Universidad Nacional del Altiplano

Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

Trabajo Encargado - N° 009

Métodos de Optimización
OPTIMIZACIÓN NO LINEAL

Docente: Fred Torres Cruz

Autor: Heydi Pamela Manasaya Quispe

GITHUB: `https://github.com/PamelaManasayaQ/optimizacion-no-lineal`

STREAMLIT: `https://optimizacion-no-lineal-c79qs3cs5bnbfsvefskxqt.streamlit.app/`

21 de noviembre de 2024

Ejercicio 1: Demuestre que la función $f(x) = 3x + 2$ es convexa en R

1. Seleccionar dos puntos en el dominio:

Tomamos $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

2. Elegir un valor de λ:

Seleccionamos $\lambda = 0{,}5$.

3. Calcular la combinación convexa de x_1 y x_2:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = 0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 3 = 2.$$

4. Evaluar $f(x)$ en el punto intermedio:

$$f(x) = f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8.$$

5. Calcular la combinación convexa de $f(x_1)$ y $f(x_2)$:

Primero evaluamos $f(x_1)$ y $f(x_2)$:

$$f(x_1) = f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5,$$
$$f(x_2) = f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11.$$

Luego, calculamos la combinación convexa:

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = 0{,}5 \cdot 5 + 0{,}5 \cdot 11 = 2{,}5 + 5{,}5 = 8.$$

6. Comparar los resultados:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = 8,$$
$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) = 8.$$

Ambos resultados son iguales, lo que confirma que se cumple la desigualdad de convexidad.

Conclusión:

La función $f(x) = 3x + 2$ es convexa en R, ya que satisface la definición de convexidad.

7. Confirmación usando derivadas:

Primera derivada:

Calculamos la primera derivada de $f(x) = 3x + 2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x + 2) = 3.$$

Segunda derivada:

Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x)) = \frac{d}{dx}(3) = 0.$$

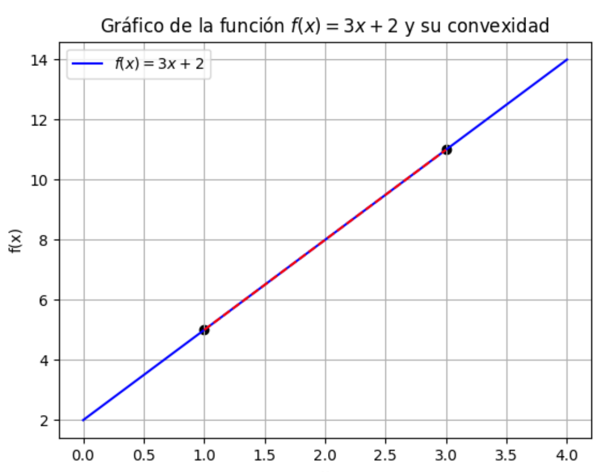
Como $f''(x) = 0 \geq 0$ para todo $x \in R$, se confirma que $f(x) = 3x + 2$ es convexa.

Conclusión:

La función $f(x) = 3x + 2$ es convexa en R, ya que satisface tanto la definición de convexidad como el criterio de la segunda derivada, es convexa y concava a la misma vez ya que la segunda derivada es cero lo cual es igual a 0.

PROGRAMA

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return 3*x + 2

x_vals = np.linspace(0, 4, 100)  # Crear valores de x entre 0 y 4
y_vals = f(x_vals)  # Evaluar f(x)

x_points = [1, 3]
y_points = f(np.array(x_points))

plt.plot(x_vals, y_vals, label=r"$f(x) = 3x + 2$", color='blue')  #
plt.scatter(x_points, y_points, color='black')  # Puntos en la curva
plt.plot([1, 3], [f(1), f(3)], 'r--')  # Secante entre (1, 5) y (3,

plt.title("Gráfico de la función $f(x) = 3x + 2$ y su convexidad")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Ejercicio 2: Verifique si la función $f(x) = x^3$ es convexa, cóncava o ninguna de las dos en el intervalo $[0, \infty)$.

1. Enunciado del Problema:

Demostrar que la función $f(x) = x^3$ es convexa en el intervalo $[0, \infty)$.

2. Definición de Convexidad:
Una función $f(x)$ es *convexa* en un intervalo I si su segunda derivada $f''(x)$ es *no negativa* (es decir, $f''(x) \geq 0$) para todos los puntos $x \in I$.

3. Cálculo de la Primera Derivada:
Comenzamos calculando la primera derivada de la función $f(x) = x^3$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

4. Cálculo de la Segunda Derivada:
Ahora, calculamos la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$$

5. Estudio de la Segunda Derivada:
Para determinar si $f(x)$ es convexa en el intervalo $[0, \infty)$, analizamos el signo de la segunda derivada $f''(x)$:

$$f''(x) = 6x$$

Observamos que para $x \geq 0$, $f''(x) \geq 0$, ya que $6x$ es siempre positivo o igual a cero cuando $x \geq 0$.

6. Conclusión sobre la Convexidad:
Como $f''(x) \geq 0$ en el intervalo $[0, \infty)$, esto implica que la función $f(x) = x^3$ es *convexa* en ese intervalo. Esto concluye la demostración de que la función es convexa en el intervalo $[0, \infty)$.

7. Demostración Formal de las Derivadas:
Las derivadas calculadas son:
- Primera derivada:

$$f'(x) = 3x^2$$

- Segunda derivada:

$$f''(x) = 6x$$

La propiedad $f''(x) \geq 0$ en el intervalo $[0, \infty)$ concluye que la función es convexa en ese intervalo.

PROGRAMA

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return x**3

x_vals = np.linspace(-2, 4, 100)
y_vals = f(x_vals)

x_points = [-1, 0, 1, 2, 3]
y_points = f(np.array(x_points))

plt.plot(x_vals, y_vals, label=r"$f(x) = x^3$", color='blue')
plt.scatter(x_points, y_points, color='black')
plt.plot([-1, 3], [f(-1), f(3)], 'r--')

plt.title("Gráfico de la función $f(x) = x^3$ y su convexidad")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```

Sea $f(x) = e^{2x}$ Demuestre que f(x) es convexa en R utilizando el criterio de la segunda derivada.

Paso 1: Calcular la primera derivada de $f(x)$

La función dada es $f(x) = e^{2x}$. Aplicamos la regla de la cadena para derivar la función:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{2x} = 2e^{2x}$$

Paso 2: Calcular la segunda derivada de $f(x)$

Ahora, derivamos $f'(x) = 2e^{2x}$ para obtener la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(2e^{2x}) = 4e^{2x}$$

Paso 3: Analizar el signo de $f''(x)$

Observamos que la segunda derivada es $f''(x) = 4e^{2x}$. Dado que e^{2x} es siempre positivo para todo $x \in R$, tenemos que:

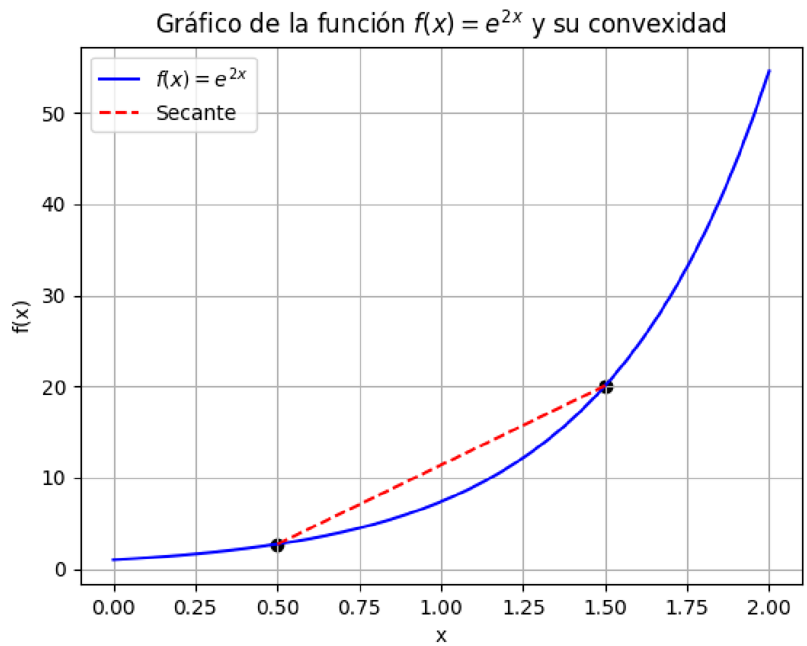
$$f''(x) = 4e^{2x} > 0 \quad \text{para todo } x \in R.$$

Conclusión

Como $f''(x) > 0$ para todo $x \in R$, podemos concluir que $f(x) = e^{2x}$ es convexa en R por el criterio de la segunda derivada.

PROGRAMA

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return np.exp(2 * x)

x_vals = np.linspace(0, 2, 100)
y_vals = f(x_vals)

x_points = [0.5, 1.5]
y_points = f(np.array(x_points))

plt.plot(x_vals, y_vals, label=r"$f(x) = e^{2x}$", color='blue')
plt.scatter(x_points, y_points, color='black')
plt.plot(x_points, y_points, 'r--', label='Secante')

plt.title("Gráfico de la función $f(x) = e^{2x}$ y su convexidad")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Ejercicio 4: Considere la función $f(x) = \ln(x)$ definida en $(0, \infty)$.

a) **Determine si $f(x)$ es convexa o cóncava en su dominio.**

b) **Justifique su respuesta utilizando las propiedades de la segunda derivada.**

Problema:

Considere la función $f(x) = \ln(x)$ definida en $(0, \infty)$.

a) Determinar si $f(x)$ es convexa o cóncava en su dominio.

Para determinar si $f(x)$ es convexa o cóncava, utilizaremos el criterio de la segunda derivada:

- Si $f''(x) \geq 0$ en un intervalo, entonces $f(x)$ es convexa en ese intervalo.
- Si $f''(x) \leq 0$ en un intervalo, entonces $f(x)$ es cóncava en ese intervalo.

b) Justificación utilizando las propiedades de la segunda derivada.

Primero, calculamos la primera y la segunda derivada de $f(x)$:

Primera derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

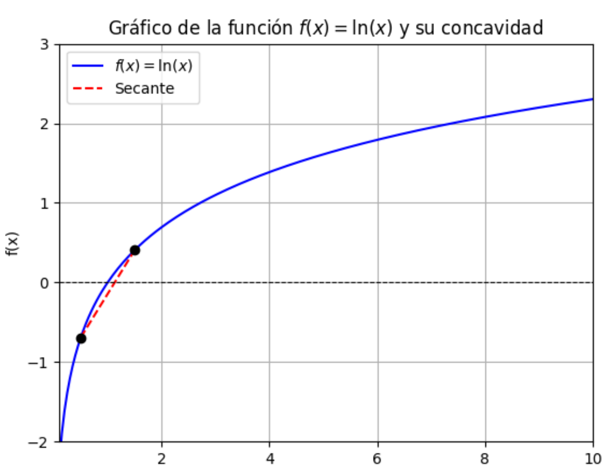
La segunda derivada $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ es siempre negativa en el dominio de $f(x)$, es decir, en $(0, \infty)$. Esto implica que la función $f(x) = \ln(x)$ es cóncava en todo su dominio.

Conclusión:

La función $f(x) = \ln(x)$ es **cóncava** en $(0, \infty)$ porque su segunda derivada es no positiva ($f''(x) \leq 0$) en este intervalo.

PROGRAMA

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def f(x):
    return np.log(x)

x_vals = np.linspace(0.1, 10, 200)
y_vals = f(x_vals)

x_points = [0.5, 1.5]
y_points = f(np.array(x_points))

plt.plot(x_vals, y_vals, label=r"$f(x) = \ln(x)$", color='blue')
plt.scatter(x_points, y_points, color='black', zorder=5)
plt.plot(x_points, y_points, 'r--', label='Secante')
plt.title("Gráfico de la función $f(x) = \ln(x)$ y su concavidad")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='--')
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='--')
plt.xlim([0.1, 10])
plt.ylim([-2, 3])
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```



Solución al Ejercicio 5

Dada la función:

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

a) Determinar los intervalos de convexidad y concavidad

Para analizar la convexidad y concavidad, utilizamos la segunda derivada.

1. **Primera derivada:**
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$
2. **Segunda derivada:**
$$f''(x) = 12x^2 - 4$$
3. **Puntos críticos de $f''(x)$:** Igualamos $f''(x) = 0$:
$$12x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$
4. **Análisis del signo de $f''(x)$:** Dividimos el dominio en los intervalos definidos por $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$:
   - Para $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$: Tomamos $x = -1$:
   $$f''(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 \quad \text{(positivo)}.$$
   - Para $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$: Tomamos $x = 0$:
   $$f''(0) = 12(0)^2 - 4 = -4 \quad \text{(negativo)}.$$
   - Para $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$: Tomamos $x = 1$:
   $$f''(1) = 12(1)^2 - 4 = 12 - 4 = 8 \quad \text{(positivo)}.$$

Conclusión:

- $f(x)$ es **convexa** en $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$.
- $f(x)$ es **cóncava** en $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

b) Determinar los puntos de inflexión

Los puntos de inflexión ocurren cuando $f''(x) = 0$ y cambia de signo.

1. **Soluciones de $f''(x) = 0$:**
$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$
2. **Evaluamos $f(x)$ en estos puntos:**
   - Para $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$:
   $$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 = \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = \frac{4}{9}.$$

- Para $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$: Por simetría:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{9}.$$

Conclusión: Los puntos de inflexión son:

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9}\right).$$

PROGRAMA

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return x**4 - 2*x**2 + 1

x_vals = np.linspace(-2, 2, 200)
y_vals = f(x_vals)

x_points = [-1, 1]
y_points = f(np.array(x_points))

plt.plot(x_vals, y_vals, label=r"$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$", color='blue')
plt.scatter(x_points, y_points, color='black', zorder=5)
plt.plot(x_points, y_points, 'r--', label='Secante')
plt.title("Gráfico de la función $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ y su concavidad")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='--')
plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.8, linestyle='--')
plt.xlim([-2, 2])
plt.ylim([-1, 2])
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()
```