

## Zagadnienia do opracowania w formie symulacji komputerowych 2018/2019

**Zagadnienie 6:** (Uderzenie kulki w punkt końcowy nieruchomego pręta na idealnie gładkim stole)

Na idealnie gładkim stole leży pręt o długości  $L$  i masie  $M_p$ . Kulka o masie  $m_k$ , poruszająca się z szybkością  $v$ , uderza prostopadłe w koniec pręta. Zakładamy, że zderzenie jest doskonale sprężyste. W postaci graficznej przedstawić symulację ruchu pręta i kulki po zderzeniu. Zagadnienie w przestrzeni 2D.

W rozwiązaniu problemu wykorzystano zasady zachowania energii kinetycznej, zasady zachowania pędu oraz momentu pędu w układzie środka masy pręta

**Wielkości kinematyczne występujące w opisie badanego ruchu:**

$v$  – prędkość kulki przed uderzeniem w koniec pręta

$v_1$  – prędkość kulki po uderzeniu w koniec pręta

$v_2$  – prędkość postępową pręta po uderzeniu kulki

$\omega$  – prędkość kątowna ruchu obrotowego pręta wokół osi przechodzącej przez środek masy pręta

czyli wokół symetralnej pręta ( $\omega = \frac{2\pi}{T}$ )

$T$  – okres ruchu obrotowego pręta po uderzeniu kulki

$m_k v \cdot \frac{1}{2} L$  – moment pędu kulki przed zderzeniem względem osi (prostej) będącej symetralną pręta

$m_k v_1 \cdot \frac{1}{2} L$  – moment pędu kulki przed zderzeniem względem osi (prostej) będącej symetralną pręta

$I_p \omega$  – moment pędu pręta po uderzeniu kulki

$\frac{1}{2} I_p \omega^2$  – energia kinetyczna ruchu obrotowego pręta

$I_p = \frac{M_p \cdot L^2}{12}$  – moment bezwładności pręta względem osi (prostej) będącej symetralną pręta

**Nieznane:**  $v_1, v_2, \omega$

Zasady zachowanie spełnione w momencie zderzenia

Zasada zachowania pędu:

$$m_k v = m_k v_1 + M_p v_2 \quad (1)$$

Zasada zachowania momentu pędu:

$$m_k v \cdot \frac{1}{2} L = m_k v_1 \cdot \frac{1}{2} L + I_p \omega \quad (2)$$

Zasada zachowania energii kinetycznej (ruch postępowy i obrotowy)

$$\frac{1}{2} m_k v^2 = \frac{1}{2} m_k v_1^2 + \frac{1}{2} M_p v_2^2 + \frac{1}{2} I_p \omega^2 \quad (3)$$

Równania (1), (2) i (3) stanowią układ równań, którego rozwiązanie daje poszukiwane niewiadome.

## Zagadnienia do opracowania w formie symulacji komputerowych 2018/2019

### Rozwiązanie:

$$v_1 = \frac{4m_k - M_p}{4m_k + M_p} v$$

$$v_2 = \frac{2m_k}{4m_k + M_p} v$$

$$\omega = \frac{6}{L} \frac{2m_k}{4m_k + M_p} v$$

W symulacji zmiennymi sterowanymi mają być  $m_k$  oraz  $M_p$ .

### Testy poprawności:

1. Dla  $4m_k = M_p$  kulka po uderzeniu w koniec pręta ulega zatrzymaniu
2. Dla  $M_p > 4m_k$  kulka po uderzeniu zaczyna ruch powrotny
3. Dla  $2m_k = M_p$  pręt i kulka poruszają się z tą samą prędkością ( $v_1 = v_2$ ). Wtedy pręt po wykonaniu obrotu o kąt  $180^\circ$  drugim końcem uderza w kulkę i sam zatrzymuje się

### Zadanie:

Przedstawić animację ruchu z możliwością sterowania wartością masy kulki i masy pręta oraz prędkością kulki przed zderzeniem.