Reto: Analizando el modelo SIR

Juan Pablo Solís Ruiz,[1] Annette Pamela Ruiz Abreu,[2] Angel Azahel Ramirez Cabello[3]
[1] *A01067387*
[2] *A01423595*
[3] *A01383328*
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Monterrey

02 de diciembre de 2022

RESUMEN

El análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales permite modelar de forma analítica el comportamiento de distintas variables a lo largo de un rango de análisis preciso, incluso dejando la posibilidad de predecir el impacto de una enfermedad dentro de una población de interés a lo largo del tiempo, bajo ciertos parámetros iniciales.

PALABRAS CLAVE

Contagios – Infectados – Máximo

1 INTRODUCCIÓN

El modelo SIR es uno de los modelos epidemiológicos más simples capaces de capturar muchas de las características típicas de los brotes epidémicos. El nombre del modelo proviene de las iniciales S (población susceptible), I (población infectada) y R (población recuperada). El modelo relaciona las variaciones de las tres poblaciones (Susceptible, Infectada y Recuperada) a través de la tasa de infección y el período infeccioso promedio. La información para esta investigación fue sacada de Abello-Ugalde et al. (2020), Wikipedia (2022), Allen & Burgin (2000), Moein et al. (2021) y Awawdeh et al. (2009).

PARTE 1

2 PROBLEMA

Las ecuaciones para modelar el progreso de una enfermedad son las siguientes:

$$S'=\frac{-\beta\cdot S\cdot I}{N}$$
$$I'=\frac{\beta\cdot S\cdot I}{N}-I\cdot\gamma$$
$$R'=I\cdot\gamma$$

Beta (β) representa la tasa de contagio.
Gamma (γ) representa la fracción de infectados por unidad de tiempo.

2.1 Preguntas Detonadoras

(i) ¿En qué día el número de contagios es máximo? ¿Después de cuántos días del inicio ocurre el máximo?

(ii) ¿Después de cuántos días el número de "susceptibles" se reduce a la mitad? Encuentre de manera analítica una fórmula que exprese el tiempo t necesario para que el número de susceptibles sea la mitad del valor incial en función de β.

(iii) Estudie la dinámica del contagio variando los parámetros β y γ. Empiece con gamma = 0.1 constante cambiando β:

- $\beta = 0.1$ 365 días
- $\beta = 0.3$ 365 días
- $\beta = 0.7$ 60 días
- $\beta = 0.9$ 60 días
- $\beta = 1.2$ 60 días

Comente acerca de los cambios que se observan en las curvas. Encuentre una relación entre β y γ necesaria para que ocurra la epidemia.

(iv) Después, con $\beta = 1$ varíe el valor de γ:

- $\gamma = 0.025$ 60 días
- $\gamma = 0.2$ 60 días
- $\gamma = 0.5$ 60 días
- $\gamma = 1$ 365 días

Comente acerca de los cambios que se observan en las curvas. Encuentre una relación entre β y γ necesaria para que ocurra la epidemia.

3 ANÁLISIS

3.1 Modelación

3.1.1 Ecuaciones:

β=1 γ=0.025

$$k_1=S'(t_0,S_0,I_0,R_0)$$
$$k_2=S'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot k_1,I_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot m_1,R_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot l_1)$$
$$k_3=S'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot k_2,I_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot m_2,R_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot l_2)$$
$$k_4=S'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+h\cdot k_3,I_0+h\cdot m_3,R_0+h\cdot l_3)$$

$$m_1=I'(t_0,S_0,I_0,R_0)$$
$$m_2=I'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot k_1,I_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot m_1,R_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot l_1)$$
$$m_3=I'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot k_2,I_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot m_2,R_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot l_2)$$
$$m_4=I'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+h\cdot k_3,I_0+h\cdot m_3,R_0+h\cdot l_3)$$

$$l_1=R'(t_0,S_0,I_0,R_0)$$
$$l_2=R'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot k_1,I_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot m_1,R_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot l_1)$$
$$l_3=R'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot k_2,I_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot m_2,R_0+\tfrac{1}{2}\cdot h\cdot l_2)$$
$$l_4=R'(t_0+\tfrac{1}{2}\cdot h,S_0+h\cdot k_3,I_0+h\cdot m_3,R_0+h\cdot l_3)$$

$$S_0=S_0+\frac{h}{6}\cdot(k_1+2\cdot k_2+2\cdot k_3+k_4)$$
$$I_0=I_0+\frac{h}{6}\cdot(m_1+2\cdot m_2+2\cdot m_3+m_4)$$

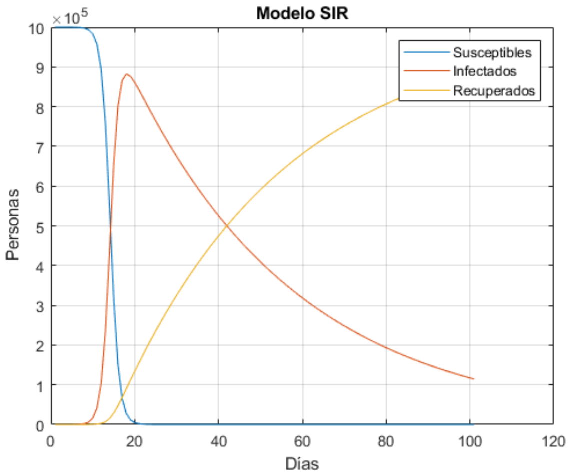


Figure 1. Gráfica de susceptibles, infectados y recuperados

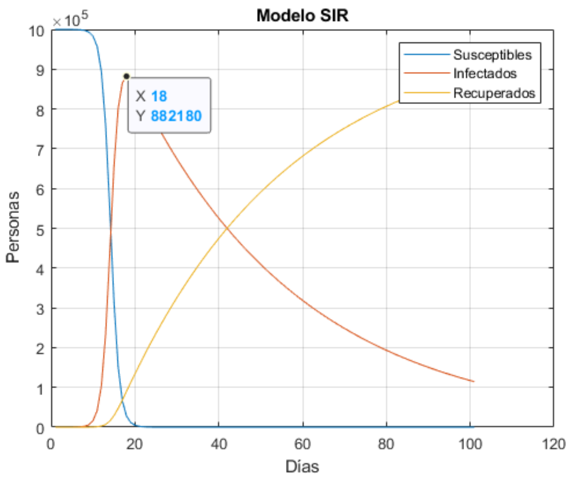


Figure 2. Punto máximo de infectados

R_0=$R_0 + \frac{h}{6} \cdot (l_1 + 2 \cdot l_2 + 2 \cdot l_3 + l_4)$

3.2 Resultados

3.2.1 Punto máximo de infectados

La cantidad máxima de infectados es de 882179.69 y ocurre en el día 18.

Para llegar a este resultado hay varios procedimientos. El primero es modelar y graficar la situación problema y observar el valor de x y de y en el pico de la gráfica de infectados. El segundo es calcular la derivada de infectados en todas las iteraciones y buscar en qué momento se acerca a cero o cuándo pasa de positivo a negativo. El tercero es analítico y se debe igualar la ecuación de la diferencial a cero; ya que los puntos críticos de una función son en donde la diferencial es igual a cero.

$\frac{dI}{dt} = 0 = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - I \cdot \gamma$
$I \cdot (\frac{\beta \cdot S}{N} - \gamma) = 0$

[!ht]

Día	Susceptibles	Infectados	Recuperados
0	999999	1.00	0
1	999997.32	2.64	0.04
2	999992.86	6.98	0.15
3	999981.1	18.45	0.45
4	999950.02	48.75	1.22
5	999867.91	128.82	3.28
6	999650.98	340.31	8.7
7	999078.23	898.74	23.03
8	997567.91	2371.23	60.85
9	993598.87	6240.61	160.52
10	983261.3	16316.69	422.02
11	956952.91	41946.89	1100.21
12	893774.22	103417.01	2808.77
13	761146.46	232024.44	6829.1
14	547484.3	437439.39	15076.31
15	316102.41	655082.67	28814.92
16	151776.93	801011.19	47211.88
17	65984.72	865816.70	68198.58
18	27693.96	882179.69	90126.35
19	11586.61	876272.84	112140.55
20	4899.47	861227.96	133872.56
21	2105.6	842717.72	155176.68
22	921.6	823077.92	176000.48
23	411.08	803259.26	196329.65
24	186.88	783647.73	216165.39
25	86.56	764398.29	235515.15
26	40.84	745570.30	254388.86
27	19.62	727183.02	272797.35
28	9.6	709238.69	290751.71
29	4.78	691732.28	308262.94
30	2.42	674655.68	325341.9
31	1.24	657999.53	341999.23
32	0.65	641754.05	358245.3
33	0.35	625909.38	374090.27
34	0.19	610455.78	389544.03
35	0.1	595383.66	404616.24
36	0.06	580683.63	419316.31
37	0.03	566346.52	433653.44
38	0.02	552363.39	447636.59
39	0.01	538725.50	461274.49

[!ht]

Día	Susceptibles	Infectados	Recuperados
40	0.01	525424.32	474575.67
41	0	512451.55	487548.44
42	0	499799.08	500200.92
43	0	487459.00	512541
44	0	475423.59	524576.41
45	0	463685.34	536314.66
46	0	452236.91	547763.09
47	0	441071.14	558928.86
48	0	430181.06	569818.94
49	0	419559.85	580440.15
50	0	409200.88	590799.12
51	0	399097.67	600902.33
52	0	389243.92	610756.08
53	0	379633.45	620366.55
54	0	370260.27	629739.73
55	0	361118.51	638881.49
56	0	352202.46	647797.54
57	0	343506.55	656493.45
58	0	335025.34	664974.66
59	0	326753.54	673246.46
60	0	318685.97	681314.03
61	0	310817.58	689182.42
62	0	303143.47	696856.53
63	0	295658.83	704341.17
64	0	288358.99	711641.01
65	0	281239.38	718760.62
66	0	274295.55	725704.45
67	0	267523.17	732476.83
68	0	260918.00	739082
69	0	254475.91	745524.09
70	0	248192.88	751807.12
71	0	242064.98	757935.02
72	0	236088.37	763911.63
73	0	230259.33	769740.67
74	0	224574.20	775425.8
75	0	219029.45	780970.55
76	0	213621.59	786378.41
77	0	208347.26	791652.74
78	0	203203.14	796796.86
79	0	198186.04	801813.96

[!ht]

Día	Susceptibles	Infectados	Recuperados
80	0	193292.81	806707.19
81	0	188520.39	811479.61
82	0	183865.81	816134.19
83	0	179326.14	820673.86
84	0	174898.57	825101.43
85	0	170580.31	829419.69
86	0	166368.66	833631.34
87	0	162261.01	837738.99
88	0	158254.77	841745.23
89	0	154347.44	845652.56
90	0	150536.59	849463.41
91	0	146819.83	853180.17
92	0	143194.84	856805.16
93	0	139659.34	860340.66
94	0	136211.14	863788.86
95	0	132848.08	867151.92
96	0	129568.04	870431.96
97	0	126369.00	873631
98	0	123248.94	876751.06
99	0	120205.91	879794.09
100	0	117238.02	882761.98

$$\frac{\beta \cdot S}{N} - \gamma = 0$$
$$S = \frac{\gamma \cdot N}{B}$$
$$S = \frac{0.025 \cdot 1000000}{1}$$
$$S = 25000$$

Al realizar este cálculo, podemos observar que la cantidad máxima de infectados se da cuando la cantidad de susceptibles es igual a 25000. Al revisar la tabla de modelación podemos observar que esto sucede en el día 18.

3.2.2 Punto medio de susceptibles

De acuerdo con el comportamiento de las distintas variables involucradas, se puede aproximar mediante el método numérico de Runge Kutta de orden 4 para sistemas de ecuaciones diferenciales el día en el cual este hecho sucede, lo cual se puede visualizar en la figura 3, donde los límites de un proceso con paso ancho hacen difícil visualizar el momento exacto donde sucede este acontecimiento, ya que la magnitud de suceptibles se reduce a la mitad entre los días 14 y 15, lo cual es interesante, porque ocurre en el instante en que esa curva cruza con la de infectados, lo cual tiene que ver precisamente en su relación en el modelo analítico.

Partiendo de la relación entre las ecuaciones diferenciales que describen al modelo conocemos solamente la razón de cambio de las

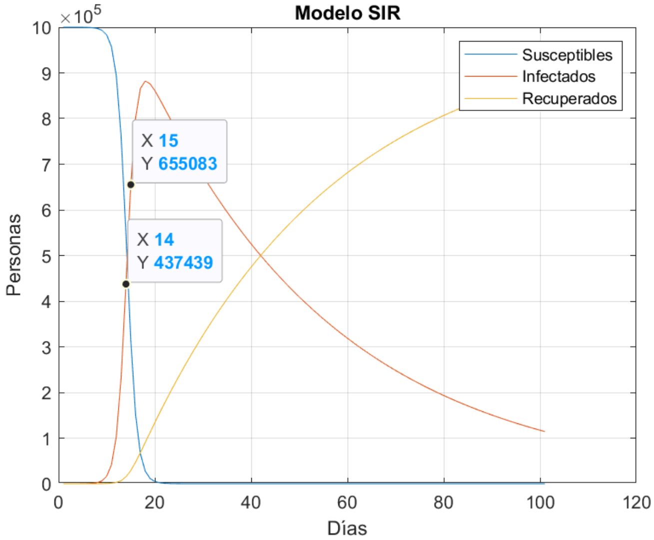


Figure 3. Punto medio de suceptibles

personas suceptibles a lo largo del tiempo dependiendo de su propia magnitud y la de las personas infectadas:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-\beta \cdot S \cdot I}{N}$$

A partir de esta ecuación se puede realizar una solución implicíta para encontrar el momento exacto en el que el valor de S_0 está a la mitad:

$$\frac{dS}{S} = \frac{-\beta I}{N} dt$$

$$\int \frac{dS}{S} = \int \frac{-\beta I}{N} dt$$

$$lnS = \int \frac{-\beta I}{N} dt$$

$$S = e^{\int \frac{-\beta I}{N} dt}$$

$$\frac{S(t_0)}{2} = \frac{e^{\int_0^{t_0} \frac{-\beta I}{N} dt}}{2}$$

Lo cual no puede ser resuleto de forma analítica, debido a que la integral de la variable infectados es incierta por depender de otra variable, pero una vez que sea conocida, entonces esa fórmula puede pronosticar el día exacto de la mitad de infectados.

3.2.3 *Variación de beta* (β)

Posteriomente, con la finalidad de analizar la influencia del coeficiente β en los infectados, se realizaron 5 modelaciones con el factor en incremento. A continuación se muestran los betas a cambiar, y los resultados con su respectivo análisis.

- $\beta = 0.1$ 365 días
- $\beta = 0.3$ 365 días
- $\beta = 0.7$ 60 días
- $\beta = 0.9$ 60 días
- $\beta = 1.2$ 60 días

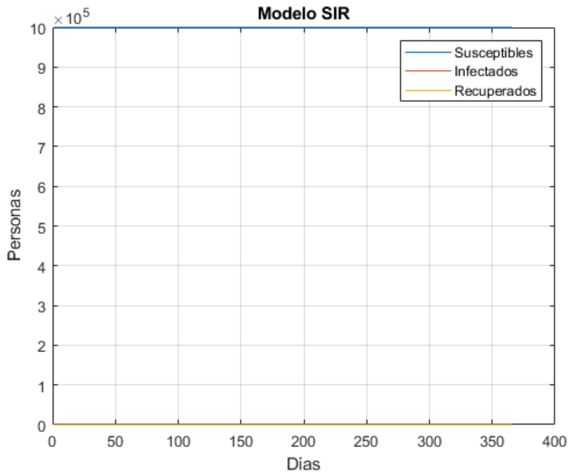


Figure 4. $\beta = 0.1$

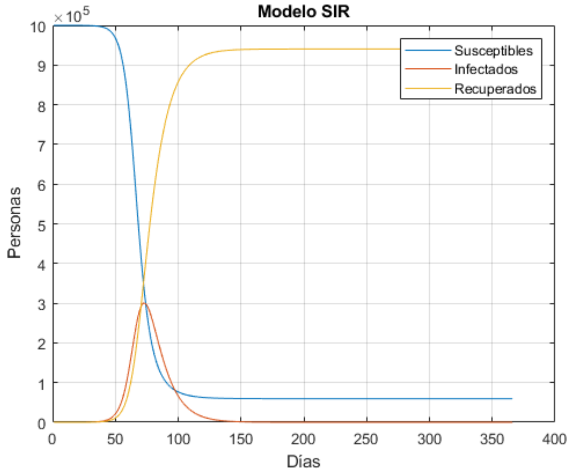


Figure 5. $\beta = 0.3$

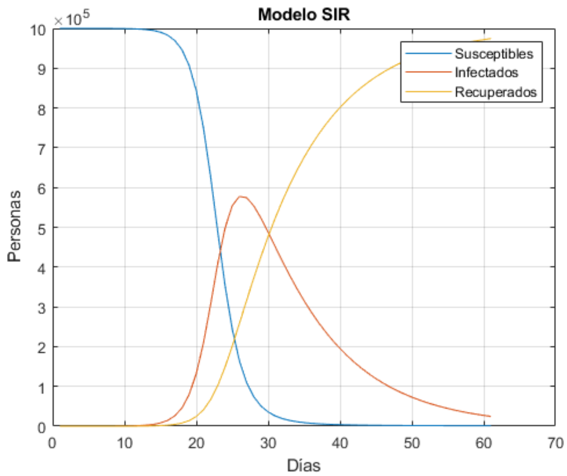


Figure 6. $\beta = 0.7$

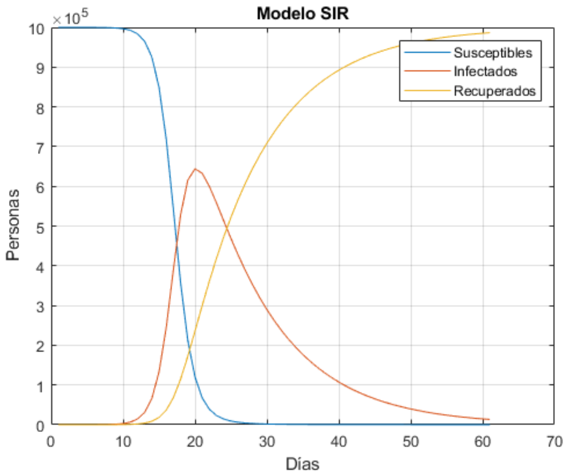


Figure 7. β = 0.9

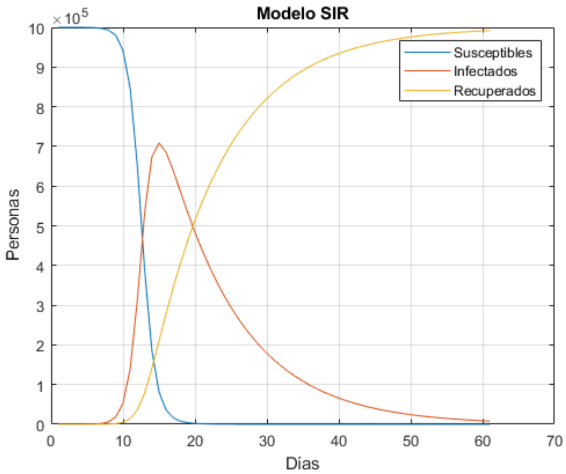


Figure 8. β = 1.2

Luego de realizar un análisis sobre la influencia del coeficiente beta en las figuras[4,5,6,7,8], se descubrió que el factor describe a la razón de cambio de los infectados. Siendo que al aumentar β, las personas se contagian más rapido, aumentando el pico de infección poblacional y reduciendo el tiempo de propagación.

*3.2.4 **Variación de gamma*** (γ)

De igual manera, se plantearon distintas magnitudes de gamma (coeficiente de recuperación) para observar su repercusión en el comportamiento de las tres variables de interés en la población, lo cual, se puede observar en las figuras 9-12, con la siguiente lista de valores, considerando a β =1:

- γ = 0.025 60 días
- γ = 0.2 60 días
- γ = 0.5 60 días
- γ = 1 365 días

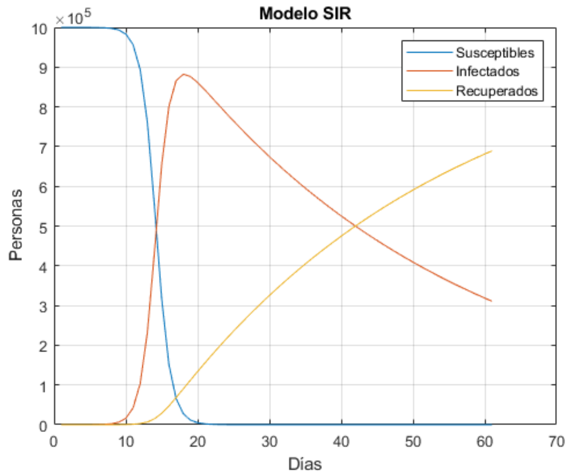


Figure 9. γ = 0.025

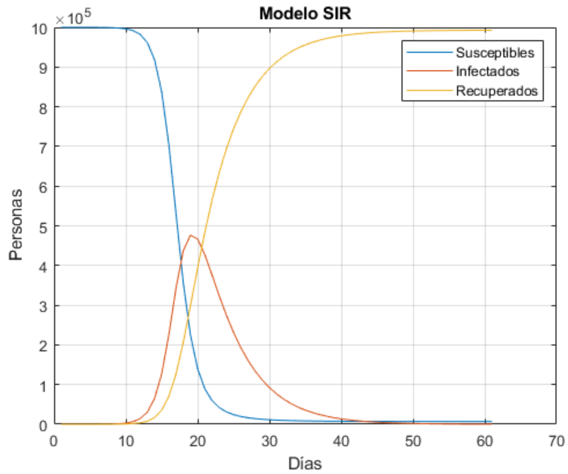


Figure 10. γ = 0.2

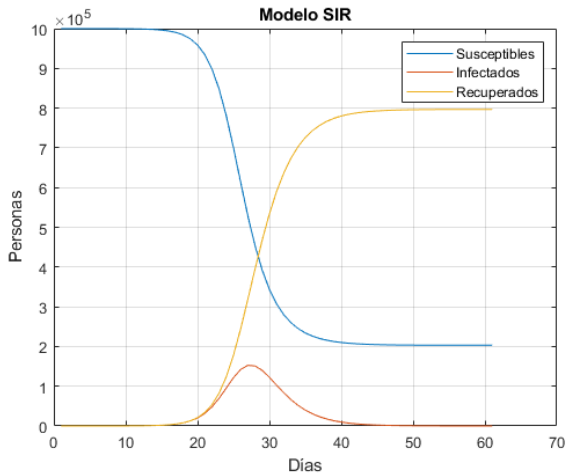


Figure 11. γ = 0.5

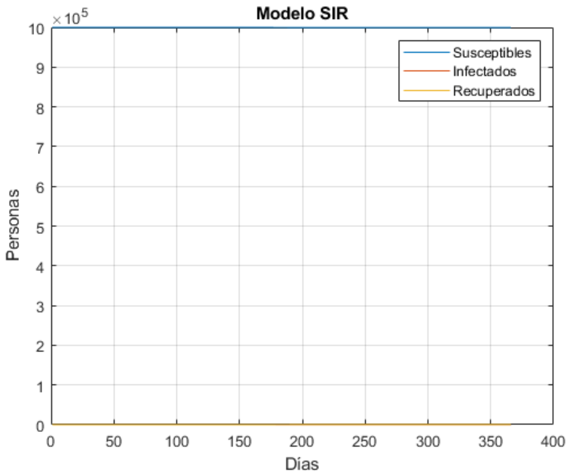


Figure 12. $\gamma = 1$

En el comportamiento de las figuras[9,10,11,12] se visualiza como a mayor razón de gamma existe una menor posibilidad de que la enfermedad logre infectar a todas las personas suscpetibles, lo cual indica proporcionalidad inversa como beta, representando así que el coeficiente R_0 de la infección es igual a $\frac{\beta}{\gamma}$, lo cual también se ve afectado por la cantidad de días de exposición de la población con la enfermedad.

PARTE 2

4 PREGUNTAS ADICIONALES

El modelo SIR anterior era el básico; sin embargo, en el mundo real hay más variables que afectan el progreso de una epidemia.

(i) Haga cambios en el modelo para tomar en cuenta el hecho de que la población no es constante:

- agregar un término de incremento en dS para tomar en cuenta los individuos nacidos $+bN$.
- agregar un término de decremento en dS para tomar en cuenta las personas susceptibles que mueren $-\mu S$.
- agregar un término de decremento en dI para tomar en cuenta las personas infectadas que mueren $-\mu I$.
- agregar un término de decremento en dR para tomar en cuenta las personas recuperadas que fallecen $-\mu R$.

Utilice:
β=0.4
γ=0.2
$\mu=\frac{1}{70\cdot 365}$
$b=\frac{1}{70\cdot 365}$

(ii) Considere una duración de 1 año en sus cálculos. (Pregunta 1 parte 2)

(iii) Usando el mismo modelo de la pregunta 2, de la primer parte, considere una duración de 100 y 400 años en sus cálculos (Pregunta 2 parte 2).

(i) (Pregunta 3) Considerando el modelo SIR básico, haga cambios para tomar en cuenta un programa de vacunación. Suponga que una fracción v de susceptibles se vacuna de manera que queda inmune (y entra ahora directamente en el conjunto de los recuperados). Calcule la dinámica de la epidemia en este caso usando los parámetros $\beta = 0.4$, $\gamma = 0.1$ y considere un periodo de 2 años. ¿Cómo se puede calcular la fracción mínima v de personas que se deben vacunar para poder evitar una epidemia? La inmunidad de rebaño ocurre cuando $Reff < 1$.

(ii) (Pregunta 4) Considerando el modelo SIR básico, haga cambios para tomar en cuenta un programa de vacunación. Suponga que una fracción v de susceptibles se vacuna de manera que queda inmune (y entra ahora directamente en el conjunto de los recuperados), mientras que la fracción $(1 - v)$ sigue siendo susceptible. Calcule la dinámica de la epidemia en este caso, estudiando cómo cambia la dinámica variando la fracción v. Utilice $\beta = 0.6$, $\gamma = 0.1$ y considere un periodo de 2 años.

5 ANÁLISIS

5.1 Preguntas 1 y 2

Las ecuaciones utilizadas fueron:

$S'=\frac{-\beta\cdot S\cdot I}{N} + b\cdot N - \mu\cdot S$

$I'=\frac{\beta\cdot S\cdot I}{N} - I\cdot\gamma - \mu\cdot I$

$R'=I\cdot\gamma - \mu\cdot R$

Las variables nuevas son para tomar en cuenta la tasa de nacimiento (b) y la tasa de mortalidad (μ), la visualizacón se describe en las figuras [13],[14] y [15] .

5.1.1 *Respuesta*

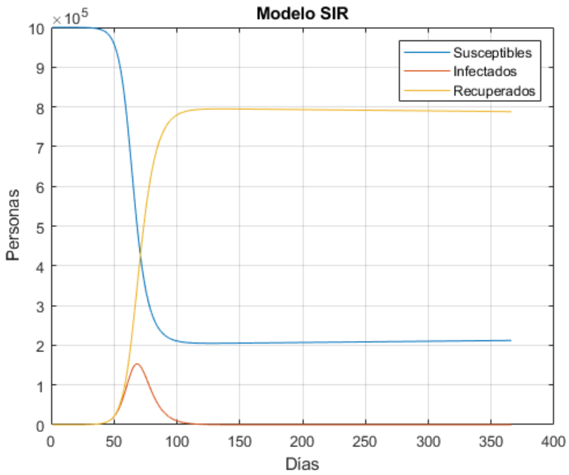


Figure 13. Modelación de los primeros 365 días con sistema modificado.

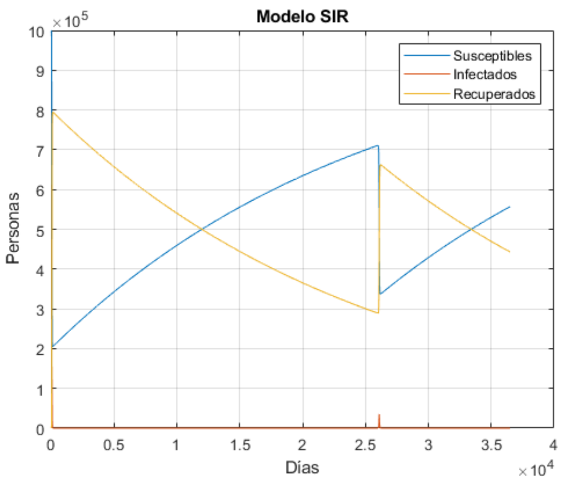


Figure 14. Modelación de los primeros 100 años con sistema modificado.

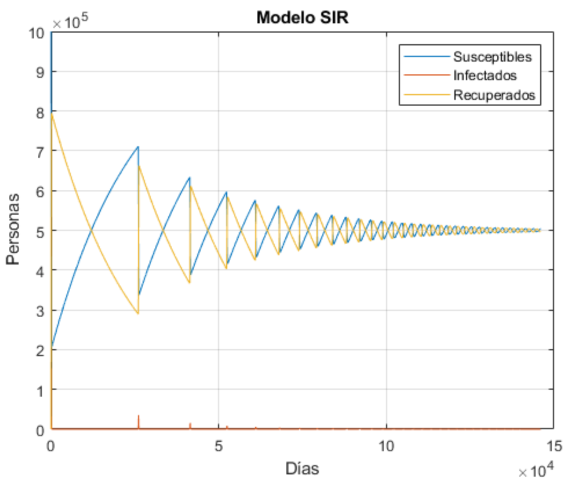
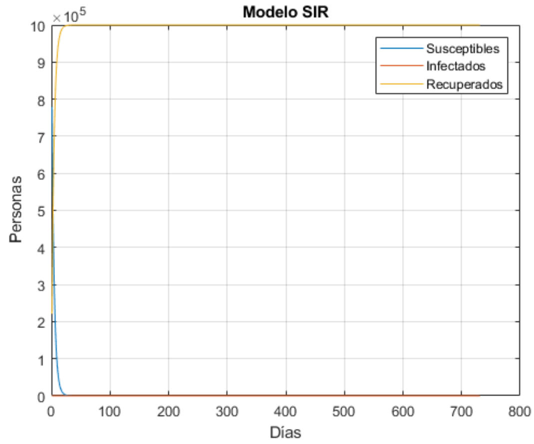


Figure 15. Modelación de los primeros 400 años con sistema modificado.



width=

Figure 16. Modelación de los primeros 2 años con sistema de vacunación con β=0.4 y v=0.25.

5.2 Pregunta 3

Las ecuaciones utilizadas fueron:

$S' = \frac{-\beta \cdot S \cdot I}{N} - v \cdot S$

$I' = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - I \cdot \gamma$

$R' = I \cdot \gamma + v \cdot S$

$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$

$Reff = \frac{R_0 \cdot S}{N}$

$\beta = 0.4$, $\gamma = 0.1$. En un periodo de dos años.

La variables nuevas que se agregaron son para tomar en cuenta la fracción de vacunados. La fracción de vacunados importa porque con un mínimo de porcentaje de población se puede impedir la pandemia. Es decir, no es necesario vacunar a todos los suceptibles para evitar la epidemia. A este efecto se le conoce como inmunidad de rebaño ($Reff$) y se refiere a que si un sector grande de la población es inmune, entonces los contagios se mantienen a un nivel en el que la enfermedad es eliminada. Para que ocurra la inmunidad de rebaño se debe cumplir lo siguiente: $Reff<1$.

5.2.1 *Respuesta*

$Reff = \frac{r_0 \cdot S}{N} = 1$

$S = \frac{N}{r_0} = 250000$

$999999 \cdot v = 250000$

$v = 0.25000025$

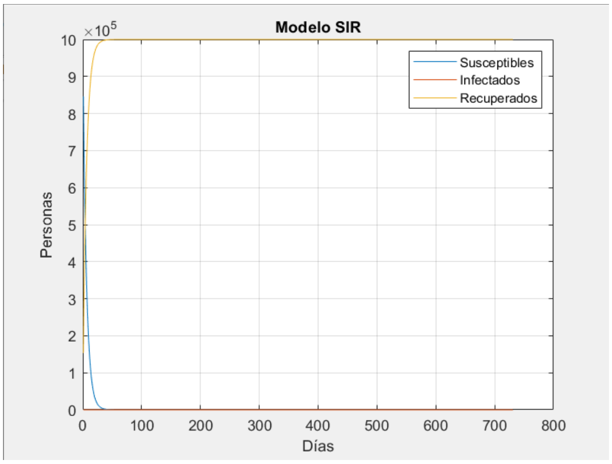
Para que suceda la inmunidad de rebaño suceda se necesita vacunar a mínimo el 25 % de la población, lo cual se representa en la figura 16 .

5.3 Pregunta 4

Se requiere utilizar el mismo modelo de vacunación que la pregunta número 3, solamente cambiando el valor del coeficiente de infección β para revisar el ajuste necesario en la fracción de vacunados necesaria para alcanzar la 'inmunidad del rebaño'. Las ecuaciones utilizadas fueron:

$S' = \frac{-\beta \cdot S \cdot I}{N} - v \cdot S$

$I' = \frac{\beta \cdot S \cdot I}{N} - I \cdot \gamma$



width=

Figure 17. Modelación de los primeros 2 años con sistema de vacunación con β=0.6 y v=0.1666667.

$R'=I\cdot\gamma+v\cdot S$
$R_0=\frac{\beta}{\gamma}$
$R_eff=\frac{R_0\cdot S}{N}$
$\beta=0.6$, $\gamma=0.1$. En un periodo de dos años.

5.3.1 Respuesta

$R_eff=\frac{r_0\cdot S}{N}=1$
$S=\frac{N}{r_0}=16666.6667$
$999999\cdot v=16666.6667$
$v=0.166666.67$

Para que suceda la inmunidad de rebaño suceda se necesita vacunar a mínimo el 16.666 % de la población, es decir una sexta parte, lo cual se representa en la figura 17 .

6 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos permitieron entender el comportamiento de la los parámetros beta y gama en el sistema de ecuaciones diferenciales SIR. Se espera tener mejores modelaciones a futuro, y empezar a incluir nuevos anális de factores.

A partir de la proyección del comportamiento de una posible enfermedad en una población conocida, bajo ciertas variables convenientes en el caso de esta investigación, es posible acordar decisiones actuales que impacten de forma significante el futuro, con base en modelos matemáticos bien planteados, por medio del uso de planteamientos comprobados de fénomenos naturales con razones de cambio trazables hasta cierto punto. Todo esto en conjunto permite visualizar, desde el punto de vista analítico, los cambios de estado como un intercambio entre variables que se rigen por supuestas ecuaciones rígidas, afirmación que claramente requiere mayor fundamento para trasladar a la practica universal, pero que funciona bajo condiciones idóneas.

REFERENCES

Abello-Ugalde I., Guinovart Díaz R., Morales Lezca W., 2020, Revista Cubana de Salud Publica, 46
Allen L. J., Burgin A. M., 2000, Mathematical Biosciences, 163, 1
Awawdeh F., Adawi A., Mustafa Z., 2009, Chaos, Solitons & Fractals, 42, 3047
Moein S., Nickaeen N., Roointan A., Borhani N., Heidary Z., Javanmard S. H., Ghaisari J., Gheisari Y., 2021, Scientific Reports, 11
Wikipedia C., 2022, Wikipedia