Ασκήσεις Στατιστικής

ΓιάννηςΝικολαΐδης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Άσκηση 57

57. Από την παραγωγή ενός συγκεκριμένου εργοστασίου επιλέχθηκε τυχαία δείγμα 16 συρμάτων. Η μέση τιμή της αντοχής τους σε θραύση υπολογίστηκε ότι ήταν ίση με 400 pounds. Μεταξύ ποιων τιμών αναμένεται, με συντελεστή εμπιστοσύνης 95%, ότι βρίσκεται η μέση τιμή της αντοχής των συρμάτων αυτών; Δίνεται ότι η αντοχή των συρμάτων σε θραύση ακολουθεί τη κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση ίση με 15 pounds.

Παραλλαγή: … υπολογίστηκε ότι ήταν ίση με 400 pounds και η τυπική απόκλιση ίση με 15 pounds. … Δίνεται ότι η αντοχή των συρμάτων σε θραύση ακολουθεί τη κανονική κατανομή.

Άσκηση 57

- Δεδομένα: $X \sim N(\mu, 15^2)$

$\hat{\mu} = \bar{x} = 400 \qquad 1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05$

$\sigma = 15$ ➔ γνωστό, άρα

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 - 1{,}96 \frac{15}{\sqrt{16}} \le \mu \le 400 + 1{,}96 \frac{15}{\sqrt{16}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{392{,}65} \le \boldsymbol{\mu} \le \mathbf{407{,}35}$$

Άσκηση 57

- Αν η σ ήταν άγνωστη ➔ Student με n – 1 = 15 β.ε.

$$\overline{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400 - 2{,}1315\frac{15}{\sqrt{16}} \le \mu \le 400 + 2{,}1315\frac{15}{\sqrt{16}} \Rightarrow$$

$$\mathbf{392{,}007 \le \mu \le 407{,}993}$$ (ανακριβέστερο κατά τι)

$$t_{\alpha/2,n-1} = t_{0{,}025{,}15} = 2{,}1315$$

Άσκηση 58

58. Από ένα τυχαίο δείγμα 2.000 ατόμων που ρωτήθηκαν σχετικά, τα 1.280 τάχθηκαν υπέρ ορισμένης άποψης. Ποια είναι τα όρια εμπιστοσύνης της αναλογίας του συνόλου των ατόμων υπέρ της συγκεκριμένης αυτής άποψης, με επίπεδο σημαντικότητας 5%;

Άσκηση 58

- Δεδομένα

$n = 2000 > 30$

$x = 1280$

$\alpha = 0{,}05$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{1280}{2000} = 0{,}64$$

$$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}64(1-0{,}64)}{2000}} = 0{,}0107$$

Άσκηση 58

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-\hat{p})}{n}}} \sim N(0,1)$$

- Άρα

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}64 - z_{0{,}975} \cdot 0{,}0107 \le p \le 0{,}64 + z_{0{,}975} \cdot 0{,}0107$$

όπου $z_{0{,}975} = 1{,}96$

- Άρα $0{,}64 - 1{,}96 \cdot 0{,}0107 \le p \le 0{,}64 + 1{,}96 \cdot 0{,}0107 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{0{,}619 \le p \le 0{,}661}$$

Άσκηση 61

61. Μια εμπορική επιχείρηση, για να μπορεί να ελέγχει τον μηχανισμό πλήρωσης και συσκευασίας ενός προϊόντος της σε πακέτα προκαθορισμένου βάρους, χρειάζεται να γνωρίζει το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής - αλλά άγνωστης - τυπικής απόκλισης του βάρους αυτών. Για τον λόγο αυτό παίρνει δείγμα 12 τυχαία επιλεγμένων πακέτων και διαπιστώνει ότι ισχύει $s^2=9$. Ποια είναι τα όρια εμπιστοσύνης της πραγματικής τυπικής απόκλισης του βάρους των πακέτων για α=0,02, δεδομένου ότι το βάρος των πακέτων ακολουθεί την κανονική κατανομή;

Άσκηση 61

- Δίνεται ότι n = 12, α = 0,02 και $s^2 = 9$
- Η μεταβλητή $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim X^2$ με n–1 β.ε.

$$X^2_{\alpha/2,n-1} \le \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le X^2_{1-\alpha/2,n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^2_{\alpha/2,n-1}} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2} \ge \frac{1}{X^2_{1-\alpha/2,n-1}} \Rightarrow$$

Άσκηση 61

$$\left.\begin{aligned}&\frac{s^2(n-1)}{X^2_{1-\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{s^2(n-1)}{X^2_{\alpha/2,n-1}}\\&\text{όπου}\quad X^2_{1-\alpha/2,n-1} = X^2_{0.99,11} = 24{,}72\\&\text{και}\quad X^2_{\alpha/2,n-1} = X^2_{0.01,11} = 3{,}053\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Από πίνακα 5

$$\Rightarrow \frac{11\cdot 9}{24{,}72} \le \sigma^2 \le \frac{11\cdot 9}{3{,}053} \Rightarrow \underline{4{,}005 \le \sigma^2 \le 32{,}427} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4{,}005} \le \sigma \le \sqrt{32{,}427} \Rightarrow \underline{2{,}001 \le \sigma \le 5{,}69}$$

Άσκηση 65

65. Σε ένα εργοστάσιο η συσκευασία των προϊόντων σε κουτιά γίνεται αυτόματα και ελέγχεται δειγματοληπτικά. Είναι γνωστό ότι το βάρος των κουτιών ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 0,025 Kgr. Για τον έλεγχο της διαδικασίας, ζυγίστηκαν 6 τυχαία επιλεγμένα κουτιά και τα βάρη τους βρέθηκαν ίσα με: 1,04, 0,97, 0,99, 1,00, 1,02 και 1,01 Kgr. Ζητείται να βρεθεί:

α) Αν χρειάζεται ρύθμιση η μηχανή συσκευασίας, δεδομένου ότι η μέση τιμή του βάρους των κουτιών πρέπει να είναι ίση με 1,00 Kgr (α=0,05)

β) Ποιο είναι το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής μέσης τιμής του βάρους των κουτιών, με επίπεδο σημαντικότητας ίσο με 0,01.

Άσκηση 65(α)

H_0: $\mu = \mu_1 = 1{,}00$ kg

$\boxed{\sigma\text{: γνωστό}}$

H_1: $\mu \neq \mu_1$

Αποδεχόμαστε την H_0 όταν

$$\boxed{z_{\bar{x}}}$$

$$z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n} \leq \bar{x} - \mu \leq z_{1-\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu + z_{\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n} \leq \bar{x} \leq \mu + z_{1-\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$$

$$\mu - z_{1-\alpha/2}\, \sigma/\sqrt{n}$$

Άσκηση 65(α)

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} = \frac{6{,}03}{6} = 1{,}005\\ n &= 6\\ \sigma &= 0{,}025\end{aligned}\right\} \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1{,}005-1}{\frac{0{,}025}{\sqrt{6}}} = 0{,}489$$

$$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_i - \frac{\alpha}{2} = z_{0,975} = 1{,}96$$

$$-1{,}96 < 0{,}489 < 1{,}96$$

άρα δεν απορρίπτεται η H_o

Άσκηση 65(β)

n μικρό & σ: γνωστό

$$\text{Η} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{άρα} \quad \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Άρα

$$\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}005 - 2{,}575\frac{0{,}025}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 1{,}005 + 2{,}575\frac{0{,}025}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}979 \leq \mu \leq 1{,}031$$

$$\alpha = 0{,}01 \Rightarrow z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 2{,}575$$

με γραμμική παρεμβολή

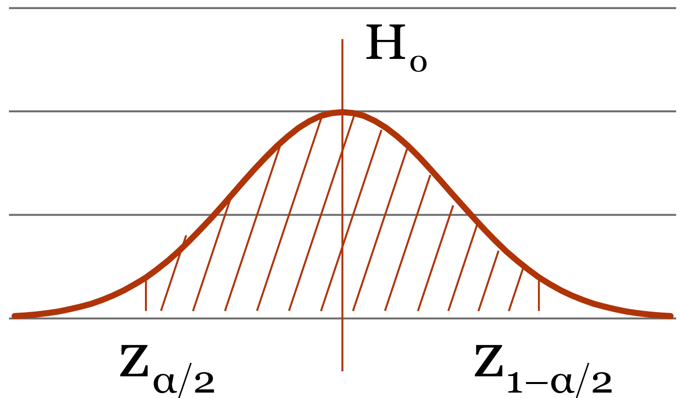
Άσκηση 66

66. Μια βιομηχανία λαμπτήρων θέλει να προσδιορίσει τη μέση διάρκεια ζωής των λαμπτήρων ορισμένου τύπου που παράγει, για τους οποίους γνωρίζει ότι η τυπική απόκλιση της διάρκειας ζωής τους είναι 120 ώρες. Για τον σκοπό αυτό λαμβάνει ένα τυχαίο δείγμα 100 λαμπτήρων και βρίσκει ότι η μέση διάρκεια ζωής των λαμπτήρων του δείγματος είναι 1570 ώρες.

α) Να ελεγχθεί, με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,05$ και $\alpha=0,01$ η υπόθεση H_0: $\mu=1600$ έναντι της υπόθεσης H_1: $\mu\neq1600$ ώρες.

β) Επίσης να ελεγχθεί η ίδια υπόθεση H_0 έναντι της υπόθεσης H_1: $\mu<1600$ ώρες, αν $\alpha=0,05$.

Άσκηση 66(α)



H_o: $\mu = 1600$

H_1: $\mu \neq 1600$

μ_o

$\equiv -z_{1-\alpha/2} = -1{,}96$ 1,96

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1570 - 1600}{120/\sqrt{100}} = -2{,}5$$

$$\underline{\alpha = 0{,}05}$$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}975} = 1{,}96$$

$$z < -z_{1-\alpha/2}$$

$$\boxed{-2{,}5 < -1{,}96 < \ldots < 1{,}96}$$

άρα απορρίπτεται η H_o και ισχύει η H_1: $\mu \neq 1600$

Άσκηση 66(α)

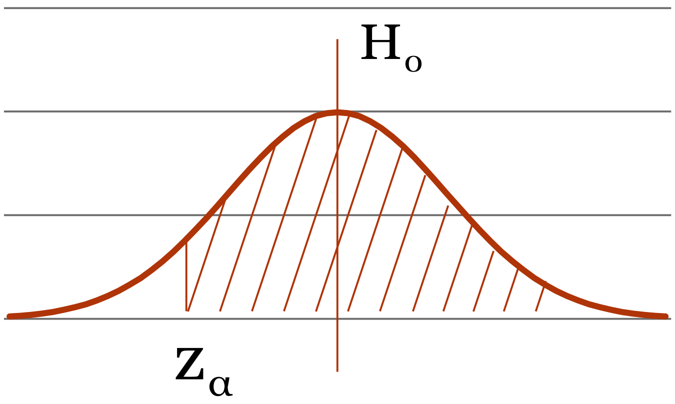
$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 0{,}01 \\ z_{1-\alpha/2} = z_{0,995} = 2{,}575 \end{array}\right\} z > -z_{1-\alpha/2}$$

-2,575 < -2,5 <2,575

άρα οριακά δεν απορρίπτεται η H_0

(διαφάνεια για το α)
με α = 0,05 ↑ η πιθανότητα
απόρριψης της H_0 απ' ότι με α = 0,01

Άσκηση 66(β)



H_o: $\mu = 1600$ ή $\mu \geq 1600$

H_1: $\mu < 1600$

$-z_{1-\alpha}$

$$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow z_\alpha = z_{0,05} = -z_{0,95} = -1{,}645$$

ίδιο με πριν

$$\underline{z = -2{,}5} < -1{,}645 = z_\alpha$$

άρα απορρίπτεται η H_o και ισχύει η H_1: $\mu < 1600$ kg