Sprawozdanie – NUM5

Jarosław Such

Treść zadania:

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 3 & 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0.2 & 1 & 3 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1 & 3 \end{pmatrix} * x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{pmatrix}$$

Dla N = 100 za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidela. Przedstaw graficznie różnicę pomiędzy dokładnym rozwiązaniem, a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach wybierając kilka zestawów punktów startowych. Na tej podstawie porównaj dwie metody.

Wprowadzenie:

Celem zadania jest rozwiązanie powyższego równania. Do zrealizowania tego celu użyję metod iteracyjnych. Skorzystam z dwóch metod poznanych na zajęciach, a także wyprowadzonych dla nich wzorów na obliczanie rozwiązania. Najpierw oblicze dokładny wynik równania, a następnie w obu przypadkach oblicze normę euklidesową z różnicy między rozwiązaniami w kolejnych iteracjach, a rozwiązaniem dokładnym. Kolejnym krokiem będzie porównanie obu metod na podstawie obliczonych danych oraz sporządzonych wykresów.

Korzystam z następujących wzorów:
Metoda Jacobiego:

$$\vec{x}_i^{(n+1)} = \frac{\vec{b}_i - \sum_{k<i}(a_{ik}\vec{x}_k^{(n)}) - \sum_{k>i}(a_{ik}\vec{x}_k^{(n)})}{a_{ii}}$$

Metoda Gaussa-Seidela:

$$\vec{x}_i^{(n+1)} = \frac{\vec{b}_i - \sum_{k<i}(a_{ik}\vec{x}_k^{(n+1)}) - \sum_{k>i}(a_{ik}\vec{x}_k^{(n)})}{a_{ii}}$$

Wyniki:

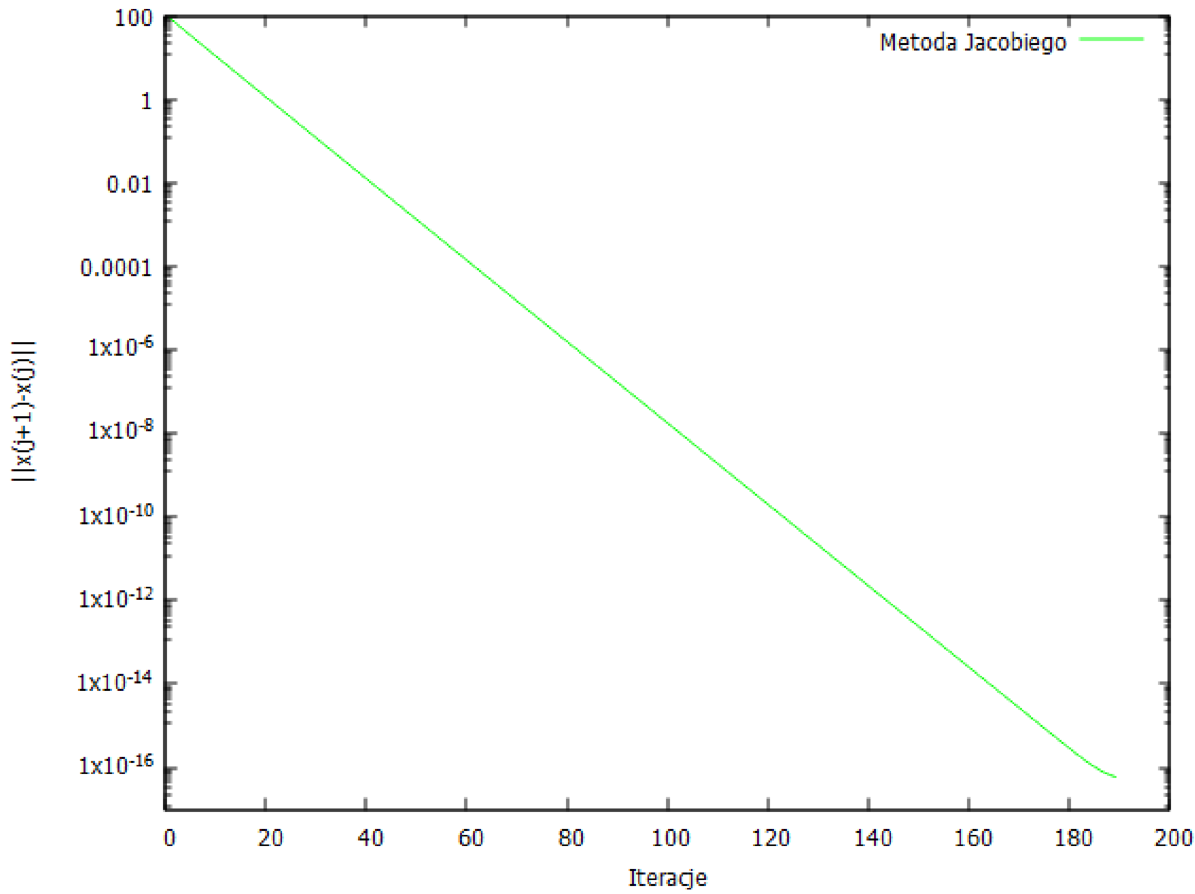
Implementując powyższe wzory i podstawiając do nich wartości z podanej macierzy, program wyliczył następujący wektor x dwoma metodami:

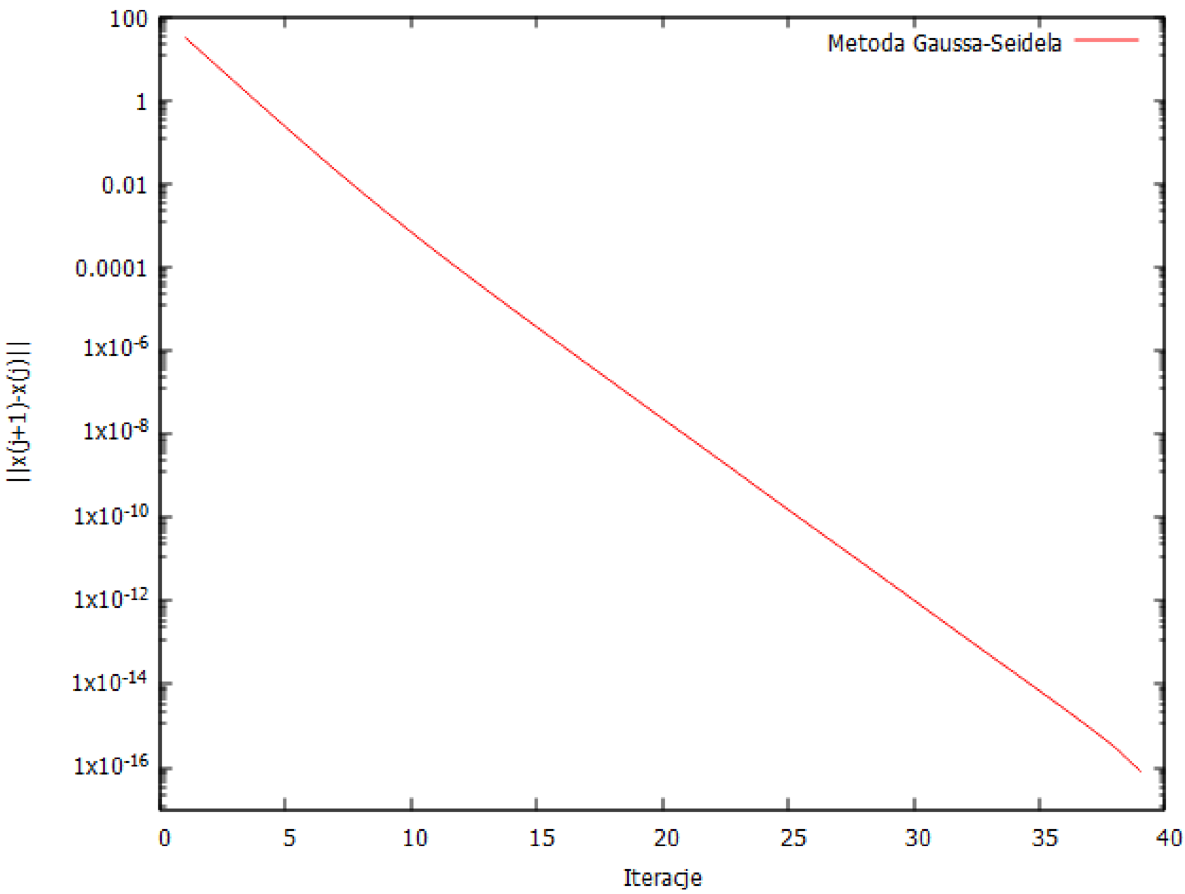
$$\vec{x} = (0.171260092491549, 0.375239737451571, 0.554899925368907, 0.740603848924158, 0.926023095096198, 1.11108742636054, 1.29629727176465, 1.48148292136353, 1.66666608981367, 1.85185194529484, 2.03703704773837, 2.22222221145366, 2.4074074103683, 2.59259259236697, 2.77777777763403, 2.9629629630302, 3.14814814813545, 3.33333333333272, 3.51851851851969, 3.70370370370334, 3.88888888888893, 4.07407407407409, 4.25925925925925, 4.44444444444445, 4.62962962962963, 4.81481481481481, 5, 5.18518518518519, 5.37037037037037, 5.55555555555556, 5.74074074074074, 5.92592592592593, 6.11111111111111, 6.2962962962963, 6.48148148148148, 6.66666666666667, 6.85185185185185, 7.03703703703704, 7.22222222222222, 7.40740740740741, 7.59259259259259, 7.77777777777778, 7.96296296296296, 8.14814814814815, 8.33333333333333, 8.51851851851852,$$

$$
\begin{gathered}
8.7037037037037, 8.88888888888889, 9.07407407407407, \\
9.25925925925926, 9.44444444444444, 9.62962962962963, \\
9.81481481481481, 10\ , 10.1851851851852, 10.3703703703704, \\
10.5555555555556, 10.7407407407407, 10.9259259259259, \\
11.1111111111111, 11.2962962962963, 11.4814814814815, \\
11.6666666666667, 11.8518518518519, 12.037037037037, \\
12.2222222222222, 12.4074074074074, 12.5925925925926, \\
12.7777777777778, 12.962962962963, 13.1481481481481, \\
13.3333333333333, 13.5185185185185, 13.7037037037037, \\
13.888888888889, 14.0740740740739, 14.2592592592591, \\
14.4444444444475, 14.6296296296179, 14.8148148148292, \\
15.0000000000893, 15.1851851845784, 15.3703703720043, \\
15.5555555560259, 15.7407407168238, 15.9259260308924, \\
16.1111109410471, 16.296295691233, 16.4814865568422, \\
16.6666511111654, 16.8518566943278, 17.0372213854365, \\
17.2213005452314, 17.4092419094905, 17.5963186525654, \\
17.7360539832212, 18.1074402027287, 18.0311540657211, \\
16.956038061793, 26.4792437083543)
\end{gathered}
$$

Obie metody doprowadziły do uzyskania tego samego wyniku, jednak na wykresach widać, że różnią się one szybkością zbiegania do zadanej wartości.

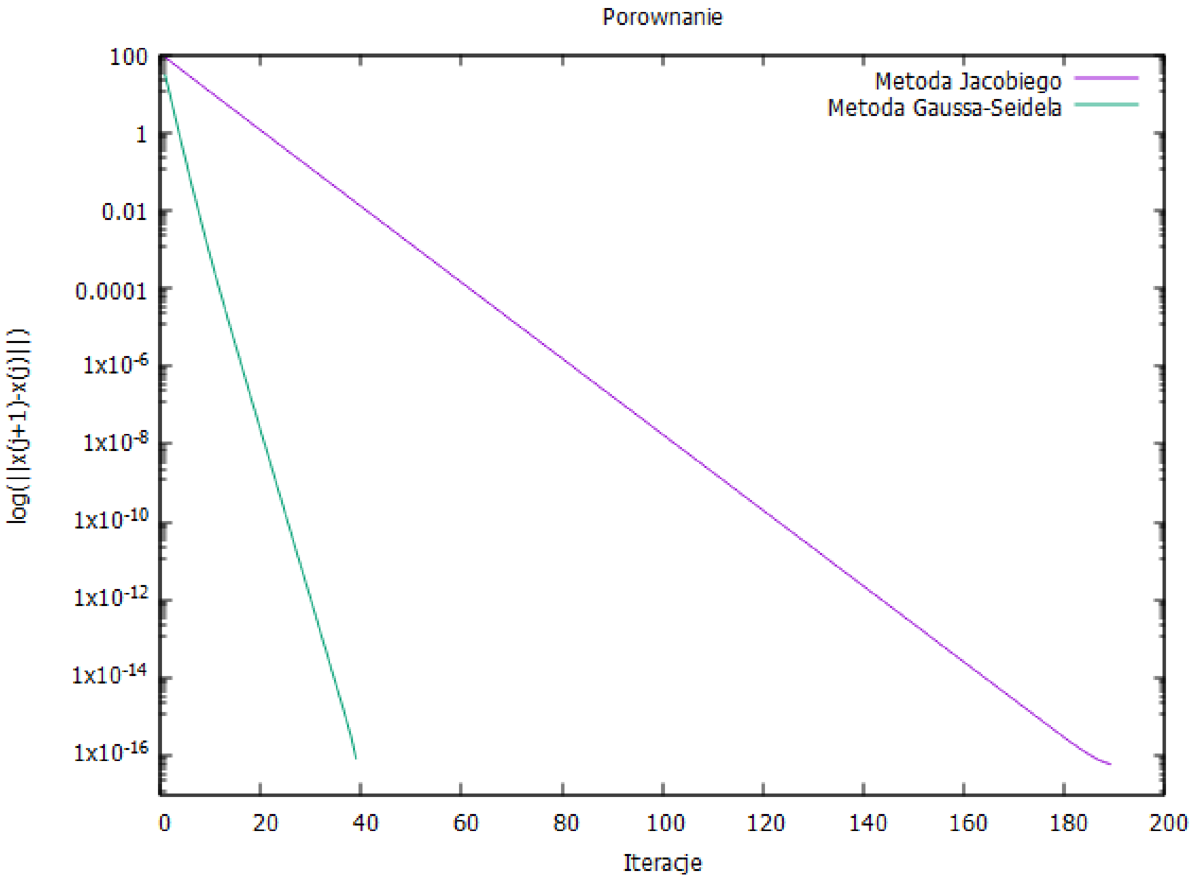
Metoda Jacobiego i Gaussa – Seidela na wykresach dla x wypełnionego przez 0:



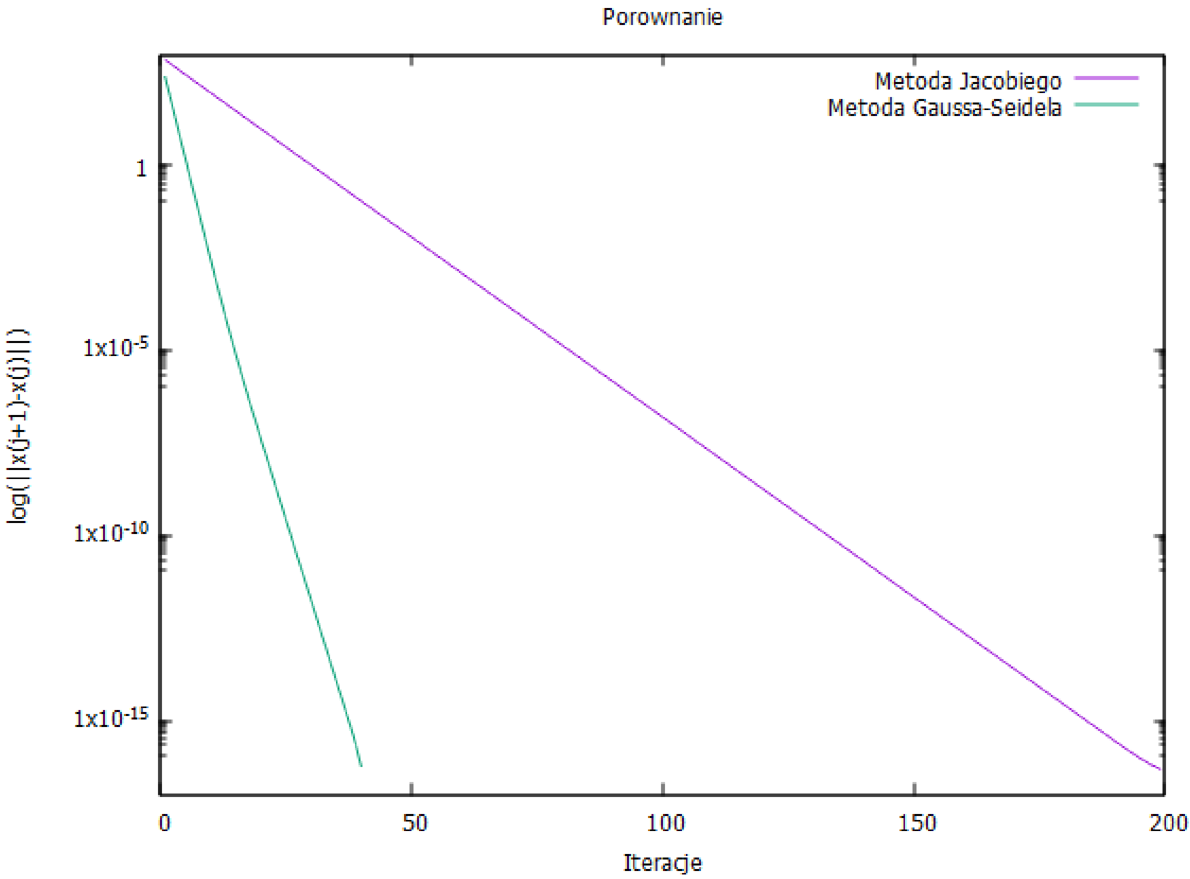


Porównanie obu metod na wykresie:

wektor początkowy wypełniony przez 0:



Wektor początkowy wypełniony przez 100:



Omówienie wyników:

Obie z wyżej użytych metod poprawnie wyliczają wektor x z podanego równania. Różnica jednak pojawia się w szybkości ich działania. Z wykresów wynika że metoda Gaussa-Seidela znacznie szybciej zbiega do szukanego wektora. Na podanych przykładach gdzie wybrane zostały dwa wektory startowe, metoda Jacobiego zawsze potrzebowała kilka razy więcej iteracji niż metoda Gaussa-Seidela, która zawsze szybciej zbiegała do szukanego wektora x.