Ακολουθίες: a_n: Οι τιμές της ακολουθίας λέγονται όροι και ο n δείκτης.

Μορφές: i) $a_{n+1} = 2a_n + 5$, $a_1 = 1$ (Τυχαίο παράδειγμα)
Αναδρομική ακολουθία δηλαδή

ii) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ ή $a_n = \begin{cases} 0, & n = 2\rho - 1, \rho \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 2\rho, \rho \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Τι μπορεί να ζητηθεί;

1) Να δείξουμε ότι μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα.
(Προσοχή μπορεί να ζητάει συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης)
Τρόποι:
i) Ορισμός ορίου ακολουθίας:
Λέμε ότι η a_n συγκλίνει στο L αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$
: $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Π.χ Να δείξουμε ότι $\frac{1}{n}$ συγκλίνει στο $L=0$
Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να ισχύει $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$

Βρήκαμε τα n για τα οποία ισχύει η $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$
οπότε διαλέγουμε n_0: $n \geq n_0$
$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$

$n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (Το ακέραιο μέρος)

Σύμφωνα με τον ορισμό η ακολουθία συγκλίνει στο $L=0$.

ii) Κάθε αύξουσα και άνω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει
ii) Κάθε φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει

Μονοτονιά: 1) Αυξουσα ή γν. αυξουσα αν $a_n \le a_{n+1}$ ή
$a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2) Φθινούσα ή γν. φθίνουσα αν $a_n \ge a_{n+1}$ ή
$a_n > a_{n+1}$

Φραγμένες ακολουθίες:

- Ανω φραγμένη αν: $\exists \varphi_a \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \le \varphi_a$ → Ανω φράγμα
- Κάτω φραγμένη αν: $\exists \varphi_K \in \mathbb{R} : \forall n \in$ $a_n \ge \varphi_K$ → κάτω φράγμα

Π.Χ Να δειχθεί ότι η $a_{n+1} = \frac{2}{5}a_n + 5$, $a_0 = 0$ ειναι αύξουσα

Βήμα 1°: Για $n=0$: $a_0 = 0$, $a_1 = 5 > a_0$
Για $n=k$: υποθέτουμε ότι $a_{k+1} \ge a_k \Leftrightarrow \frac{2}{5}a_k + 5 \ge a_k \Leftrightarrow$

$2a_k + 25 \ge 5a_k \Leftrightarrow$

$25 \ge 3a_k \Leftrightarrow$

$\frac{25}{3} \ge a_k$

Για $n = k+1$: θ.δ.ο $a_{k+2} \ge a_{k+1}$

$\Rightarrow \frac{2}{5} a_{k+1} + \cancel{5} \ge \frac{2}{5} a_k + \cancel{5}$

$\Rightarrow \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}a_k + 5\right) \ge \frac{2}{5} a_k$

$\Rightarrow \frac{4}{25} a_k + 2 \ge \frac{2}{5} a_k$

$\Rightarrow 2 \ge \frac{2}{5} a_k - \frac{4}{25} a_k$

$\Rightarrow 2 \ge \frac{6}{25} a_k$

$\Rightarrow \frac{50}{6} \ge a_k \Rightarrow \frac{25}{3} \ge a_k$ που ισχύει

Άρα ειναι αύξουσα

Βήμα 2°: θ.δ.ο είναι άνω φραγμένη

Αν θέσω $a_{n+1} = a_n = x$ και λύσω

$$x = \frac{2}{5}x + 5 \iff$$

$$5x = 2x + 25 \iff$$

$$x = \frac{25}{3}$$

Για $n=0$: $a_0 = 0 < \frac{25}{3}$

Για $n=k$ έστω $a_k < \frac{25}{3}$

Για $n=k+1$: θ.δ.ο $a_{k+1} \leq \frac{25}{3} \iff$

$$\frac{2}{5}a_k + 5 \leq \frac{25}{3} \iff$$

$$\frac{2}{5}a_k \leq \frac{25-15}{3} \iff$$

$$\frac{2}{5}a_k \leq \frac{10}{3} \iff$$

$$a_k \leq \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{5}} \iff$$

$$a_k \leq \frac{50}{6} \Rightarrow a_k \leq \frac{25}{3}$$ το οποίο ισχύει

Άρα η ακολουθία είναι συγκλίνουσα ως αύξουσα και άνω φραγμένη.

2) Βρείτε το όριο της ακολουθίας υποθέτοντας ότι συγκλίνει. Θέτω $a_{n+1} = a_n = x$ και λύνω την α' βαθμια εξίσωση

3) Δοθέντος $a_{n+1} = \frac{\lambda}{5}a_n + 1$, $a_0 = 1$ για ποιες τιμές του λ συγκλίνει

$$\left|\frac{\lambda}{5}\right| < 1 \iff \underline{|\lambda| < 5.}$$