<u>Περίπτωση 2η:</u> Αν μια διαφορική εξίσωση μπορεί να πάρει τη μορφή $P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$, όπου P συνάρτηση μόνο του x και Q συνάρτηση μόνο του y, τότε λέγεται διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

<u>Βήματα Επίλυσης:</u>

1ο: Χωρίζουμε τις μεταβλητές μετά αντίστοιχα διαφορικά τους.
2ο: Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη που προκύπτουν.

Π.Χ.1

$$\frac{dy}{dx} = 2x \iff$$

$$dy = 2x \iff$$

$$\int dy = \int 2x\,dx + c \iff$$

$$y = x^2 + c$$

Π.Χ.2

$$x\frac{dy}{dx} = y(y+1), \quad x>0 \iff$$

$$x\,dy = y(y+1)\,dx$$

$$\frac{1}{y(y+1)}dy = \frac{1}{x}\,dx \iff$$

$$\int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx + c \iff$$

$$\int \frac{1}{y}dy + \int \frac{1}{y+1}\,dy = \ln x + c \iff$$

$$\ln y + \ln(y+1) = \ln x + c$$

<u>Περίπτωση $3^η$:</u> Μορφή $y' \underbrace{\pm \text{αριθμός} \cdot t}_{a(t)} \cdot y = bt$, (1)

Βήμα 1°: $A(t) = \int a(t)\,dt$

Βήμα 2°: Πολλαπλασιάζω την (1) με $e^{A(t)}$
προκύπτει: $e^{A(t)}(y' + a(t) \cdot y) = e^{A(t)} bt$

Βήμα 3°: $\frac{d}{dt}(e^{A(t)} \cdot y) = e^{A(t)} \cdot bt$

Βήμα 4°: $e^{A(t)} \cdot y = \int e^{A(t)} \cdot bt\,dt + c$

Βήμα 5°: $y(t) = \dfrac{\int e^{A(t)} \cdot bt\,dt + c}{e^{A(t)}}$

Π.Χ. $\boxed{\text{Δετ 8° ασκ8.}}$ $y' - 4ty = 2t$

1° : $A(t) = \int -4t\,dt = -2t^2$

2° : $e^{-2t^2}(y' - 4ty) = e^{-2t^2} \cdot 2t$

3° : $\frac{d}{dt}\left(e^{-2t^2} \cdot y\right) = e^{-2t^2} \cdot 2t$

4° : $e^{-2t^2} \cdot y = \int e^{-2t^2} \cdot 2t\,dt + c$

5° : $y(t) = \frac{\int e^{-2t^2} \cdot 2t\,dt + c}{e^{-2t^2}}$

$$y(t) = e^{2t^2}\left(-\frac{e^{-2t^2}}{2} + c\right)$$

$$y(t) = -\frac{e^{2t^2} \cdot e^{-2t^2}}{2} + c\,e^{2t^2}$$

$$\left(e^{-2t^2}\right)' = \frac{-4t\,e^{-2t^2}}{-2} = \underline{e^{-2t^2} \cdot 2t}$$

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

Άρα $y(t) = -\frac{e^{2t^2 - 2t^2}}{2} + c\,e^{2t^2}$

$$y(t) = -\frac{1}{2} + c\,e^{2t^2}$$