Sprawozdanie – zadanie numeryczne nr. 3

Jarosław Such

Treść zadania:

Wyznacz $y = A^{-1} * x$ dla

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & \frac{0.1}{1} & \frac{0.4}{1^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.4}{2^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{3} & \frac{0.4}{3^2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-2} & \frac{0.4}{(N-2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}$$

Oraz $x = (1, \quad 2, \quad \dots, \quad N)^T$. Ustalamy N = 100. Oblicz również wyznacznik macierzy A. Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy (w przeciwnym wypadku zadanie nie będzie zaliczone). Algorytm proszę zaimplementować samodzielnie – nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane).

Wprowadzenie:

Naszym zadaniem jest rozwiązanie powyższego układu równań tj. $y = A^{-1} * x$. Najpierw należy się zastanowić jak zrobić to efektywnie. Pierwszym krokiem w tym kierunku jest zauważenie że w równaniu znajduje się macierz odwrotna do macierzy A. Istotne jest, aby nie próbować odwracać macierzy A, ponieważ zawsze jest to operacja bardzo kosztowna. Musimy więc przekształcić nasz równanie do innej postaci.

Obustronnie mnożę przez macierz A i otrzymuję:

$$A * y = x$$

Teraz możemy zauważyć że otrzymane równie da się rozwiązać za pomocą faktoryzacji LU. Naszą macierz A rozkładam na macierz L i U (L – macierz trójkątna dolna, U – macierz trójkątna górna) i zapisuję:

$$L * U * y = x$$

Wprowadzam nowa zmienną:

$$U * y = b$$
$$L * b = x$$

Po takim przekształceniu otrzymaliśmy dwa powyższe równania, które możemy rozwiązać gdy już dokonamy rozkładu LU macierzy A. Dadzą nam one poszukiwany wynik jakim jest wektor y. Kolejnym krokiem do wyliczenia poszukiwanego rozwiązania jest wyprowadzenie wzorów, które pozwolą nam obliczyć odpowiednie wartości macierzy L oraz U w programie.

Działając na indeksach, wychodzę z dwóch następujących wzorów:

$$U_{ij} = a_{ij} - \sum_{k<i} (L_{ik} * U_{kj})$$

$$L_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k<i} (L_{ik} U_{kj})}{U_{jj}}$$

Musimy wyliczyć wzory iteracyjne na następujące elementy:

$$U_{ii}, U_{i,i+1}, U_{i,i+2}, L_{i+1,i}$$

Podstawiam wymienione wyżej indeksy do pierwszych dwóch wzorów i rozpisuję kolejno sumy zauważając pewne własności:

$$U_{ii} = a_{ii} - \sum_{k<i} (L_{ik} U_{ki}) = a_{ii} - L_{i,i-1} U_{i-1,i} - \boldsymbol{L_{i,i-2}} U_{i-2,i} - (\dots) = a_{ii} - L_{i,i-1} U_{i-1,i}$$

$$U_{i,i+1} = a_{i,i+1} - \sum_{k<i} (L_{ik} U_{k,i+1}) = a_{i,i+1} - L_{i,i-1} U_{i-1,i+1} - \boldsymbol{L_{i,i-2} U_{i-2,i+1}} - (\dots)$$
$$= a_{i,i+1} - L_{i,i-1} U_{i-1,i+1}$$

$$U_{i,i+2} = a_{i,i+2} - \sum_{k<i} (L_{ik} U_{k,i+2}) = a_{i,i+2} - L_{i,i-1} \boldsymbol{U_{i-1,i+2}} - (\dots) = a_{i,i+2}$$

$$L_{i+1,i} = \frac{a_{i+1,i} - \sum_{k<i} (L_{i+1,k} U_{k,i})}{U_{ii}} = \frac{a_{i+1,i} - \boldsymbol{L_{i+1,i-1}} U_{i-1,i} - (\dots)}{U_{ii}} = \frac{a_{i+1,i}}{U_{ii}}$$

Ponieważ macierz A posiada 4 „wstęgi” z niezerowymi wartościami to wiemy, że macierz LU również będzie takiej postaci. Z tego faktu z kolei możemy wnioskować iż po rozpisaniu sum niektóre z ich elementów będą się zerować. Wytłuszczone i kolorowe elementy w powyższych wzorach to właśnie te, które przyjmują wartość 0. Usuwając je otrzymuję poszukiwane wzory.

<u>Omówienie wyników:</u>

Otrzymane wzory implementuję w programie, w języku C++, dzięki czemu otrzymuję nadpisaną macierz A, która teraz zawiera macierz LU. Mając odpowiednie wyrazy macierzy L oraz U rozwiązuję wyprowadzony układ równań. Najpierw za pomocą metody forward substitution obliczam wektor b z równania $L * b = x$, a następnie korzystając z niego oraz tym razem metody backward substitution obliczam szukany wektor y z równania $U * y = b$. Wyniósł on:

$\vec{y}$ = (0.0328713, 1.33962, 2.06648, 2.82554, 3.55757, 4.28449, 5.00721, 5.72766, 6.44662, 7.16455, 7.88177, 8.59847, 9.31476, 10.0307, 10.7465, 11.462, 12.1774, 12.8927, 13.6078, 14.3229, 15.0379, 15.7528, 16.4677, 17.1825, 17.8972, 18.612, 19.3267, 20.0413, 20.756, 21.4706, 22.1852, 22.8997, 23.6143, 24.3288, 25.0433, 25.7578, 26.4723, 27.1868, 27.9013, 28.6158, 29.3302, 30.0447, 30.7591, 31.4735, 32.1879, 32.9024, 33.6168, 34.3312, 35.0456, 35.76, 36.4744, 37.1888, 37.9032, 38.6175, 39.3319, 40.0463, 40.7607, 41.475, 42.1894, 42.9037, 43.6181, 44.3325, 45.0468, 45.7612, 46.4755, 47.1899, 47.9042, 48.6186, 49.3329, 50.0472, 50.7616, 51.4759, 52.1903, 52.9046, 53.6189, 54.3333, 55.0476, 55.7619, 56.4763, 57.1906, 57.9049, 58.6192, 59.3336, 60.0479, 60.7622, 61.4765, 62.1909, 62.9052, 63.6195, 64.3338, 65.0481, 65.7625, 66.4768, 67.1911, 67.9054, 68.6197, 69.334, 70.0483, 70.7651, 71.5392)^T

Dodatkowo nie musimy, a nawet nie należy rezerwować na naszą wejściową macierz N^2 miejsca, ponieważ posiada ona jedynie 4 „wstęgi" niezerowych wartości. Umieściłem ją zatem w tablicy dwuwymiarowej o wymiarach 100x4 dzięki czemu zaoszczędziłem sporo miejsca. Kolejnym atutem jest to, że moją macierz LU mogę przechowywać w już zadeklarowanej tablicy, w której uprzednio znajdowała się macierz A, co znowu pozwala zaoszczędzić pamięć.

Całe zadanie rozwiązałem za pomocą faktoryzacji LU. Wybrałem takie rozwiązanie ze względu na to, że po zastosowaniu takiego rozkładu macierzy A w bardzo szybki sposób możemy policzyć szukane przez nas rozwiązanie. Mając także rozkładu LU danej macierzy możemy używać go wielokrotnie do innych równań, w których znajduje się macierz A. Jeszcze jednym plusem przemawiającym za tym właśnie rozwiązaniem jest to że w bardzo efektywny sposób możemy policzyć wyznacznik macierzy, który jest iloczynem wartości znajdujących się na diagonali.

$$Det(A) = 7.82402e + 07$$