

# 7<sup>ο</sup> Φροντιστήριο Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Δεκέμβριος 2021

## 1 Ασκήσεις σε βελτιστοποίηση πολυμεταβλητών συναρτήσεων σε περιοχές και βελτιστοποίηση με περιορισμούς ισότητας

### 1.1 1<sup>η</sup> Άσκηση

Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max f(x) = 10x_1 - 2x_2 \text{ για } -1 \leq x_1 \leq 1 \text{ και } -1 \leq x_2 \leq 1.$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 10, \text{ συνεπώς η συνάρτηση είναι αύξουσα ως προς } x_1.$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -2, \text{ συνεπώς η συνάρτηση είναι φθίνουσα ως προς } x_2.$$

Άρα το μέγιστο βρίσκεται στο  $(1, -1)$ .

Το σημείο αυτό πληροί τις αναγκαίες συνθήκες για μέγιστο αφού:

$$f_1 = 10 \geq 0 \text{ και } (\beta_1 - x_1) \cdot 10 = (1 - 1) \cdot 10 = 0$$

$$f_2 = -2 \leq 0 \text{ και } (x_2 - \alpha_2) \cdot (-2) = (-1 - (-1)) \cdot (-2) = 0.$$

### 1.2 2<sup>η</sup> Άσκηση

Να λυθεί το πρόβλημα μεγιστοποίησης:

$$\max f(x) = 2x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + 1 \text{ για } -2 \leq x_1 \leq 2 \text{ και } -2 \leq x_2 \leq 2.$$

Στα στάσιμα σημεία:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - x_2 = 0 \iff x_2 = 2 - 2x_1. (1)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = -1 - 2x_2 - x_1 = 0 (2).$$

Αντικαθιστούμε την σχέση (1) στην (2) και έχουμε:

$$-1 - 4 + 4x_1 - x_1 = 0 \iff x_1 = \frac{5}{3}.$$

Συνεπώς  $x_2 = -\frac{4}{3}$  (από τη σχέση (1)).

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στο στάσιμο σημείο:

$$f\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3} + \frac{4}{3} - \frac{25}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} + 1 = \frac{30}{9} + \frac{12}{9} - \frac{25}{9} - \frac{16}{9} + \frac{20}{9} + 1 = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}.$$

Στα συνοριακά σημεία της περιοχής:

$$f(-2, -2) = -4 + 2 - 4 - 4 - 4 + 1 = -13$$

$$f(2, 2) = 4 - 2 - 4 - 4 - 4 + 1 = -9.$$

$$f(2, -2) = 4 + 2 - 4 - 4 + 4 + 1 = 3$$

$$f(-2, 2) = -4 - 2 - 4 - 4 + 4 + 1 = -9.$$

Συνεπώς το μέγιστο βρίσκεται στο σημείο  $(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$ . Το σημείο αυτό πληροί την αναγκαία συνθήκη για μέγιστο αφού οι πρώτες μερικές παράγωγοι σε αυτό το σημείο είναι ίσες με μηδέν.

### 1.3 3<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 5 \text{ υπό τη συνθήκη: } g(x) = 10 - x_1 - x_2 = 0.$$

Η Λαγκρατζιανή  $\mathcal{L}$  δίνεται από τον τύπο:

$$\mathcal{L} = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + 5 + \lambda(10 - x_1 - x_2).$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:

$$2x_1 - x_2 - \lambda = 0 \iff x_2 = 2x_1 - \lambda.$$

$$4x_2 - x_1 - \lambda = 0$$

$$\text{Αντικαθιστούμε την προηγούμενη εξίσωση και έχουμε } 8x_1 - 4\lambda - x_1 - \lambda = 0 \iff 7x_1 - 5\lambda = 0$$

$$10 - x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = 10 - x_2$$

Αντικαθιστούμε αυτήν την σχέση και την  $\lambda = 2x_1 - x_2$  στην προηγούμενη και έχουμε

$$70 - 7x_2 - 5(2(10 - x_2) - x_2) = 0 \iff 70 - 7x_2 - 5(20 - 3x_2) = 0 \iff -30 - 7x_2 + 15x_2 = 0 \iff -8x_2 = -30 \iff x_2 = \frac{15}{4}. \text{ Συνεπώς } x_1 = \frac{25}{4}.$$

Υπολογίζουμε την περιφραγμένη Εσσιανή μήτρα:

$$f_1 = 2x_1 - x_2, f_2 = 4x_2 - x_1.$$

$$f_{11} = 2, f_{12} = f_{21} = -1, f_{22} = 4.$$

$$g_1 = -1, g_2 = -1, g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0.$$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 3 = -8 < 0.$$

Άρα έχουμε τοπικό ελάχιστο στο  $(\frac{25}{4}, \frac{15}{4})$ .

### 1.4 4<sup>η</sup> Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της:

$$f(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 5 \text{ υπό τη συνθήκη: } g(x) = 10 - x_1 - x_2 = 0.$$

Η Λαγκρατζιανή  $\mathcal{L}$  δίνεται από τον τύπο:

$$\mathcal{L} = x_1^2 - 2x_2^2 + x_1x_2 + 5 + \lambda(10 - x_1 - x_2).$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε:

$$2x_1 + x_2 - \lambda = 0. (1)$$

$$-4x_2 + x_1 - \lambda = 0. (2)$$

$$10 - x_1 - x_2 = 0. (3)$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε  $x_1 = 10 - x_2$ . (4)

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε  $-4x_2 + 10 - x_2 - \lambda = 0 \iff \lambda = 10 - 5x_2$ . (5).

Αντικαθιστώντας την (4) και την (5) στην (1) έχουμε:

$$20 - 2x_2 + x_2 - 10 + 5x_2 = 0 \iff 10 + 4x_2 = 0 \iff x_2 = -\frac{5}{2} \text{ και από την (4) έχουμε } x_1 = \frac{25}{2}.$$

Υπολογίζουμε την περιφραγμένη Εσσιανή μήτρα:

$$f_1 = 2x_1 + x_2, f_2 = -4x_2 + x_1.$$

$$f_{11} = 2, f_{12} = f_{21} = 1, f_{22} = -4.$$

$$g_1 = -1, g_2 = -1, g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0.$$

$$|H^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 2 = 4 > 0.$$

Άρα έχουμε τοπικό μέγιστο στο  $(-\frac{5}{2}, \frac{25}{2})$ .