dad cuadrada del costado, determine la función de costo $C(r, h)$, donde r es el radio de la lata y h es su altura.

52. Una caja rectangular cerrada va a construirse con 500 cm^2 de cartón. Exprese el volumen V como una función de la longitud x y el ancho y.

53. Como se muestra en la FIGURA 13.1.23, una tapa cónica descansa sobre la parte superior de un cilindro circular. Si la altura de la tapa es dos tercios de la altura del cilindro, exprese el volumen del sólido como una función de las variables indicadas.

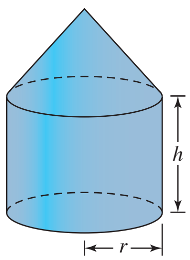


FIGURA 13.1.23 Cilindro con tapa cónica del problema 53

54. A menudo una muestra de tejido es un cilindro que se corta oblicuamente, como se muestra en la FIGURA 13.1.24. Exprese el espesor t del corte como una función de x, y y z.

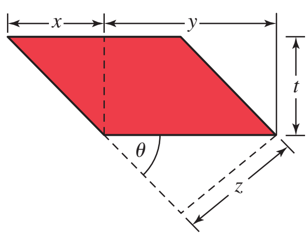


FIGURA 13.1.24 Muestra de tejido del problema 54

55. En medicina a menudo se emplean fórmulas para el área de la superficie (vea el ejemplo 3*b*) para calibrar dosis de fármacos, puesto que se supone que la dosis del fármaco D y el área de la superficie S son directamente proporcionales. La siguiente función simple puede utilizarse para obtener una estimación rápida del área superficial del cuerpo de un humano: $S = 2ht$, donde h es la altura (en cm) y t es la máxima circunferencia de músculo (en cm). Estime el área de la superficie de una persona de 156 cm de altura con una circunferencia de músculo máxima de 50 cm. Estime su propia área superficial.

≡ Proyectos

56. Factor de enfriamiento Durante su investigación del invierno de 1941 en el Antártico, el doctor Paul A. Siple ideó el siguiente modelo matemático para definir el factor de enfriamiento del viento:

$$H(v, T) = \left(10\sqrt{v} - v + 10.5\right)(33 - T),$$

donde H se mide en kcal/m^{2}h, v es la velocidad del viento en m/s y T es la temperatura en grados Celsius. Un ejemplo de este índice es: 1 000 = muy frío, 1 200 = implacablemente frío y 1 400 = congelamiento de la carne expuesta. Determine el factor de enfriamiento en −6.67 °C (20 °F) con una velocidad de viento de 20 m/s (45 mi/h). Escriba un breve informe que defina con precisión el factor de enfriamiento. Encuentre al menos otro modelo matemático para el factor de enfriamiento del viento.

57. Flujo de agua Cuando el agua fluye de un grifo, como se muestra en la FIGURA 13.1.25*a*), se contrae a medida que se acelera hacia abajo. Eso ocurre debido a que la tasa de flujo Q, la cual se define como la velocidad por el área de la sección transversal de la columna de agua, debe ser constante en cada nivel. En este problema suponga que las secciones transversales de la columna de fluido son circulares.

***a*)** Considere la columna de agua que se muestra en la figura 13.1.25*b*). Suponga que v es la velocidad del agua en el nivel superior, V es la velocidad del agua en el nivel inferior a una distancia h unidades por debajo del nivel superior, R es el radio de la sección transversal en el nivel superior y r es el radio de la sección transversal en el nivel inferior. Muestre que la tasa de flujo Q como una función de r y R es

$$Q = \frac{\pi r^2 R^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{R^4 - r^4}},$$

donde g es la aceleración de la gravedad. [*Sugerencia*: Empiece expresando el tiempo t que tarda la sección transversal del agua en caer una distancia h en términos de u y V. Por conveniencia considere la dirección positiva hacia abajo.]

***b*)** Determine la tasa de flujo Q (en cm^3/s) si $g = 980$ cm/s^2, $h = 10$ cm, $R = 1$ cm y $r = 0.2$ cm.

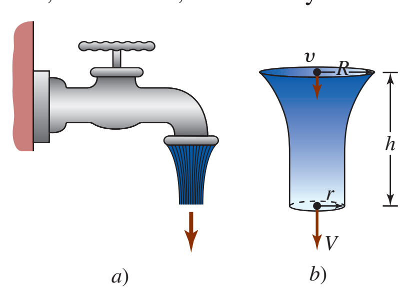


FIGURA 13.1.25 El agua fluye por el grifo del problema 57

13.2 Límites y continuidad

▮ Introducción En el caso de funciones de una variable, en muchos casos es factible hacer un juicio acerca de la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. También se aprovecha que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe y son iguales al mismo número L, en cuyo caso $\lim_{x\to a} f(x) = L$. En esta sección veremos que la situación es más difícil en la consideración de límites de funciones de dos variables.

Terminología Antes de proceder con la discusión sobre límites es necesario introducir cierta terminología relativa a conjuntos que se utilizará en este apartado, así como en las secciones y capítulos que siguen. El conjunto en el espacio bidimensional

$$\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\} \tag{1}$$

consiste en todos los puntos *en el interior de*, pero *no en*, un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. El conjunto (1) se denomina **disco abierto**. Por otro lado, el conjunto

$$\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\} \tag{2}$$

es un **disco cerrado**. Un disco cerrado incluye todos los puntos *en el interior de* y *en* un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. Vea la FIGURA 13.2.1*a*). Si R es cierta región del plano xy, entonces un punto (a, b) se dice que será un **punto interior** de R si hay *algún* disco abierto centrado en (a, b) que contiene sólo puntos de R. En contraste, afirmamos que (a, b) es un **punto frontera** de R si el interior de *cualquier* disco abierto centrado en (a, b) contiene tanto puntos en R como puntos en no R. La región R se dice que será **abierta** si contiene puntos no frontera y **cerrada** si contiene todos sus puntos frontera. Vea la figura 13.2.1*b*). Se dice que una región R está **acotada** si puede estar contenida en un rectángulo suficientemente grande en el plano. La figura 13.2.1*c*) ilustra una región acotada; el primer cuadrante ilustrado en la figura 13.2.1*d*) es un ejemplo de una región **no acotada**. Estos conceptos se llevan de manera natural al espacio tridimensional. Por ejemplo, el análogo de un disco abierto es una **bola abierta**. Una bola abierta consiste en todos los puntos *en el interior*, pero *no en*, una esfera con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$:

$$\{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) < \delta^2\}. \tag{3}$$

Una región en el espacio tridimensional está acotada si puede estar contenida en una caja rectangular suficientemente grande.

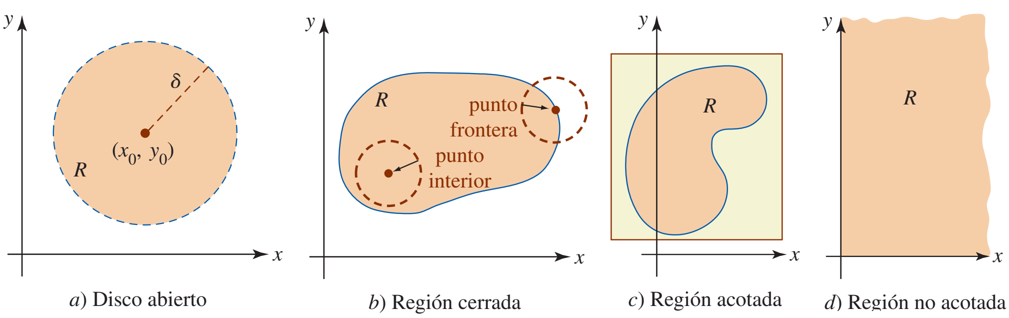


FIGURA 13.2.1 Varias regiones en el espacio bidimensional

Límites de funciones de dos variables Analizar un límite dibujando la gráfica de $z = f(x, y)$ no es conveniente ni es una rutina posible para la mayor parte de las funciones de dos variables. Por intuición sabemos que f tiene un límite en un punto (a, b) si los valores de la función $f(x, y)$ se acercan a un número L conforme (x, y) se acerca a (a, b). Escribimos $f(x, y) \to L$ como $(x, y) \to (a, b)$, o

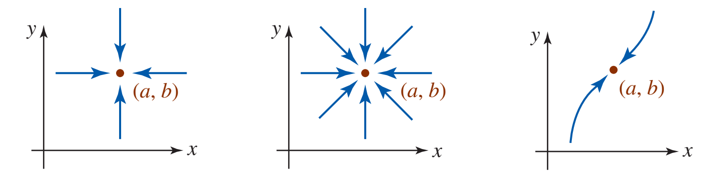
$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L.$$

Para tener un poco más de precisión, f tiene un límite L en el punto (a, b) si los puntos en el espacio $(x, y, f(x, y))$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a (a, b, L) siempre que (x, y) sea suficientemente cercano a (a, b).

La noción de (x, y) "aproximándose" a un punto (a, b) no es tan simple como para funciones de una variable donde $x \to a$ significa que x puede acercarse a a sólo desde la izquierda y desde la derecha. En el plano xy hay un número infinito de maneras de aproximarse al punto (a, b). Como se muestra en la FIGURA 13.2.2, para que $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ exista, requerimos ahora que f se aproxime al mismo número L a lo largo de *cualquier* **trayectoria** o curva posible que pase por (a, b). Si se pone lo anterior de manera negativa:

- Si $f(x, y)$ no se aproxima al mismo número L por dos trayectorias diferentes a (a, b), entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe. (4)

En la discusión de $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ que sigue se supondrá que la función f está definida en todo punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b) pero no necesariamente *en* el propio (a, b).



a) A lo largo de las rectas horizontal y vertical que pasan por (a, b)

b) A lo largo de toda recta que pasa por (a, b)

c) A lo largo de toda curva que pasa por (a, b)

FIGURA 13.2.2 Tres de muchas maneras de aproximar el punto (a, b)

EJEMPLO 1 Un límite que no existe

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2}$ no existe.

Solución La función $f(x, y) = (x^2 - 3y^2)/(x^2 + 2y^2)$ se define en todas partes excepto en $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 13.2.2*a*), dos maneras de aproximarse a $(0, 0)$ son a lo largo del eje x ($y = 0$) y a lo largo del eje y ($x = 0$). En $y = 0$ se tiene

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

donde $x = 0$,

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0, y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0 - 3y^2}{0 + 2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

En vista de (4), concluimos que el límite no existe. ■

EJEMPLO 2 Un límite que no existe

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución En este caso los límites a lo largo de los ejes x y y son los mismos:

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(0, y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ exista, ya que no se ha examinado *toda* trayectoria a $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 13.2.2*b*), ahora intentaremos cualquier recta que pase por el origen dada por $y = mx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Puesto que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ depende de la pendiente m de la recta sobre la cual se hace la aproximación al origen, concluimos que el límite no existe. Por ejemplo, en $y = x$ y en $y = 2x$, tenemos, respectivamente,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

$$f(x, 2x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, 2x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

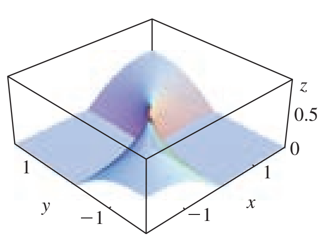


FIGURA 13.2.3 Gráfica de la función del ejemplo 2

Una gráfica generada por computadora de la superficie se presenta en la FIGURA 13.2.3. Si tiene en mente que el origen está en el centro de la caja, debe tener claro por qué diferentes trayectorias a $(0, 0)$ producen diferentes valores del límite. ■

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}$ no existe.

Solución Sea $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$. Se le pide al lector demostrar que a lo largo del eje x, el eje y, cualquier recta $y = mx$, $m \neq 0$ que pasa por $(0, 0)$, y a lo largo de cualquier parábola

$y = ax^2$, $a \neq 0$, que pasa por (0, 0), $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$. Si bien esto constituye verdaderamente un número infinito de trayectorias al origen, el límite *sigue* sin existir, ya que $y = x^3$:

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, x^3) = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}.$$ ■

Propiedades de límites En los siguientes dos teoremas se mencionan las propiedades de límites para funciones de dos variables. Estos teoremas son las contrapartes en dos variables de los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3.

Teorema 13.2.1 Tres límites fundamentales

i) $\lim_{(x, y)\to(a, b)} c = c$, c una constante

ii) $\lim_{(x, y)\to(a, b)} x = a$ y $\lim_{(x, y)\to(a, b)} y = b$

iii) $\lim_{(x, y)\to(a, b)} cf(x, y) = c \lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$

Teorema 13.2.2 Límite de una suma, producto, cociente

Suponga que (a, b) es un punto en el plano xy y que $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ y $\lim_{(x, y)\to(a, b)} g(x, y)$ existe. Si $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L_1$ y $\lim_{(x, y)\to(a, b)} g(x, y) = L_2$, entonces

i) $\lim_{(x, y)\to(a, b)} [f(x, y) \pm g(x, y)] = L_1 \pm L_2$,

ii) $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)g(x, y) = L_1L_2$, y

iii) $\lim_{(x, y)\to(a, b)} \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

EJEMPLO 4 Límite de una suma

Evalúe $\lim_{(x, y)\to(2, 3)} f(x + y^2)$.

Solución De *ii*) del teorema 13.2.1 advertimos primero que

$$\lim_{(x, y)\to(2, 3)} x = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x, y)\to(2, 3)} y = 3.$$

Entonces de las partes *i*) y *ii*) del teorema 13.2.2 sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites siempre que exista el límite:

$$\begin{aligned}\lim_{(x, y)\to(2, 3)} (x + y^2) &= \lim_{(x, y)\to(2, 3)} x + \lim_{(x, y)\to(2, 3)} y^2 \\ &= \lim_{(x, y)\to(2, 3)} x + \left(\lim_{(x, y)\to(2, 3)} y\right)\left(\lim_{(x, y)\to(2, 3)} y\right) \\ &= 2 + 3 \cdot 3 = 11.\end{aligned}$$ ■

Uso de coordenadas polares En algunos casos las coordenadas polares pueden ser de utilidad en la evaluación de un límite de la forma $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$. Si $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$, entonces $(x, y) \to (0, 0)$ si y sólo si $r \to 0$.

EJEMPLO 5 Uso de coordenadas polares

Evalúe $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{10xy^2}{x^2 + y^2}$.

Solución Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la función, obtenemos

$$\frac{10xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{10r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = 10r\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta.$$

Puesto que $\lim\limits_{r\to 0} r\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta = 0$, concluimos que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0. \qquad \blacksquare$$

En el ejemplo 8 examinaremos de nuevo el límite del ejemplo 5.

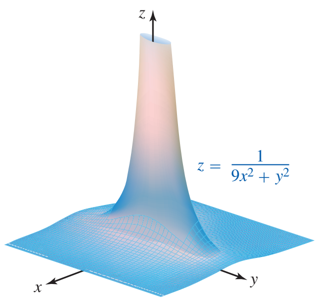


FIGURA 13.2.4 Función con una discontinuidad infinita en (0, 0)

Continuidad Una función $z = f(x, y)$ es **continua** en (a, b) si $f(a, b)$ está definida, $\lim\limits_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y)$ existe y el límite es el mismo que el valor de la función $f(a, b)$; esto es,

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = f(a, b). \tag{5}$$

Si f no es continua en (a, b), se afirma que es **discontinua**. La gráfica de una función continua es una superficie sin quiebres. De la gráfica de la función $f(x, y) = 1/(9x^2 + y^2)$ en la FIGURA 13.2.4 vemos que f tiene una discontinuidad infinita en (0, 0), esto es, $f(x, y) \to \infty$ como $(x, y) \to (0, 0)$. Una función $z = f(x, y)$ es **continua sobre un región *R*** del plano xy si f es continua en cualquier punto en R. La **suma** y el **producto** de dos funciones continuas también son continuas. El **cociente** de dos funciones continuas es continuo, excepto en el punto donde el denominador es cero. Además, si g es una función de dos variables continuas en (a, b) y F es una función de una variable continua en $g(a, b)$, entonces la **composición** $f(x, y) = F(g(x, y))$ es continua en (a, b).

EJEMPLO 6 Función discontinua en (0, 0)

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ es discontinua en (0, 0), ya que $f(0, 0)$ no está definida. Sin embargo, como puede observarse en el siguiente ejemplo, f tiene una discontinuidad removible en (0, 0). ■

EJEMPLO 7 Función continua en (0, 0)

La función f definida por

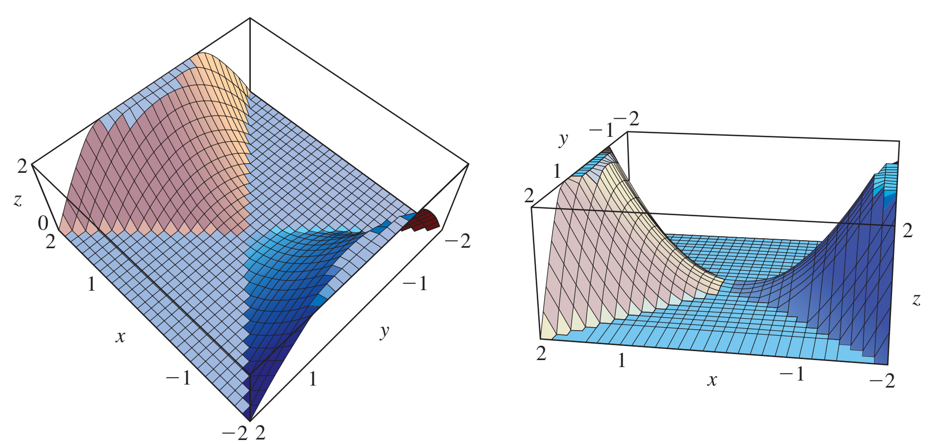
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0), ya que $f(0, 0) = 0$ y

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} (x^2 - y^2) = 0^2 - 0^2 = 0.$$

Por consiguiente, advertimos que $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

Con la ayuda de un SAC vemos en la FIGURA 13.2.5 dos perspectivas diferentes (ViewPoint en *Mathematica*) de la superficie definida por $z = f(x, y)$. Note en los incisos *a*) y *b*) de la figura 13.2.5 la orientación del eje x y del eje y.

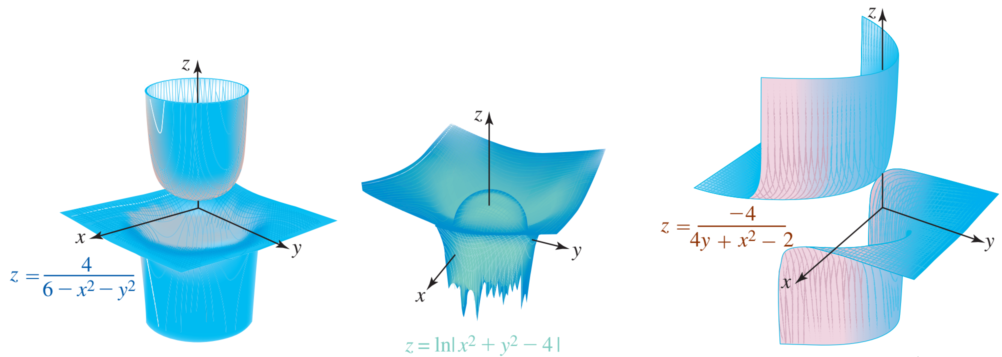


a) Viendo hacia abajo sobre la superficie

b) Viendo ligeramente hacia abajo y hacia el eje x

FIGURA 13.2.5 Gráfica de la función del ejemplo 7 ■

Funciones polinomiales y racionales En la sección 13.1 vimos que una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos, y que el cociente de dos funciones polinomiales recibe el nombre de **función racional**. Las funciones polinomiales, como $f(x, y) = xy$, son continuas por todo el plano xy. Las funciones racionales son continuas salvo en puntos donde el denominador es cero. Por ejemplo, la función racional $f(x, y) = xy/(y - x)$ es continua salvo en puntos sobre la recta $y = x$. En la FIGURA 13.2.6 se han ilustrado las gráficas de tres funciones que son discontinuas en puntos sobre una curva. En los incisos *a*) y *c*) de la figura 13.2.6, la función racional es discontinua en todos los puntos sobre la curva obtenida igualando a 0 el denominador. En la figura 13.2.6*b*) la función logarítmica es discontinua donde $x^2 + y^2 - 4 = 0$, esto es, sobre el círculo $x^2 + y^2 = 4$.



a) Discontinua en $x^2 + y^2 = 6$ *b*) Discontinua en $x^2 + y^2 = 4$ *c*) Discontinua en $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

FIGURA 13.2.6 Tres funciones discontinuas

Funciones de tres o más variables Las nociones de límite y continuidad para funciones de tres o más variables son extensiones naturales de las que acaban de considerarse. Por ejemplo, una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ es continua en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

La función polinomial en tres variables $f(x, y, z) = xy^2z^3$ es continua a través del espacio tridimensional. La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}$$

es continua salvo en el punto $(0, 0, 1)$. La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{x + 3y}{2x + 5y + z}$$

es continua excepto en los puntos (x, y, z) sobre el plano $2x + 5y + z = 0$.

Definición formal de un límite La discusión anterior conduce a la definición formal del límite de una función $z = f(x, y)$ en un punto (a, b). Esta **definición ε-δ** es análoga a la definición 2.6.1.

Definición 13.2.1 Definición de un límite

Suponga que una función f de dos variables se define en cualquier punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b), salvo posiblemente en (a, b). Entonces

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} < \delta.$$

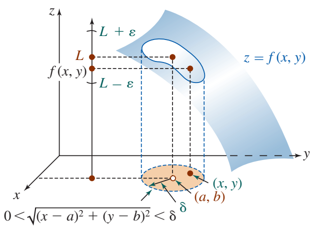


FIGURA 13.2.7 Cuando $(x, y) \neq (a, b)$ es un disco abierto, $f(x, y)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Como se ilustra en la FIGURA 13.2.7, cuando f tiene un límite en (a, b), para un $\varepsilon > 0$, sin que importe cuán pequeño, es posible encontrar un disco abierto de radio δ centrado en (a, b) de modo que $L - \varepsilon < f(x, y) < L + \varepsilon$ para todo punto $(x, y) \neq (a, b)$ dentro del disco. El disco abierto con radio $\delta > 0$ y su centro (a, b) eliminado se definen mediante la desigualdad

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} < \delta.$$

Como se mencionó antes, los valores de f son cercanos a L siempre que (x, y) sea cercano a (a, b). El concepto de "suficientemente cercano" se define mediante el número δ.

EJEMPLO 8 Repaso del ejemplo 5

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0.$

Solución De la definición 13.2.1, si $\varepsilon > 0$ está dado, se desea determinar un número $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{10xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

La última línea es lo mismo que

$$\frac{10|x|y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta.$$

Como $x^2 \geq 0$, puede escribirse $y^2 \leq x^2 + y^2$ y

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Así,
$$\frac{10|x|y^2}{x^2+y^2} = 10|x| \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 10|x| = 10\sqrt{x^2} \leq 10\sqrt{x^2+y^2}.$$

De modo que si se elige $\delta = \varepsilon/10$, tenemos

$$\left|\frac{10xy^2}{x^2+y^2} - 0\right| \leq 10\sqrt{x^2+y^2} \leq 10 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

Por la definición 13.2.1, esto demuestra

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0. \qquad \blacksquare$$

Ejercicios 13.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe el límite dado, si existe.

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(5,-1)} (x^2 + y^2)$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2 - y}{x - y}$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$
4. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{4x^2 + y^2}{16x^4 + y^4}$
5. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
6. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y}{x^2 + 2y^2}$
7. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$
8. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy^2}{x^2 + y^4}$
9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^3y^2(x + y)^3$
10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$
11. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x + y + 1}$
12. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2 + y^2}$
13. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$
14. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/4)} \cos(3x + y)$
15. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 3y + 1}{x + 5y - 3}$
16. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + 5y^4}$
17. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)} xy^2\left(\frac{x + 2y}{x - y}\right)$
18. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$
19. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$
20. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{xy - 3y}{x^2 + y^2 - 6y + 9}$