Βελτιστοποίηση υπό Περιορισμούς

Min/Max $F(x)$ υ.π $\varphi_i(x) \geq$ ή ≤ 0 με $i = 1, 2, \dots, n$

KKT : $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

Βήμα 1°:

1. Αρχικά μετασχηματίζουμε όλα τα $\varphi_i \geq 0$
2. Max F κοίλη ή Min F κυρτή (Max −F κοίλη)
3. Εφικτή Περιοχή κυρτό σύνολο $\Rightarrow$ όλες οι φ_i κοίλες

Εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις 2 και 3 το πρόβλημα εμπίπτει στο KKT (μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα)

Βήμα 2ο: Συνθήκες για βέλτιστο (Αναγκαίες και Ικανές)

Σχηματίζουμε τη Λαγκρανζιανή $L = F(x) + \lambda_i \varphi_i(x)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

$\lambda_i \varphi_i(x) = 0 \quad \forall i \longrightarrow$ Αν $\lambda_i \neq 0$ ο φ_i ενεργός διαφορετικά αγνοείται

$$\varphi_i(x) \geq 0$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Αν Max F κοίλη ή Min F κυρτή (Max −F κοίλη) το βέλτιστο θα είναι σε εσωτερικό σημείο ΕοΠ ή σε ακρότατο.

Αν Max F κυρτή ή Min F κοίλη δεν μπορεί να εφαρμοστεί το ΚΚΤ και το βέλτιστο θα είναι σε ακρότατο.

Εξέταση Κυρτότητας:

Αν $\varphi i(x) = ax+\beta$ κοίλη ως γραμμική $a,\beta \in \mathbb{R}$

Αν $\varphi i(x) = x^{a}$ $0<a\leq 1$ κοίλη ως εκθετική

Αν $\varphi i(x) = \ln x$ $x>0$ κοίλη ως λογαριθμική

Αν $\varphi i(x_1,x_2)$: $H=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$ Αν F_{11} και $F_{22} \leq 0$ κοίλη

Αν $|H_1| \leq 0$ και $|H_2| \geq 0$ κοίλη

Π.Χ1 $\max F(x) = -\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2$

υ.π $2x_1 + x_2 \leq 2, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

Λύση: Βήμα 1ο:

$$\varphi_1(x) = -2x_1 - x_2 + 2 \geq 0$$
$$\varphi_2(x) = x_1 \geq 0$$
$$\varphi_3(x) = x_2 \geq 0$$

$$F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -2x_1 + 1, \quad F_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -4x_2 + 2$$

$$\left.\begin{array}{ll} F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -2, & F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0 \\ F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 0, & F_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H_1| = -2 \leq 0 \\ |H_2| = 8 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{άρα } F \text{ κόιλη}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_1(x) = -2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 & \text{κοίλη ως γραμμική} \\ \varphi_2(x) = x_1 \geq 0 & \text{κοίλη ως γραμμική} \\ \varphi_3(x) = x_2 \geq 0 & \text{κοίλη ως γραμμική} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ΕοΠ κυρτό σύνολο}$$

Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΚΚΤ:

$$L = -\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 2\left(x_2 - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \lambda_1(-2x_1 - x_2 + 2) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -2x_1 + 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -4x_2 + 2 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1(-2x_1 - x_2 + 2) = 0$$

$$\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\lambda_3 x_2 = 0$$

$$\varphi_{1,2,3} \geq 0$$

$$\lambda_{1,2,3} \geq 0$$

Έστω $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$:

$$-2x_1+1=0 \Rightarrow x_1 = 1/2$$
$$-4x_2+2=0 \Rightarrow x_2 = 1/2$$

$$\varphi_1 = -1 - \frac{1}{2} + 2 \geq 0$$
$$\varphi_{2,3} \geq 0 \,,\; \lambda_{1,2,3} \geq 0$$

Βασιζόμενοι στο KKT συμπεραίνουμε ότι το $x=[1/2, 1/2]^T$ αποτελεί το μέγιστο της F υπό τους δεδομένους περιορισμούς

Note: Αρχικά υποθέσαμε ότι όλοι οι περιορισμοί είναι ανενεργοί (όλα τα $\lambda_i=0$) και πετύχαμε εφικτή λύση απευθείας. Η λύση είναι εφικτή αν ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς.

Θέμα 4°

B. Min $F(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - x_1 x_2$ υ.π $x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1$

βήμα 1°:

1. $F_1 = 4x_1 - x_2$, $F_{11} = 4$, $F_{12} = -1$
$F_2 = 8x_2 - x_1$, $F_{21} = -1$, $F_{22} = 8$ $\Bigg\} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

$|H_1| = 4 \geq 0$ και $|H_2| = 32 - 1 = 31 \geq 0$ άρα η F κυρτή

2. Ε.Π κυρτό σύνολο: $\varphi_1(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 1 \geq 0$

$\nabla^2 \varphi_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} |H_1| = -2 \leq 0 \\ |H_2| = 8 \geq 0 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \varphi_1$ κοίλη

Επειδή Min F κυρτή και Ε.Π είναι κυρτό σύνολο μπορούμε να εφαρμόσουμε το ΚΚΤ στην Max −F.

Βήμα 2°: $L = -F(x) + \lambda_1 \varphi_1(x)$

$$L = -2x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 + \lambda_1(-x_1^2 - 2x_2^2 + 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -4x_1 + x_2 - 2\lambda_1 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -8x_2 + x_1 - 4\lambda_1 x_2 = 0$$

$$\lambda_1(-x_1^2 - 2x_2^2 + 1) = 0$$

$$\varphi_1 \geq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

Έστω $\lambda_1 = 0$: $\left.\begin{array}{l} -4x_1 + x_2 = 0 \\ -8x_2 + x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} \varphi_1 = 1 \geq 0 \quad \text{ισχύει} \\ \lambda_1 \geq 0 \end{array}$

Βρήκαμε ότι $x = [0,0]^T$ και $\lambda_1 = 0$ ικανοποιούν τις συνθήκες των KKT άρα έχουμε βρει μέγιστο για την $-F$ ή αντίστοιχα

Ελάχιστο για την αρχική F.

Π.Χ2 Max $F(X) = -(x_1-1)^2 - 2(x_2-1)^2$ υ.π $2x_1+x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Λύση

Βήμα 1ο: Εξέταση κυρτότητας της $F(x)$

$$\left.\begin{array}{ll} F_1 = -2x_1+2 & F_{11}=-2,\ F_{12}=0 \\ F_2 = -4x_2+4 & F_{21}=0,\ F_{22}=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow H = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$|H_1| = -2 \leq 0$ και $|H_2| = 8 \geq 0$ $\Longrightarrow$ F κοίλη

Εξέταση Ε.Π:
$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x) = -2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ \varphi_2(x) = x_1 \geq 0 \\ \varphi_3(x) = x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{κοίλες ως γραμμικές}$$

$\Longrightarrow$ Ε.Π κυρτό σύνολο.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα KKT.

Βήμα 2ο: $L = -(x_1-1)^2 - 2(x_2-1)^2 + \lambda_1(-2x_1 - x_2 + 2) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -2x_1 + 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -4x_2 + 4 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 \cdot (-2x_1 - x_2 + 2) = 0$$

$$\lambda_2 \cdot x_1 = 0$$

$$\lambda_3 \cdot x_2 = 0$$

$$\varphi_{1,2,3} \geq 0$$

$$\lambda_{1,2,3} \geq 0$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι όλοι οι περιορισμοί είναι ανενεργοί $\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$$-2x_1+2=0 \Rightarrow x_1=1$$

$$-4x_2+4=0 \Rightarrow x_2=1$$

$\varphi_1=-2-1+2 \ngeq 0$ άρα παραβιάζει τον φ_1

Συνεπώς ενεργοποιούμε τον $\varphi_1 \Rightarrow \lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow \underline{\varphi_1(x)=0} \Rightarrow -2x_1-x_2+2=0 \Rightarrow \boxed{x_2=2-2x_1}$, $\lambda_{2,3}=0$ $\Rightarrow -18x_1=-10 \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{5}{9}}$

$$-2x_1+2-2\lambda_1=0 \Rightarrow -2x_1+2-16x_1+8=0$$

$$-4x_2+4-\lambda_1=0 \Rightarrow -8+8x_1+4-\lambda_1=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=8x_1-4}$$

$$\lambda_1=8\cdot\frac{5}{9}-4=\frac{4}{9}>0,\quad x_2=2-\frac{10}{9}=\frac{8}{9}$$

Ξανά ελέγχω αν η λύση είναι εφικτή: $\varphi_1=-2\cdot\frac{5}{9}-\frac{8}{9}+2 \geq 0$ ισχύει

$\varphi_2=\frac{5}{9} \geq 0$, $\varphi_3=\frac{8}{9} \geq 0$

$\lambda_{1,2,3} \geq 0$ συνεπώς παρατηρούμε ότι αυτή η λύση ικανοποιεί όλες τις συνθήκες των KKT και άρα η f μεγιστοποιείται στο σημείο

$$x^* = x = \left[5/9, 8/9\right]^T.$$

F_{11} και $F_{22} \geq 0 \longrightarrow$ Κυρτή

$|H_1| \geq 0$ και $|H_2| \geq 0 \longrightarrow$ Κυρτή

F_{11} και $F_{22} \leq 0 \longrightarrow$ Κοίλη

$|H_1| \leq 0$ και $|H_2| \geq 0 \longrightarrow$ Κοίλη

	Max	Min
F Κυρτή	Ακρότατο	KKT(-F)
F κοίλη	KKT	Ακρότατο

Μεθοδολογία: Ξεκινάω με όλους τους περιορισμούς ανενεργούς, ελέγχω αν η λύση είναι εφικτή, αν είναι σταματάω. Διαφορετικα ενεργοποιώ τους περιορισμούς που παραβιάζονται και καταλήγω σε κάποια λύση. Ξανά ελέγχω αν η λύση είναι εφικτή αν είναι σταματάω, διαφορετικά ξανά βλέπω τι παραβιάζεται κ.ο.κ

Π.Χ $\exists z \cdot x_1 = 0$ και $x_1 = -1$ επειδή $\varphi z = x_1 \geq 0 \Rightarrow -1 \ngeq 0$

ο φz παραβιάζεται άρα ενεργοποιούμε τον $\varphi z \Rightarrow \lambda z \neq 0$ και $\varphi z(x) = 0$.

$\Rightarrow x_1 = 0$

Note:

Πρέπει να βρούμε τις τελευταίες n-m ηγετικές κύριες ελάσσονες

m άρτιος : + + + Min , − + − Max

m περιττός : − − − Min , + − + Max