le N}\frac{1}{p_i+p_j}+\cdots+(-1)^{N+1}\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_N} \tag{3}$$

注意到

$$\int_0^{+\infty}e^{-px}dx=\frac{1}{p}$$

并利用恒等式

$$1-\prod_{i=1}^{N}\left(1-\mathrm{e}^{-p_ix}\right)=\sum_{i}\mathrm{e}^{-p_ix}-\sum_{i<j}\mathrm{e}^{-(p_i+p_j)x}+\cdots+(-1)^{N+1}\mathrm{e}^{-(p_1+p_2+\cdots+p_N)x}$$

可得到

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\left[1-\prod_{i=1}^{N}\left(1-\mathrm{e}^{-p_ix}\right)\right]\mathrm{d}x \tag{4}$$

2.2 调和级数的部分和

对于上述两种情况, 当

$$p_1=p_2=\cdots=p_N=\frac{1}{N}$$

则根据式 (1) 和式 (3), 有

$$\begin{aligned}E(X)=&N\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)\\=&N\left[C_N^1-\frac{1}{2}C_N^2+\frac{1}{3}C_N^3+\cdots+(-1)^{N+1}\frac{1}{N}C_N^N\right]\end{aligned}$$

即有

$$E(X)=N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=N\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_N^k$$

因此可得

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_N^k \tag{5}$$

然而根据式 (1) 和式 (4), 有

$$E(X)=N\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N}\right)=\int_0^{+\infty}\left[1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{N}x}\right)^N\right]\mathrm{d}x$$

即

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\frac{1}{N}\int_0^{+\infty}\left[1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{N}x}\right)^N\right]\mathrm{d}x \tag{6}$$

3 调和级数的部分和的表达式的证明

式 (5) 的证明. 易知, 当 $N=1,2$ 时, 等式恒成立. 假设 $N=n$ 时等式成立, 则有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k$$

当 $N=n+1$ 时, 利用组合恒等式

$$C_{n+1}^k=C_n^k+C_n^{k-1}$$

有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n+1}^k&=\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k+\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^{k-1}\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+1}^k\\&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k+\frac{1}{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

其中 $C_n^{n+1}=0$, 由于 $(1-1)^{n+1}=C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+C_{n+1}^2-\cdots+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1}C_{n+1}^k=C_{n+1}^1-C_{n+1}^2+\cdots+(-1)^{n+2}C_{n+1}^{n+1}=C_{n+1}^0=1$$

即对于 $N=n+1$ 等式也成立.

式 (6) 的证明. 令

$$e^{-\frac{1}{N}x}=y$$

则

$$\int_0^{+\infty}\left[1-\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{N}x}\right)^N\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left[1-(1-y)^N\right]\frac{N}{y}\mathrm{d}y$$

再令 $1-y=t$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1\left[1-(1-y)^N\right]\frac{N}{y}\mathrm{d}y&=\int_0^1\left(1-t^N\right)\frac{N}{1-t}\mathrm{d}t=N\int_0^1\frac{1-t^N}{1-t}\mathrm{d}t\\&=N\int_0^1(1+t+\cdots+t^{N-2}+t^{N-1})\mathrm{d}t\\&=N(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N})\end{aligned}$$

其中 $1-t^N=(1-t)(1+t+\cdots+t^{N-2}+t^{N-1})$.

综上, 可以得到调和级数的部分和的表达式

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_N^k$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\frac{1}{N}\int_{0}^{+\infty}\left[1-\left(1-e^{-\frac{1}{N}x}\right)^{N}\right]\mathrm{d}x$$

参考文献

[1] 刘诚, 何国柱. 关于调和级数的部分和问题的讨论 [J]. 中国西部科技, 2009, 8(10): 69-74.

[2] 包那. Euler 常数与 Euler 公式 [J]. 数学的实践与认识, 1988, 4: 53-62.

[3] 吴福朝. 关于调和级数部分和的估计 [J]. 数学的实践与认识, 1992, 32(4): 80-82.

[4] (美) 罗斯 (Ross,S.M.). 概率论基础教程 [M]. 第 9 版童行伟梁宝生译, 北京: 机械工业出版社, 2014. 1(2017.10 重印)

Derivation and Proof of Partial sum of Harmonic Series

CHEN Chang-wei, YANG Wei-ming

(School of Mathematics and Statistics Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In the late Middle Ages, the mathematician oresmee proved that all harmonic seri-es are divergent, but the ramanugin sum of harmonic series exists and is Euler constant. In 1734, Euler first gave the expression of the partial sum of harmonic series by using Newton's results. In this paper, by analyzing Ross, S. M.'s solution to the classical probability problem "coupon collection problem", different expressions of the partial sum of harmonic series are obtained, and the correctness of the expressions is proved by mathematical induction and variable substitution.

Keywords: harmonic series; partial sum; coupon collection questions; mathematical induction