

8^ο φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2021

1 Ασκήσεις σε εξισώσεις διαφορών πρώτης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης διαφορών

$$y_{t+1} = \frac{1}{4}y_t^2 - \frac{1}{2}$$

και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.

Εξίσωση ισορροπίας:

$$\frac{1}{4}\bar{y}^2 - \bar{y} - \frac{1}{2} = 0$$

$\Delta = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Ρίζες: $\rho_1 = 2 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\rho_2 = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$$f'(\bar{y}) = \frac{1}{2}\bar{y}.$$

$f'(\rho_1) = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$ συνεπώς είναι ασταθές. $f'(\rho_2) = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} > -1$ και αρνητικό, συνεπώς είναι ευσταθές με ταλαντώσεις.

1.2 2^η Άσκηση

Να βρεθεί η σταθερή κατάσταση της εξίσωσης διαφορών και να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια:

$$y_{t+1} = \frac{1}{4}y_t + 10$$

$$\bar{y} = \frac{1}{4}\bar{y} + 10 \iff \bar{y} = \frac{40}{3}.$$

$\frac{1}{4}$ θετικό και μικρότερο της μονάδας, συνεπώς η εξίσωση διαφορών έχει ευστάθεια με μονοτονία σε αυτό το σημείο.

1.3 3^η Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης διαφορών: $y_{t+1} = -\frac{1}{2}y_t + 4$ αν $y_0 = 4$
 $\bar{y} = -\frac{1}{2}\bar{y} + 4 \iff \bar{y} = \frac{8}{3}$

Συνεπώς: $y_t = C_1(-\frac{1}{2})^t + \frac{8}{3}$
 $y_0 = 4 \iff 4 = C_1 + \frac{8}{3} \iff C_1 = \frac{4}{3}$.
 Συνεπώς $y_t = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^t + \frac{8}{3}$

1.4 4^η Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της $y_{t+1} = y_t^{\frac{3}{4}}$ και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.

Στο σημείο ισορροπίας

$$\bar{y} - \bar{y}^{\frac{3}{4}} = 0 \iff \bar{y}^{\frac{3}{4}}(\bar{y}^{\frac{1}{4}} - 1) = 0$$

Συνεπώς, τα σημεία ισορροπίας είναι το 0 και το 1.

$$f'(\bar{y}) = \frac{3}{4}\bar{y}^{-\frac{1}{4}}$$

Στο $\bar{y} = 0$, απειρίζεται, άρα είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

Στο $\bar{y} = 1$, $f'(\bar{y}) = \frac{3}{4}$, που είναι μικρότερο της μονάδας και μεγαλύτερο του μηδενός, συνεπώς είναι μονότονα ευσταθές σημείο ισορροπίας.

1.5 5^η Άσκηση

Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας της $y_{t+1} = y_t^2 - 1$ και να εξεταστούν ως προς την ευστάθεια.

Στο σημείο ισορροπίας $\bar{y}^2 - \bar{y} - 1 = 0$.

$\Delta = 5$, ρίζες $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$f'(\bar{y}) = 2\bar{y}$. Στο ρ_1 η παράγωγος είναι $1 + \sqrt{5} > 1$ συνεπώς η εξίσωση διαφορών είναι τοπικά ασταθής σε αυτό το σημείο. Στο ρ_2 η παράγωγος είναι $1 - \sqrt{5} < -1$ συνεπώς η εξίσωση διαφορών είναι τοπικά ασταθής σε αυτό το σημείο.

1.6 6^η Άσκηση

Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης διαφορών: $y_{t+1} = y_t + 5$.

Η λύση είναι $y_t = C + 5t$.