

双重孔隙介质非线性流固耦合渗流

黎水泉, 徐秉业

(清华大学工程力学系, 北京 100084)

摘要: 本文给出了考虑双孔双渗介质弹性变形的流固耦合渗流模型。不仅考虑了固结对渗流的影响, 同时也考虑了固体变形对渗流参数(孔隙度和渗透率)的影响。这样, 渗流就成了双孔双渗介质中非线性流固耦合渗流。在此基础上, 本文还推导了双重孔隙介质非线性流固耦合渗流有限元计算格式, 编制了计算机程序, 并可模拟单孔隙, 双重孔隙, 常系数线性 and 变系数非线性等流固耦合渗流计算。给出了算例并作了对比。结果表明, 固体变形引起的介质参数变化对流体渗流早中期过程有重要的影响, 对渗流后期影响并不大。这对于石油开采有重要的参考价值。

关键词: 双重孔隙介质; 流固耦合; 渗流; 多孔介质; 非线性

中图分类号: TE52

Flow through Fissured Media with Dual Porosity and Nonlinear Elastic Behavior

LI Shui-quan XU Bing-ye

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract: Based on the double porosity concept and taken into account the media deformation, this paper to derives a set of nonlinear governing equations which describe the fluid behavior flowing through the naturally fissured media with deformable matrix. When the coefficients vary with fluid pressures (or time), the equations are nonlinear. In this model, the media deformation has an effect not only on the properties of media, such as the permeability and porosity, also on the fluid seepage in the media. In addition, a computer program (based on finite element method) has been developed. The program is capable of simulating problems associated with single and double porosity, having two options of constant or variable coefficients in governing equations. In the variable coefficient option, at each time step, the values of coefficients are updated using the set of constitutive relations. An example is presented here also. The results of the simulation show that the influence on the seepage due to media deformation focus on the early stage and middle stage.

Key words: double porous media; coupled permeability; porosity media; nonlinear behavior

双重孔隙介质概念早已广泛地应用于分析裂缝性多孔介质中流体流动及热传导过程。早在 1960 Barenblatt 等就提出了均质、各向同性的双重孔隙概念。1963 年 Warren 和 Root 进一步改进了双重孔隙介质模型, 提出了均质、正交各向异性的双重孔隙介质模型。根据双重孔隙介质概念模型, 裂缝性多孔介质中的空隙可分成两部分, 一部分代表基质孔隙, 其孔隙率高而渗透率低, 是流体的主要储存空间; 第二部分代表裂缝孔隙, 其孔隙率低而渗透率高, 是流体的主要流动通道。孔隙和裂缝之间由于流体压差而存在流体交换。

收稿日期: 1999-03-07

基金项目: 油气藏地质及开发工程国家重点实验室开放基金(PLN9735)

作者简介: 黎水泉(1964-), 男, 四川崇庆人, 博士生。

Aifantis 于 1977 年基于混合物理论提出并推导了双重孔隙介质变形与流体流动的固流耦合方程,其后有很多学者进行了研究,有的进行了数值计算。然而,无论是解析解还是数值解,都假定渗流参数为常数。而在实际地层中,孔隙度和渗透率等参数均随流体的流出或流入而变化,流固耦合控制方程系数就成为随时间的变量。因此,本文给出的双重孔隙介质非线性流固耦合计算无论在油藏试井分析,油藏动态开发,还是在地下水文及地下水污染处理方面都有很好的应用前景。

1 固体骨架变形控制方程

1. 双重孔隙概念模型:

介质中同时存在孔隙和裂隙,其所占空间相互搭接,其中孔隙是流体储存的主要空间而裂隙则是流体的主要通道,即孔隙空间孔隙度高而渗透率低,裂隙空间则孔隙度低而渗透率高。

2. 基本约定:

孔隙压力和裂隙压力以压为正,固体骨架以受压应力为正。因而,体积应变以体积减小为正,位移以与坐标轴负方向为正。固体骨架变形为弹性小变形。不计温度变化

引入 Terzaghi 广义有效应力定义,当多孔介质中存在孔隙压力 P_1 和裂隙压力 P_2 时,其总应力及有效应力^[5]为:

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^e + \alpha_1 P_1 \delta_{ij} + \alpha_2 P_2 \delta_{ij} \quad \sigma_{ij}^e = 2G\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1)$$

其中 σ_{ij}^t , σ_{ij}^e 分别是多孔介质总应力及有效应力, ϵ_{ij} 为固体骨架应变, G 和 λ 分别是 Lamé 常数。 E 是多孔介质骨架 Young's 模量, ν 是骨架泊松比。

由静应力平衡方程可得到双重孔隙介质变形控制方程^[6]:

$$Gu_{i,jj} + (\lambda + G)u_{j,ij} + \alpha_1 P_{1,i} + \alpha_2 P_{2,i} + F_i = 0 \quad (2)$$

式中 u_i 表示双重孔隙介质骨架位移, α_1 、 α_2 为广义有效应力系数:

$$\alpha_1 = (c_b - c_r)/c_b, \quad \alpha_2 = (c_r - c_s)/c_b \quad (3)$$

其中 c_b 分别为孔隙和裂缝压力均为零时受静水压力时介质的压缩系数, c_r 为裂缝压为零,孔隙与围压相同时介质压缩系数, c_s 为介质固体压缩系数, ϵ_v 是体积应变。

2 流体流动控制方程

假设流体在孔隙和裂隙中的流动是等温流动,且满足达西定律(Darcy):

$$v_{ai} = -\frac{K_{ij}^\alpha}{\mu}(P_{a,j} + \rho_f g_j) \quad (4)$$

v_{ai} 是渗流速度, μ 是流体粘度, K_{ij}^α 是渗透系数张量, ρ_f 是流体密度, P_a 是流体压力, g_j 是重力加速度。 $\alpha = 1, 2$ 分别表示孔隙和裂隙。

注意到固体变形速度以坐标轴负方向为正,而流体速度以坐标轴正方向为正。因而有:

$$v_{ai} = \phi_a(v_{aif} + v_{is}) \quad (5)$$

ϕ_a 是孔隙度, v_{aif} 是流体真实速度, v_{is} 是固体变形速度。

双重孔隙介质中流体质量连续性方程应为:

$$-(\rho_f \phi_a v_{aif})_{,i} = \frac{\partial}{\partial t}(\phi_a \rho_f) + (-1)^a \Gamma \quad (6)$$

式中 Γ 是孔隙流体与裂隙流体的交换速率。将(4)、(5)式代入(6),得到:

$$-(\rho_f v_{ai})_{,i} + (\rho_f \phi_a v_{is})_{,i} = \frac{\partial}{\partial t} (\phi_a \rho_f) + (-1)^a \Gamma \quad (7)$$

注意到拉格朗日导数,(7)式可写成:

$$-(\rho_f v_{ai})_{,i} = \phi_a \frac{d\rho_f}{dt} + \rho_f \frac{d\phi_a}{dt} - \phi_a \rho_f v_{is,i} + (-1)^a \Gamma \quad (8)$$

根据流体压缩系数及孔隙度定义:

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{d\rho_f}{dt} = c_f \frac{dP_a}{dt} \quad \phi_a = \frac{V_a}{V}, \quad \frac{d\phi_a}{dt} = \frac{1}{V} \left(\frac{dV_a}{dt} - \phi_a \frac{dV}{dt} \right) \quad (9)$$

由叠加原理及互换定理,可得到^[6]:

$$\frac{dV_1}{V} = -\alpha_1 d\epsilon_v + dP_1 (-\alpha_1 \alpha_1 c_b + \alpha_1 c_b + \phi_1 c_b \alpha_2 + \phi_1 c_s) + dP_2 (-\alpha_1 \alpha_2 c_b - \alpha_2 c_b \phi_1)$$

$$\frac{dV_2}{V} = -\alpha_2 d\epsilon_v + dP_1 (-\alpha_1 \alpha_2 c_b - \alpha_2 c_b \phi_1) + dP_2 (-\alpha_2 \alpha_2 c_b + \alpha_2 c_b \phi_1 + \alpha_2 c_b + \phi_2 c_s)$$

将上式及(9)式代入(8)式,整理后可得到:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left[\frac{K_{ij}^1}{\mu} \left(\frac{\partial P_1}{\partial X_j} + \rho_f g_j \right) \right] = a_{11} \frac{\partial P_1}{\partial t} - a_{12} \frac{\partial P_2}{\partial t} - \alpha_1 \epsilon_{ii} - \frac{\Gamma}{\rho_f} \quad (10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left[\frac{K_{ij}^2}{\mu} \left(\frac{\partial P_2}{\partial X_j} + \rho_f g_j \right) \right] = a_{22} \frac{\partial P_2}{\partial t} - a_{21} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \alpha_2 \epsilon_{ii} + \frac{\Gamma}{\rho_f} \quad (10b)$$

式中:

$$a_{11} = \alpha_1 c_s + \phi_1 (c_s + c_{1f}) - a_{12} \quad (11a)$$

$$a_{22} = \alpha_2 c_s + \phi_2 (c_s + c_{2f}) - a_{21} \quad (11b)$$

$$a_{12} = a_{21} = -\alpha_1 \alpha_2 c_b - \alpha_2 c_b \phi_1 \quad (11c)$$

Γ 表示孔隙与裂缝间的串流函数^[8]。式(2)和(10)就是双重孔隙介质流固耦合控制方程。

3 有限元计算格式

采用 Galerkin 有限元。先进行空间离散,取位移 U 及压力 P , P 为需求解的未知量。

3.1 空间离散

单元位移场变量 U :

$$U = [N] \{a^e\}, \quad \{a^e\} = (u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n) \quad (12)$$

压力插值为:, 为方便计,以后用 P 代替 P_1 , Q 代替 P_2 。

$$P = \{\psi\}^T \{P\}, \quad Q = \{\psi\}^T \{Q\} \quad (13)$$

3.2 时间离散

假设在时间单元内,变量是线性变化。采用两节点时间单元进行离散。

经过推导,可得到有限元计算格式如下式:

$$[K] \{a^e\} + a_1 [C] \{P\} + a_2 [C] \{Q\} = \{\hat{T}\} + a_1 \{\hat{P}\} + a_2 \{\hat{Q}\} + \{g\} \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1 [C]^T \{a^e\}_{n+1} / \Delta t - ([H]_1 \theta - \gamma [G] \theta + a_{11} [G] / \Delta t) \{P\}_{n+1} + (-\gamma \theta + a_{12} / \Delta t) [G] \{Q\}_{n+1} \\ & = \alpha_1 [C]^T \{a^e\}_n + ((1-\theta)([H]_1 - \gamma [G]) - a_{11} [G] / \Delta t) \{P\}_n - (-\gamma [G](1-\theta) - \end{aligned}$$

$$-a_{12}[G]/\Delta t)\{Q\}_n + (\{\hat{f}_1\}_{n+1} + \{\hat{S}_1\}_{n+1})\theta + (\{\hat{f}_1\}_n + \{\hat{S}_1\}_n)(1-\theta) \quad (14b)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_2[C]^T/\Delta t\{a^e\}_{n+1} - ([H_2]\theta - \gamma[G]\theta + a_{22}[G]/\Delta t)\{Q\}_{n+1} + (-\gamma\theta + a_{21}/\Delta t)[G]\{P\}_{n+1} \\ & = \alpha_2[C]^T/\Delta t\{a^e\}_n + ((1-\theta)([H_2] - \gamma[G]) - a_{22}[G]/\Delta t)\{Q\}_n - (-\gamma[G](1-\theta) - \\ & \quad - a_{21}[G]/\Delta t)\{P\}_n + (\{\hat{f}_2\}_{n+1} + \{\hat{S}_2\}_{n+1})\theta + (\{\hat{f}_2\}_n + \{\hat{S}_2\}_n)(1-\theta) \end{aligned} \quad (14c)$$

$$(0 \leq \theta \leq 1)$$

式中:

$$\begin{aligned} \{\hat{S}_1\} &= \int_s \{\psi\} \hat{S}_1 dS, & \{\hat{S}_2\} &= \int_s \{\psi\} \hat{S}_2 dS \\ [H_1] &= \int_\Omega \{\psi_{,i}\} \frac{K_{ij}^1}{\mu} \{\psi_{,j}\}^T d\Omega, & [H_2] &= \int_\Omega \{\psi_{,i}\} \frac{K_{ij}^2}{\mu} \{\psi_{,j}\}^T d\Omega \\ [G] &= \int_\Omega \{\psi\} \{\psi\}^T d\Omega, & [C] &= \int_\Omega (l[N])^T \{\psi\}^T d\Omega \\ \{\hat{f}_1\} &= \int_\Omega \{\psi_{,j}\} \rho_f \frac{K_{ij}^1}{\mu} g_j d\Omega, & \{\hat{f}_2\} &= \int_\Omega \{\psi_{,i}\} \rho_f \frac{K_{ij}^2}{\mu} g_j d\Omega \\ [K] &= \int_\Omega (L[N])^T D(L[N]) d\Omega, & \rho &= (1 - \phi_1 - \phi_2)\rho_s + (\phi_1 + \phi_2)\rho_f \\ L &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T, & l &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \\ \{\hat{P}\} &= \int_s \{N_1 \hat{P}_{n_x}, N_2 \hat{P}_{n_y}, N_3 \hat{P}_{n_z}, \dots, N_n \hat{P}_{n_z}\}^T dS \\ \{\hat{Q}\} &= \int_s \{N_1 \hat{Q}_{n_x}, N_2 \hat{Q}_{n_y}, N_3 \hat{Q}_{n_z}, \dots, N_n \hat{Q}_{n_z}\}^T dS \\ \{\hat{g}\} &= \int_\Omega \{N_1 \rho g_x, N_2 \rho g_y, N_3 \rho g_z, \dots, N_n \rho g_z\}^T d\Omega \\ \{\hat{T}\} &= \int_s \{N_1 \hat{T}_x, N_2 \hat{T}_y, N_3 \hat{T}_z, \dots, N_n \hat{T}_z\}^T dS \end{aligned}$$

(14) 式就是双重孔隙介质流固耦合控制方程的有限元计算格式。

4 各系数变化关系

假设介质弹性参数不变化,介质压缩系数也不变化,不考虑固体颗粒压缩($c_s = 0$),且不考虑孔隙与裂缝压力的耦合,即令 $a_{12} = a_{21} = 0$ 。由孔隙度及体积应变定义可写出基质孔隙率和裂缝孔隙率变化关系:

$$\phi_1^{t+\Delta t} = \epsilon_v^t \alpha_1 + \phi_1^0, \quad \phi_2^{t+\Delta t} = \epsilon_v^t \alpha_2 + \phi_2^0 \quad (15a)$$

$$a_{11}^{t+\Delta t} = \alpha_{11}^0 \frac{\phi_1^{t+\Delta t}}{\phi_1^0}, \quad a_{22}^{t+\Delta t} = \alpha_{22}^0 \frac{\phi_2^{t+\Delta t}}{\phi_{21}^0} \quad (15b)$$

基质渗透率与孔隙度的关系采用 Kozeny - Carman 关系式:

$$k = f\left(\frac{\phi^3}{1 - \phi^2}\right) \quad (15c)$$

因而有:

$$K_1^{t+\Delta t} = \frac{(1-\phi_1^0)(1+\phi_1^0)}{(1-\phi_1^{t+\Delta t})(1+\phi_1^{t+\Delta t})} \left(\frac{\phi_1^{t+\Delta t}}{\phi_1^0} \right)^3 K_1^0 \quad (15d)$$

裂隙渗透率与裂隙孔隙率的关系,借助 Warren and Root^[4]的关系式:

$$K_2 = \frac{a^3}{12d} \quad (15e)$$

式中 a 是裂隙宽度, d 是裂隙间距。显然,由于 a 与裂隙孔隙率成正比,因而可得到裂隙孔隙率变化关系:

$$K_2^{t+\Delta t} = \left(\frac{\phi_2^{t+\Delta t}}{\phi_2^0} \right)^3 K_2^0 \quad (15f)$$

流体交换系数变化关系式:

$$\gamma^{t+\Delta t} = \frac{K_1^{t+\Delta t}}{K_1^0} \gamma^0 \quad (15g)$$

5 算例

本文给出如下算例。

如图 1,为一长方形柱体,顶部受外载 $q = 100\text{MPa}$,并可自由渗流;底部不渗透且刚性不变形,周围是不渗透壁且没有横向变形。即边界条件为:

$$\begin{aligned} \sigma_z(h, t) &= q & -\infty < t < +\infty \\ w(0, t) &= 0.0 & -\infty < t < +\infty \\ \hat{P}(h, t) &= \hat{Q}(h, t) = 0.0 & t > 0 \\ \hat{S}_1 &= \hat{S}_2 = 0 & -\infty < t < +\infty \end{aligned}$$

假设 $t = 0$ 时刻,孔隙和裂隙压力为 100MPa ,与外载平衡。即初始条件:

$$P(z, 0) = Q(z, 0) = 100\text{MPa}$$

计算结果如下:

如图 2,3 表示孔隙渗透率和裂缝渗透率比率不同时,地面沉降随时间而变化的规律。显然渗透率越大,沉降越快。图 4,5 表示孔隙渗透率和裂缝渗透率比率不同时,压力随时间而变化的规律。显然渗透率越大,孔隙压力和裂缝压力下降也就越快。此外,图中表明,考虑渗透系数随时间变化的非线性流固耦合渗流情况下,压力下降比常数系数流固耦合渗流情况时慢。这些结果与实际是符合的。计算结果还表明,当方程系数为常量时,流固耦合渗流计算结

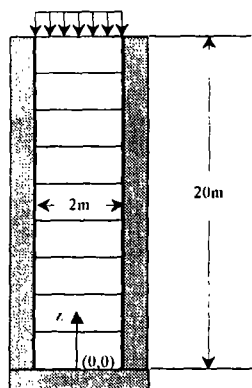


图 1 计算区域图

Fig.1 Finite element mesh of calculation zone

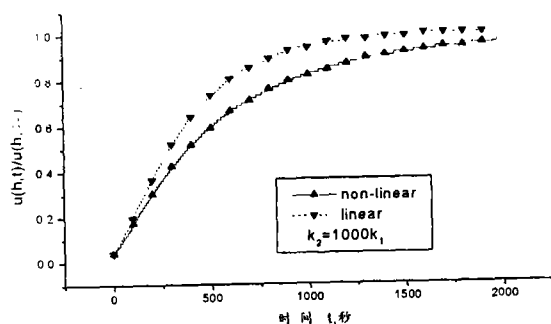


图 2 沉降位移随时间变化的关系

Fig.2 Subsidence change with time

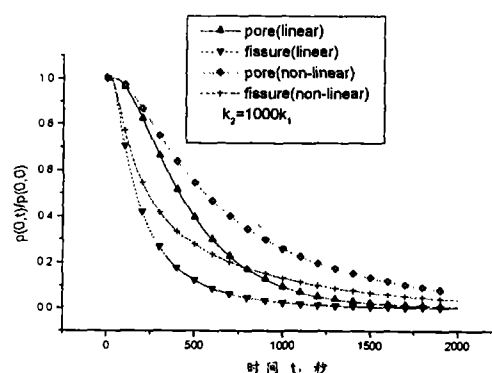


图 3 流体压力随时间变化的关系

Fig.3 Pore & fissure pressure change with time

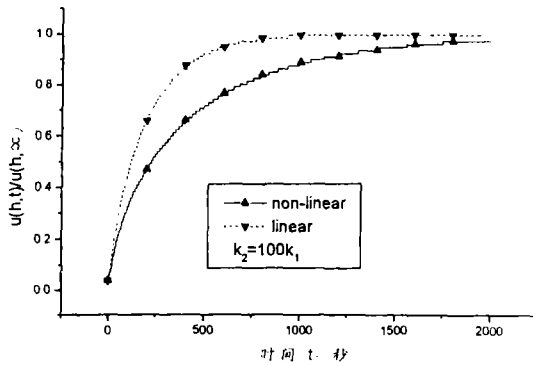


图4 沉降位移随时间变化的关系

Fig.4 Subsidence change with time

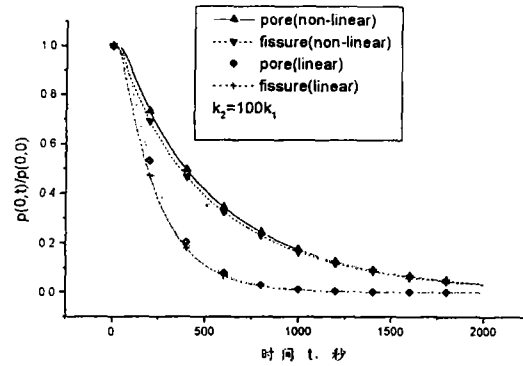


图5 流体压力随时间变化的关系

Fig.5 Pore & fissure pressure change with time

果与不考虑固体变形时的单纯渗流计算结果相同,因此,严格说,只有参数变化时的非线性流固耦合渗流才是真正的流固耦合。这也可从固体连续条件式:

$$-[(1-\phi)\rho_s v_{is}]_{,i} = \frac{\partial}{\partial t}[(1-\phi)\rho_s]$$

看出,当系数 ρ_s, ϕ 为常数时,则 $v_{is,i} = 0$, 即体积应变速率为零。从式(10)可知,流固耦合渗流方程就成为非耦合的单纯流体渗流方程。因此,常系数流固耦合渗流并不是真正的流固耦合。只有非线性流固耦合渗流才能实现真正的流固耦合。

6 结论

本文经过推导,得到了双重孔隙介质流固耦合方程,推导了有限元计算格式,并给出了算例,计算结果与实际符合。此外,计算结果表明,只有进行非线性计算,才能实现真正的流固耦合。

参考文献:

- [1] Aifantis E C. On the problem of diffusion in solids. Acta Mech, 1980a, 37: 265 - 296
- [2] Biot M A. General theory of three dimensional consolidation, J Appl Phys, 1941, 12: 155 - 164
- [3] Nur A, Byerlee J D. An exact effective stress law for elastic deformation of rock with fluids. J Geophys Res, 1971, 76: 6414 - 6419
- [4] Warren T E, Root P J. The behaviour of naturally fractured reservoirs. Soc Pet Engg J, 1963, 3: 245 - 255
- [5] Wilson R K, Aifantis E C. On the theory of consolidation with double porosity - II. Int J Engg Sci, 1982, 20: 1009 - 1035
- [6] Jaeger J C, Cook N G W. Fundamentals of Rock Mechanics. Third Edition, London: Chapman and Hall, 1979
- [7] Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. New York: American Elsevier, 1972
- [8] Chafouri H R, Lewis R W. A finite element double porosity model For heterogeneous deformable porous media. Inter J Num Anlys Methods Geomech, 1996, 20: 831 - 844