Universidad Nacional del Altiplano

Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

Trabajo Encargado - N° 003

Métodos de Optimización

Docente: Fred Torres Cruz

Autor: heydi pamela manasaya quispe

LINK github: https://github.com/PamelaManasayaQ/trabajo-N005

4 de octubre de 2024

TRABAJO ENCARGADO N005:

1. Pregunta: Explica el concepto de norma vectorial y proporciona un ejemplo de una norma vectorial distinta de la norma euclidiana.
2. **P**regunta: ¿Qué es una norma matricial inducida y cómo se relaciona con una norma vectorial?
3. **P**regunta: Define el número de condición de una matriz y explica cómo se relaciona con la estabilidad numérica de un sistema lineal. Pregunta:
4. Qué es un espacio vectorial y cuáles son las propiedades que debe cumplir un conjunto de vectores para ser considerado un espacio vectorial?
5. **P**regunta: Define una matriz totalmente unimodular y explica su importancia en la programación lineal entera.

1. Norma Vectorial

Una **norma vectorial** es una función que asigna a cada vector un número real no negativo que mide su "longitud.º "tamaño". Formalmente, una norma es una función $\|\cdot\| : R^n \to R$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. **No negatividad:** Para todo $\mathbf{v} \in R^n$, se tiene que $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. **Homogeneidad:** Para cualquier escalar $\alpha \in R$ y cualquier vector $\mathbf{v} \in R^n$, se cumple que:
$$\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|.$$
3. **Desigualdad Triangular:** Para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$, se cumple que:
$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

Un ejemplo de norma vectorial diferente de la norma euclidiana es la **norma** p, que se define como:

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}.$$

Por ejemplo, la **norma infinito** es un caso particular cuando $p \to \infty$, y está dada por:

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |v_i|.$$

2. Norma Matricial Inducida

La **norma matricial inducida** se define a partir de una norma vectorial. Para una matriz $A \in R^{m\times n}$, la norma matricial inducida por una norma vectorial $\|\cdot\|$ se denota como:

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Esta norma mide cómo una matriz A .^{es}tira"los vectores en el espacio cuando se aplica la transformación lineal correspondiente.

Por ejemplo, la norma matricial inducida por la norma p en el espacio vectorial se puede expresar como:

$$\|A\|_p = \sup_{\mathbf{v}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{v}\|_p}{\|\mathbf{v}\|_p}.$$

3. Número de Condición de una Matriz

El **número de condición** de una matriz A, denotado como $\kappa(A)$, mide la sensibilidad de la solución de un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a perturbaciones en los datos $\mathbf{b}$. Se define como el producto de la norma de la matriz y la norma de su inversa (si es invertible):

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Un número de condición grande indica que pequeñas perturbaciones en $\mathbf{b}$ pueden provocar grandes cambios en $\mathbf{x}$, lo que implica inestabilidad numérica.

4. Espacio Vectorial

Un **espacio vectorial** (o espacio lineal) es un conjunto de vectores que cumple con las siguientes propiedades:

1. **Cierre bajo la suma:** Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ pertenecen al espacio vectorial, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ también pertenece al espacio.
2. **Cierre bajo la multiplicación escalar:** Si $\mathbf{v}$ pertenece al espacio vectorial y $\alpha \in R$, entonces $\alpha\mathbf{v}$ también pertenece al espacio.
3. **Propiedades asociativas y conmutativas:** La suma de vectores es asociativa y conmutativa, y existe un vector cero tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$.

5. Matriz Totalmente Unimodular

Una **matriz totalmente unimodular** es una matriz A que tiene todas sus entradas como 0, 1 o -1, y cualquier submatriz cuadrada tiene determinante igual a 0, 1 o -1. Matemáticamente, A es totalmente unimodular si:

$$\det(A_I) \in \{-1, 0, 1\}$$

para cualquier submatriz cuadrada A_I de A.

Las matrices totalmente unimodulares son importantes en la programación lineal entera porque, si A es totalmente unimodular y el vector $\mathbf{b}$ es entero, entonces el problema de programación lineal:

$$\text{minimizar } \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad \text{sujeto a } A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \; \mathbf{x} \geq 0$$

tiene una solución entera.