10^o φροντιστηριακό μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2021

1 Ασκήσεις σε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

1.1 1^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση: $\dot{y} - 4y = 0$.
$\dot{y} = 4y \iff \frac{\dot{y}}{y} = 4 \iff \int \frac{\dot{y}}{y} dt = 4t + c_1$
$\iff \int \frac{dy/dt}{y} dt = 4t + c_1 \iff \int \frac{1}{y} dy = 4t + c_1$
$\iff lny + c_2 = 4t + c_1$
$y = e^{4t+c_1-c_2} = Ce^{4t}$

1.2 2^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} + 2y = 4$.
Η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση είναι η $\dot{y} + 2y = 0$ και η λύση της ομογενούς είναι $y_h(t) = Ce^{-2t}$.
Για το σημείο ισορροπίας ισχύει ότι $0 + 2\bar{y} = 4 \iff \bar{y} = 2$.
Συνεπώς η γενική λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y(t) = Ce^{-2t} + 2$.

1.3 3^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση: $\dot{y} = y - 4$, ώστε να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(0) = 2$.

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y_h(t) = Ce^t$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = 4$.
$y(0) = 2 \iff C + 4 = 2 \iff C = -2$.
Συνεπώς η γενική λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης είναι:
$y(t) = -2e^t + 4$.

1.4 4^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} = -y - 2$ ώστε να ικανοποιεί την $y(0) = 4$ και να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια.
Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_h(t) = Ce^{-t}$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = -2$.
Συνεπώς η λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως:
$y(t) = Ce^{-t} - 2$.
Η αρχική συνθήκη μας δίνει $y(0) = 4 \iff C - 2 = 4 \iff C = 6$
Συνεπώς: $y(t) = 6e^{-t} - 2$ η οποία συγκλίνει στην σταθερή κατάσταση $\bar{y} = -2$.

1.5 5^η Άσκηση

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $\dot{y} = y + 4$ ώστε να ικανοποιεί την $y(0) = 8$ και να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια.
Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_h(t) = Ce^t$.
Το σημείο ισορροπίας είναι το $\bar{y} = -4$.
Συνεπώς η λύση της συνολικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να εκφραστεί ως:
$y(t) = Ce^t - 4$.
Η αρχική συνθήκη μας δίνει $y(0) = 8 \iff C - 4 = 8 \iff C = 12$.
Συνεπώς $y(t) = 12e^t - 4$ η οποία αποκλίνει από την σταθερή κατάσταση $\bar{y} = -4$.

1.6 6^η Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$xy' + xy = 2e^{-x}$, $x > 0$
Διαιρούμε με x και έχουμε $y' + y = \frac{2e^{-x}}{x}$.
Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι ο $I = exp[\int dx] = e^x$.
Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και έχουμε:
$e^x y' + e^x y = \frac{2}{x}$ ή
$(e^x y)' = \frac{2}{x}$

ισοδύναμα $e^x y = \int \frac{2}{x}dx$ ή $e^x y = 2lnx + C$
Διαιρούμε με e^x και η τελική λύση είναι $y = \frac{2lnx}{e^x} + \frac{C}{e^x}$.

1.7 7^η Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$xy^{'} + (1+x)y = 1$, $x > 0$
Διαιρούμε με x: $y^{'} + \frac{1+x}{x}y = \frac{1}{x}$.
Ο ολοκληρωτικής παράγοντας είναι $I = exp[\int \frac{1+x}{x}dx] = exp[\int \frac{1}{x}dx + \int dx] = exp[lnx + x] = xe^x$.
Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και έχουμε:
$xe^x y^{'} + \frac{1+x}{x}xe^x y = e^x \iff (xe^x y)^{'} = e^x$.
Συνεπώς $xe^x y = e^x + C$. Άρα $y = \frac{1}{x} + \frac{C}{xe^x}$.

1.8 8^η Άσκηση

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:
$x\frac{dy}{dx} = 2y$: $x, y > 0$.
$x\frac{dy}{dx} = 2y \implies \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \implies ln(y) = Cln(x^2) \implies y = C_1 x^2$.

1.9 9^η Άσκηση

Η εξίσωση Bernoulli έχει τη μορφή:

$$y^{'} + P(x)y = R(x)y^a$$

Λύνεται κάνοντας την αντικατάσταση $v = y^{1-a}$.
Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε την παρακάτω εξίσωση: $y^{'} + \frac{1}{x}y = 3x^2y^3$ (1)
Τότε $P(x) = \frac{1}{x}, R(x) = 3x^2, a = 3$
Κάνουμε την αντικατάσταση $v = y^{-2}$ ή $y = v^{-\frac{1}{2}}$
Τότε $y^{'}(x) = -\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}v^{'}$
Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (1) και έχουμε:

$$-\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}v^{'} + \frac{1}{x}v^{-\frac{1}{2}} = 3x^2v^{-\frac{3}{2}}$$

Πολλαπλασιάζουμε με $-2v^{\frac{3}{2}}$ και έχουμε:

$$v^{'} - \frac{2}{x}v = -6x^2$$

Αυτή είναι γραμμική εξίσωση και ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:

$$e^{\int -(2/x)dx} = e^{-2lnx} = e^{ln(x^{-2})} = x^{-2}$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα και έχουμε:

$$x^{-2}v^{'} - 2x^{-3}v = -6 \iff (x^{-2}v)^{'} = -6 \iff x^{-2}v = -6x + c \iff v = -6x^3 + cx^2$$

Όμως: $y(x) = v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{cx^2 - 6x^3}}$

1.10 10^{η} Άσκηση

Η εξίσωση Ricatti έχει τη μορφή:

$$y^{'} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

Αν μία λύση είναι η $S(x)$ κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$y = S(x) + \frac{1}{z}$$

Για παράδειγμα, έστω η εξίσωση:

$$y^{'} = \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{2}{x}$$

Έχει ως μία λύση την $S(x) = 1$, άρα κάνουμε τον μετασχηματισμό $y = 1 + \frac{1}{z}$.
Συνεπώς $y^{'} = -\frac{1}{z^2}z^{'}$. Άρα: $-\frac{1}{z^2}z^{'} = \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z})^2 + \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z}) - \frac{2}{x} \iff$
$-\frac{1}{z^2}z^{'} = \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}) + \frac{1}{x}(1 + \frac{1}{z}) - \frac{2}{x} \iff z^{'} = -\frac{z^2}{x} - \frac{1}{x} - 2z\frac{1}{x} - \frac{z^2}{x} - \frac{z}{x} + \frac{2z^2}{x} \iff$
$z^{'} = -\frac{3}{x}z - \frac{1}{x} \iff z^{'} + \frac{3}{x}z = -\frac{1}{x}$
Αυτή είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση. Ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι:

$$e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3lnx} = e^{lnx^3} = x^3$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα έχουμε:

$$x^3z^{'} + 3x^2z = -x^2 \iff (x^3z)^{'} = -x^2 \iff x^3z = -\frac{x^3}{3} + c \iff z = -\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}$$

Όμως $y = 1 + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + \frac{c}{x^3}} = 1 + \frac{3x^3}{-x^3 + 3c} = \frac{-x^3 + 3c + 3x^3}{3c - x^3} = \frac{3c + 2x^3}{3c - x^3}$
Θέτοντας $k = 3c$, έχουμε $y(x) = \frac{k + 2x^3}{k - x^3}$