3^o Φροντιστηριακό Μάθημα Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2021

1 1^η Άσκηση

Να κατατάξετε τις συναρτήσεις $f(x) = 2(x+2)^2$, $g(x) = ln(x)$, $h(x) = 1 - e^{-x}$ ως κοίλες ή κυρτές αφού υπολογίσετε τις δεύτερες παραγώγους τους.
$f^{'}(x) = 4(x+2)$, $f^{''}(x) = 4$ άρα f κυρτή.
$g^{'}(x) = \frac{1}{x}$, $g^{''}(x) = -\frac{1}{x^2}$ άρα g κοίλη.
$h^{'}(x) = e^{-x}$, $h^{''}(x) = -e^{-x}$ άρα h κοίλη.

2 2^η Άσκηση

Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$ και της $g(x) = \sqrt{e^{2x} - x^2}$.
$f^{'}(x) = \frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+3)}{(x^2-1)^2} = -\frac{8x}{(x^2-1)^2}$
$g^{'}(x) = \frac{2e^{2x}-2x}{2\sqrt{e^{2x}-x^2}} = \frac{e^{2x}-x}{\sqrt{e^{2x}-x^2}}$

3 3^η Άσκηση

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων $f(x) = \frac{10x^2+3x^4+5}{x^2-5x}$, $g(x) = e^{3x^2+5x+1}$, $h(x) = (3x^2+5x+1)^{50}$
$f^{'}(x) = \frac{(20x+12x^3)(x^2-5x)-((2x-5)(10x^2+3x^4+5)}{(x^2-5x)^2} =$
$\frac{20x^3-100x^2+12x^5-60x^4-(20x^3+6x^5+10x-50x^2-15x^4-25)}{(x^2-5x)^2} =$
$\frac{6x^5-45x^4-50x^2-10x+25}{(x^2-5x)^2}$
$g^{'}(x) = (6x+5)e^{3x^2+5x+1}$
$h^{'}(x) = 50(3x^2+5x+1)^{49}(6x+5)$

4 4^η Άσκηση

Για την ακολουθία $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 1$, $\alpha_0 = 0$ να δείξετε με επαγωγή ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Για $n = 0$ $\alpha_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1 > \alpha_0$.
Για $n = k$ Έστω $\alpha_k > \alpha_{k-1} \iff 2\alpha_{k-1} + 1 > \alpha_{k-1} \iff \alpha_{k-1} > -1$.
Για $n = k+1$ Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1} > \alpha_k \iff 2\alpha_k + 1 > \alpha_k \iff 2(2\alpha_{k-1} + 1) + 1 > 2\alpha_{k-1} + 1 \iff 4\alpha_{k-1} + 3 > 2\alpha_{k-1} + 1 \iff 2\alpha_{k-1} > -2 \iff \alpha_{k-1} > -1$, το οποίο ισχύει από την υπόθεση.

5 5^η Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ είναι κοίλη, χωρίς να κάνετε χρήση των παραγώγων της.
$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \iff$
$\sqrt{tx_1 + (1-t)x_2} \geq t\sqrt{x_1} + (1-t)\sqrt{x_2} \iff$
$tx_1 + (1-t)x_2 \geq t^2 x_1 + (1-t)^2 x_2 + 2t(1-t)\sqrt{x_1 x_2} \iff$
$t(1-t)x_1 + (1-t)(1-(1-t))x_2 - 2t(1-t)\sqrt{x_1 x_2} \geq 0 \iff$
$t(1-t)x_1 + (1-t)tx_2 - 2t(1-t)\sqrt{x_1 x_2} \geq 0 \iff$
$t(1-t)(x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}) \geq 0 \iff$
$t(1-t)(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0$, το οποίο ισχύει.

6 6^η Άσκηση

Για την ακολουθία $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}\alpha_n + 1, \alpha_0 = 1$ να βρείτε το όριό της υποθέτωντας ότι συγκλίνει.
$lim\alpha_{n+1} = lim\frac{1}{2}\alpha_n + 1$. Θέτοντας $x = lim\alpha_{n+1} = lim\alpha_n$ έχουμε $x = \frac{1}{2}x + 1$ ή ισοδύναμα $x = 2$.

7 7^η Άσκηση

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες συγκλίνει η ακολουθία:
$\alpha_{n+1} = \frac{\lambda}{4}\alpha_n + 1, \alpha_0 = 1$.
Πρέπει $|\frac{\lambda}{4}| < 1 \iff |\lambda| < 4$.

8 8^η Άσκηση

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_{n+1} = \frac{3}{4}\alpha_n + 1, \alpha_0 = 1$ συγκλίνει.
Δείχνουμε με επαγωγή ότι η ακολουθία είναι αύξουσα:
Για $n = 0$, $\alpha_1 = \frac{7}{4} \geq \alpha_0 = 1$.
Για $n = k$, Έστω $\alpha_k \geq \alpha_{k-1}$.
Για $n = k+1$ Θ.δ.ό. $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k \iff \frac{3}{4}\alpha_k + 1 \geq \alpha_k \iff$
$\frac{3}{4}\alpha_k + 1 \geq \frac{3}{4}\alpha_{k-1} + 1 \iff \alpha_k \geq \alpha_{k-1}$ που ισχύει από την υπόθεση.

Θα δείξουμε με επαγωγή ότι είναι άνω φραγμένη. Για να βρούμε ένα πιθανό άνω φράγμα, λύνουμε την εξίσωση $x = \frac{3}{4}x + 1 \iff x = 4$.

Για $n = 0$ $\alpha_0 = 1 \leq 4$.
Για $n = k$ Έστω $\alpha_k \leq 4$.
Για $n = k+1$ $\alpha_{k+1} \leq 4 \iff \frac{3}{4}\alpha_k + 1 \leq 4 \iff \frac{3}{4}\alpha_k \leq 3 \iff \alpha_k \leq \frac{12}{3} \iff \alpha_k \leq 4$, που ισχύει από την υπόθεση.
Συνεπώς η ακολουθία α_n συγκλίνει ως αύξουσα και άνω φραγμένη.

9 9^{η} Άσκηση

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την προεικόνα του συνόλου $B = [4, 5]$ για τη συνάρτηση $f(x) = 4e^{2x}$.
$y = 4e^{2x} \iff \frac{y}{4} = e^{2x} \iff 2x = ln(\frac{y}{4}) \iff x = \frac{1}{2}ln(\frac{y}{4})$ ή $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}ln(\frac{x}{4})$.
Αντικαθιστούμε τις ακραίες τιμές για το σύνολο B και αφού η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι η προεικόνα του συνόλου είναι η $A = [f^{-1}(4), f^{-1}(5)] = [0, \frac{1}{2}ln(\frac{5}{4})]$.