Программа курса «Геометрия и топология», II-й семестр

Группы 24.Б41–Б44-мм и 24.Б81–Б83-мм

Составлена 6 июня 2025 г.

Предварительная версия, возможны изменения!

1. Топологические пространства; открытые и замкнутые подмножества и их дополнения; окрестности; задание топологии в терминах замкнутых множеств; его эквивалентность первоначальному определению топологии; первые примеры топологических пространств;
2. Базы топологии; примеры; критерий базы данной топологии; два критерия того, что некоторая совокупность подмножеств образует базу некоторой топологии;
3. Сравнение топологий; два предложения о сравнении топологии посредством сравнения их баз;
4. Метрические пространства; примеры; шары, диски и сферы; метрическая топология; замкнутость дисков и сфер;
5. Расположение точек относительно подмножества топологического пространства; трихотомия для точек топологического пространства; операторы внутренности, замыкания и границы; идемпотентность замыкания и внутренности; их поведение при объединении, пересечении и дополнении;
6. Внутренность как наибольшее открытое множество, содержащееся в данном подмножестве; замыкание как наименьшее замкнутое множество, содержащее данное подмножество; замкнутость границы; задание топологии с помощью оператора внутренности ($\star$);
7. Всюду плотные и нигде не плотные подмножества; эквивалентные переформулировки; примеры; канторово множество;
8. Индуцированная топология; замкнутые подмножества в индуцированной топологии; операторы внутренности и замыкания в индуцированной топологии;
9. Метрические подпространства; метрическая топология метрического подпространства совпадает с индуцированной топологией;
10. Свойства образов и прообразов отображений; непрерывные отображения; примеры; непрерывность композиции и сокращений; инициальные и терминальные топологии относительно отображения;
11. Эквивалентные переформулировки непрерывности в терминах операторов замыкания и внутренности; непрерывный образ всюду плотного подмножества;
12. Непрерывность в терминах баз и предбаз; непрерывность арифметических операций для отображений со значением в $\mathbb{R}$;
13. Непрерывность в точке; (не)эквивалентность первоначальному определению непрерывности; непрерывность в точке в случае метрических пространств; ε-δ-определение непрерывности; непрерывность в точке арифметических операций для отображений со значением в $\mathbb{R}$; непрерывность расстояний;
14. Фундаментальны покрытия; их применение к доказательству непрерывности; примеры; фундаметальность локально конечного замкнутого покрытия ($\star$);
15. Гомеоморфизмы; гомеоморфизм порождает биекцию топологических структур; примеры и не-примеры гомеоморфизмов; примеры негомеоморфных пространств; формулировка теоремы Брауэра об инвариантности области и её следствие;
16. Связность; связность подмножеств; критерий связности; её поведение при объединении; связность интервала числовой прямой; связность $\mathbb{R}^n$;
17. Добавление к связному подмножеству его граничных точек сохраняет связность; компоненты связности; замкнутость компонент связности; непрерывный образ связного подмножества; сохранение числа компомент связности при гомеоморфизме; попарная негомеоморфность интервалов (a, b), $(a, b]$, $[a, b]$ и окружности; негомеоморф-

ность $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$;

18. Пути, произведения путей и путь, обратный данному; компоненты линейной связности; непрерывный образ линейно связного подмножества; примеры линейно связных пространств;
19. Линейная связность влечёт связность; частичное обращение предыдущего утверждения; пример связного, но не линейно связного подмножества;
20. Аксиомы отделимости; эквивалентные переформулировки аксиом T_1, T_3 и T_4; наследственность аксиом T_1, T_2 и T_3; регулярность и нормальность; функции Урысона; нормальность метрического пространства;
21. Аксиомы счётности; сепарабельность; случай метрических пространств; сепарабельность $\mathbb{R}^n$; теорема Линделёфа; регулярность хаусдорфовых пространств с счётной базой ($\star$);
22. Компактность; переформулировка на языке замкнутых подмножеств; компактность подмножеств; первые примеры компактных и некомпактных пространств;
23. Компактность и замкнутость; компактность и хаусдорфовость; непрерывный образ компакта; критерий гомеоморфизма; применение к кривым Пеано;
24. Топология прямого произведения конечного числа топологических пространств; открытость проекций; операторы замыкания и внутренности в топологии прямого произведения
25. Прямое произведение и (линейная) связность; прямое произведение и аксиомы отделимости T_1, T_2 и T_3; прямое произведение и аксиомы счётности;
26. Прямое произведение метрических пространств; совпадение метрической топологии с топологией произведения; случай евклидовых пространств; компактность произведения;
27. Компактность отрезка; компактность куба; критерий компактности подмножества евклидова пространства;
28. Теорема о существовании максимума и минимума непрерывной вещественнозначной функции; лемма Лебега;
29. Секвенциальная компактность; счётная компактность; счётная компактность вместе с 1-й аксиомой счётности влекут секвенциальную компактность;
30. Переформулировка счётной компактности на языке замкнутых подмножеств; секвенциальная компактность влечёт счётную компактность; счётная компактность вместе со 2-й аксиомой счётности влечёт компактность;
31. Вполне ограниченные метрические пространства; сепарабельность метрического компакта; эквивалентность компактности и секвенциальной компактности в случае метрических пространств;
32. Полные метрические пространства; критерий компактности метрического пространства;
33. Гомотопии и связанные (= неподвижные) гомотопии; примеры гомотопных отображений; гомотопическая эквивалентность пространств; стягиваемость евклидовых пространств.

Для получения оценок «A», «B» и «C» должны быть доказаны относящиеся к содержанию вопроса факты, сформулированные на лекциях в качестве упражнений.
Для получения оценки «A» необходимо доказательство утверждений, помеченных символом ($\star$).