1 Prawdopodobieństwo całkowite i warunkowe

Prawdopodobieństwo całkowite. Niech będzie dana przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P) oraz zdarzenia $A_1, A_2, A_n \in \Sigma$ spełniająca warunki: $P(A_i) > 0$ dla każdego $i = 1, ..., n$; $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ dla wszystkich $i \neq j$; $A_1 \cup ... A_n = \Omega$
Prawdopodobieństwo warunkowe: $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$
Wtedy dla każdego zdarzenia $B \in \Sigma$ zachodzi następująca równość: $P(B) = \Sigma_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$
Wzór Bayesa: $P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\Sigma_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$
Niezależność zdarzeń: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \cdot ... \cdot P(A_{k_r})$

2 Wartość oczekiwana i wariancja

Wartość oczekiwana dla rozkładu dyskretnego: $m = E(X) = \Sigma_{i=1}^{n} x_i p_i$, ciągłego: $m = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$
Wariancja: $\sigma^2 = D^2(X) = E((X - m)^2)$, odchylenie standardowe: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{D^2(X)}$
Wariancja dla rozkładu dyskretnego: $D^2(X) = \Sigma_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$, dla rozkładu ciągłego: $D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx$
Zmienne niezależne gdy dla dowolnych zdarzeń $B_1, ..., B_k \in \Sigma$: $P(X_1 \in B_1, ..., X_k \in B_k) = P(X_1 \in B_1) \cdot ... \cdot P(X_k \in B_k)$
Wartości własności i wariancji:
jeżeli $X = const = c$, to $E(X) = c$; $E(aX) = aE(X) \forall a \in \mathbb{R}$; $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$; $D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$; $D^2(aX) = a^2 D^2(X) \forall a \in \mathbb{R}$; $X = const = c$ to $D^2(X) = 0$;
jeżeli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, to $D^2(X + Y) = D^2(X) + D^2(Y)$

3 Rozkłady

Rozkład Bernouliego: $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $m = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$
Jeżeli $X \sim B(n, p)$ i $Y \sim B(m, p)$ są dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie dwumianowym, wtedy ich suma $X + Y$ jest zmienną losową o rozkładzie dwumianowym $B(n + m, p)$
Rozkład Poissona$(m \geqslant 100 \wedge p \leqslant \frac{1}{10})$: $f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, $\lambda = np$, $m = \lambda$, $\sigma = \lambda$
Dla dwóch zmiennych losowych o rozkładzie Poissona z parametrami λ i μ suma tych zmiennych losowych ma rozkład Possiona o parametrze $\lambda + \mu$
Rozkład geometryczny: $p(1-p)^{k-1}$, $m = \frac{1}{p}$, $\sigma = \frac{1-p}{p^2}$
Rozkład jednostajny: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ gdy $x \in [a, b]$, 0 gdy $x \notin [a, b]$, $F(x) = 0$ gdy $x < a$ $\frac{x-a}{b-a}$ gdy $x \in [a, b]$ 1 gdy $x > b$, $m = \frac{a+b}{2}$, $\sigma = \frac{(b-a)^2}{12}$
Rozkład wykładniczy: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $m = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda^2}$
Rozkład normalny:$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x-m^2}{2\sigma^2}}$
Własności $\Phi(x)$: $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, $\Phi^{-1}(\alpha) = -\Phi^{-1}(1 - \alpha)$, $x \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, 1]$
Dla X bedącego zmienną losową o rozkładzie normalnym $N(m, \sigma)$ i $Y = aX + b$, gdzie $a \neq 0$ Y ma rozkład normalny $N(am + b, |a|\sigma)$
Dystrybuanta zmiennej losowej: $F(x) = F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x])$.
Pochodna dystrybuanty to funkcja rozkładu: $F'(x) = f(x)$
Dystrybuanta jest niemalejąca, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.
Dla rozkładu dyskretnego: $F(x) = \sum_{i: x_i \leqslant x} p_i$

4 Centralne twierdzenie graniczne

Dla $S_n = X_1 + ... + X_n$, gdzie X_i to niezależne zmienne losowe z tym samym rozkładem, nadzieją m i wariancją σ^2, $\sigma > 0$:
$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D^2(S_n)}} = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ - Z_n to standaryzacja sumy S_n, $E(Z_n) = 0$, $D^2(Z_n) = 1$
tw. Lindeberga-Levy'ego: $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \to \infty} P(Z_n \leqslant x) = \Phi(x)$
Centralne twierdzenie graniczne dla sum: $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \to \infty} (F_{S_n}(x) - \Phi_{nm, \sigma\sqrt{n}}(x)) = 0$
Centralne twierdzenie graniczne dla średnich: $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \to \infty} (F_{\frac{S_n}{n}}(x) - \Phi_{m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}(x)) = 0$
tw. de Moivre'a-Laplace'a (gdy X_i to ciąg niezależnych prób Bernoullego z tym samym p): $\forall x \in \mathbb{R}$ $P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right) \to \Phi(x)$

5 Estymacja punktowa

Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbką prostą ze zmiennej losowej X. Estymatorem parametru θ rozkładu $P_\theta \in \mathbb{P}$ "odpowiednio bliskiego" rozkładowi P_X nazywamy zmienną losową $\hat{\theta} \circ (X_1, ..., X_n) = T(X_1, ..., X_n)$ gdzie T jest odpowiednio dobraną funkcją, która "rozsądnie" przybliża (estymuje) wartość θ. Przykładami estymatorów są: średnia arytmetyczna z próbki - $\bar{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$ - estymator wartości oczekiwanej $E(X)$.
Mediana z próbki - $meX_{(\lceil n/2 \rceil)}$ - estymator mediany. Wariancja z próbki - $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2$ (jeżeli $E(X) = m$ jest znane),
lub $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ (jeżeli $E(X) = m$ nie jest znane) - estymator wariancji $D^2(X)$
Estymator nieobciążony - $E(\hat{\theta}) = \theta$.
Estymator zgodny - $P(\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} \hat{\theta}_n(\omega) = \theta) = 1$
Metoda MLE: dla zmiennych losowych $X_1, ..., X_n$
$L(\theta) = \Pi_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$ - dla zmiennych dyskretnych
$L(\theta) = \Pi_{i=1}^{n} f(x_i)$ - dla zmiennych ciągłych
Żeby wyznaczyć MLE (θ) należy wyznaczyć maximum funkcji wiarygodności$L(\theta)$

6 Przedziały ufności Estymacja Przedziałowa

Dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym ze znanym odchyleniem standardowym (na poziomie ufności $1 - \alpha$):
$(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}), \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))$, $(-\infty, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha))$, $(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha), \infty)$
Dla wartości oczekiwanej w rozkładzie normalnym z nieznanym odchyleniem standardowym:
$(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} F_{t_{n-1}}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n-1}} F_{t_{n-1}}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))$, $(-\infty, \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n-1}} F_{t_{n-1}}^{-1}(1 - \alpha))$, $(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} F_{t_{n-1}}^{-1}(1 - \alpha), \infty)$,
Dla frakcji. Próbka prosta $X_1, ..., X_n$ pochodzi z rozkładu dwupunktowego $B(1, p)$. W przypadku. Dla próbki dużej $(n > 30)$:
$(\hat{p} - \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}), \hat{p} + \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}))$, $(0, \hat{p} + \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha)$, $(\hat{p} - \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \alpha), 1)$ gdzie $\hat{p} = \bar{X}_n = \frac{\#\{i : X_i = 1\}}{n}$

Dla wariancji w rozkładzie normalnym z nieznaną wartością oczekiwaną: $(\frac{nS^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\frac{\alpha}{2})}, \frac{nS^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\frac{\alpha}{2})})$, $(0, \frac{nS^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha)})$, $(\frac{nS^2}{F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\alpha)}, \infty)$

Przedziały ufności dla wartości oczekiwanej - uwagi. Jeżeli rodzina rozkładów nie jest znana oraz próbka jest duża ($n \geqslant 30$), to konstruując przedziały ufności dla wartości oczekiwanej m możemy rozważyć zmienną losową $Z = \frac{\bar{X}-m}{S}\sqrt{n} \approx N(0,1)$

Jeżeli natomiast próbka jest mała ($n < 30$) oraz pochodzi z rozkładu $B(1,p)$ to konstruując przedział ufności dla p możemy rozważyć zmienną losową $K = \#\{i : X_i = 1\} \sim B(n,p)$

7 Testowanie hipotez statystycznych

Próbka $X_1, ..., X_n$ z rozkładu $N(m, \sigma)$, stat. testowe dają zm. los. przy prawdziwości hipotez zerowych.
Testowanie hipotez $H_0 : m = m_0$ o wart. oczekiwanej w rozkładzie norm.:
gdy σ znana $z = z(x_1, ..., x_n) = \frac{\bar{x}-m_0}{\sigma}\sqrt{n}$ dająca zm. los. $Z = z(X_1, ..., X_n)$ o rozkładzie $N(0,1)$,
gdy σ nieznana $t = t(x_1, ..., x_n) = \frac{\bar{x}-m_0}{s}\sqrt{n-1}$ dająca zm. los. $T = t(X_1, ..., X_n)$ o rozkładzie t-studenta o $n-1$ st. swobody.
Testowanie hipotez $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ o wariancji w rozkładzie norm.:
$\chi = \chi(x_1, ..., x_n) = \frac{ns^2}{\sigma_0^2}$ dająca zm. los. $\chi = \chi(X_1, ..., X_n)$ o rozkładzie χ a o $n-1$ st. swobody.
Testowanie hipotez $H_0 : p = p_0$ o frakcji,
gdy $X_1, ..., X_n$ z rozkładu $B(1,p)$: dla próbki $n \geqslant 30$ używamy stat. testowej $z = z(x_1, ..., x_n) = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}$) dająca zm. los. $Z = z(X_1, ..., X_n)$ o rozkładzie $N(0,1)$,
dla małej próbki stat. testowa $k = k(x_1, ..., x_n = \#\{i : x_i = 1\}$ dająca zm. los. $K = k(X_1, ..., X_n)$ o rozkładzie $B(n, p_0)$.
Test t-Studenta: próbki z rozkł. $N(m_1, \sigma_1)$ i $N(m_2, \sigma_2)$, $H_0 : m_1 = m_2$,
dla znanych σ_1,σ_2: $z = z(x_1, ..., x_{n_1}, y_1, ..., y_{n_2}) = \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$) dająca zm. los. Z o rozkł. $N(0,1)$,
dla nieznanych σ_1,σ_2: $t = t(x_1, ..., x_{n_1}, y_1, ..., y_{n_2}) = \frac{\hat{x}-\hat{y}}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2+n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}$) dająca zm. los. T o rozkładzie t-studenta o $n_1 + n_2 - 2$ st. swobody.
Testχ^2 zgodnosci: dla rozkładów dyskretnych: $H_0 : P_X = P$
$P(y_1) = \pi_1 > 0$, ..., $P(y_k) = \pi_k > 0$, π_1+, ... ,$+\pi_k = 1$, n_i - liczba wystąpień y_i w ciągu $x1, ..., x_n$
$\chi = \chi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i}$, zbiór krytyczny K to $[l, \inf)$, gdzie l to kwantyl rzędu $1-\alpha$ rozkładu χ^2 o $k-1$ stopniach swobody.
Test niezależności rozkładów: dla zmiennych losowych: $X \sim P_X$ i $Y \sim P_Y$
$\chi = \chi((x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)) = \sum_{(s,t) \in S \times T} \frac{(n_{s,t} - \frac{n_s n_t}{n})^2}{\frac{n_s n_t}{n}}$, gdzie $S \times T$ jest nośnikiem próbki danych,
$n_{s,t} = \#\{i : (s,t) = (x_i, y_i)\}$, $n_s = \#\{i : s = x_i\}$, $n_t = \#\{i : t = y_i\}$ $(n = \sum_{(s,t)} n_{s,t})$ Można wtedy wykazać, że $\chi \approx \chi^2_{(\#S-1)(\#T-1)}$

8 Metoda bootstrap

Dla małej próbki (o wielkości n) i nieznanym rozkładzie losujemy z niej ze zwracaniem kolejno B próbek o wielkości n.
Estymator bootstrapowy parametru ze znanym estymatorem $g(x_1, ..., x_n)$ to: $\hat{g} = \hat{g}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} g(x_1^i, ..., x_n^i)$, gdzie $x_1^i, ..., x_n^i$ to próbka wylosowana za i-tym razem.
Metoda percentylowa wyznaczania przedziałów ufności parametru θ: losujemy 1000 próbek bootstrapowych, dla każdej obliczamy estymator θ. Kwantyle odpowiednich rzędów z ciągu estymatorów dla próbek są końcami przedziału ufności.

9 Wektor losowy

Wektor losowy: funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(Y : \Omega \to \mathbb{R}^m)$ na przestrzeni (Ω, Σ, P), rozkład wektora losowego X: $P_X(B) = P(X^{-1}(B)$ dla $B \subset \mathbb{R}^n$. Dla $A_1 \subset \mathbb{R}^n A_2 \subset \mathbb{R}^m$: $P_X(A_1) = P_{(X,Y)}(A_1 \times \mathbb{R}^m)$ i $P_Y(A_2) = P_{(X,Y)}(\mathbb{R}^n \times A_2)$ są rozkładami brzegowymi, a $P_{(X,Y)}$ to rozkład łączny.
Niezależność wektorów losowych o rozkładach ciągłych $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$
dla $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, P_X(x) > 0, P_Y(y) > 0, f_X(x) > 0, f_Y(y) > 0$
Rozkłady warunkowe wektora losowego (dyskretny): $P_{X|Y=y}(B) = P(X \in B|Y = y) = \frac{P(X \in B, Y=y)}{P(Y=y)}$ dla $B \subset \mathbb{R}^n$
Rozkłady warunkowe wektora losowego (ciągłego): $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$ dla $y \in \mathbb{R}^m$
Warunkowa wartość oczekiwana: $E(X|Y = y)$

10 Regresja Liniowa

Model regresji liniowej: $Y_i = \alpha + \beta x_i + U_i$ dla $i = 1, .., n$,
Wyznaczenie estymatorów α i β MNK: wyznaczamy arg min $S(\alpha, \beta)$ dla$S(\alpha, \beta) = \Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \alpha - \beta x_i)^2$,
otrzymujemy $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$ $\hat{\beta} = \frac{n\Sigma_{i=1}^{n} x_i y_i - (\Sigma_{i=1}^{n} x_i)(\Sigma_{i=1}^{n} y_i)}{n\Sigma_{i=1}^{n} x_i^2 - (\Sigma_{i=1}^{n} x_i)^2}$ $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ są nieobciążone.
Wyznaczenie estymatorów metodą największej wiarygodności dla błędów normalnych:
Zał: $U_i \sim N(0, \sigma)$, czyli $Y \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma)$
$L(\alpha, \beta, \sigma^2) = f_1(y_1) \cdots f_n(y_n)$, gdzie $f_i(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y-\alpha-\beta x_i)^2}{(2\sigma^2)}}$ dostajemy te same estymatory jak w MNK oraz $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$ a także $E(\hat{\sigma^2}) = \frac{n-2}{n}\sigma^2$

11 Analiza wariancji (ANOVA)

Rozkład F(-Snedecora): Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach χ_p^2 i χ_q^2.
Zatem $F = \frac{X/p}{Y/q}$ posiada rozkład F-Snedecora o (p, q) stopniach swobody, jeżeli T jest zmienną losową o rozkładzie t_q, to $T^2 \sim F_{1,q}$, $E(F) = \frac{q}{q-2}$ oraz $D^2(F) = \frac{2q^2(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}$ dla $q > 4$. Jednoczynnikowa analiza wariancji: Mając k niezależnych próbek prostych: $X_{11}, ., X_{1n_1}, X_{21}, ., X_{2n_2}, ..., X_{k1}, ., X_{kn_k}$ które pochodzą z $N(m_1, \sigma), .., N(m_k, \sigma)$ testujemy hipotezę: $H_0 : m_1 = m_2 = .. = m_k$ wobec H_1 : nie wszystkie wartości m_i są sobie równe. Do weryfikacji H_0 służy $f = \frac{MSTR}{MSE}$, $MSTR = \frac{1}{k-1}\Sigma_{i=1}^{k} n_i(\bar{x_i} - \bar{x})^2$, $MSE = \frac{1}{n-k}\Sigma_{i=1}^{k} n_i s_i^2$ $n = \Sigma_{i=1}^{k} n_i$, $\bar{x_i}$ jest średnią arytmetyczną z i-tej próbki, s_i^2 jest wariancją z i-tej próbki, $\bar{x}$ jest średnią arytmetyczną ze wszystkich obserwacji, która daje $F = F(X_{11}, .., X_{kn_k})$ o rozkładzie F-Snedecora o $(k-1, n-k)$ stopniach swobody.