Sprawozdanie – zadanie numeryczne nr. 4

Jarosław Such

Treść zadania:

Rozwiąż równanie macierzowe $\boldsymbol{A} * \vec{\boldsymbol{y}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ dla

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 8 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 8 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 10 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 10 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

oraz $\vec{\boldsymbol{b}} \equiv (5, \quad \dots, \quad 5)^T$. Macierz **A** ma liczby 10 na diagonali, 8 na pierwszej pozycji nad diagonalą, a pozostałe elementy są równe 1. Wymiar macierzy ustalamy na N = 50. Odpowiedni algorytm, podobnie jak dla zadania **NUM3**, należy zaimplementować samodzielnie (mile widziane jest sprawdzenie wyniku przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej).

Wprowadzenie:

Celem zadania jest rozwiązanie równania macierzowego podanego wyżej w treści zadania. W zadaniu NUM3 do rozwiązywania podobnego równania używaliśmy faktoryzacji LU, tym razem skorzystamy ze wzoru Shermana-Morissona.

W tym celu musimy przedstawić macierz A w nieco inny sposób. Należy ją przekształcić do postaci (Macierz + u * v^T) gdzie nasza nowa macierz jest macierzą „wstęgową" z wartościami na diagonali oraz jedną „wstęgą" wartości niezerowych nad diagonalą, a iloczyn dwóch z podanych wektorów tworzy macierz, która po dodaniu do niej daje macierz A. Wygląda to następująco:

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 7 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} * (1, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad 1)$$

Oznaczmy teraz odpowiednie składniki. Naszą macierz wstęgową oznaczmy jako B, wektor stojący jako u, a wektor transponowany jako v. W tym momencie skorzystam ze wzoru na wektor rozwiązań, który został wyprowadzony na zajęciach, jest on postaci:

$$\vec{x} = A^{-1} * \vec{b} - \frac{A^{-1} * \vec{u} * \vec{v}^T * A^{-1} * \vec{b}}{1 + \vec{v}^T * A^{-1} * \vec{u}}$$

Aby go uprościć zastosuję dwa podstawienia:

$$\vec{z} = A^{-1} * \vec{b}$$
$$\overrightarrow{z'} = A^{-1} * \vec{u}$$

Otrzymamy wtedy:

$$\vec{x} = \vec{z} - \frac{\vec{z} * (\vec{v}^T * \vec{z})}{1 + (\vec{v}^T * \overrightarrow{z'})}$$

Wróćmy teraz do naszych podstawień, ponieważ do obliczenia wektora rozwiązań potrzebujemy wektorów $\vec{z}\ oraz\ \overrightarrow{z'}$, które podstawiliśmy do równania na wektor $\vec{x}$. Widać że oba równania zwierają w sobie macierz odwrotną, której musimy się pozbyć. W tym celu mnożę te równania przez macierz A i otrzymuję:

$$A * \vec{z} = \vec{b}$$
$$A * \overrightarrow{z'} = \vec{u}$$

Wszystko co musimy zrobić po powyższych przekształceniach to obliczyć wektory $\vec{z}$ oraz $\overrightarrow{z'}$, a następnie wstawić je do równania na wektor rozwiązań i obliczyć uzyskany wynik. Dwa niezbędne do dalszych obliczeń wektory możemy uzyskać stosując metodę backward substitution.

<u>Omówienie wyników:</u>

Wyniki wyliczone przez program:

$\vec{z}$ = (0.31249891, 0.3125014, 0.3124982, 0.31250232, 0.31249702, 0.31250383, 0.31249507, 0.31250633, 0.31249186, 0.31251047, 0.31248654, 0.31251731, 0.31247775, 0.31252861, 0.31246322, 0.31254729, 0.3124392, 0.31257818, 0.31239949, 0.31262923, 0.31233384, 0.31271363, 0.31222533, 0.31285314, 0.31204596, 0.31308377, 0.31174944, 0.313465, 0.31125929, 0.3140952, 0.31044902, 0.31513697, 0.30910961, 0.31685907, 0.30689548, 0.31970581, 0.30323538, 0.32441165, 0.29718502, 0.33219069, 0.2871834, 0.34504991, 0.27065012, 0.36630699, 0.24331958, 0.40144626, 0.19814053, 0.45953361, 0.12345679, 0.55555556)

Oraz

$\overrightarrow{z'}$ = (0.062499782, 0.06250028, 0.062499639, 0.062500464, 0.062499404, 0.062500766, 0.062499015, 0.062501267, 0.062498371, 0.062502094, 0.062497308, 0.062503461, 0.06249555, 0.062505722, 0.062492643, 0.062509459, 0.062487839, 0.062515636, 0.062479897, 0.062525846, 0.062466769, 0.062542726, 0.062445067, 0.062570628, 0.062409192, 0.062616753, 0.062349889, 0.062693, 0.062251857, 0.062819041, 0.062089805, 0.063027394, 0.061821922, 0.063371814, 0.061379096, 0.063941163, 0.060647077, 0.06488233, 0.059437004, 0.066438137, 0.057436681, 0.069009982, 0.054130023, 0.073261399, 0.048663916, 0.080289251, 0.039628105, 0.091906722, 0.024691358, 0.11111111)

Po wstawieniu wyliczonych wektorów do równania na wektor rozwiązań i dokonaniu niezbędnych końcowych obliczeń program zwrócił następujący wynik równania $A * \vec{y} = \vec{b}$:

$\vec{y}$ = (0.075258441, 0.075259041, 0.075258269, 0.075259262, 0.075257986, 0.075259626, 0.075257517, 0.075260229, 0.075256742, 0.075261225, 0.075255462, 0.075262871, 0.075253345, 0.075265593, 0.075249845, 0.075270093, 0.07524406, 0.075277531, 0.075234497, 0.075289826, 0.075218689, 0.075310151, 0.075192556, 0.07534375, 0.075149358, 0.07539929, 0.075077949, 0.075491102, 0.074959905, 0.075642873, 0.074764771, 0.075893759, 0.074442203, 0.076308489, 0.073908979, 0.076994064, 0.073027526, 0.078127361, 0.07157043, 0.080000769, 0.069161762, 0.083097628, 0.065180086, 0.088216926, 0.058598131, 0.096679439, 0.047717757, 0.11066849, 0.029731833, 0.13379325)

Widzimy zatem, że zastosowanie wzoru Shermana-Morissona w tym wypadku było bardzo korzystne i pozwoliło na szybkie znalezienie rozwiązania równania. Dodatkowo po rozkładzie macierzy A na macierz B oraz pozostałe dwa wektory możemy zaoszczędzić miejsce z tego powodu że macierz B jest „wstęgowa” więc nie musimy przechowywać wszystkich jej elementów, a jedynie wartości niezerowe znajdujące się na odpowiednich „wstęgach”. Program używa również samych operacji rzędu O(n) dzięki czemu działa szybko i efektywnie, a jego koszt jest niski.