SUR UNE CONJECTURE DE SCHINZEL.

FRANCESCO AMOROSO 1 , NJAKA HARILALA ANDRIAMANDRATOMANANA 2 ET DENIS SIMON 2

(1) Dipartimento di Matematica Università di Torino Via Carlo Alberto, 10 - 10123 Torino, Italy

(2) Laboratoire de mathématiques Nicolas Oresme, CNRS UMR 6139 Université de Caen Normandie, Campus II, BP 5186 14032 Caen Cedex, France

RÉSUMÉ. Nous donnons une nouvelle preuve d'une conjecture de Schinzel sur l'intersection d'une sous-variété de codimension au moins 2 dans une puissance du groupe multiplicatif avec un tore de dimension 1. La preuve repose sur un théorème géométrique de Bézout de P. Philippon et sur des minorations pour la hauteur du premier auteur, S. David et E. Viada. Elle donne pour la première fois un résultat explicite, en fonction de la hauteur et du degré de la variété. Il s'inspire d'un énoncé similaire de S. Checcoli, F. Veneziano et E. Viada dans un produit de courbes elliptiques.

We give a new proof of a conjecture of Schinzel on the intersection of a subvariety of codimension at least 2 in a power of the multiplicative group with a torus of dimension 1. The proof rests on a geometric Bézout's theorem of P. Philippon and on lower bounds for the height of the first author, S. David and E. Viada. It gives for the first time an explicit result, depending on the height and degree of the variety. It is inspired on a similar statement on products of elliptic curves, by S. Checcoli, F. Veneziano and E. Viada.

2020 Mathematical Subject Classification: 11J99, 11G30, 11G50.

Keywords. Multiplicative group, polynomials, heights.

In memory of Andrzej Schinzel

1. Introduction

La conjecture de Schinzel à laquelle se réfère le titre de cet article est la suivante :

Conjecture 1.1 (Schinzel, 1965). Soient $F, G \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ premiers entre eux. Soit ensuite $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ et soit $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ différent d'une

racine de l'unité. Supposons que

$$F(\xi^{a_1}, \dots, \xi^{a_n}) = G(\xi^{a_1}, \dots, \xi^{a_n}) = 0.$$

Alors, il existe un vecteur non nul $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ orthogonal à \mathbf{a} et de norme L_{∞} satisfaisant :

$$\|\mathbf{b}\|_{\infty} \leq B(F, G),$$

où B(F,G) > 0 dépend seulement de F et G.

A. Schinzel a énoncé cette conjecture dans [17, Conjecture, p. 3] et en a donné une preuve dans [18, Theorem 1, p. 47] dans le cas particulier $n \leq 3$. On pourra aussi se référer à [19, Conjecture 1, p. 279 et Theorem 45, p. 144]. La conjecture 1.1 a ensuite été démontrée en toute généralité par E. Bombieri et U. Zannier [19, Appendix] et, dans une forme plus générale et avec une méthode partiellement différente, par E. Bombieri, D. Masser et U. Zannier [6, Theorem 1.6]. Ces preuves sont effectives mais pas explicites (voir la discussion après [9, Theorem 2]).

On présente ici une nouvelle démonstration en explicitant la dépendance en le degré et en la taille des coefficient de F et G. Notre méthode s'inspire de l'approche de S. Checcoli, F. Veneziano et E. Viada dans [7], où les auteurs ont démontré un analogue de la conjecture 1.1 dans le cas de produit de courbes elliptiques. Notre démarche utilise le théorème de Bézout arithmétique de P. Philippon et une version fonctorielle du théorème de Dobrowolski généralisé.

Etant donné un polynôme de Laurent $F \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$, on note $\deg(F)$ son degré (*i.e.* le degré de la clôture de Zariski dans \mathbb{P}_n de l'hypersurface de \mathbb{G}_m^n d'équation F = 0) et $||F||_1$ la norme L_1 du vecteur de ses coefficients.

Théorème 1.2. Soient $F_1, \ldots, F_s \in \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$. Notons

$$D := \max_{1 \le i \le s} \deg(F_i), \quad et \quad h_1 := \max_{1 \le i \le s} \log ||F_i||_1,$$

et $\tilde{h}_1 := h_1 + (n+13)\log(n+1)D$. Soient également $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $\xi \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ différent d'une racine de l'unité.

On suppose qu'il existe une composante irréductible W de codimension $k \geq 2$ de la sous-variété de $\mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$ définie par $F_1 = \cdots = F_s = 0$ et qui passe par le point $(\xi^{a_1}, \ldots, \xi^{a_n})$. Il existe alors un vecteur non nul $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$ orthogonal à \mathbf{a} et de norme L_2 satisfaisant :

$$\|\mathbf{b}\|_{2} \le (4n)^{17n} \tilde{h}_{1} D^{k-1} \log(3\tilde{h}_{1} D^{k})^{2n}$$

On remarquera que la dépendance quasi-linéaire en la taille des coefficients dans le théorème 1.2 s'accorde bien avec l'exemple suivant dû à Schinzel :

$$n = s = 2$$
, $F_1(x_1, x_2) = x_1 - 2$, $F_2(x_1, x_2) = x_2 - 2^a$
et $\xi = 2$, $(a_1, a_2) = (1, a)$,

et également avec [4, Theorem 2.3], où les auteurs montrent une borne pour $\|\mathbf{b}\|_{\infty}$, indépendante de h_1 si cette dernière quantité est suffisamment petite

par rapport à $\|\mathbf{a}\|_{\infty}$.

M. Filaseta, A. Granville et A. Schinzel [9, Theorem B] ont montré à l'aide de l'ex-conjecture 1.1 qu'il existe un algorithme qui permet de calculer le pgcd de deux polynômes $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ de degré au plus $d \geq 2$ en $O_{f,g}(\log d)$ opérations binaires, sous l'hypothèse qu'au moins l'un des f et g n'a pas de facteur cyclotomique. La constante implicite dans $O_{f,g}$ dépend, effectivement mais pas explicitement, du nombre de coefficients de f et g et de leur taille. Ensuite, le premier auteur, L. Leroux et M. Sombra [3, Theorem 4.3] ont précisé ce résultat, en montrant qu'il existe un algorithme qui permet de déterminer la partie non-cyclotomique du pgcd de f et g en au plus $O_{f,g}(\log d)$ opérations binaires, même si f et g ont des facteurs cyclotomiques. La constante implicite dans $O_{f,g}$ dépend à nouveau de façon effective mais pas explicite du nombre de coefficients des polynômes et de leur taille. Le théorème 1.2 permet en principe d'expliciter cette dépendance.

Plan de l'article. Dans le paragraphe 2, après avoir rappelé quelques faits standards sur la géométrie dans une puissance d'un groupe multiplicatif, nous énoncerons des résultats de géométrie des nombres qui nous seront utiles dans la suite. Dans le paragraphe 3, on rappellera les définitions de hauteur projective et normalisée et du minimum essentiel. Le paragraphe 4 sera consacré au rappel du théorème de Bézout de P. Philippon. Dans le paragraphe 5 on présentera une preuve d'une version fonctorielle du théorème de Dobrowolski en dimension supérieure de S. David et du premier auteur [1]. Cette minoration se déduit du résultat principale de [5] à l'aide d'un lemme de transfert de G. Rémond. Nous prouverons le théorème 1.2 dans le paragraphe 6.

Remerciements. L'énoncé et la preuve du lemme 5.1 sont de Gaël Rémond, qui les a transmis au premier auteur. Le premier auteur remercie également Patrice Philippon pour plusieurs clarifications concernant sa version du théorème de Bézout arithmétique et de l'article [15], et Francesco Veneziano pour des échanges à propos de la stratégie de la preuve de [7].

F. Amoroso et D. Simon remercient le projet IEA (International Emerging Action) PAriAIPP (Problèmes sur l'Arithmétique et l'Algèbre des Petits Points) du CNRS pour le soutien financier. F. Amoroso est membre du réseau INdAM GNSAGA.

2. Généralités sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{n}$, géométrie des nombres

Pour les notations et les rappels ci-dessous, le lecteur pourra se rapporter à [22, chapitre IV, section 2.2].

Nous travaillons dans une puissance $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ du groupe multiplicatif. Pour $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ et $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, on pose $\mathbf{x}^{\lambda} = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$. Pour un entier l,

on note aussi $[l]: \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ la « multiplication » par l, i.e. le morphisme $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^l := (x_1^l, \dots, x_n^l)$.

Par sous-variété V de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$, nous entendons un fermé de Zariski définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On dit que V est irréductible si sa fermeture est géométriquement irréductible. De même, on dit que V est irréductible sur un corps $K\subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ si sa fermeture de Zariski est irréductible sur K.

Par sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$ nous entendons une sous-variété algébrique fermée stable sous les opérations de groupe. Un sous-groupe algébrique irréductible est appelé (sous-)tore. Nous appelons sous-variété de torsion de $\mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$, un translaté d'un sous-tore par un point de torsion. Tout sous-groupe algébrique est une union finie de sous-variété de torsion.

Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^n$ un sous-groupe de rang k. Alors

$$H_{\Lambda} := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{n}, \ \forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, \ \mathbf{x}^{\boldsymbol{\lambda}} = 1 \}$$

est un sous-groupe algébrique de dimension n-k. De plus, $\Lambda \mapsto H_{\Lambda}$ est une bijection entre sous-groupes de \mathbb{Z}^n et sous-groupes algébriques de \mathbb{G}^n . Le sous-groupe Λ est saturé (*i.e.* si $k\lambda \in \Lambda$ avec $k \geq 1$ entier et $\lambda \in \mathbb{Z}^n$, alors $\lambda \in \Lambda$) si et seulement si H_{Λ} est un tore.

On fixe le plongement

$$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{n} \hookrightarrow \mathbb{P}_{n}$$

$$(x_{1}, \dots, x_{n}) \to (1 : x_{1} : \dots : x_{n})$$

Le degré d'une sous-variété est alors le degré de la fermeture Zariski de son image. On note $\overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1},\ldots,x_n^{\pm 1}]$ l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Par degré d'un polynôme de Laurent $F\in\overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1},\ldots,x_n^{\pm 1}]$ on entend donc le degré de l'hypersurface d'équation F=0.

Le lemme suivant, dû à M. Laurent [11, Lemme 3] (voir aussi [20, Lemma 4]), permet de déterminer des générateurs du sous-groupe de \mathbb{Z}^n associé à un sous-groupe algébrique contenu dans une sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Pour $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^n$ on note $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{ \lambda_1 - \lambda_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{A} \}$.

Lemme 2.1. Soient $F_1, \ldots, F_s \in \overline{\mathbb{Q}}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ et soit H un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ contenu dans la sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ définie par $F_1 = \cdots = F_s = 0$, maximale par cette propriété. Il existe alors un sous-groupe Λ de \mathbb{Z}^n engendré par des vecteurs dans $\mathcal{D}(\bigcup_{i=1}^s \mathrm{Supp}(F_i))$ tel que $H = H_{\Lambda}$.

Soit Λ un sous-groupe de \mathbb{Z}^n . On note $\operatorname{Vol}(\Lambda)$ le (co)volume de Λ défini comme étant le volume (pour la mesure de Lebesgue associée) d'une maille fondamentale de Λ vu comme un réseau du sous-espace $\mathbb{R}\Lambda$ de \mathbb{R}^n engendré par Λ .

Lemme 2.2. Soit Λ un sous-groupe de \mathbb{Z}^n de rang k et $H_{\Lambda} \subseteq \mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$ le sous-groupe algébrique associé, de dimension d := n - k. On note Δ le maximum des valeurs absolues des déterminants $k \times k$ d'une base de Λ . Alors :

1)
$$\Delta \leq \deg(H_{\Lambda}) \leq \binom{n}{k} \Delta$$
;

2)
$$\binom{n}{k}^{-1/2} \deg(H_{\Lambda}) \leq \operatorname{Vol}(\Lambda) \leq \binom{n}{k}^{1/2} \deg(H_{\Lambda})$$

Démonstration. Pour $p=1,2,\ldots\infty$, notons $\operatorname{Vol}_p(\Lambda)$ la norme L_p du vecteur des déterminants $k\times k$ d'une base de Λ . Donc $\operatorname{Vol}_\infty(\Lambda)=\Delta$ et, d'après la formule de Cauchy-Binet, $\operatorname{Vol}_2(\Lambda)=\operatorname{Vol}(\Lambda)$. De plus,

$$\operatorname{Vol}_1(\Lambda) \le \binom{n}{k} \operatorname{Vol}_{\infty}(\Lambda)$$
 et $\operatorname{Vol}_2(\Lambda) \le \binom{n}{k}^{1/2} \operatorname{Vol}_{\infty}(\Lambda)$

et, par Cauchy-Schwarz, $\operatorname{Vol}_1(\Lambda) \leq \binom{n}{k}^{1/2} \operatorname{Vol}_2(\Lambda)$. Par [15], p.312, avant-dernière formule et dernière phrase qui précèdent la Proposition 4.2, on a :

$$\operatorname{Vol}_{\infty}(\Lambda) \leq \deg(H_{\Lambda}) \leq \operatorname{Vol}_{1}(\Lambda),$$

Les inégalités du lemme suivent immédiatement.

Soit à nouveau Λ un sous-groupe de \mathbb{Z}^n de rang k. Pour $1 \leq i \leq k$, on note $\lambda_i(\Lambda)$ le i-ème minimum successif de Λ :

(2.1)
$$\lambda_i(\Lambda) = \inf \max_{1 \le j \le i} \|\mathbf{b}_j\|_2,$$

où le infimum est pris sur l'ensemble de famille libre $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_i\}$ de Λ et où $\|\star\|_2$ désigne la norme L_2 . En d'autres termes, $\lambda_i(\Lambda)$ est le rayon de la plus petite boule euclidienne dans \mathbb{R}^n qui contient i vecteurs de Λ linéairement indépendants. A l'aide du théorème de Minkowski, on déduit du point 2) du lemme 2.2 le résultat suivant :

Lemme 2.3. Soient $n \geq 2$ et $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$. Il existe une base $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}\}$ de \mathbf{a}^{\perp} telle que

$$2^{-i}V_i \binom{n}{i}^{-1/2} \prod_{j=1}^i \lambda_j(\mathbf{a}^\perp) \le \deg(H_{\Lambda_i}) \le \binom{n}{i}^{1/2} \prod_{j=1}^i \lambda_j(\mathbf{a}^\perp)$$

où $V_i = \pi^{i/2}\Gamma(1+i/2)^{-1}$ designe le volume de la boule unité en dimension i et où H_{Λ_i} désigne le tore (Λ_i etant primitif) associé au sous-groupe $\Lambda_i := \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i \rangle_{\mathbb{Z}}$ engendré par $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i$.

Démonstration. On fixe $\varepsilon > 0$. Soient $\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{n-1}$ des éléments linéairement indépendants de \mathbf{a}^{\perp} tels que $\|\tilde{\mathbf{b}}_i\|_2 \leq \lambda_i(\mathbf{a}^{\perp}) + \varepsilon$. Par une transformation triangulaire, on construit une base $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{n-1}$ de \mathbf{a}^{\perp} telle que $\langle \tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_i \rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i \rangle_{\mathbb{Z}}$. En utilisant l'inégalité de Hadamard on obtient :

$$\operatorname{Vol}(\langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i \rangle_{\mathbb{Z}}) \leq \operatorname{Vol}(\langle \tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_i \rangle_{\mathbb{Z}}) \leq \prod_{j=1}^i \|\tilde{\mathbf{b}}_j\|_2 \leq \prod_{j=1}^i (\lambda_j(\mathbf{a}^{\perp}) + \varepsilon),$$

pour i = 1, ..., n - 1. Par un argument de compacité, il existe une base $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{n-1}$ de \mathbf{a}^{\perp} tel que

(2.2)
$$\operatorname{Vol}(\Lambda_i) \leq \prod_{j=1}^i \lambda_j(\mathbf{a}^{\perp}), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

où l'on a noté $\Lambda_i := \langle \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i \rangle_{\mathbb{Z}}$. Comme $\Lambda_i \subseteq \mathbf{a}^{\perp}$, on a $\lambda_j(\mathbf{a}^{\perp}) \leq \lambda_j(\Lambda_i)$ pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$. Donc, d'après le second théorème de Minkowski [21, Theorem 16], pour $i = 1, \dots, n-1$ on a :

(2.3)
$$\prod_{j=1}^{i} \lambda_j(\mathbf{a}^{\perp}) \le \prod_{j=1}^{i} \lambda_j(\Lambda_i) \le 2^i V_i^{-1} \operatorname{Vol}(\Lambda_i).$$

En combinant les inégalités (2.2) et (2.3) avec le lemme 2.2, point 2) (avec $\Lambda = \Lambda_i$), on obtient :

$$\binom{n}{i}^{-1/2} \deg(H_{\Lambda_i}) \le \prod_{i=1}^i \lambda_j(\mathbf{a}^\perp) \le 2^i V_i^{-1} \binom{n}{i}^{1/2} \deg(H_{\Lambda_i})$$

pour $i=1,\ldots,n-1$, d'où l'encadrement souhaité pour $\deg(H_{\Lambda_i})$.

3. Hauteurs

Rappelons la notion de hauteur de Weil dans l'espace projectif \mathbb{P}_n . Soit $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n) \in \mathbb{P}_n(\overline{\mathbb{Q}})$. On choisit un corps de nombres qui contient les coordonnées projectives $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de $\boldsymbol{\alpha}$. On pose :

(3.1)
$$h(\boldsymbol{\alpha}) := \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v} n_v \log |\boldsymbol{\alpha}|_v$$

où la somme porte sur les places v de K (finies et infinies), $n_v := [K_v : \mathbb{Q}_v]$ est le degré local et $|\alpha|_v := \max(|\alpha_0|_v, \dots, |\alpha_n|_v)$. Cette definition ne dépend ni du choix de K ni du choix des coordonnées projectives de α .

Soit Y une sous-variété géométriquement irréductible de \mathbb{P}_n . Dans [12], [13] et [14], P. Philippon définit une notion de hauteur de Y, notée $h_{\mathbb{P}_n}(Y)$, à l'aide de la théorie des formes éliminantes. La définition de hauteur d'une variété s'étend par additivité à un cycle de Chow $S = \sum_i [l_i] Y_i$ (Y_i irréductibles) à coefficients $l_i \in \mathbb{N}$, par : $h_{\mathbb{P}_n}(S) := \sum_i l_i h_{\mathbb{P}_n}(Y_i)$.

Nous remarquons que dans [14] l'auteur considère des sous-variétés projectives définies sur un corps de nombres K et qui sont implicitement supposées K-irréductibles (au moins on peut se réduire à ce cas en considérant le cycle des conjugués galoisiens de chaque variété). Ici, nous utiliserons le mot sous-variété de \mathbb{P}_n pour se référer à une intersection ensembliste de sous-variétés géométriquement irréductibles de \mathbb{P}_n . Comme on le fait usuellement, nous noterons aussi par $Y \cap W$ l'intersection ensembliste de Y et W. Soient I et J les idéaux homogènes définissant Y et W; on peut alors identifier cette intersection au cycle ZR(I+J) supporté sur les composantes irréductibles de l'intersection et avec coefficients 1 (voir [14, p. 347]). Remarquons en revanche que, dans op. cit., le cycle $Y \cap W = Z(I+J)$ n'est en général pas réduit et peut même avoir des composantes immergées.

Pour un point $\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n) \in \mathbb{P}_n$, la hauteur de la sous-variété projective $Y = {\alpha}$ coïncide avec la hauteur L_2 de α , qui est définie en

prenant dans (3.1)

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_{v} := (|\alpha_{0}|_{v}^{2} + \dots + |\alpha_{n}|_{v}^{2})^{1/2}$$

aux places archimédiennes au lieu de $|\alpha|_v$. Comme pour les points, on dispose également d'une formule explicite pour la hauteur $h_{\mathbb{P}_n}(Y)$ d'une hypersurface Y. Soit K un corps de nombres et soit $F \in K[x_1, \ldots, x_n]$. En suivant P. Philippon ([14, p. 346], en particulier le dernier paragraphe en prenant p = 1 et $m_1 = m$), on définit une hauteur de F par

(3.2)
$$h(F) := \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \sum_{v} [K_v : \mathbb{Q}_v] \log \widetilde{M}_v(F) + \frac{1}{2} \deg(F) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

où $\widetilde{M}_v(F)$ est le maximum des valeurs absolues v-adiques des coefficients de F si v est finie et $\widetilde{M}_v(F) = \widetilde{M}(\sigma_v(F))$ si v est infinie associée au plongement σ_v de K dans \mathbb{C} , où, pour un polynôme homogène $P \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$,

(3.3)
$$\log \widetilde{M}(P) := \int_{S_{n+1}} \log |P| \sigma_n.$$

Ici σ_n désigne la mesure invariante de masse totale 1 sur la sphère S_{n+1} de rayon 1 de \mathbb{C}^n . Soit maintenant Z une hypersurface de \mathbb{P}_n définie par l'équation F = 0, où $F \in \overline{\mathbb{Q}}[x_0, \dots, x_n]$ est homogène. On a alors ([14, p. 347])

$$h_{\mathbb{P}_n}(Z) = h(F) + \frac{1}{2}\deg(F)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}.$$

En particulier, si $F \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$, en tenant compte de la définition (3.2), on a $h(F) \leq \log ||F||_1 + \frac{1}{2} \deg(F) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$, et donc

(3.4)
$$h_{\mathbb{P}_n}(Z) \le \log ||F||_1 + \frac{1}{2} \deg(F) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}.$$

Soit Y une sous-variété irréductible de $\mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$. D'après [14], on définit la hauteur normalisée de Y (par rapport au plongement $\mathbb{G}^n_{\mathrm{m}} \hookrightarrow \mathbb{P}_n$) par :

(3.5)
$$\widehat{h}(Y) := \lim_{m \to +\infty} \frac{h_{\mathbb{P}_n}([m]Y) \deg(Y)}{m \deg([m]Y)}$$

où on a noté $h_{\mathbb{P}_n}(Y)$ la hauteur de la clôture de Zariski de l'image de Y dans \mathbb{P}_n . On peut vérifier que la hauteur $\widehat{h}(\alpha)$ de $\alpha \in \mathbb{G}_m^n$ coïncide avec la hauteur de Weil de l'image de α dans \mathbb{P}_n . On étend ensuite la definition à une variété définie par linéarité, en prenant la somme des hauteurs normalisées des composantes irréductibles.

D'après [8, Proposition 2.1], on a la relation suivante entre $\widehat{h}(Y)$ et $h_{\mathbb{P}_n}(Y)$:

$$(3.6) |\widehat{h}(Y) - h_{\mathbb{P}_n}(Y)| \le \frac{7}{2} (\dim Y + 1) \log(n+1) \deg(Y).$$

On définit ensuite le minimum essentiel de Y, noté $\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y)$, par :

$$\hat{\mu}^{\mathrm{ess}}(Y) := \inf \left\{ \theta > 0 \mid \overline{Y(\theta)} = Y \right\}$$

où $Y(\theta) := \{ \alpha \in Y(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \widehat{h}(\alpha) \leq \theta \}$. Le minimum essentiel de Y est donc le seuil de la hauteur à partir duquel les points de Y deviennent denses dans Y.

La hauteur normalisée et le minimum essentiel sont liés par des inégalités de Zhang [24, Theorem 5.2] :

(3.7)
$$\frac{\widehat{h}(Y)}{(\dim(Y) + 1)\deg(Y)} \le \widehat{\mu}^{\mathrm{ess}}(Y) \le \frac{\widehat{h}(Y)}{\deg(Y)}.$$

Rappelons ([23]) qu'une variété géométriquement irréductible est de hauteur normalisée nulle (et donc de minimum essentiel nul par les inégalités qui précedent) si et seulement si c'est une variété de torsion.

4. Théorème de Bézout

Nous utiliserons la version suivante du théorème de Bézout (géométrique et arithmétique) de P. Philippon ([14, théorème 3]).

Théorème 4.1. Soient Y et W deux sous-variétés de \mathbb{P}_n définies sur un corps de nombres K et K-irréductibles. Soient X_1, \ldots, X_g les composantes irréductibles de l'intersection ensembliste $Y \cap W$.

Alors on a

$$\sum_{i=1}^{g} \deg(X_i) \le \deg(Y) \deg(W),$$

$$\sum_{i=1}^{g} h_{\mathbb{P}_n}(X_i) \le h_{\mathbb{P}_n}(Y) \deg(W) + h_{\mathbb{P}_n}(W) \deg(Y) + c \deg(W) \deg(Y),$$

où

$$c := \frac{\log 2}{2}(\operatorname{codim}(Y) + \operatorname{codim}(W)) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\dim Y} \sum_{j=0}^{\dim W} \frac{1}{i+j+1}.$$

Démonstration. On considère le cycle intersection $Y \cdot W$, son degré et sa hauteur (voir [14, section B, p. 353]). Toute composante irréductible isolée du cycle $Y \cap W$ apparaît comme composante isolée du cycle intersection $Y \cdot W$ (cf. op. cit., paragraphe avant l'énoncé du théorème 3), et donc, par définition du degré et de la hauteur du cycle intersection, $\sum_{i=1}^g \deg(X_i) \leq \deg(Y \cdot W)$ et $h_{\mathbb{P}_n}(\sum_{i=1}^g \deg(X_i)) \leq h_{\mathbb{P}_n}(Y \cdot W)$. On applique alors [14, théorème 3].

On pourra également se référer à [10, Theorem 3, p. 455], où cependant la valeur de la constante c est moins précise $(c = 3n^2)$.

Le corollaire suivant permet de majorer la hauteur d'une variété en fonction de la hauteur et du degré de ses générateurs.

Corollaire 4.2. Soient $F_1, \ldots, F_s \in \mathbb{Z}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ des polynômes homogènes définissant des hypersurfaces Z_i de \mathbb{P}_n . Notons

$$D := \max_{1 \le i \le s} \deg(F_i), \quad et \quad h_1 := \max_{1 \le i \le s} \log ||F_i||_1.$$

Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ un corps et W une composante K-irréductible de codimension k de $Z_1 \cap \cdots \cap Z_l$. Alors on a

$$\deg(W) \le D^k \quad et \quad h_{\mathbb{P}_n}(W) \le nh_1 D^{k-1} + n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \right) D^k.$$

Démonstration. Soit Z_i l'hypersurface de \mathbb{P}_n définie par $F_i = 0$. On applique [14, Corollaire 5, p. 357] avec $S = \mathbb{P}_n$, $\delta = D$ et $\eta = h$, en tenant compte des notations introduites au milieu de op. cit. p. 347. Notons cependant que dans op. cit. Z_i est supposée définie sur un corps de nombres K et K-irréductible; on peut se réduire à cette situation par linéarité et en négligeant les éventuelles multiplicités. On a alors, en tenant compte du fait que $\deg(\mathbb{P}_n) = 1$ et $h_{\mathbb{P}_n}(\mathbb{P}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}$ (cf [14], avant-dernier paragraphe, p. 346),

$$d(S_l; D) \le d(\mathbb{P}_n; D) = D^n$$

et

$$h(S_l; D) \le h(\mathbb{P}_n; D) + nh d(\mathbb{P}_n; D) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \right) D^{n+1} + nh D^n.$$

Les composantes irréductibles W_i de $Z_1 \cap \cdots \cap Z_l$ sont des composantes irréductibles du cycle intersection S_l . En particulier, en négligeant les multiplicités d'intersection et les composantes de codimension différente de codim(W), on a :

$$d(S_l; D) \ge \sum_i \deg(W_i) D^{\deg(W_i)} \ge \deg(W) D^{\dim(W)}$$

et

$$h(S_l; D) \ge \sum_i h_{\mathbb{P}_n}(W_i) D^{\dim(W)+1} \ge h_{\mathbb{P}_n}(W) D^{\dim(W)+1}.$$

En comparant les majorations et les minorations de $d(S_l; D)$ et $h(S_l; D)$ on en déduit la majoration annoncée de deg(W) et :

$$h_{\mathbb{P}_n}(W) \le nhD^{k-1} + \frac{1}{2}n\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}\right)D^k,$$

où $h := \max_{1 \le i \le s} h(Z_i)$. En tenant compte de la majoration (3.4) pour la hauteur projective d'une hypersurface, on a :

$$h \le \max_{1 \le i \le s} \left(\log \|F_i\|_1 + \frac{1}{2} \deg(F_i) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \right) \le h_1 + \frac{1}{2} D \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j},$$

d'où la majoration annoncée pour $h_{\mathbb{P}_n}(W)$.

5. Minimum essentiel

Dans le but de déterminer une bonne minoration pour le minimum essentiel d'une variété qui n'est pas de torsion, F. Amoroso et S. David ([2, Définition 1.1, p. 337]) ont introduit la notion d'indice d'obstruction. Etant donnés deux sous-variétés irréductibles $Y \subseteq W$ de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ et un corps $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$, on définit l'indice d'obstruction $\omega_K(Y, W)$ de Y relatif à W comme le minimum de

(5.1)
$$\left(\frac{\deg(Z)}{\deg(W)}\right)^{1/\operatorname{codim}_W(Z)}$$

où Z parcourt les sous-variétés strictes de W, définies sur K et contenant Y, et où l'on a noté $\operatorname{codim}_W(Z) := \dim(W) - \dim(Z)$. Lorsque $K = \overline{\mathbb{Q}}$, on omet l'indice $\overline{\mathbb{Q}}$ et lorsque $W = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$, on notera simplement $\omega_K(Y)$ l'indice d'obstruction $\omega_K(Y, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n)$.

Nous donnerons ici une minoration à la Dobrowolski de l'indice d'obstruction. Cette minoration se déduit du résultat principal de [5] à l'aide du lemme de transfert ci-dessous. Il s'agit d'une version plus précise du cas torique du théorème 3.7 de [16]. Plus généralement, ce lemme permet de déduire des minorations du minimum essentiel en fonction de l'indice d'obstruction relatif d'une variété qui n'est pas de torsion à partir de minorations du minimum essentiel d'une variété tranverse ou faiblement transverse (i.e. qui n'est contenue dans aucun translaté de sous-tore ou sous-variété de torsion).

Lemme 5.1 (G. Rémond). Soient $T \subseteq \mathbb{G}^n_{\mathrm{m}} \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ un sous-tore de dimension t et $Y \subsetneq T$ une sous-variété irréductible de $\mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$ de dimension y. Il existe alors une sous-variété irréductible W de $\mathbb{G}^d_{\mathrm{m}}$ telle que :

- 1) $\dim(W) = y$;
- 2) $\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(W) \leq \binom{n}{t} \deg(T)^{-1} \hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y)$;
- 3) $\omega_K(W) \leq \deg(T)\omega_K(Y,T)$ pour tout corps $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$;
- 4) $\psi(W) = Y$ pour une certaine isogénie $\psi \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t \to T$.

 $D\acute{e}monstration$. On note Δ le maximum des déterminants $t \times t$ d'une base du réseau associé à T. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer qu'un des déterminants qui réalisent le maximum Δ est celui correspondant aux t premières coordonnées de cette base. Par le lemme 2.2 1) on a alors :

(5.2)
$$\Delta \le \deg(T) \le \binom{n}{t} \Delta.$$

Considérons le morphisme d'oubli de coordonnées $\iota \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ qui envoie (x_1,\ldots,x_n) dans (x_1,\ldots,x_t) et l'isogénie $\varphi \colon T \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ composée de ι avec l'inclusion $T \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$. Par construction, $\deg(\varphi) = \Delta$. Soit $\psi \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t \to T$ l'isogénie duale. On a donc le diagramme suivant, où $[l] \colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ pour $l \in \mathbb{Z}$

dénote le morphisme $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^l = (x_1^l, \dots, x_n^l),$

$$Y \xrightarrow{\psi} T \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$$

$$\downarrow^{\psi} \downarrow^{\iota} \text{ oubli de coordonnées}$$

$$\mathbb{G}^t_{\mathrm{m}} \xrightarrow{[\Delta]} \mathbb{G}^t_{\mathrm{m}}$$

On choisit pour W une composante irréductible de $\psi^{-1}(Y)$. Les affirmations 1) et 4) sont alors claires par construction.

Pour montrer 2), on remarque que $[\Delta](W) = (\varphi \circ \psi)(W) = \varphi(Y) = \iota(Y)$ et donc $\Delta \hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(W) = \hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(\iota(Y)) \leq \hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y)$. On obtient l'inégalité souhaitée en minorant Δ par (5.2).

Montrons 3). Soient $K\subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ un corps et Z un fermé de Zariski défini sur K qui satisfait $Y\subseteq Z\subsetneq T$ et qui réalise le minimum dans la définition de $\omega_K(Y,T)$:

(5.3)
$$\left(\frac{\deg(Z)}{\deg(T)}\right)^{1/\operatorname{codim}_T(Z)} = \omega_K(Y, T).$$

On majore maintenant le degré de $\psi^{-1}(Z)$. Soit $E\subseteq \mathbb{P}^t$ un espace linéaire. Alors :

$$\psi^{-1}(\varphi^{-1}(E) \cap Z) = (\varphi \circ \psi)^{-1}(E) \cap \psi^{-1}(Z) = [\Delta]^{-1}(E) \cap \psi^{-1}(Z).$$

Or $deg([\Delta]^{-1}(E)) = \Delta^{codim_T(E)}$, donc si E est suffisamment générique et de dimension $codim_T(Z)$,

$$\#([\Delta]^{-1}(E) \cap \psi^{-1}(Z)) = \Delta^{\dim(Z)} \deg \psi^{-1}(Z)$$

et

$$\#(\psi^{-1}(\varphi^{-1}(E) \cap Z)) \le \deg(\psi) \#(\varphi^{-1}(E) \cap Z) \le \deg(\psi) \deg(Z),$$

car φ provient du morphisme ι d'oubli de coordonnées. On déduit alors des trois dernières formules centrées :

$$\Delta^{\dim(Z)} \deg (\psi^{-1}(Z)) \le \deg(\psi) \deg(Z).$$

D'où, en sachant que $\omega_K(W) \leq \deg\left(\psi^{-1}(Z)\right)^{1/\operatorname{codim}\psi^{-1}(Z)}$, $\operatorname{codim}\psi^{-1}(Z) = \operatorname{codim}_T(Z) = d - \dim(Z)$, $\operatorname{deg}(\psi) = \operatorname{deg}([\Delta])/\operatorname{deg}(\varphi) = \Delta^{d-1}$, $\Delta \leq \operatorname{deg}(T)$ $(cf\ (5.2))$ et $\operatorname{deg}(T)^{-1}\operatorname{deg}(Z) = \omega_K(Y,T)^{\operatorname{codim}_T(Z)}\ (cf\ (5.3))$

$$\omega_K(W) \le \left(\Delta^{d-1-\dim(Z)} \deg(Z)\right)^{1/\operatorname{codim} \psi^{-1}(Z)}$$

$$= \left(\Delta^{\operatorname{codim}_T(Z)-1} \deg(Z)\right)^{1/\operatorname{codim}_T(Z)}$$

$$\le \left(\deg(T)^{\operatorname{codim}_T(Z)-1} \deg(Z)\right)^{1/\operatorname{codim}_T(Z)}$$

$$= \deg(T)\left(\deg(T)^{-1} \deg(Z)\right)^{1/\operatorname{codim}_T(Z)}$$

$$= \deg(T)\omega_K(Y, T).$$

À partir de ce lemme de transfert, on déduit une version fonctorielle du théorème de Dobrowolki en dimension supérieure.

Corollaire 5.2. Soit Y une sous-variété irréductible de \mathbb{G}_{m}^{n} qui n'est pas de torsion et soit $T \subseteq \mathbb{G}_{m}^{n}$ la plus petite sous-variété de torsion contenant Y. On suppose que T soit un tore et on note $t := \dim(T)$ et $y := \dim(Y)$. Alors :

$$\hat{\mu}^{\text{ess}}(Y) \geq \binom{n}{t}^{-1} \omega_{\mathbb{Q}}(Y, T)^{-1} \left(935t^5 \log(t^2 \deg(T) \omega_{\mathbb{Q}}(Y, T))\right)^{-(t-y)(t-y+1)(t+1)}.$$

Démonstration. Par le lemme 5.1, il existe une sous-variété irréductible W de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ ayant les propriétés de 1) à 4). Cette sous-variété est faiblement transverse par l'hypothèse faite sur T. On peut donc lui appliquer le corollaire 1.5 de [5] :

$$\hat{\mu}^{\text{ess}}(W) \ge \omega_{\mathbb{Q}}(W)^{-1} (935t^5 \log(t^2 \omega_{\mathbb{Q}}(W)))^{-(t-y)(t-y+1)(t+1)}.$$

Par les points 2) et 3) (avec $K = \mathbb{Q}$) du lemme 5.1 on a :

$$\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(W) \leq \binom{n}{t} \deg(T)^{-1} \hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y) \quad \text{ et } \quad \omega_{\mathbb{Q}}(W) \leq \deg(T) \omega_{\mathbb{Q}}(Y,T).$$

La minoration annoncée s'ensuit.

6. Preuve du théorème principal

Dans ce paragraphe on prouve le théorème 1.2. Remarquons que l'énoncé est vide si n=1. On supposera donc dans la suite $n\geq 2$. Nous aurons besoin à cinq reprises de majorations d'analyse élémentaire. Nous n'en expliciterons pas ces calculs afin de ne pas alourdir l'exposition; ils sont par ailleurs facilement vérifiables par un logiciel de calcul formel. Pour la commodité du lecteur nous avons signalé ces inégalités par les symboles « \leq^v » et « \geq^v ».

Soit V la sous-variété de $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ définie par $F_1 = \cdots = F_s = 0$ et posons $\boldsymbol{\alpha} := \xi^{\mathbf{a}} := (\xi^{a_1}, \dots, \xi^{a_n})$. En suivant [20], on note V^u la réunion des sous-variétés de torsion contenues dans V et $V^* := V \setminus V^u$.

Supposons d'abord $\alpha \in V^u$. Il existe alors un sous-groupe algébrique H de $\mathbb{G}^n_{\mathrm{m}}$ tel que $\alpha \in H \subseteq V$. Sans perte de généralité, on peut supposer que H est maximal parmi les sous-groupes algébriques ayant cette propriété. D'après le lemme 2.1, il existe un sous-groupe Λ de \mathbb{Z}^n engendré par des vecteurs dans $\bigcup_{j=1}^s \mathcal{D}(F_i)$ tels que $H = H_{\Lambda}$. Soit $\mathbf{b} \in \bigcup_{j=1}^s \mathcal{D}(F_j)$; on a alors $\|\mathbf{b}\|_2 \leq 2 \max_j \deg(F_j) \leq 2D$ et $\mathbf{b} \in \mathbf{a}^{\perp}$ car $1 = \alpha^{\mathbf{b}} = \xi^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$ et ξ n'est pas une racine de l'unité.

On suppose maintenant, et jusqu'à la fin de la preuve, $\alpha \in V^*$. On remarquera que pour l'instant nous n'avons pas utilisé l'hypothèse qu'il existe une composante irréductible W de codimension ≥ 2 de V qui passe par $\xi^{\mathbf{a}}$. On le fait dès maintenant, et on fixe une telle W. Pour $1 \leq i \leq n-1$ notons $\lambda_i(\mathbf{a}^{\perp})$ le i-ème minimum successif de \mathbf{a}^{\perp} (cf (2.1)). Nous devons donc montrer que

(6.1)
$$\lambda_1(\mathbf{a}^{\perp}) \le (4n)^{17n} \,\tilde{h}_1 D^{k-1} \log(3\tilde{h}_1 D^k)^{2n}.$$

Soit $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}\}$ une base de \mathbf{a}^{\perp} qui satisfait les propriétés du lemme 2.3. Pour $i = 0, \ldots, n-1$, on note Λ_i le sous-groupe de \mathbb{Z}^n engendré par les vecteurs $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_i$. On pose $T^{(i)} := H_{\Lambda_i}$ et on remarque que les $T^{(i)}$ sont des tores car les Λ_i sont saturés. On a ainsi la suite de sous-tores suivante :

$$H_{\mathbf{a}^{\perp}} = T^{(n-1)} \subseteq T^{(n-2)} \subseteq \cdots \subseteq T^{(1)} \subseteq T^{(0)} = \mathbb{G}_{\mathbf{m}}^{n},$$

de codimension $\operatorname{codim}(T^{(i)}) = i$. Remarquons que pour $\mathbf{b} \in \mathbf{a}^{\perp}$ on a $\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{b}} = (\xi^{\mathbf{a}})^{\mathbf{b}} = 1$. Pour $i = 0, \dots, n-1$ on a donc $\boldsymbol{\alpha} \in H_{\mathbf{a}^{\perp}} = T^{(n-1)} \subseteq T^{(i)}$ et $\boldsymbol{\alpha} \in W \cap T^{(i)}$.

On a $\dim(W \cap T^{(i)}) \leq \dim(T^{(i)}) \leq n-i$. Si $\dim(W \cap T^{(i)}) = n-i$ alors $T^{(i)} \subseteq V$ et ceci contredit le fait que $\alpha \in V^*$. Donc

(6.2)
$$\dim(W \cap T^{(i)}) \le n - i - 1.$$

Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on note :

$$d_i := \min_{Y} \dim Y,$$

où Y parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de $W \cap T^{(i)}$ (cet ensemble étant non vide car $\alpha \in W \cap T^{(i)}$). Par ce qui précède, on a :

$$0 \le d_i \le n - i - 1.$$

Par hypothèse, $d_0 = \dim(W) = n - k \le n - 2$. On peut alors définir m comme le plus grand entier vérifiant :

$$0 \le m \le n-1, \qquad d_m \le n-m-2.$$

Remarquons que $m \leq n-2$, car $d_{n-1} > -1 = n-(n-1)-2$. Donc $m+1 \leq n-1$ et $d_{m+1} = n-m-2$, par maximalité de m. Cela montre que toute composante irréductible de $W \cap T^{(m+1)}$ est de dimension $\geq n-m-2$. Comme $W \cap T^{(m+1)} \subseteq W \cap T^{(m)}$ et $d_m \leq n-m-2$, on en déduit :

Scolie 6.1. Il existe une composante irréductible Y de dimension n-m-2, commune à $W \cap T^{(m)}$ et $W \cap T^{(m+1)}$, de dimension n-m-2.

Comme $\dim(Y) \leq \dim(W)$, on a $n - m - 2 \leq n - k$ et donc

$$(6.3) m+1 > k-1 > 1.$$

On note $\mathbb{Q}(Y)$ le corps de définition de Y sur \mathbb{Q} et

$$Y' := \bigcup_{\sigma} \sigma(Y)$$
 et $W' := \bigcup_{\sigma} \sigma(W)$

où σ parcourt $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}(Y)/\mathbb{Q})$. On a :

$$(6.4) Y' \subseteq W' \cap T^{(m)},$$

car $T^{(m)}$ est définie sur \mathbb{O} .

Nous avons besoin de deux lemmes auxiliaires. Le premier donne une majoration du degré et du minimum essentiel de Y' à l'aide des résultats des paragraphes 3 et 4. Rappelons que $\tilde{h}_1 = h_1 + (n+13)\log(n+1)D$.

Lemme.

(6.5)
$$\deg(Y') \le D^k \deg(T^{(m)}),$$

(6.6)
$$\deg(Y')\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y) \le n\tilde{h}_1 D^{k-1} \deg(T^{(m)}).$$

Démonstration. Par le scolie 6.1 et par définition de W' et Y', cette dernière est une composante \mathbb{Q} -irréductible de $W' \cap T^{(m)}$. D'après le corollaire 4.2, $\deg(W') \leq D^k$. La majoration (6.5) suit alors du théorème de Bézout 4.1 (en choisissant $K = \mathbb{Q}$).

La majoration de h(Y') demande plus de calculs. Par l'inégalité de Zhang (3.7) entre minimum essentiel et hauteur normalisée et par la relation (3.6) entre hauteur normalisée et hauteur projective,

$$\deg(Y)\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y) \le \hat{h}(Y) \le h_{\mathbb{P}_n}(Y) + \frac{7}{2}(n+1)\log(n+1)\deg(Y).$$

Donc, par linérarité et Galois-invariance du degré et de la hauteur projective et par (6.5),

(6.7)
$$\deg(Y')\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y) \le h_{\mathbb{P}_n}(Y') + \frac{7}{2}(n+1)\log(n+1)\deg(Y')$$
$$\le h_{\mathbb{P}_n}(Y') + \frac{7}{2}(n+1)\log(n+1)D^k \deg(T^{(m)}).$$

Pour majorer $h_{\mathbb{P}_n}(Y')$ on utilise :

- Le théorème de Bézout 4.1

$$h_{\mathbb{P}_n}(Y') \le h_{\mathbb{P}_n}(W') \deg(T^{(m)}) + h_{\mathbb{P}_n}(T^{(m)}) \deg(W') + c_1(n) \deg(W') \deg(T^{(m)}),$$

où $c_1(n) := \log(2)n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n} \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{n}$

où $c_1(n) := \log(2)n + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{i+j+1}$; — Les majorations du degré et de la hauteur projective de W' (cf corollaire 4.2),

$$\deg(W') \le D^k$$
 et $h_{\mathbb{P}_n}(W') \le nh_1D^{k-1} + c_2(n)D^k$,

où
$$c_2(n) := n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j};$$

— La relation (3.6) entre hauteur normalisée (qui est nulle) et hauteur projective du tore $T^{(m)}$,

$$h_{\mathbb{P}_n}(T^{(m)}) \le \frac{7}{2}(n+1)\log(n+1)\deg(T^{(m)}).$$

Par les quatre inégalités ci-dessus,

$$h_{\mathbb{P}_n}(Y') \le \left(h_{\mathbb{P}_n}(W') + \left(\frac{h_{\mathbb{P}_n}(T^{(m)})}{\deg(T^{(m)})} + c_1(n)\right) \deg(W')\right) \deg(T^{(m)})$$

$$\le \left(nh_1 + \left(\frac{7}{2}(n+1)\log(n+1) + c_1(n) + c_2(n)\right)D\right)D^{k-1} \deg(T^{(m)}).$$

En majorant $h_{\mathbb{P}_n}(Y')$ dans (6.7) à l'aide de cette dernière inégalité, on trouve :

$$\deg(Y')\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y) \le n(h_1 + c_3(n)D)D^{k-1}\deg(T^{(m)}),$$

οù

$$c_3(n) := 7(1+1/n)\log(n+1) + c_1(n)/n + c_2(n)/n$$

$$= 7(1+1/n)\log(n+1) + \log(2) + \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{1}{i+j+1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{j}$$

$$\leq^v (n+13)\log(n+1).$$

Le point crucial de la preuve est la majoration suivante de $deg(T^{(m+1)})$ en fonction de $deg(T^{(m)})$, majoration qui repose sur le corollaire 5.2.

Lemme. On a:

(6.8)
$$\deg(T^{(m+1)})$$

$$\leq n2^n \tilde{h}_1 D^{k-1} \deg(T^{(m)}) \left(935n^5 \log \left(n^2 D^n \deg(T^{(m)})\right)\right)^{2n}.$$

 $D\acute{e}monstration$. Soit $T\subseteq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$ la plus petite sous-variété de torsion contenant Y. On a $Y\subseteq T\subseteq T^{(m+1)}$. On rappelle que $\dim(Y)=n-m-2$ et $\dim(T^{(m+1)})=n-m-1$. Par irréductibilité, on a soit T=Y soit $T=T^{(m+1)}$. Or Y n'est pas de torsion car $\pmb{\alpha}\in Y\subseteq V$ et $\pmb{\alpha}\in V^*$. On en déduit que $T=T^{(m+1)}$. Comme $\mathrm{codim}_{T^{(m+1)}}(Y)=1$ on a (cf définition 5.1):

$$\omega_{\mathbb{Q}}(Y, T^{(m+1)}) \le \frac{\deg(Y')}{\deg(T^{(m+1)})}.$$

D'après le corollaire 5.2, avec $t = \dim(T) = n - m - 1$ et $y = \dim(Y) = n - m - 2$, on a :

$$\begin{split} \hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(Y) &\geq \binom{n}{n-m-1}^{-1} \omega_{\mathbb{Q}}(Y, T^{(m+1)})^{-1} \\ &\quad \times \left(935(n-m-1)^5 \log((n-m-1)^2 \deg(T^{(m+1)}) \omega_{\mathbb{Q}}(Y, T))\right)^{-2(n-m)} \\ &\geq 2^{-n} \omega_{\mathbb{Q}}(Y, T^{(m+1)})^{-1} \left(935n^5 \log\left(n^2 \deg(T^{(m+1)}) \omega_{\mathbb{Q}}(Y, T)\right)\right)^{-2n}. \end{split}$$

Donc

$$\deg(T^{(m+1)}) \le 2^n \deg(Y') \hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(V) \left(935n^5 \log(n^2 \deg(Y'))\right)^{2n}$$

En majorant $\deg(Y')\hat{\mu}^{\mathsf{ess}}(V)$ par (6.6) et en majorant $\log(n^2 \deg(Y'))$ par (6.5) (et D^k par D^n), on obtient la majoration souhaitée (6.8).

On va déduire à partir de ce lemme une majoration de $\lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})$. On garde les notations ci-dessus. D'après le lemme 2.3, on encadre le volume des tores $T^{(i)}$ par des produits de minima successifs :

(6.9)
$$2^{-i}V_i\binom{n}{i}^{-1/2}\prod_{j=1}^i \lambda_j(\mathbf{a}^{\perp}) \le \deg(T^{(i)}) \le \binom{n}{i}^{1/2}\prod_{j=1}^i \lambda_j(\mathbf{a}^{\perp})$$

où $V_i = \pi^{i/2} \Gamma(1+i/2)^{-1}$ (cet encadrement est encore valable pour i = 0, car $\deg(T^{(0)}) = \deg(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n) = 1$). On minore $\deg(T^{(m+1)})$ et on majore $\deg(T^{(m)})$ par (6.9). On obtient :

(6.10)
$$\frac{\deg(T^{(m+1)})}{\deg(T^{(m)})} \ge c(n,m)^{-1} \lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})$$

où $c(n,m) := 2^{m+1} \binom{n}{m+1}^{1/2} \binom{n}{m}^{1/2} V_{m+1}^{-1}$. En majorant à nouveau $\deg(T^{(m)})$ par (6.9) et en tenant compte de l'inégalité $\lambda_j(\mathbf{a}^{\perp}) \leq \lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})$ pour $j = 1, \ldots, m+1$,

(6.11)
$$\deg(T^{(m)}) \le {n \choose m}^{1/2} \lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})^m \le 2^{n/2} \lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})^n.$$

Par (6.8), (6.10) et (6.11) on a:

$$c(n,m)^{-1}\lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp}) \le n2^{n}\tilde{h}_{1}D^{k-1}\left(935n^{5}\log\left(n^{2}2^{n/2}D^{n}\lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})^{n}\right)\right)^{2n}$$
.

En tenant compte des inégalités

$$\max_{0 \le m \le n-1} n2^n c(n,m) \le^v n^{2n} \quad \text{et} \quad n^2 2^{n/2} \le^v 3^n,$$

on en déduit :

$$\lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp}) \leq \tilde{h}_1 D^{k-1} \left(935n^7 \log \left(3D\lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})\right)\right)^{2n}$$

On pose $x_0 := \lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})^{1/2n}$; la dernière inégalité se lit alors :

(6.12)
$$x_0 \le (\tilde{h}_1 D^{k-1})^{1/2n} 935n^7 \log (3Dx_0^{2n}) = \alpha \log(\beta x_0)$$

avec $\alpha := 2 \cdot 935n^8 (\tilde{h}_1 D^{k-1})^{1/2n}$ et $\beta := (3D)^{1/(2n)}$.

Lemme.

$$(6.13) x_0 \le 2\alpha \log(\alpha \beta).$$

Démonstration. Notons que $x_0 > 1/\beta$, car sinon $x_0 \le \alpha \log(\beta x_0) \le 0$. Posons $f(x) := x/\log(\beta x)$ pour $x > 1/\beta$. Cette fonction est décroissante sur $[1/\beta, e/\beta[$ et croissante sur $[e/\beta, +\infty[$. Elle admet un minimum en e/β qui vaut e/β .

L'inéquation $x \leq \alpha \log(\beta x)$ est équivalente à $f(x) \leq \alpha$. On a donc $\alpha \geq e/\beta$, d'où $x_1 := e^{1/2}\alpha \log(\alpha\beta) \geq e/\beta$. Si $x_0 < e/\beta$ on a alors $x_0 \leq x_1$. Supposons donc $x_0 \geq e/\beta$. On a :

$$\frac{f(x_1)}{\alpha} = \frac{e^{1/2}\log(\alpha\beta)}{1/2 + \log(\alpha\beta) + \log\log(\alpha\beta)} \ge 1$$

(car $(e^{1/2}-1)t - \log(t) - 1/2 \ge 0$ pour $t \ge 1$) et donc $\alpha \le f(x_1)$. Par (6.12), on a aussi $f(x_0) \le \alpha$. Donc, par croissance de f et en majorant \sqrt{e} par 2, on en déduit que $x_0 \le x_1 \le 2\alpha \log(\alpha\beta)$.

D'après (6.13) on obtient

$$\lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp}) = x_0^{2n} \le (2\alpha \log(\alpha\beta))^{2n}$$

$$= \tilde{h}_1 D^{k-1} \left(4 \cdot 935n^8 \log(\alpha\beta) \right)^{2n}$$

$$= \tilde{h}_1 D^{k-1} \left(1870n^7 \log \left((\alpha\beta)^{2n} \right) \right)^{2n}$$

$$= \tilde{h}_1 D^{k-1} \left(1870n^7 \log \left(3(1870n^8)^{2n} \tilde{h}_1 D^k \right) \right)^{2n},$$

et, en tenant compte de l'inégalité $x + y \le xy$, valable pour $x, y \ge 2$ et que l'on peut donc utiliser ici car $\log(3\tilde{h}_1 D^k) \ge \log(3(n+13)\log(n+1)) \ge^v 2$,

$$\lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp}) \leq \tilde{h}_1 D^{k-1} \left(1870n^7 \log \left((1870n^8)^{2n} \right) \right)^{2n} \log (3\tilde{h}_1 D^k)^{2n}$$

$$= \left(2 \cdot 1870n^8 \log (1870n^8) \right)^{2n} \tilde{h}_1 D^{k-1} \log (3\tilde{h}_1 D^k)^{2n}$$

$$\leq^v (4n)^{17n} \tilde{h}_1 D^{k-1} \log (3\tilde{h}_1 D^k)^{2n}.$$

En tenant compte que $\lambda_1(\mathbf{a}^{\perp}) \leq \lambda_{m+1}(\mathbf{a}^{\perp})$ par (6.3), on en déduit (6.1), ce qui achève la preuve du théorème 1.2.

Références

- [1] F. Amoroso and S. David. Le problème de Lehmer en dimension supérieure. *J. Reine Angew. Math.*, 513:145–179, 1999.
- [2] F. Amoroso and S. David. Minoration de la hauteur normalisée dans un tore. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 2(3):335–381, 2003.
- [3] F. Amoroso, L. Leroux, and M. Sombra. Overdetermined systems of sparse polynomial equations. Foundations of Computational Mathematics, 15(1):53–87, 2015.
- [4] F. Amoroso, M. Sombra, and U. Zannier. Unlikely intersections and multiple roots of sparse polynomials. *Math. Z.*, 287(3-4):1065–1081, 2017.
- [5] F. Amoroso and E. Viada. Small points on rational subvarieties of tori. Comment. Math. Helv., 87(2):355–383, 2012.
- [6] E. Bombieri, D. Masser, and U. Zannier. Anomalous subvarieties-structure theorems and applications. *International Mathematics Research Notices*, 2007, 2007.
- [7] S. Checcoli, F. Veneziano, and E. Viada. On torsion anomalous intersections. *Accounts Lincei-Mathematics and Applications*, 25(1):1–36, 2014.
- [8] S. David and P. Philippon. Minorations des hauteurs normalisées des sous-variétés des tores. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 28(3):489– 543, 1999.
- [9] M. Filaseta, A. Granville, and A. Schinzel. Irreducibility and greatest common divisor algorithms for sparse polynomials. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 352:155, 2008.
- [10] P. Habegger. Intersecting subvarieties of \mathbf{G}_m^n with algebraic subgroups. *Mathematische Annalen*, 342(2):449–466, 2008.
- [11] M. Laurent. Équations diophantiennes exponentielles. Invent. Math., 78(2):299–327, 1984
- [12] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives. I. Mathematische Annalen, 289(1):255–283, 1991.

- [13] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives. II. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 44(4):1043–1065, 1994.
- [14] P. Philippon. Sur des hauteurs alternatives III. Journal de mathématiques pures et appliquées, 74(4):345–365, 1995.
- [15] P. Philippon and M. Sombra. Quelques aspects diophantiens des variétés toriques projectives. In *Diophantine approximation*, volume 16 of *Dev. Math.*, pages 295–338. SpringerWienNewYork, Vienna, 2008.
- [16] G. Rémond. Généralisations du problème de Lehmer et applications à la conjecture de Zilber-Pink. Around the Zilber-Pink Conjecture/Autour de la conjecture de Zilber-Pink, Panor. Synthèses, 52:243-284, 2017.
- [17] A. Schinzel. On the reducibility of polynomials and in particular of trinomials. Acta Arith., 11:1–34, 1965.
- [18] A. Schinzel. Reducibility of lacunary polynomials. X. Acta Arith., 53(1):47-97, 1989.
- [19] A. Schinzel. Polynomials with special regard to reducibility. With an appendix by Umberto Zannier., volume 77. Cambridge University Press, 2000.
- [20] W. M. Schmidt. Heights of points on subvarieties of Gⁿ_m. Number Theory (Paris, 1993–1994). London Mathematical Society Lecture Notes Series, 235:157–187, 1996.
- [21] C. L. Siegel. Lectures on the geometry of numbers. Springer-Verlag, Berlin, 1989. Notes by B. Friedman, Rewritten by Komaravolu Chandrasekharan with the assistance of Rudolf Suter, With a preface by Chandrasekharan.
- [22] U. Zannier. Lecture notes on Diophantine analysis. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, second edition, 2024. With an appendix by Francesco Amoroso.
- [23] S. Zhang. Positive line bundles on arithmetic surfaces. Ann. of Math. (2), 136(3):569–587, 1992.
- [24] S. Zhang. Positive line bundles on arithmetic varieties. Journal of the American Mathematical Society, 8(1):187–221, 1995.