1.3 $\quad y'' + 4y' - y = 4$

Να βρεθεί η γενική λύση;

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $r^2 + 4r - 1 = 0$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 1(-1) = \underline{20 > 0}$$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$y(t) = \underbrace{\underbrace{C_1 e^{(-2+\sqrt{5})t} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})t}}_{\text{ομογενής}} - 4}_{\text{μη ομογενής}}$$

<u>Εύρεση σταθερού σημείου:</u> $-\bar{y} = 4 \Rightarrow \bar{y} = -4$

<u>Εξέταση ως προς ευστάθεια:</u> $r_1 = -2 + \sqrt{5} > 0$ και $r_2 = -2 - \sqrt{5} < 0$

Έχουμε μια ισορροπία σαγματικού σημείου $\Rightarrow$ το σταθ. είναι ασταθές

Θέμα 4ο Φεβρ 2023

A) $y'' + 4y' - 4y = 10$

Να βρεθεί η γενική λύση; $r^2 + 4r - 4 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = \underline{32} > 0$

$2 \cdot 16$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$y(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t} - \frac{5}{2}$$

<u>Σταθερό σημείο</u>: $-4\bar{y} = 10 \Rightarrow \bar{y} = -\frac{5}{2}$

<u>Εξέταση ως προς ευστάθεια</u>; $r_1 = -1+\sqrt{2} > 0$ και $r_2 = -1-\sqrt{2} < 0$

Έχουμε μια ισορροπία σαγματικού σημείου συνεπώς το σταθερό σημείο είναι ασταθές.

Θέμα 4ο Φεβρ 2022

A) $y'' + 7y' + \frac{49}{4}y = 10$

$\frac{49}{4}\bar{y} = 10 \Rightarrow \bar{y} = \frac{40}{49}$

Να βρεθεί η Γ.Λ;

Να εξεταστεί το σταθερό σημείο ως προς την ευστάθεια;

$r^2 + 7r + \frac{49}{4} = 0$, $\Delta = 49 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{49}{4}\right) = 0$ $\quad r_{1,2} = \frac{-B}{2a} = \frac{-7}{2}$

$y(t) = e^{-\frac{7}{2}t}\left(C1 + C2 \cdot t\right) + \frac{40}{49}$

$r_{1,2} = -\frac{7}{2} < 0 \Rightarrow$ Το σταθερό σημείο είναι ευσταθές.

1.5 $y'' - 4y' + \frac{7}{4}y = 20$ Να βρεθεί η Γ.Λ. όταν

$y(0) = 10$, $y'(0) = 4$

$$r^2 - 4r + \frac{7}{4} = 0 \quad , \quad \Delta = 16 - 7 = 9 > 0$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm 3}{2} \quad \begin{cases} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\frac{7}{2}t} + C_2\, e^{(1/2)t} + \frac{80}{7}$$

$$y'(t) = \frac{7}{2} C_1 \cdot e^{\frac{7}{2}t} + \frac{1}{2} C_2\, e^{(1/2)t}$$

Για $t=0$: $y(0) = C_1 + C_2 + \frac{80}{7} \Rightarrow 70 = 7C_1 + 7C_2 + 80 \Leftrightarrow 7C_1 + 7C_2 = -10 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{-7C_2 - 10}{7}}$

Για $t=0$: $y'(0) = C_1 + C_2 \iff$

$$4 = \frac{7}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 \iff$$

$$8 = \cancel{7}\left(-C_2 - \frac{10}{\cancel{7}}\right) + C_2 \iff$$

$$8 = -7C_2 - 10 + C_2 \iff$$

$$18 = -6C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -3}$$

$$C_1 = \frac{-7C_2 - 10}{7} = \frac{21-10}{7} = \frac{11}{7}$$

$$y(t) = \frac{11}{7}e^{\frac{7}{2}t} - 3e^{(1/2)t} + \frac{80}{7}$$

1.8) $y'' - y' + 2y = 5$ | $2\bar{y} = 5 \Rightarrow \bar{y} = \frac{5}{2}$

1. Τ.Π;

2. ευσταθεια;

$r^2 - r + 2 = 0 \quad \Delta = 1 - 8 = -7 < 0$

$k = -\frac{B}{2a} = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$$y(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(C1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) + C2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \right) + \frac{5}{2}$$

Επειδή $k > 0$ το σταθερό σημείο είναι ασταθές.

$\boxed{1.6}$ $y'' - 2y' + y = t \quad (1)$

1. Τ.Λ;
2. Ευστάθεια;

$r^2 - 2r + 1 = 0, \quad \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$

$r_{1,2} = -\frac{B}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$y_p = A_0 + A_1 t = t + 2$

Σταθερό σημείο το $y_p = A_0 + A_1 t$

$y = y_p$

$y' = \frac{dy}{dt} = A_1$

$y'' = \frac{dy'}{dt} = 0$

Άρα στην (1): $0 - 2A_1 + A_0 + A_1 t = t \Leftrightarrow$

$-2A_1 + A_0 = 0$ και $A_1 \cancel{t} = \cancel{t} \Rightarrow \boxed{A_1 = 1}$

$\boxed{A_0 = 2}$

$$y(t) = e^t (C_1 + C_2 t) + t + 2 \quad \Big| \quad (e^x)' = (x)' \cdot e^x$$

Ασκ9.pdF

3) Να βρεθεί η Γ.Λ της $y'' - 5y' + y = e^t$

$r^2 - 5r + 1 = 0$, $\Delta = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$

$r_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, $y_p = A_0 + A_1 e^t$ (Σωστερό σημείο)

$y = y_p$

$y' = \dfrac{dy}{dt} = A_1 e^t$

$y'' = \dfrac{dy'}{dt} = A_1 e^t$

$$\cancel{A_1 e^t} - 5A_1 e^t + A_0 + \cancel{A_1 e^t} = e^t \iff$$

$$-3A_1 e^t + A_0 = e^t \iff$$

$A_0 = 0$ και $-3A_1 \cancel{e^t} = \cancel{e^t} \iff$

$$\boxed{A_1 = -\frac{1}{3}} \quad y_p = 0 - \frac{1}{3}e^t$$

Συνεπώς, $y(t) = C_1 e^{\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)t} + C_2 e^{\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)t} - \frac{e^t}{3}$