Τελευταίο φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Ιανουάριος 2022

1 Ασκήσεις σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης

1.1 $1^{η}$ Άσκηση

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} y$$

$|rI - A| = \begin{vmatrix} r-2 & -4 \\ -1 & r-2 \end{vmatrix} = (r-2)^2 - 4 = r^2 - 4r$

Ρίζες $r_1 = 0$ και $r_2 = 4$.

Για την πρώτη ρίζα έχουμε:
$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \implies -2k_1 - 4k_2 - k_1 - 2k_2 = 0 \iff 6k_2 = -3k_1 \iff k_2 = -\frac{k_1}{2}$.
Θέτουμε $k_1 = 1$ και συνεπώς $k_2 = -\frac{1}{2}$.
Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην πρώτη ρίζα είναι:
$y_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Για την $r_2 = 4$ έχουμε:
$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \implies 2k_1 - 4k_2 - k_1 + 2k_2 = 0 \iff k_2 = \frac{1}{2}k_1$.
Θέτοντας $k_1 = 1$ έχουμε:
$k_1 = 1$ και $k_2 = \frac{1}{2}$.
Άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη δεύτερη ρίζα είναι:
$y_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Συνεπώς:
$y(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} e^{4t}$

1.2 2^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η γενική λύση στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} y$$

Βρίσκουμε πρώτα τις ιδιοτιμές:
$|rI - A| = \begin{vmatrix} r-2 & 1 \\ -8 & r+2 \end{vmatrix} = r^2 - 4 + 8 = r^2 + 4$
Άρα οι ιδιοτιμές είναι: $r_{1,2} = \pm 2i$.

Για την πρώτη ιδιοτιμή $r_1 = 2i$ (στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε απο τις δύο) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} 2i-2 & 1 \\ -8 & 2i+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$(2i-2)k_1 + k_2 - 8k_1 + (2i+2)k_2 = 0 \iff$$

$$(2i-10)k_1 + (2i+3)k_2 = 0 \iff$$

$$k_2 = \frac{10-2i}{2i+3}k_1 = \frac{(10-2i)(3-2i)}{13}k_1 = \frac{30-26i+4i^2}{13}k_1 = \frac{26-26i}{13}k_1 = (2-2i)k_1.$$

Επιλέγουμε $k_1 = 1$ για ευκολία, οπότε έχουμε $k_2 = 2-2i$, και άρα το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $r = 2i$ είναι το

$$k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2i \end{bmatrix}$$

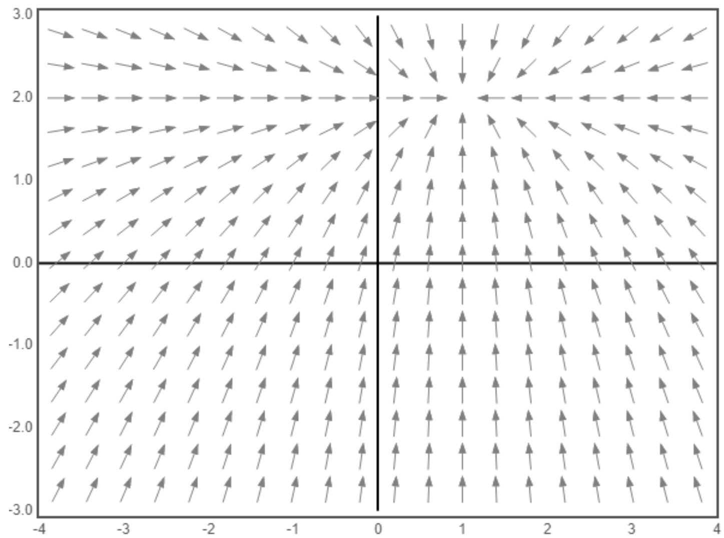
Η μιγαδική λύση που προκύπτει είναι:

$$y(t) = e^{2it} \cdot k = (cos(2t) + isin(2t)) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

Χωρίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος και έχουμε τις δύο βασικές λύσεις του συστήματος:
$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} cos(2t) - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} sin(2t) = \begin{bmatrix} cos(2t) \\ 2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix}$
$y^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} cos(2t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} sin(2t) = \begin{bmatrix} sin(2t) \\ -2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix}$

Τελικά, η γενική λύση του συστήματος είναι:

$$y(t) = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)} = C_1 \begin{bmatrix} cos(2t) \\ 2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} sin(2t) \\ -2cos(2t) + 2sin(2t) \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 1: Διάγραμμα φάσης για το πρώτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 3^η άσκηση.

1.3 3^η Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = -y_1 + 1$
$\dot{y}_2 = -2y_2 + 4$
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι:

$$y_1(t) = C_1 e^{-t} + 1$$

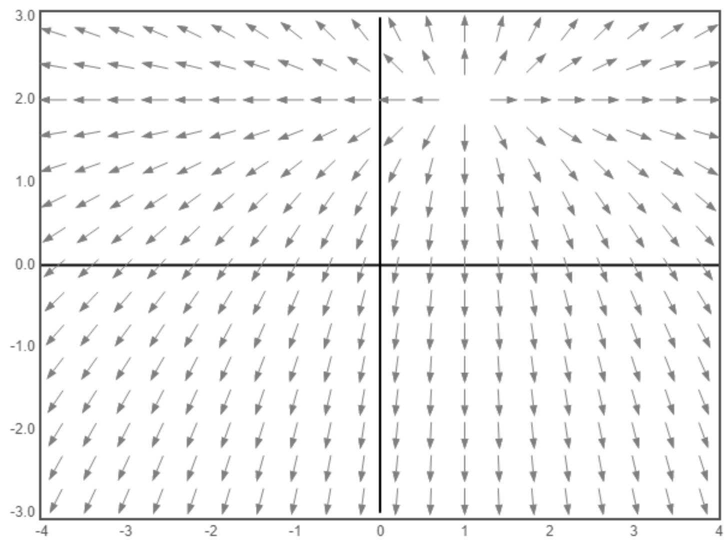
$$y_2(t) = C_2 e^{-2t} + 2$$

1.4 4^η Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = y_1 - 1$
$\dot{y}_2 = 2y_2 - 4$
Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη και οι λύσεις είναι:

$$y_1(t) = C_1 e^{t} + 1$$

$$y_2(t) = C_1 e^{2t} + 2$$



Σχήμα 2: Διάγραμμα φάσης για το δεύτερο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 4^{η} άσκηση.

1.5 5^{η} Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = 2y_2 - 2$
$\dot{y}_2 = y_1 - 1$
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0-r & 2 \\ 1 & 0-r \end{vmatrix}$$

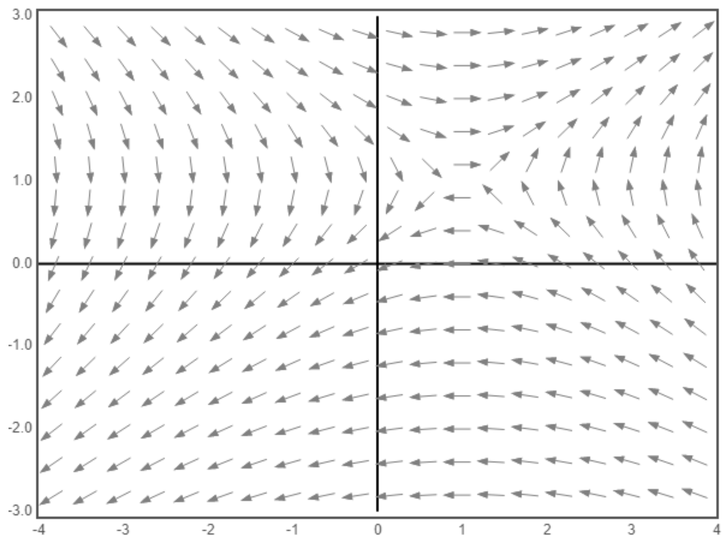
Με ρίζες $r_1 = \sqrt{2}$ και $r_2 = -\sqrt{2}$. Δεδομένου ότι οι ρίζες έχουν αντίθετο πρόσημο, η λύση σταθερής κατάστασης είναι μία ισορροπία σαγματικού σημείου.

1.6 6^{η} Άσκηση

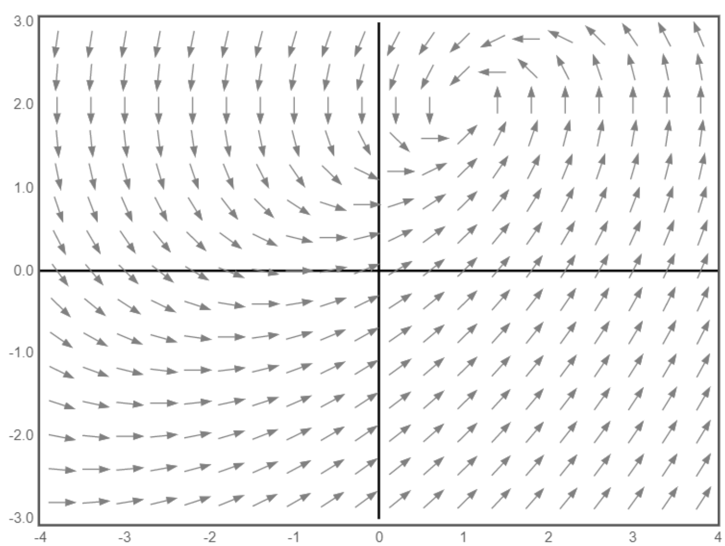
Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = -y_2 + 2$
$\dot{y}_2 = y_1 - y_2 + 1$
Τότε

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0-r & -1 \\ 1 & -1-r \end{vmatrix}$$

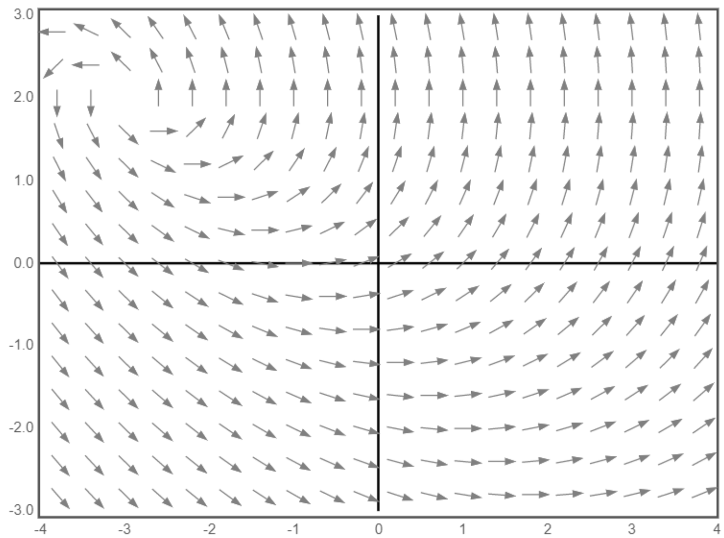
Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3$.
Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = 1$ και $\bar{y}_2 = 2$



Σχήμα 3: Διάγραμμα φάσης για το τρίτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 5^{η} άσκηση.



Σχήμα 4: Διάγραμμα φάσης για το τέταρτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 6^{η} άσκηση.



Σχήμα 5: Διάγραμμα φάσης για το πέμπτο σύστημα διαφορικών εξισώσεων που δίνεται στην 7^η άσκηση.

1.7 7^η Άσκηση

Να γίνει το διάγραμμα φάσης για το σύστημα εξισώσεων:
$\dot{y}_1 = -y_2 + 2$
$\dot{y}_2 = y_1 + y_2 + 1$
Τότε

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 0 - r & -1 \\ 1 & 1 - r \end{vmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 - r + 1$, $\Delta = 1 - 4 = -3$.
Οι ρίζες είναι $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.
Οι λύσεις σταθερής κατάστασης είναι $\bar{y}_1 = -3$ και $\bar{y}_2 = 2$