Διάλεξη 5η ①

Μερικές παράγωγοι 1ης και 2ης τάξης $F(x_1, x_2, \dots x_n)$:

1ης: $\nabla F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_n \end{bmatrix}$

• Αν θέλω να βρω τα στάσιμα σημεία της F βρίσκω τη μερική παράγωγο 1ης τάξης και λύνω το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν ανάλογα με το πλήθος των μεταβλητών n ($f_1=0$ και f_2 και $f_n=0$)

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} \quad \text{κλπ.}$$

∇F λέγεται και διάνυσμα κλίσης.

2ης: $\nabla^2 F = H$ (εσσιανή μήτρα) $= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{bmatrix}$

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad \text{κλπ.}$$

Κλίση ισοσταθμικών καμπυλών: $-\dfrac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}$

όπου $f_1(x_1,x_2) = \dfrac{\partial F}{\partial x_1}$, $f_2(x_1,x_2) = \dfrac{\partial F}{\partial x_2}$

Κλίση εφαπτομένης στην καμπύλη: $-\dfrac{f_1(x_1,x_2)}{f_2(x_1,x_2)}$

μόνο που εδώ θα δίνει τιμές για x_1, x_2 οπότε στο τέλος θα κάνω αντικατάσταση.

Θετικά/Αρνητικά ορισμένος/ημι-ορισμένος:

Έχοντας υπολογίσει τον $\nabla^2 f = \underline{H} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{nn} \end{bmatrix}$

Στη χειρότερη 3Χ3 πίνακας (3 μεταβλητές).

Α' τρόπος:

Βρίσκω τις ηγετικές ελάσσονες για να εξάγω συμπέρασμα.

$$|H_1| = f_{11} \ , |H_2| = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \text{ και } |H_3| = H$$

* $|A| = \det(A)$

1) Αν όλες $(+,+,+)$: Θετικά ορισμένος και τοπικό ελάχιστο
2) Αν $(-,+,-)$: Αρνητικά ορισμένος και τοπικό μέγιστο
3) Αν δεν ισχύει 1 ή 2 $\Rightarrow$ πίνακας μη ορισμένος (σαγματικό σημείο)
   i) Αν όλες $(+)$ εκτός από μια που θα είναι $0 \Rightarrow$ θετικά ημι-ορισμένος και τοπικό ελάχιστο
   ii) Αν τα πρόσημα εναλλάσσεται τελειώνοντας με μη θετικό και μια ελάσσονα $=0$ $\Rightarrow$ αρνητικά ημι-ορισμένος και τοπικό μέγιστο.
4) $(-,-$ κλπ ή $+,-$ ή $+,+,-$ ή $-,+,+$ $\Rightarrow$ Μη ορισμένος).

Β' τρόπος: Με ιδιοτιμές $|A - \lambda I| = 0$

i) $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ θετικά ορισμένος
ii) $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ αρνητικά ορισμένος
iii) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow$ θετικά ημι-ορισμένος
iv) $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0 \Rightarrow$ Αρνητικά ημι-ορισμένος
v) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ Μη ορισμένος

Πιο εύκολος ο Α' τρόπος.

Τύποι ορίζουσών: $|A_{2\times2}| = \left|\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\right| = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$

$$|A_{3\times3}| = \left|\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{bmatrix} \end{array}\right|$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix}$$

α(+) και παίρνω την det 2x2 των άλλων στηλών
ομοίως και για τα άλλα

φροντ 5ο: 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10
φροντ 6ο: όλες
Σετ 3ο: Α1, Α2, Α8, Α9, Α10
Σετ 4ο: όλες