$e^{\ln x} = x$, $\ln e^x = x$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$

$\ln 1 = 0$, $\ln 0 = +\infty$, $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0} \Rightarrow$ SOS

Σειρές $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ (άθροισμα n όρων ακολουθίας)

Κριτήριο του λόγου D'alembert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

1) $L < 1 \to$ Συγκλίνουσα
2) $L > 1 \to$ Αποκλίνουσα.
3) $L = 1 \to$ Συγκλίνουσα είτε αποκλίνουσα

Παραδείγματα: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n - n^{2/3}}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$, 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-6}{4^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12^n}{n!}$ + φροντ 4°: 1,3,4,5

Ιδιότητες: 1) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) $\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Αρμονική Σειρά Μορφή: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Περιπτώσεις:

i) Αν $p > 1$: Η σειρά συγκλίνει

ii) Αν $p \leq 1$: Η σειρά αποκλίνει (π.χ $\sqrt{n} = n^{1/2}$)
αφού $p = 1/2$

Γεωμετρική σειρά : i) Μορφή $a_t = a\rho^{t-1} = S_n$

1) Παίρνω το όριο $\left|\frac{a\rho^n}{a\rho^{n-1}}\right| = |\rho|$

i) Συγκλίνουσα όταν $|\rho| < 1$
ii) Αποκλίνουσα όταν $|\rho| > 1$
iii) $|\rho| = 1 \Rightarrow S_n = na$ i) Αποκλίνουσα για $a \neq 0$
ii) Συγκλίνουσα για $a = 0$.
iii) Αν $\rho = -1$ για n άρτιο συγκλίνει στο μηδέν
iv) για $\rho = -1$ και n περιττό συγκλίνει στο $\underline{a}$

ii) Μορφή: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} ar^n} \Rightarrow \rho = r$

i) Αν $|\rho| < 1$ $(-1 < \rho < 1)$ συγκλίνει

στο $S = \frac{a}{1-r}$ π.χ $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ii) $|\rho| > 1$ και $a > 0$: Η σειρά απειρίζεται θετικά
π.χ $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot 2^n$

iii) $\rho \geq 1$ και $a < 0$: Η σειρά απειρίζεται αρνητικά

π.χ $\sum_{n=0}^{\infty} -3\, 6^n$

iv) Αν $\rho \leq -1$ τότε η σειρά κυμαίνεται.

$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Σύνθεσης

1) $F(x) = \sqrt{x}$, $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $F(x) = \sqrt{g(x)}$, $F'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

2) $F(x) = \frac{1}{x}$, $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $F(x) = \frac{1}{g(x)}$, $F'(x) = -\frac{g(x)}{g^2(x)}$

3) $F(x) = \overset{\eta\mu x}{\sin(x)}$, $F'(x) = \overset{\sigma\upsilon\nu x}{\cos x}$, $F(x) = \sin(g(x))$, $F'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

4) $F(x) = \overset{\sigma\upsilon\nu x}{\cos x}$, $F'(x) = -\sin x$, $F(x) = \cos(g(x))$, $F'(x) = -\sin(g(x))\, g'(x)$

5) $f(x) = \overset{\varepsilon\varphi x}{\tan x}$, $F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = \tan(g(x))$, $F'(x) = \frac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x)$

6) $F(x) = \overset{\sigma\varphi x}{\cot x}$, $F'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $F(x) = \cot(g(x))$, $F'(x) = -\frac{1}{\sin^2 g(x)}\, g'(x)$

7) $F(x) = e^x$, $F'(x) = e^x$, $F(x) = e^{g(x)}$, $F'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

8) $f(x) = a^x$, $f'(x) = a^x \ln a$, $F(x) = a^{g(x)}$, $F'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \ln a$

9) $F(x) = \ln x$, $F'(x) = \frac{1}{x}$, $F = \ln(g(x))$, $F'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$

Κανόνες παραγώγισης

1) $F(x) = c \Rightarrow F'(x) = 0$
2) $F(x) = mx + b \Rightarrow F'(x) = x$
3) $F(x) = x^n \Rightarrow F'(x) = n x^{n-1}$
4) $g(x) = F(x) \Rightarrow g'(x) = cf'(x)$
5) $h(x) = F(x) + g(x) \Rightarrow h'(x) = F'(x) + g'(x)$
6) $h(x) = F(x) - g(x) \Rightarrow h'(x) = g'(x) - F'(x)$
7) $h(x) = F(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)$
8) $h(x) = \frac{F(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0 \Rightarrow h'(x) = \frac{F'(x) \cdot g(x) - F(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

(5)

Παίρνουμε την εκτίμηση του σφάλματος μέσω του υπολοίπου taylor και το συγκρίνουμε με τη πραγματική διαφορά.

Ακολουθίες φρονες: 4, 6, 7, 8

Σετ 1ο: 5, 8, 10

Ανάπτυγμα Taylor:

Τι θα ζητηθεί;

1) Να βρεθεί η n τάξης προσέγγισης με σειρά Taylor της $F(x)$ γύρω από το $x_0 =$ κάτι.

$$P(x_0) = F(x_0) + \frac{F'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{F''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{F^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Στο τέλος κάνω αντικατάσταση την τιμή x_0 και βρίσκω το $P(x_0)$.

2) Να βρεθεί η πραγματική διαφορά στο σημείο $x_1 =$ κάτι
$F(x_1) - P(x_1)$ (βάζω στο $P(x_0)$ όπου $x =$ την τιμή του x_1).

3) Άνω φράγμα στο σημείο $x_1 =$ κάτι

$$R_{n+1}(x) \leq \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Όπου M ένα άνω φράγμα για την τιμή $|F^{(n+1)}(x)|$ στο διάστημα $x \in [x_0, x_1]$ ή $[x_1, x_0]$

$$|x| \leq x \iff |x|^{n+1} \leq x^{n+1}$$
$$\iff F^{(n+1)}(x) \leq F^{(n+1)}(x_1) \quad \text{για } |x| \leq x.$$

Συνεπώς $R_{(n+1)}(x) \leq \frac{F^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{(n+1)}$

Εκτίμηση σφάλματος μέσω υπολοίπου Taylor.

Το συγκρίνω με τη πραγματική διαφορά.