Μαθηματική Ανάλυση Διάλεξη 7η

Βελτιστοποίηση υπό περιορισμούς

1η μέθοδος: Max/Min $F(x_1,x_2)$ και $a_i \le x_i \le b_i$ για τα x_1, x_2

- Εντοπίζω στάσιμα σημεία (Αν δεν ανήκουν στο $[a_i, b_i]$ δεν τα λαμβάνω υπόψη)
- $x^* = x_1, x_2$ στάσιμο σημείο η κάθε φορά ο συνδυασμός που θα δοκιμάζω
- Βρίσκω τις τιμές της F για όλους τους συνδυασμούς στάσιμα σημεία, συνοριακά. Αυτό που βελτιστοποιεί τη συνάρτηση το κρατάω και ελέγχω αν πληροί τις προϋποθέσεις για βέλτιστο, αν δεν τις πληροί ~~α~~ ελέγχω το αμέσως καλύτερο Κ.Ο.Κ

Προϋποθέσεις:

Max: i) $\dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} \ge 0$ και $(b_i - x_i) \cdot \dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} = 0$

ή

ii) $\dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} \le 0$ και $(x_i - a_i) \cdot \dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} = 0$

Min: i) $\dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} \le 0$ και $(b_i - x_i) \cdot \dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} = 0$

ή

ii) $\dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} \ge 0$ και $(x_i - a_i) \cdot \dfrac{\partial F(x^*)}{\partial x_i} = 0$

Ειδική περίπτωση: Δεν υπάρχουν στάσιμα σημεία

Max: $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} \ge 0$ ↑ αύξουσα ως προς $x_i \Rightarrow \boxed{x_i = b_i}$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} \le 0$ ↓ φθίνουσα ως προς $x_i \Rightarrow \boxed{x_i = a_i}$

Min: $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} \ge 0 \xRightarrow{\downarrow x_i} x_i = a_i$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_i} \le 0 \xRightarrow{\uparrow x_i} x_i = b_i$

Τέλος, ακολουθεί έλεγχος για το αν πληροί τις προϋποθέσεις.

2η μέθοδος: Μέθοδος Lagrange

Να βρεθούν αν υπάρχουν, τα σημεία στα οποία μεγιστοποιείται ή ελαχιστοποιείται η συνάρτηση $F(x_1,x_2)$ υπό τον περιορισμό $g(x_1,x_2)$

$$Max/Min\ L(x_1,x_2,\lambda) = F(x_1,x_2) + \lambda \cdot g(x_1,x_2)$$

Βήμα 1ο: Επίλυση του συστήματος και εύρεση των τοπικών ακροτάτων.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, (1) \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, (2) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, (3)$$

Βήμα 2ο: Εύρεση είδους ακροτάτων.

$$H^* = \begin{bmatrix} F_{11} + \lambda \cdot g_{11} & F_{12} + \lambda \cdot g_{12} & g_1 \\ F_{21} + \lambda \cdot g_{21} & F_{22} + \lambda \cdot g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Αν στον H^* υπάρχουν x_1,x_2,λ για κάθε τοπικό ακρότατο κάνω αντικατάσταση και έπειτα υπολογίζω την ορίζουσα του.
- Αν στον H^* δεν υπάρχουν x_1,x_2,λ το αποτέλεσμα είναι ίδιο για όλα τα ακρότατα, οπότε πρέπει να κρατήσουμε 1

Αν i) $|H^*| > 0$ (τ.μ)

ii) $|H^*| < 0$ (τ.ε)

iii) $|H^*| = 0$ χρήζει διερεύνησης

i) Αν ηγετικές ελάσσονες αρνητικές (τ.ε)

ii) Αν ηγετικές ελάσσονες $(-,+,-)$ (τ.μ)

Αν έχουμε περισσότερα από 1 τοπικά ακρότατα ίδιου είδους, ελέγχουμε τις τιμές της F για αυτά και κρατάμε ως βέλτιστο αυτό που τη μεγιστοποιεί/ελαχιστοποιεί ανάλογα με το είδος της συνάρτησης.