Przykładowe kolokwium z programowania narzędzi analitycznych

Proszę pamiętać, że to jest przykładowe kolokwium i że właściwe kolokwium może się różnić od przykładowego.

Zadanie 1 (60%)
Przeprowadzić eksperyment składający się z 1000 powtórzeń. W każdym powtórzeniu należy:

a) wygenerować 10000 wartości z rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda = \frac{1}{10}$,

b) wyznaczyć estymator $\hat{\lambda}_{UMM}$ stosując uogólnioną metodę momentów,

c) zweryfikować hipotezę $H_0: \ \lambda = 0$ i zapisać p-value.

Rozkład wykładniczy określony jest wzorem:

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x \geq 0. \tag{1}$$

Momenty rozkładu wykładniczego:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2} \tag{2}$$

Sporządzić histogram p-value uzyskanych we wszystkich krokach

Zadanie 2 (10%)
Narysować funkcję log-wiarygodności dla obserwacji:
-2.23, 4.25, 0.72, 1.08, -1.78, -0.87, 1.81, 1.39, 1.12, 0.49, 1.61, 1.56
przy założeniu, że pochodzą z rozkładu normalnego ze średnią $\mu = 1$ oraz nieznaną wariancją. Funkcja gęstości rozkładu normalnego to:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{3}$$

Zadanie 3 (30%)
Plik `Example_data.csv` zawiera próbę prostą z rozkładu normalnego. Gęstość rozkłądu normalnego określona jest wzorem:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{4}$$

a) Oszacować parametry μ oraz σ metodą największej wiarygodnosci używając funkcji `maxNR` z biblioteki `maxLik` przy wykorzystaniu gradientu i hessjanu funkcji log-wiarygodności.

b) Zweryfikować hipotezę $H_0: \ \mu = 1$.

c) Zweryfikować hipotezę łączną $H_0: \ \mu = 0 \ \& \ \sigma = 1$.