Patryk Miszke 193249

Aproksymacja profilu wysokościowego

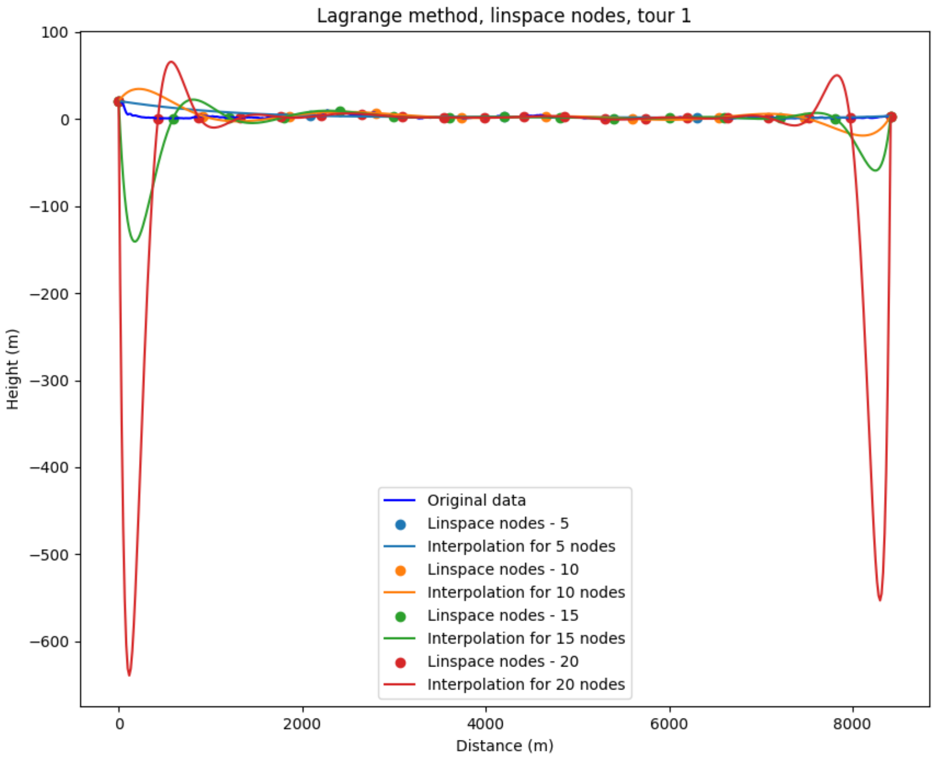
1. Metoda Lagrange'a oraz splajnami

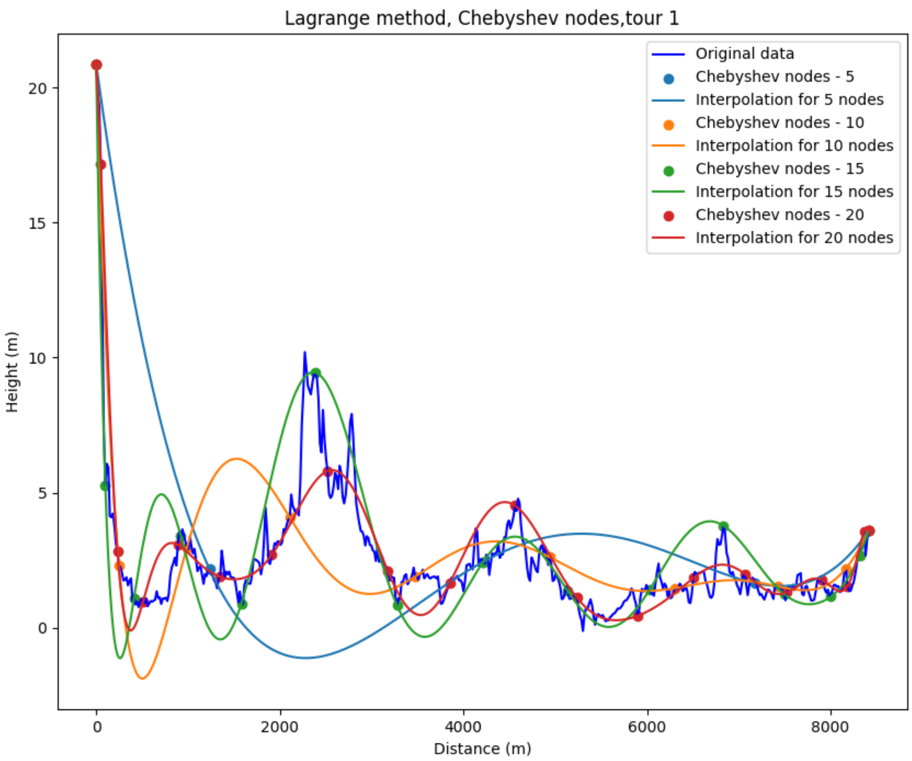
Interpolacja z wykorzystaniem wzoru Lagrange'a polega na wybraniu n+1 węzłów (punktów interpolacji) należących do dziedziny f, dla której wartości są znane, a następnie zbudowaniu wielomianu stopnia co najwyżej n. Wartość wielomianu interpolacyjnego można uzyskać bez czasochłonnego rozwiązywania układu równań dla współczynników, a sama metoda jest stabilna oraz łatwa do implementacji. Bazę funkcji interpolacji mierzy się za pomocą wzoru:

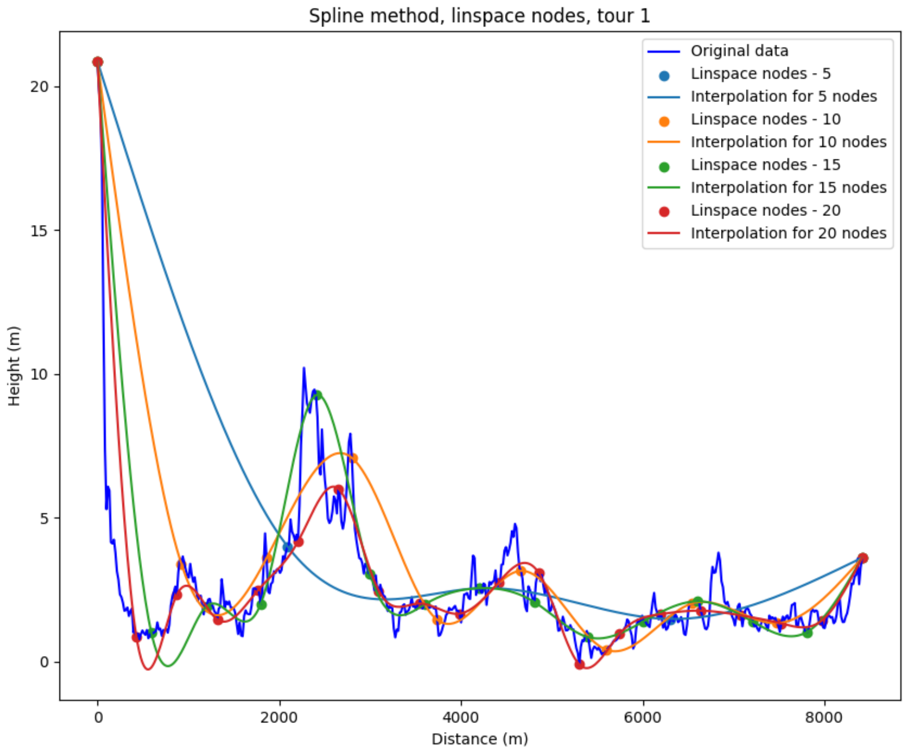
$$\phi_i(x) = \prod_{j=1, j\neq i}^{n+1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia (spline) to technika aproksymacji, która zapewnia wysoką dokładność aproksymacji. Funkcje sklejane są szczególnie użyteczne, ponieważ tworzą kawałki wielomianów, które łączą się w sposób zapewniający ciągłość i gładkość krzywej. W przypadku funkcji sklejanych trzeciego stopnia są to wielomiany trzeciego stopnia (sześcienne). Po uzyskaniu wielomianu musimy rozwiązać układ równań wynikający z warunków ciągłości i gładkości. Po wyznaczeniu współczynników możemy używać funkcji sklejanej do aproksymacji wartości pomiędzy zadanymi punktami danych. Dla danego x znajdujemy odpowiedni przedział i obliczamy wartość funkcji sklejanej.

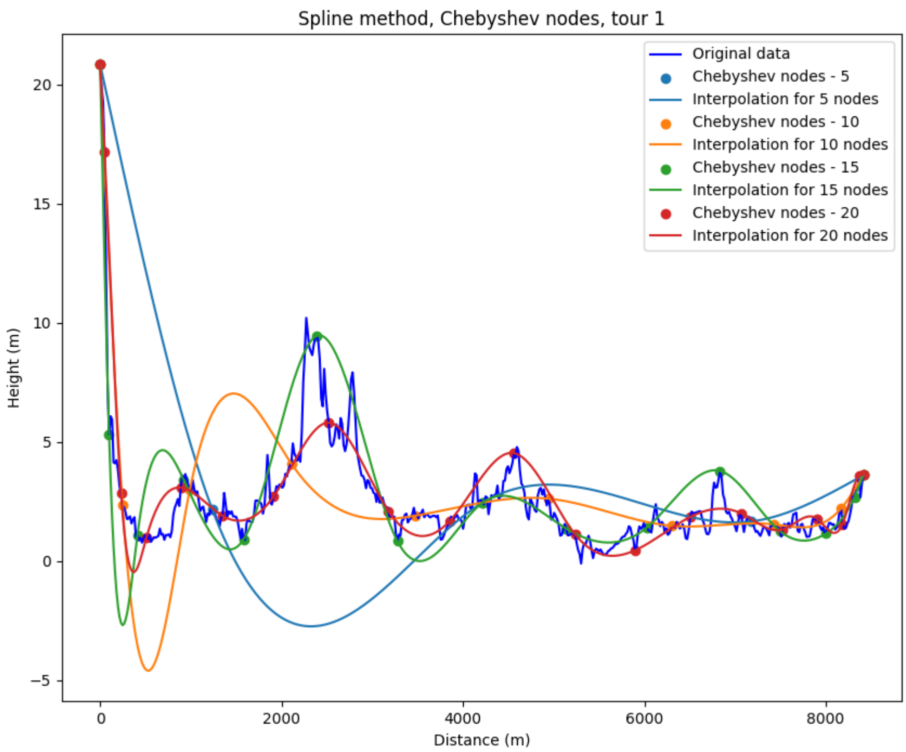
2. Trasa I – Spacerniak Gdańsk





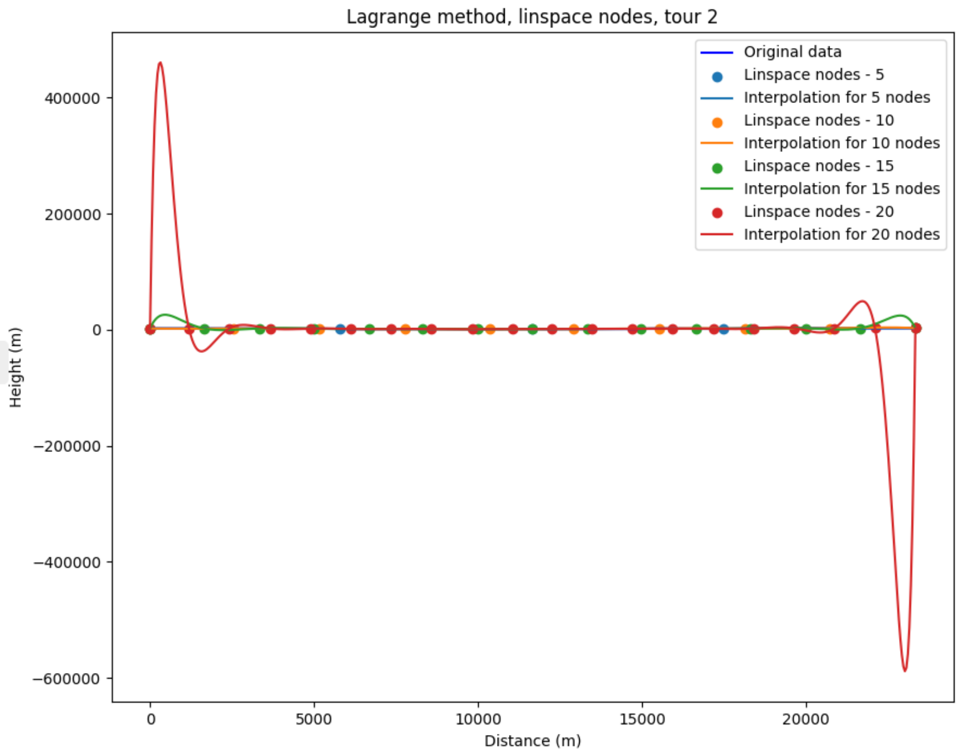


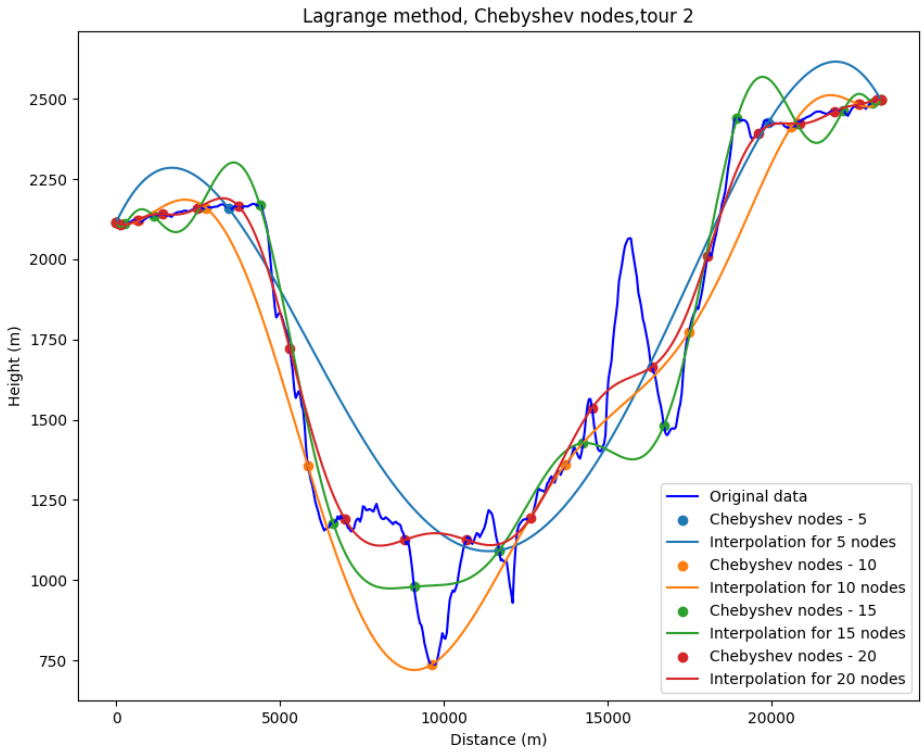
Spline method, linspace nodes, tour 1
Original data
Linspace nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Linspace nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Linspace nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Linspace nodes - 20
Interpolation for 20 nodes
Height (m)
Distance (m)

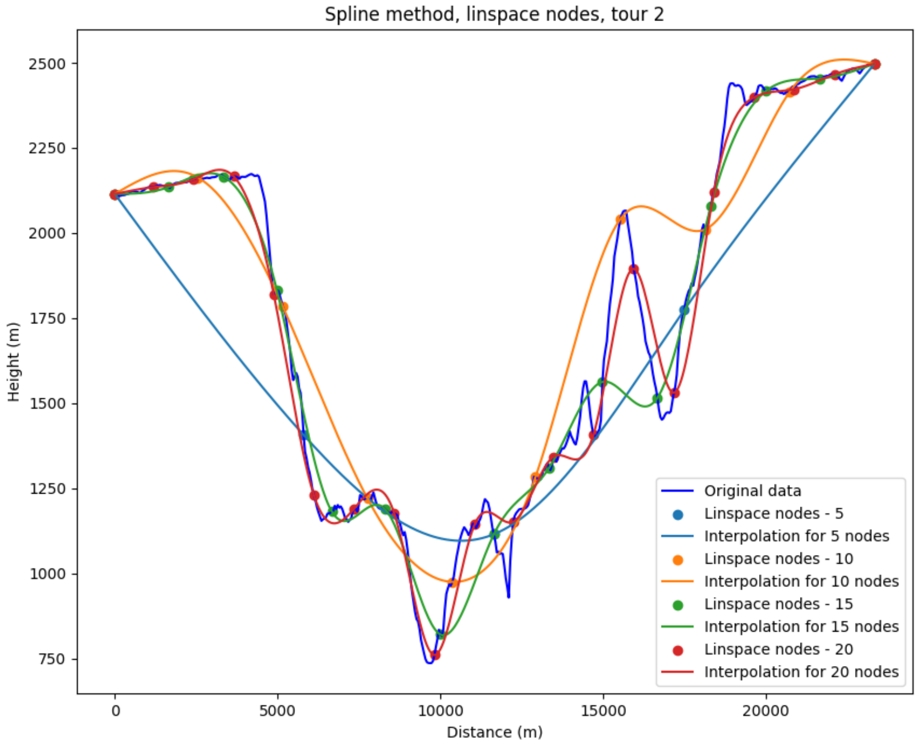


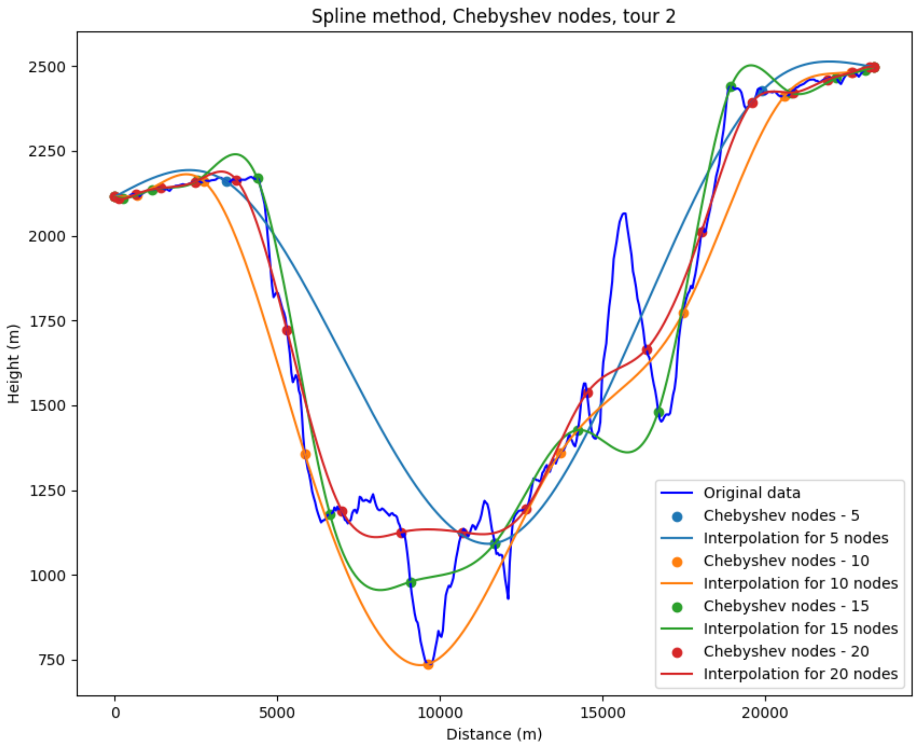
Spline method, Chebyshev nodes, tour 1
Original data
Chebyshev nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Chebyshev nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Chebyshev nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Chebyshev nodes - 20
Interpolation for 20 nodes
Height (m)
Distance (m)

3. Trasa II – Wielki kanion Kolorado

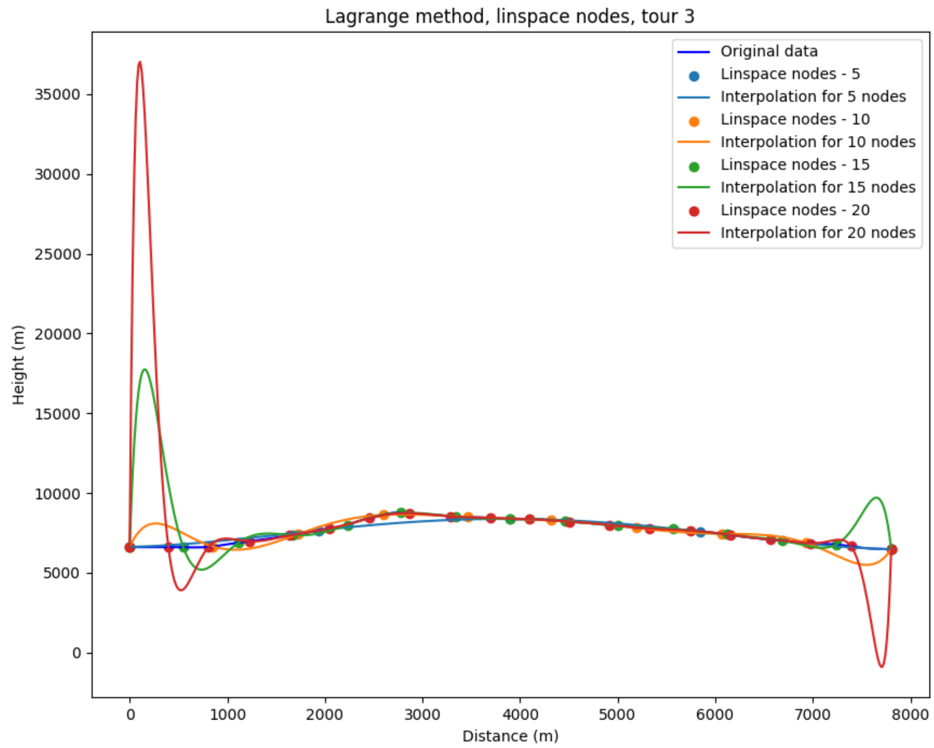


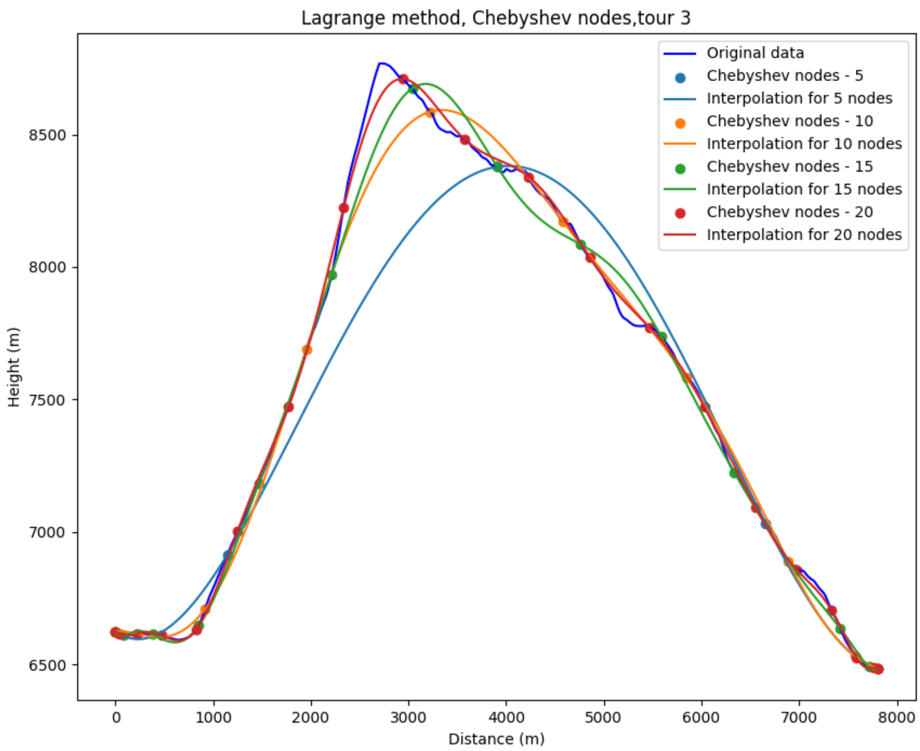


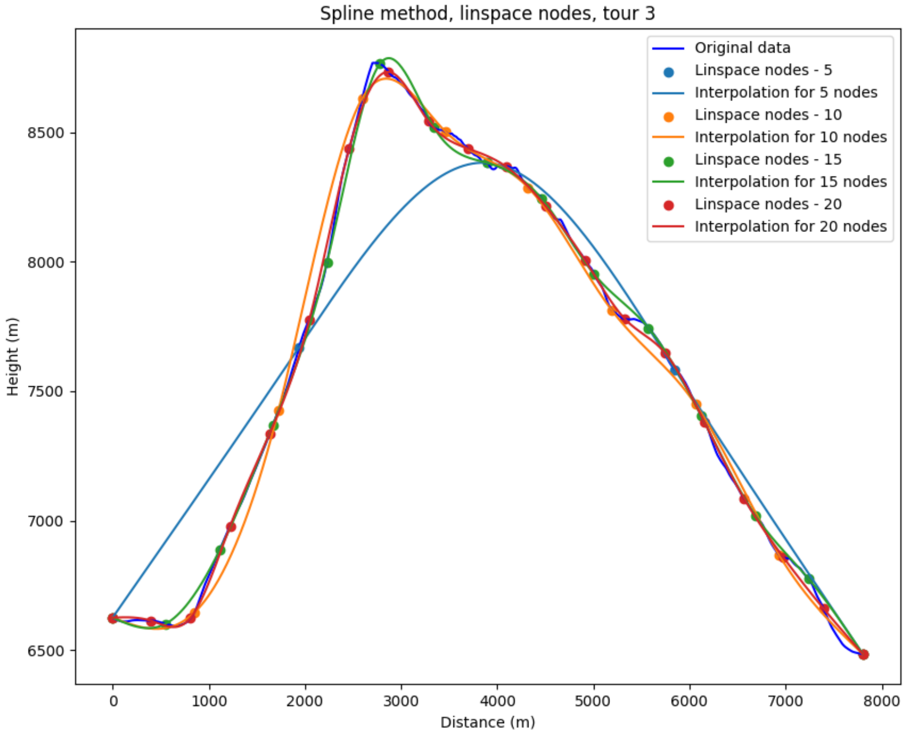

Spline method, linspace nodes, tour 2
Height (m)
Distance (m)
Original data
Linspace nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Linspace nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Linspace nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Linspace nodes - 20
Interpolation for 20 nodes


Spline method, Chebyshev nodes, tour 2
Height (m)
Distance (m)
Original data
Chebyshev nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Chebyshev nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Chebyshev nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Chebyshev nodes - 20
Interpolation for 20 nodes

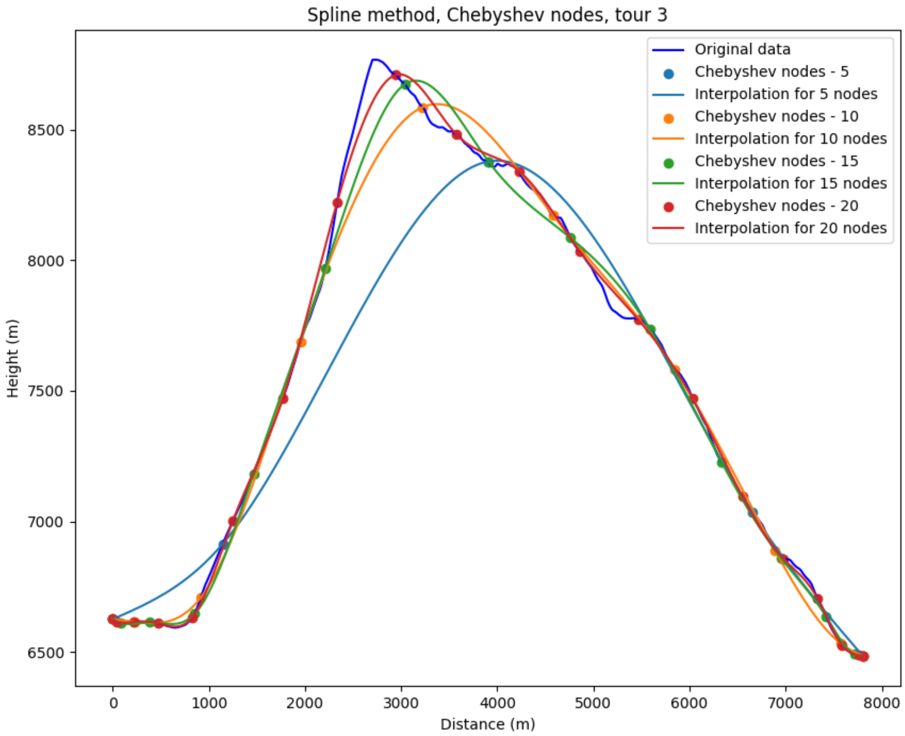
4. Trasa III – Mount Everest





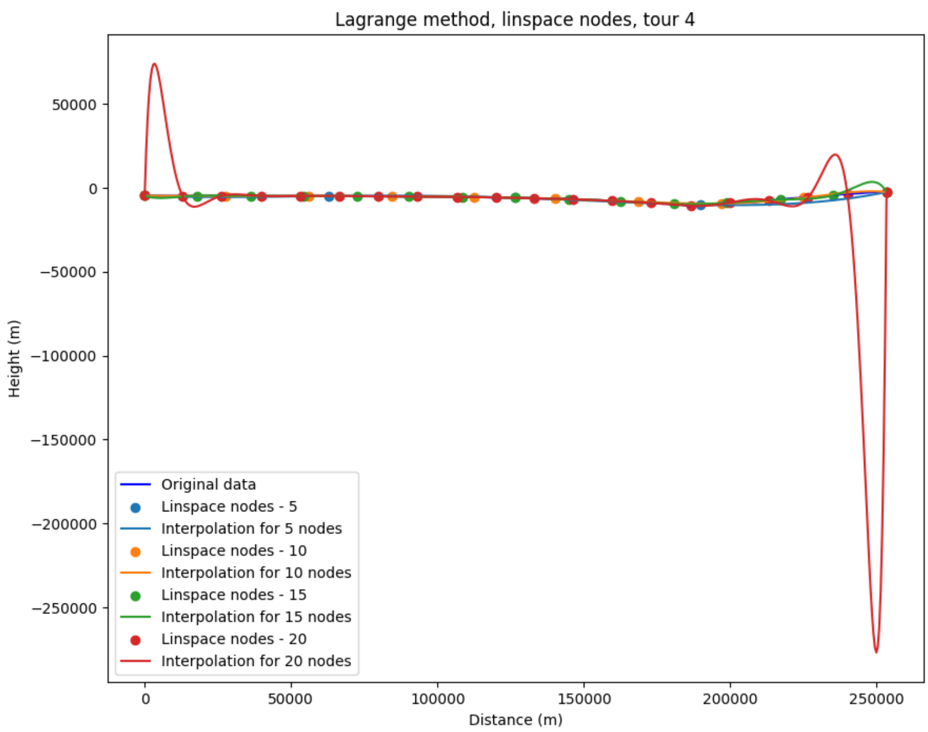


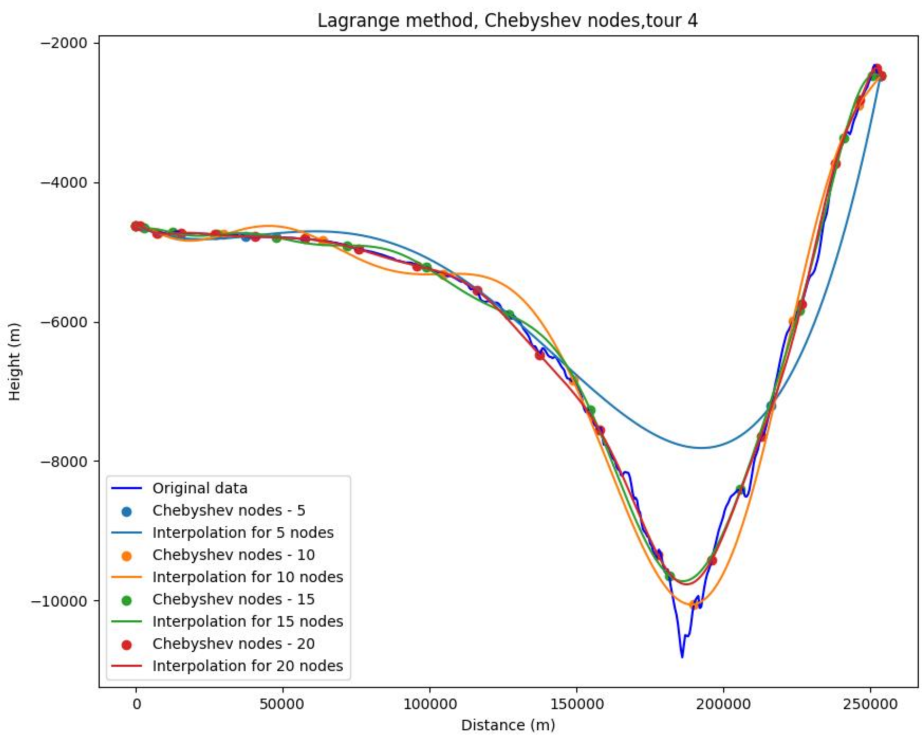
Spline method, linspace nodes, tour 3
Original data
Linspace nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Linspace nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Linspace nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Linspace nodes - 20
Interpolation for 20 nodes
Height (m)
Distance (m)

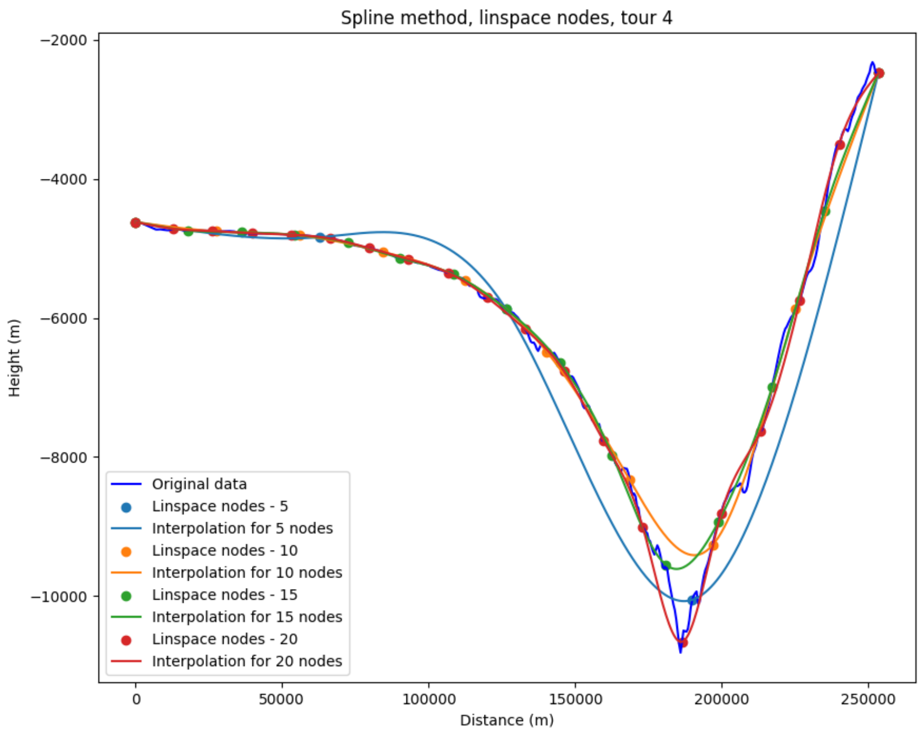


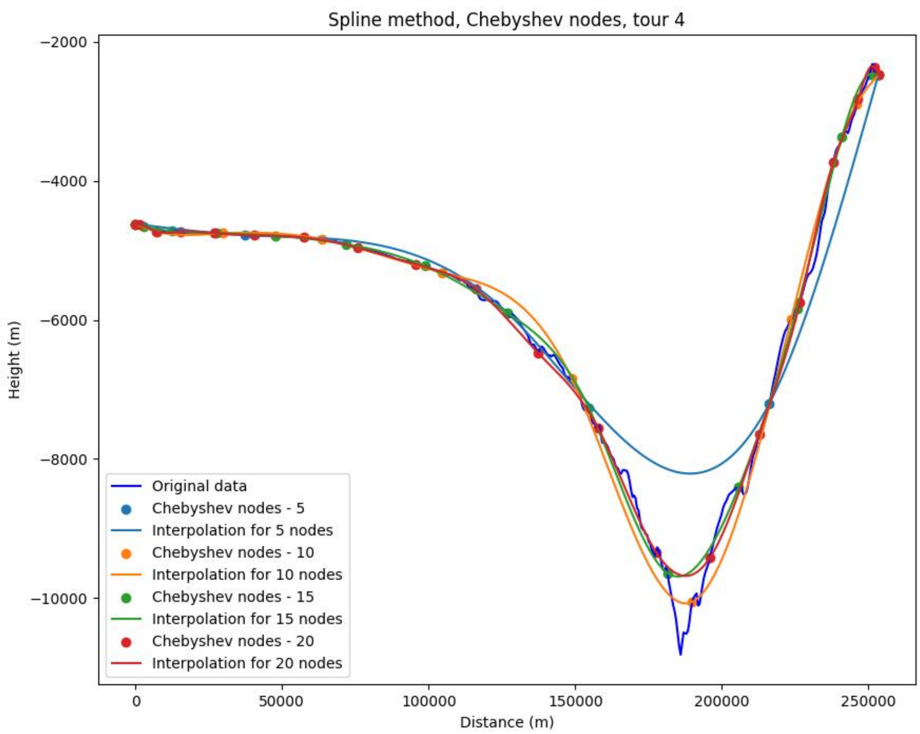
Spline method, Chebyshev nodes, tour 3
Original data
Chebyshev nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Chebyshev nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Chebyshev nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Chebyshev nodes - 20
Interpolation for 20 nodes
Height (m)
Distance (m)

5. Trasa IV - Głębia Challengera

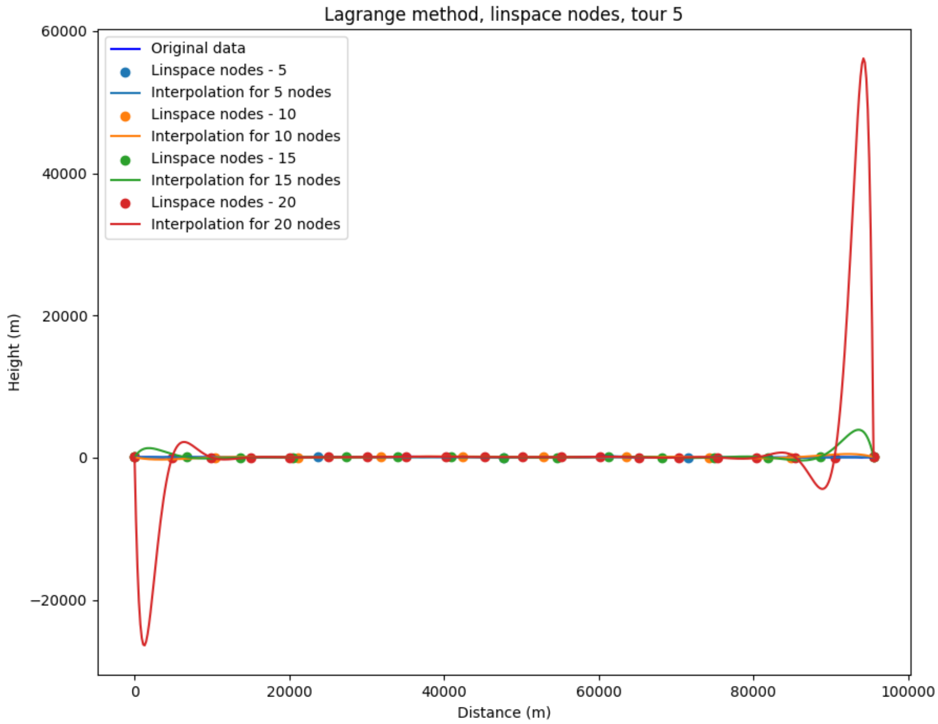


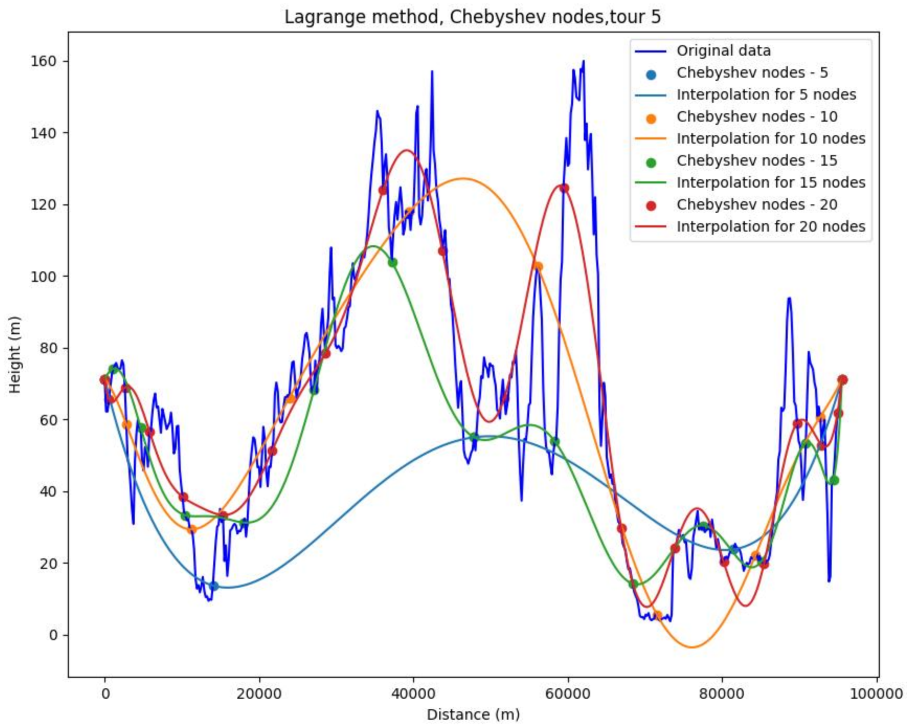


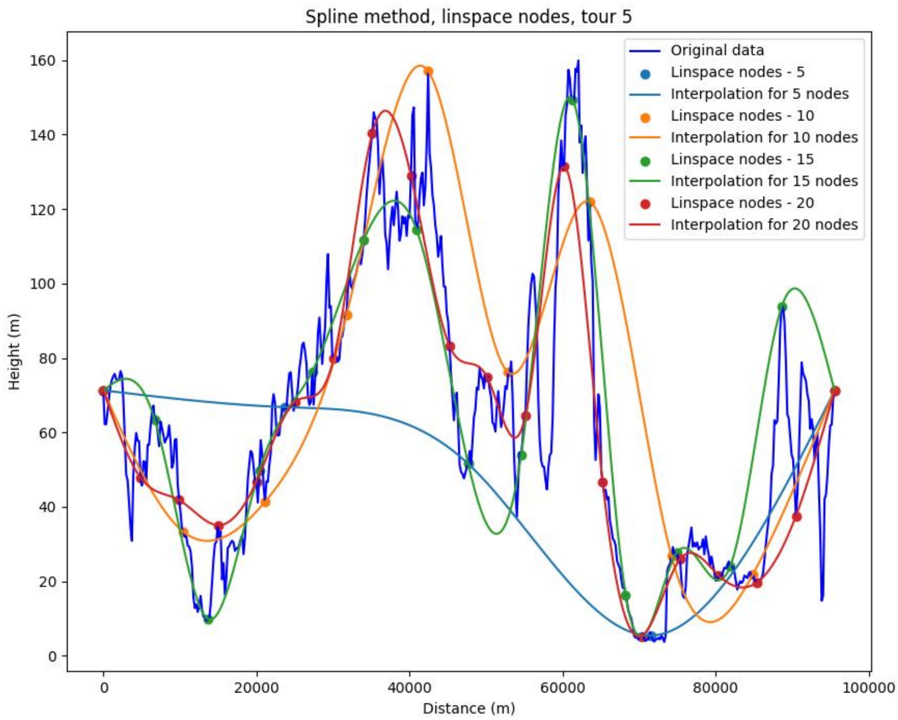

Spline method, linspace nodes, tour 4
Height (m)
Distance (m)
−2000
−4000
−6000
−8000
−10000
0
50000
100000
150000
200000
250000
Original data
Linspace nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Linspace nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Linspace nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Linspace nodes - 20
Interpolation for 20 nodes

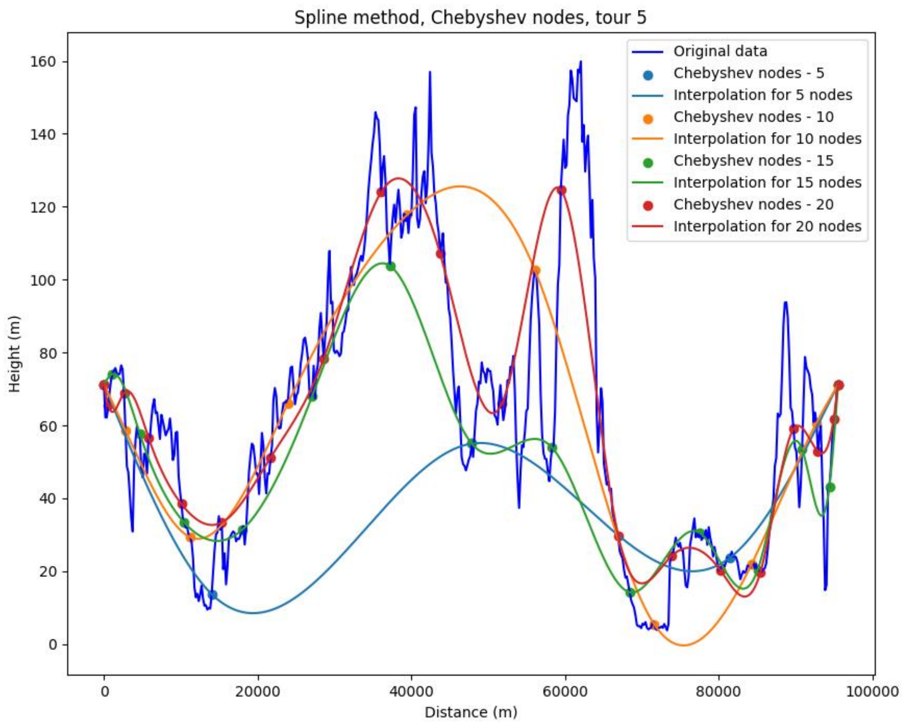

Spline method, Chebyshev nodes, tour 4
Height (m)
Distance (m)
−2000
−4000
−6000
−8000
−10000
0
50000
100000
150000
200000
250000
Original data
Chebyshev nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Chebyshev nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Chebyshev nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Chebyshev nodes - 20
Interpolation for 20 nodes

6. Trasa V – Unsyncable ryde






Spline method, linspace nodes, tour 5
Original data
Linspace nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Linspace nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Linspace nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Linspace nodes - 20
Interpolation for 20 nodes
Height (m)
Distance (m)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
0
20000
40000
60000
80000
100000


Spline method, Chebyshev nodes, tour 5
Original data
Chebyshev nodes - 5
Interpolation for 5 nodes
Chebyshev nodes - 10
Interpolation for 10 nodes
Chebyshev nodes - 15
Interpolation for 15 nodes
Chebyshev nodes - 20
Interpolation for 20 nodes
Height (m)
Distance (m)
0
20
40
60
80
100
120
140
160
0
20000
40000
60000
80000
100000

7. Podsumowanie analizy wykresów

Liczba węzłów:

Metoda Lagrange'a: Zwiększenie liczby węzłów prowadzi do efektu Rungego, gdzie wielomian interpolacyjny zaczyna oscylować i tracić dokładność na brzegach przedziału. Efekt ten można złagodzić poprzez zastosowanie rozmieszczenia węzłów Czebyszewa, które minimalizuje maksymalny błąd interpolacji.

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia: Funkcje sklejane są mniej podatne na efekt Rungego, ponieważ dzielą przedział na mniejsze segmenty, w których stosowane są wielomiany trzeciego stopnia. Dzięki temu metoda ta lepiej radzi sobie z większą liczbą węzłów, niezależnie od ich rozmieszczenia.

Rozmieszczenie węzłów (równomierne oraz Czebysheva):

Metoda Lagrange'a: Rozmieszczenie węzłów ma kluczowe znaczenie. Równomierne rozmieszczenie może prowadzić do efektu Rungego, szczególnie przy większej liczbie węzłów. Rozmieszczenie węzłów Czebyszewa, które jest gęstsze na krańcach przedziału, pomaga zminimalizować ten problem.

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia: Metoda jest bardziej elastyczna i dokładna zarówno przy równomiernym, jak i nierównomiernym rozmieszczeniu węzłów. Segmentacja na mniejsze przedziały sprawia, że lokalne oscylacje są lepiej kontrolowane, a dokładność interpolacji pozostaje wysoka.

Charakter trasy:

Trasa prosta: Im prostsza i mniej wyboista jest trasa, tym dokładniejsza jest aproksymacja interpolacyjna. Przy małych wahaniach w danych obie metody będą skuteczne.

Trasy z dużymi wahaniami: Funkcje sklejane trzeciego stopnia lepiej radzą sobie z dużymi zmianami w trajektorii danych, dzięki lokalnej aproksymacji w mniejszych przedziałach. Metoda Lagrange'a może mieć trudności z dokładnym odwzorowaniem skomplikowanych funkcji, szczególnie przy równomiernym rozmieszczeniu węzłów.

Wnioski:

Metoda Lagrange'a: Jest prosta w implementacji i efektywna przy niewielkiej liczbie węzłów, zwłaszcza gdy zastosowane są węzły Czebyszewa. Jednak jej dokładność znacząco spada przy dużej liczbie węzłów z równomiernym rozmieszczeniem z powodu efektu Rungego.

Metoda funkcji sklejanych trzeciego stopnia: Oferuje większą elastyczność i dokładność niezależnie od liczby i rozmieszczenia węzłów. Jest szczególnie skuteczna przy złożonych trasach z dużymi wahaniami, ponieważ lepiej radzi sobie z lokalnymi zmianami w danych.