有限覆盖定理及其应用

望春风

2023 年 9 月 15 日

目录

1 有限覆盖定理及其加强形式

先给出有限覆盖定理:

定理 (Heine-Borel) 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的一族开集, 如果闭区间 $[a,b]$ 包含于这一族开集的并集中, 则 $[a,b]$ 包含于有限个 U_α 的并集之中.

1.1 Heine-Borel 定理的两种证明

例题 1.1.1 用闭区间套定理证明有限覆盖覆盖定理

证明 若指标集 Γ 为有限集, 则结论不证自明, 下设指标集 Γ 为无限集. 采用反证法. 假设 $[a,b]$ 不能包含于有限个开集 U_α 之中. 即闭区间 $[a,b]$ 只能包含在无限个开集之中. 将区间 $[a,b]$ 两等分为 $[a,\frac{a+b}{2}],[\frac{a+b}{2},b]$, 则其中必有一个闭区间只能包含在无限个开集之中 (否则, 闭区间 $[a,b]$ 就能被有限个开集包含, 从而产生矛盾.) 记这个集合为 $[a_1,b_1]$, 将区间 $[a_1,b_1]$ 两等分为 $[a,\frac{a_1+b_1}{2}],[\frac{a_1+b_1}{2},b]$, 则其中必有一个闭区间只能包含在无限个开集之中, 记它为 $[a_2,b_2]$, 这个过程可以不断地做下去, 从而得到一列闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$ 满足

(1) 每一个 $[a_n,b_n]$ 均只能包含在无限个开集之并.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}(b-a)=0$

由闭区间套定理, 存在唯一的实数 ξ 属于一切 $[a_n,b_n]$, 且成立 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$. 由题设可知, 存在 $\alpha_0\in\Gamma$, 使得 $\xi\in U_{\alpha_0}$. 因为 U_{α_0} 是开集, 于是存在 $\delta>0$, 成立 $(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset U_{\alpha_0}$. 当 n 充分大时,

$$[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)\subset U_{\alpha_0}$$

这与每一个 $[a_n,b_n]$ 均只能包含在无限个开集之并矛盾, 从而定理成立.

例题 1.1.2 用 **Lebesgue 方法**证明有限覆盖定理.

证明 设闭区间 $[a,b]$ 有一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 定义集合 $A=\{x\geqslant a\}$, 其中 x 满足的条件: 区间 $[a,x]$ 在 $\{U_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖. 从区间的左端点 $x=a$ 开始. 由于在开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中自然有一个开区间覆盖 a, 因此 a 及其右侧充分临近的点均落在数集 A 中, 这保证了数集 A 的非空性.

另一方面，从数集 A 的定义可见, 若 $x\in A$, 则整个区间 $[a,x]\subset A$. 因此如果 A 无上界, 则 $b\in A$, 这说明闭区间 $[a,b]$ 在开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖.

如果 A 有上界, 利用确界存在定理, 令 $\xi=\sup A$, 容易证明对任意的 $x<\xi,x\in A$. 因此只要证明 $b<\xi$ 即可.

采用反证法. 假设 $b\geqslant\xi$, 则 $\xi\in[a,b]$, 因此在开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中有一个开区间 U_{α_0} 覆盖 ξ. 从而可以在这个开区间中找到 a_0,b_0, 使得它满足条件 $a_0<\xi<b_0$. 从而一定有 $a_0\in A>$ 这就是说区间 $[a,a_0]$ 在开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中存在有限子覆盖. 向这个有限子覆盖再加上一个开区间 U_{α_0}, 就成为区间 $[a,b_0]$ 的覆盖, 从而 $b_0\in A$, 这与 $\xi=\sup A$ 矛盾. 于是定理成立.

注:(1) 有限覆盖定理是对实数系中的有界闭区间的紧性这一拓扑性质的刻画, 需要特别指出的是, 在**实数**范围内, 区间的紧性与有界闭是等价的, 因此也将有界闭区间称为**紧区间**.

(2)**Lebesgue 方法**的几何意义是明显的, 它也常用来证明**零点存在定理**等许多问题, 但是它给出的证明多为非构造性的, 且很难推广到更高维的情形.

1.2 加强形式覆盖定理及其证明

下面以例题的方式给出有限覆盖定理的加强形式及其证明.

例题 1.2.1(有限覆盖定理的加强形式) 如果 $\{U_\alpha\}$ 是区间 $[a,b]$ 的一个开区间, 则存在一个正数 $\delta>0$, 使得对于区间 $[a,b]$ 中的任何两个点 x',x'', 只要 $\left|x'-x''\right|<\delta$, 就存在开覆盖中的一个开区间, 它覆盖 $x'.x''$.(称这个数 δ 为开覆盖的 **Lebesgue** 数.)

证明 首先由有限覆盖定理, 得到区间 $[a,b]$ 的一个有限子覆盖, 即开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开区间

$$U_1,U_2,\cdots,U_n,(1)$$

他们的并覆盖了 $[a,b]$. 将这有限个开区间的所有端点按大小顺序排列, 去掉可能重复的点, 记为

$$x_0<x_1<\cdots<x_N$$

记这个端点集为 $A=\{x_0,x_1,\cdots,x_N\}$, 并令

$$\delta=\min\left\{x_1-x_0,x_2-x_1,\cdots,x_N-x_{N-1}\right\}.$$

下面证明 δ 记为所求的 Lebesgue 数.

设任取两点 $x',x''\in[a,b]$, 是 $0<x''-x'<\delta$. 则只能有下面两种可能:

(a) 在闭区间 $[x',x'']$ 内没有端点集 A 的点. 于是 (1) 式中覆盖该闭区间中任何一点的开区间也就覆盖了整个闭区间.

(b) 在闭区间 $[x',x'']$ 内有端点集 A 的点. 由数 δ 的取法, 这样的点有且只有一个, 记这个点为 x_i, 于是成立 $x'\leqslant x_i\leqslant x''$. 由于这个点是 (1) 式中的开区间的端点, 而这个开区间不覆盖点 x_i, 因此在 (1) 式中一定另外存在开区间覆盖点 x_i, 它的左右端点必然分别小于 x' 和大于 x'', 从而也就同时覆盖点 x',x''.

2 有限覆盖定理的几个应用

下面以例题的形式利用有限覆盖定理证明几个命题.

例题 2.1.1(Balzano-Weiestrasss) 有界数列必有收敛子列.

证明 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 不妨设 a_n 均包含在 $[a,b]$ 中.

断言: 存在 $\alpha\in[a,b]$, 使得任给 $\delta>0,(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ 中均包含无限项 a_n. 采用反证法证明此断言.

假设不然, 则任给 $x\in[a,b]$, 存在 $\delta(x)>0$, 使得 $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ 只含有限项 a_n, 显然, 区间 $[a,b]$ 包含于集合族 $\{(x-\delta(x),x+\delta(x))\}_{x\in[a,b]}$ 之并. 从而由 $Heine-Borel$ 定理,$[a,b]$ 包含于有限个 $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ 之并. 这说明 $[a,b]$ 只含有限项 a_n, 矛盾!

利用这一断言, 可以选取数列 $\{a_n\}$ 的一个收敛到 α 的子列. 事实上, 可先取 $a_{n_1}\in(\alpha-1,\alpha+1)$. 再取 $n_2>n_1$, 使得 $a_{n_2}\in(\alpha-\frac{1}{2},\alpha+\frac{1}{2})$. 不断做下去, 可以得到子列 $\{a_{n_k}\}$, 满足 $a_{n_k}\in(\alpha-\frac{1}{k},\alpha+\frac{1}{k})$. 于是 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 α 是显然的.

注:**Balzano-Weiestrass 定理**即所谓的致密性定理, 它与实数系连续性定理——**确界存在定理**和实数系完备性定理——**Cauchy 收敛原理**是等价的.

例题 2.1.2(有界性定理) 闭区间上的局部有界函数必为有界函数.

证明 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的局部有界函数, 则任给 $x \in [a,b]$, 均存在 $\delta(x) > 0$ 以及 $M(x) > 0$, 使得

$$|f(y)| \leqslant M(x), \quad \forall y \in (x-\delta(x), x+\delta(x)) \cap [a,b].$$

显然, 区间 $[a,b]$ 包含于集合族 $\{(x-\delta(x), x+\delta(x))\}_{x\in[a,b]}$ 之并. 从而由 $Heine\text{–}Borel$ 定理, 存在 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in [a.b]$, 使得

$$[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} \left(x_i - \delta\left(x_i\right), x_i + \delta\left(x_i\right)\right)$$

记 $M = \max\left\{M(x_i) | i = 1, 2, \cdots, k\right\}$, 则 $|f| \leqslant M$ 在区间 $[a,b]$ 上总是成立的.

下面三个例题的证明, 不再使用 Heine-Borel 定理, 而改用加强形式的有限覆盖定理.

例题 2.1.3(零点存在定理) 设 $f \in C[a,b]$, 且满足条件 $f(a)f(b) < 0$, 则存在点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) = 0$.

证明 用反证法. 设连续函数 f 在区间 $[a,b]$ 两端有 $f(a)f(b) < 0$, 但在区间中无零点. 任取一点 $x_0 \in [a,b]$, 因为 $f(x_0) \neq 0$, 从连续函数的局部保序性定理, 存在 $\delta > 0$, 使得函数 f 在邻域 $O\left(x_0, \delta\right) \cap [a,b]$ 上保号. 对区间内的每一点都这样做, 就得到区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 在这个开覆盖中的每一个开区间 (和 $[a,b]$ 的交集) 上, 函数 f 都保号.

由加强形式的覆盖定理得, 存在 Lebesgue 数 $\delta > 0$, 使得对 $[a,b]$ 中的任意两点 x', x'', 只要 $\left|x' - x''\right| < \delta$, 就有开覆盖中的某一个开区间将 x', x'' 两点覆盖住. 即保证了当 $\left|x' - x''\right| < \delta$ 时, 成立 $f(x')f(x'') > 0$.

用这个 Lebesgue 数 δ 在闭区间 $[a,b]$ 中插入一系列点, 连同端点一起, 记为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

使得 $\left|x' - x''\right| < \delta, i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 由于 $f(x_{i-1})f(x_i) > 0, i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 可见 $f(a)f(b) > 0$. 矛盾!

注 分析上面的证明过程不难发现, 用有限覆盖定理的证明是非构造性的, 它断定了根的存在性, 但并未提供方法求这个根, 这种证明方法称为**非构造性证明**.

例题 2.1.4(Cantor 定理) 闭区间上的连续函数必定一致连续.

证明 $\forall \varepsilon > 0$ 和 $x_0 \in [a,b]$, 由于 f 在 x_0 连续, 存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in O\left(x_0, \delta\right) \cap [a,b]$ 时, 成立 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. 因此当 $x', x'' \in O\left(x_0, \delta\right) \cap [a,b]$ 时, 就有

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leqslant \left|f(x') - f(x_0)\right| + \left|f(x_0) - f(x'')\right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

对每一个 $x \in [a,b]$ 都这样做, 就得到区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 从而由加强形式的覆盖定理, 将其中的 Lebesgue 数记为 η. 当 $x', x'' \in [a,b]$, 且 $\left|x' - x''\right| < \eta$ 时, 在开覆盖中存在一个开区间, 它覆盖点 x', x''. 由上述的构造方法, 就知道成立

$$\left|f(x') - f(x'')\right| < \varepsilon.$$

这样就已经证明了 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

例题 2.1.5(Lebesgue 定理) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, 则 $f \in R[a,b]$ 的充分必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上的不连续点构成的集合为零测度集.

证明 本文只证充分性, 必要性的证明可参考史济怀教授的数学分析教程, 亦可参考周民强所著《实变函数论》.

对于给定的 $\varepsilon, \eta > 0$, 先用总长度小于 ε 的有限个或可列个开区间覆盖 f 的所有不连续点, 设为 x_0, 用一个邻域 $O(x_0)$ 覆盖, 且要求 f 在这个小邻域上的振幅小于 η. 由于 f 在 x_0 处的连续性, 这是可以做到的.

对于每个连续点都取这样的邻域, 于是这些所有的邻域和覆盖不连续点的开区间在一起就构成区间 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 记为 $\{U_\alpha\}$.

利用加强形式的覆盖定理, 存在 Lebesgue 数 δ, 使得在区间 $[a, b]$ 中的相距不超过 δ 的任意两个点都可以用开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中的某一个开区间同时覆盖.

对于区间 $[a, b]$ 取细度不超过 δ 的等距划分 P. 这时每个子区间被开覆盖中的一个开区间所覆盖. 如果子区间是由原来覆盖不连续点的开区间覆盖, 则这类子区间的总长度必小于 ε. 而覆盖所有其他子区间的开区间的开区间都是原先用于覆盖连续点的邻域, 因此 f 在每一个这类子区间上的振幅小于 η.