Universidad Nacional del Altiplano

Facultad de Ingeniería Estadística e Informática

Trabajo Encargado - N° 003

Métodos de Optimización

Docente: Fred Torres Cruz

Autor: Heydi Pamela Manasaya Quispe

LINK GITHUB: https://github.com/PamelaManasayaQ/trabajo-encargado-n003

3 de octubre de 2024

Demostración de la Unicidad del Supremo

Ejercicio 2.3

3 de octubre de 2024

Ejercicio 2.3

Ejercicio 2.3. Supongamos que s_1 y s_2 son supremos de algún conjunto $S \subseteq R$. Prueba que $s_1 = s_2$, estableciendo así que el supremo de un conjunto es único (obviamente, una demostración muy similar muestra que, si existe, el ínfimo de un conjunto también es único).

Resolución paso a paso detallada

Este ejercicio requiere que demostremos que el **supremo** de un conjunto es único. En otras palabras, si existen dos supremos s_1 y s_2 para un conjunto $S \subseteq R$, debemos mostrar que necesariamente $s_1 = s_2$.

Conceptos clave que usaremos

- **Supremo (sup)**: El supremo de un conjunto S, denotado como $\sup(S)$, es la *menor cota superior* de S. Esto significa que:

1. $s \geq x$ para todo $x \in S$ (es decir, es una cota superior de S).
2. Si hay otra cota superior t, entonces $s \leq t$ (es la menor de todas las cotas superiores).

Paso 1: Definiciones y Suposición Inicial

Vamos a comenzar estableciendo lo que significa que s_1 y s_2 sean supremos del conjunto S.

- s_1 **es el supremo de** S: Esto significa que:
  - $s_1 \geq x$ para todo $x \in S$ (es una cota superior de S).
  - Si t es otra cota superior de S, entonces $s_1 \leq t$.
- s_2 **es el supremo de** S: De manera similar:
  - $s_2 \geq x$ para todo $x \in S$.
  - Si t es otra cota superior de S, entonces $s_2 \leq t$.

Ahora queremos demostrar que $s_1 = s_2$. Para esto, supondremos por contradicción que $s_1 \neq s_2$, y luego veremos que esto lleva a una contradicción con las propiedades del supremo.

Paso 2: Supongamos que $s_1 \neq s_2$

Existen dos posibilidades si $s_1 \neq s_2$:

- $s_1 > s_2$
- $s_2 > s_1$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $s_1 > s_2$. Esto nos permitirá llegar a una contradicción, y el razonamiento sería similar si hubiéramos supuesto que $s_2 > s_1$.

Paso 3: Contradicción con la Definición de Supremo

Dado que hemos supuesto que $s_1 > s_2$, necesitamos examinar lo que esto significa en relación con las definiciones de los supremos.

- Sabemos que s_2 es el supremo de S. Según la definición del supremo, s_2 es la **menor** cota superior de S. Por lo tanto, si $s_1 > s_2$, s_1 sería una cota superior de S (porque $s_1 \geq x$ para todo $x \in S$, ya que s_1 es una cota superior), pero esto **violaría** la condición de que s_2 es la menor cota superior.
- En otras palabras, no puede haber una cota superior más pequeña que s_2, y mucho menos una cota superior mayor como s_1.

Esta contradicción surge porque, al suponer que $s_1 > s_2$, llegamos a la conclusión de que s_2 no es el supremo, lo que contradice nuestra hipótesis original de que s_2 es el supremo.

Paso 4: Razonamiento Inverso

De manera similar, si hubiéramos supuesto que $s_2 > s_1$, el mismo razonamiento llevaría a una contradicción. En este caso, s_1, siendo el supremo, debería ser la menor cota superior, pero la suposición de que s_2 es mayor que s_1 violaría esto, ya que el supremo debe ser la **menor** de las cotas superiores.

Paso 5: Conclusión

Dado que ambas suposiciones $s_1 > s_2$ y $s_2 > s_1$ conducen a contradicciones, la única posibilidad que queda es que $s_1 = s_2$. Por lo tanto, hemos demostrado que el supremo de un conjunto es único.

Reflexión Final

La unicidad del supremo se basa en el hecho de que no puede haber dos cotas superiores distintas que cumplan simultáneamente con la condición de ser la **menor** cota superior de un conjunto. Si existieran dos supremos diferentes, uno de ellos sería más grande que el otro, lo que violaría la definición de supremo. Esta misma lógica puede aplicarse a la unicidad del ínfimo.

Análisis extendido y más profundidad

Vamos a extender esta prueba con algunos detalles adicionales que aclaren los pasos lógicos y matemáticos involucrados. Veremos cómo la propiedad de cota superior y la estructura de los números reales juegan un papel esencial en esta demostración.

Paso 6: Propiedad de cota superior y el conjunto S

Recuerda que para cualquier conjunto $S \subseteq R$, el conjunto tiene un supremo si y solo si está **acotado superiormente**. Esto significa que siempre hay un número $t \in R$ tal que $t \geq x$ para todo $x \in S$. Si el conjunto no está acotado, entonces no podemos hablar de un supremo finito.

El paso crítico aquí es darnos cuenta de que, al establecer que una de estas cotas superiores es menor que la otra, estamos violando la definición de que el supremo es la **menor** cota superior. Esto es lo que causa la contradicción y nos obliga a concluir que ambos supremos deben ser iguales.

Paso 7: Analogía con el ínfimo

El proceso de demostración para la unicidad del ínfimo es completamente análogo al de la unicidad del supremo. El ínfimo de un conjunto S es la **mayor cota inferior**, lo que significa que:

1. $i \leq x$ para todo $x \in S$ (es decir, i es una cota inferior de S).

2. Si t es otra cota inferior, entonces $i \geq t$ (es la mayor de todas las cotas inferiores).

Si suponemos que existen dos ínfimos i_1 e i_2, podríamos proceder de manera similar: asumir que $i_1 \neq i_2$, lo que nos llevaría a una contradicción con la definición de ínfimo.

Conclusión extendida

Hemos demostrado detalladamente que si s_1 y s_2 son supremos de un conjunto S, entonces s_1 debe ser igual a s_2. Esta prueba se basa en la definición de supremo como la menor cota superior y en la estructura de los números reales, que garantiza que las cotas superiores se pueden comparar y que la menor de ellas es única.

Este ejercicio nos permite comprender mejor cómo las propiedades fundamentales de los conjuntos numéricos y las cotas se aplican a problemas más abstractos en análisis matemático.