Sprawozdanie – zadanie numeryczne nr. 2

Jarosław Such

Treść zadania:

Zadane sa macierze:

$$A1 = \begin{matrix} 2.40827208 & -0.36066254 & 0.80575445 & 0.46309511 & 1.20708553 \\ -0.36066254 & 1.14839502 & 0.02576113 & 0.02672584 & -1.03949556 \\ 0.80575445 & 0.02576113 & 2.45964907 & 0.13824088 & 0.0472749 \\ 0.46309511 & 0.02672584 & 0.13824088 & 2.05614464 & -0.9434493 \\ 1.20708553 & -1.03949556 & 0.0472749 & -0.9434493 & 1.92753926 \end{matrix}$$

$$A2 = \begin{matrix} 2.61370745 & -0.6334453 & 0.76061329 & 0.24938964 & 0.82783473 \\ -0.6334453 & 1.51060349 & 0.08570081 & 0.31048984 & -0.53591589 \\ 0.76061329 & 0.08570081 & 2.46956812 & 0.18519926 & 0.13060923 \\ 0.24938964 & 0.31048984 & 0.18519926 & 2.27845311 & -0.54893124 \\ 0.82783473 & -0.53591589 & 0.13060923 & -0.54893124 & 2.6276678 \end{matrix}$$

Zdefiniujmy wektory:

$$b \equiv (5.40780228, \quad 3.67008677, \quad 3.12306266, \quad -1.11187948, \quad 0.54437218)^T$$

$$b' \equiv b + (10^5, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0)$$

Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania: $A_i y_i = b$ oraz $A_i y'_i = b'$ dla i = 1, 2. Wyznacz: $\Delta \equiv ||y_i - y'_i||_2$ oraz zinterpretuj różnicę wartości Δ_1 i Δ_2.

Wprowadzenie:

Naszym zadaniem było rozwiązanie równań macierzowych dla podanych powyżej danych używając pakietów algebry komputerowej, następnie obliczenie delty, na którą składa się norma euklidesowa z różnicy rozwiązań dla poszczególnych danych. Po otrzymaniu wyników należy również zastanowić się nad różnicą wyliczonych delt.

Celem tego zadania jest zwrócenie uwagi na problem uwarunkowania danych, z którymi mamy do czynienia. Poprzez złe uwarunkowanie rozumiemy dużą zmianę wyników naszych obliczeń przy względnie małej zmianie danych. Zatem dobre uwarunkowanie oznacza niewielką zmianę otrzymanych wyników w przypadku względnie niewielkiej zmiany danych początkowych.

Do obliczenia zadanych równań macierzowych użyłem programu „SageMath”. Wykorzystałem następujące komendy:

1) matrix([]) – pozwala wprowadzić do pamięci programu macierz.
2) vector([]) – Pozwala wprowadzić do pamięci programu wektor.
3) print() – Wyświetla wyniki na ekran.
4) ().solve_right() – Funkcja pozwalająca rozwiązać równania.
5) ().norm(2) – Funkcja pozwalająca obliczyć normę Euklidesową.
6) max() i min() – Wykorzystałem te funkcje do obliczenia maksymalnej i minimalnej wartości własnej dla obu macierzy.
7) numpy.linalg.eigvals() – Funkcja obliczająca wartości własne danej macierzy.

Istnieje możliwość sprawdzenia czy otrzymany przez nas problem jest uwarunkowany źle lub dobrze. Do tego celu służy obliczenie współczynnika uwarunkowania κ (kappa). W przypadku macierzy symetrycznej wzór na współczynnik uwarunkowania wygląda następująco:

$$\kappa = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}$$

<u>Omówienie wyników:</u>

Teraz przejdę do omówienia wyników otrzymanych z programu „SageMath”:
W przypadku dwóch pierwszych równań tj:
A1y1 = b oraz A1y1’ = b’ otrzymane wyniki prezentują się następująco:

$$y1 = (3.28716601555623, \quad 3.80299980038102, \quad 0.251468536274088, \quad -1.57875474186833, \quad -0.504103948005498)$$

$$y1' = (16.7417333134417, \quad -14.0623358238573, \quad -2.70495913846682, \quad -15.5749494372570, \quad -25.3423455422866)$$

$$\Delta_1 = 36.3561243009081$$

Bazując na otrzymanych wynikach zauważamy, że po zaburzeniu początkowych danych wektorem $(10^{-5}, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0)$, który dodajemy do wektora b wyniki zmieniły się o znaczną wartość. Również delta która jest normą z różnicy otrzymanych wyników jest duża, co wskazuje na dużą rozbieżność wyników. Możemy z tego wnioskować że problem był źle uwarunkowany numerycznie.

Teraz zajmiemy się drugim układem równań:
A2y2 = b oraz A2y2’= b’, oto otrzymane wyniki:

$$y2 = (3.18374857147928, \quad 3.94032032271323, \quad 0.274192868676857, \quad -1.47117406278441, \quad -0.313186737665520)$$

$$y2' = (3.18375389260542, \quad 3.94032236824233, \quad 0.274191313868194, \quad -1.47117513594541, \quad -0.313188144717783)$$

$$\Delta_2 = \ 6.16673946486434^{-6}$$

Analizując ponownie otrzymane wyniki możemy stwierdzić że niewielka zmiana danych poprzez taki sam wektor jak w przypadku pierwszym dała względnie niewielką zmianę wyników. Delta w tym wypadku wyszła mała, zatem wyniki nie są aż tak rozbieżne jak w przypadku pierwszym. Z tego z kolei możemy wnioskować że problem był dobrze uwarunkowany numerycznie.

Aby sprawdzić poprawność naszych domysłów o złym uwarunkowaniu macierzy pierwszej oraz dobrym uwarunkowaniu macierzy drugiej policzyłem współczynnik uwarunkowania dla oby macierzy. Wyniki wyglądają następująco:

$\kappa_1 = 39295747.8346019$

$\kappa_2 = 4.000000024553179$

Współczynniki uwarunkowania potwierdzają nasze przypuszczenia i wskazują jednoznacznie że macierz pierwsza jest źle uwarunkowana, natomiast macierz druga której współczynnik jest znacznie mniejszy jest dobrze uwarunkowana.