Άσκηση 10

Ευσταθές σημείο: α, δ

Ασταθές σημείο: β, γ

Κέντρο: ε

AS|

$$y_1' = y_1 - 2y_2 + 4$$
$$y_2' = \frac{1}{2}y_1 + y_2 + 1$$

1°: $y_1 - 2y_2 + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 2y_2 - 4 \Rightarrow \boxed{y_1 = -3}$

$\frac{1}{2}y_1 + y_2 + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}y_2 - 4) + y_2 + 1 = 0 \Rightarrow y_2 - 2 + y_2 + 1 = 0$

$\Rightarrow 2y_2 = 1 \Rightarrow \boxed{y_2 = \frac{1}{2}}$

$(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (-3, 1/2)$

2°: $|A - Ir| = \left| \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-r & -2 \\ 1/2 & 1-r \end{vmatrix}$

$= (1-r)^2 - (1/2)\cdot(-2) = 1^2 - 2r + r^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow r^2 - 2r + 2 = 0, \quad \Delta = 4 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4 < 0$

$\Delta < 0$: $k = \frac{-B}{2a} = \frac{2}{2} = 1 > 0$

Το σύστημα αποκλίνει από το σταθερό σημείο.

$\boxed{A7}$ $y_1' = 2y_1 + 5$
$y_2' = 2y_2 + 4$

1^o: $\bar{y}_1 = -\frac{5}{2}$, $\bar{y}_2 = -2$

2^o: $|A - Ir| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-r & 0 \\ 0 & 2-r \end{vmatrix}$

$= (2-r)^2 = 0 \Rightarrow 4 - 4r + r^2 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$
$-\frac{B}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ διπλή

Επειδή $r_1, r_2 = 2 > 0$ έχουμε ασταθές σημείο ισορροπίας, το σύστημα αποκλίνει από το σταθερό σημείο και αντιστοιχεί στο διάγραμμα Β.

Α9)

$$\begin{cases} y_1' = -8y_2 + 20 \\ y_2' = 8y_1 - 16 \end{cases}$$

1ο: $\bar{y}_1 = 2$, $\bar{y}_2 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$

2ο: $|A - Ir| = \left| \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -r & -8 \\ 8 & -r \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow r^2 + 64 = 0$, $\Delta < 0$: $\kappa = \frac{-b}{2a} = 0$

Το σταθερό σημείο είναι κέντρο, και αντιστοιχεί στο διάγραμμα Ε.

Φεβρ 2023

$\underline{\text{Ερ 4Β}}$ $y'_1 = -y_2 + 1,\ y'_2 = y_1 - y_2 + 1$

$\underline{1^o}$: $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = 1$

2^o: $|A - Ir| = \left| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -r & -1 \\ 1 & -1-r \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow r + r^2 - 1(-1) = r^2 + r + 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$

$k = \frac{-\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{2}$ το σταθερό σημείο είναι ευσταθές

και έχουμε και ευσταθή σπείρα, άρα αντιστοιχεί στο δ.

Α2) $y_1' = y_1 - 2y_2 \quad (1), \quad y_2' = \frac{1}{2}y_1 + y_2 \quad (2)$

$$y_2 = \frac{y_1 - y_1'}{2}$$

Παρ/ζω: $y_1'' = y_1' - 2y_2' = 0$

$$y_1'' - y_1' = -2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_2\right)$$

$$y_1'' - y_1' = -y_1 - \cancel{2}\left(\frac{y_1 - y_1'}{\cancel{2}}\right)$$

$$y_1'' - y_1' = -y_1 - y_1 + y_1'$$

$$y_1'' - 2y_1' + 2y_1 = 0, \quad \Delta = 4 - 4\cdot 1\cdot 2 = -4 < 0$$

$$k = 1, \quad m = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$

$$y_1(t) = e^t(A_1\cos(t) + A_2\cdot\sin(t))$$

$$y_1'(t) = e^t(A_1\cos(t) + A_2\sin(t)) + e^t(-A_1\sin(t) + A_2\cos(t))$$

$$= e^t(A_1\cos(t) + A_2\sin(t) - A_1\sin(t) + A_2\cos(t))$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2}\left(e^t(A_1\cancel{\cos(t)} + A_2\cancel{\sin(t)}) - e^t(A_1\cancel{\cos(t)} + A_2\cancel{\sin(t)} - A_1\sin(t) + A_2\cos(t))\right)$$

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}\left(e^t(A_2\cos(t) - A_1\sin(t))\right)$$

$$y_2(t) = -\frac{e^t}{2}(A_2\cos(t) - A_1\sin(t))$$

A4) $y_1' = -3y_1 - 4y_2 \quad (1), \quad y_2' = y_1 + y_2 \quad (2)$

$$y_2 = \frac{-3y_1 - y_1'}{4}$$

παρ/ζω την (1): $y_1'' = -3y_1' - 4y_2'$

$$y_1'' + 3y_1' = -4(y_1 + y_2) \iff$$

$$y_1'' + 3y_1' = -4y_1 - 4y_2 \iff$$

$$y_1'' + 3y_1' = -4y_1 - \cancel{4}\left(\frac{-3y_1 - y_1'}{\cancel{4}}\right) \iff$$

$$y_1'' + 3y_1' = -4y_1 + 3y_1 + y_1' \iff$$

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 0 \qquad \Delta = 4 - 4 = 0 \qquad r_{1,2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y_1(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) \quad (\checkmark)$$

$$y_1'(t) = -e^{-t}(c_1 + c_2 t) + e^{-t} \cdot c_2$$

$$y_2(t) = \frac{1}{4}\left(-3y_1(t) - y_1'(t)\right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{4}\left(-3e^{-t}(c_1 + c_2 t) + e^{-t}(c_1 + c_2 t) - e^{-t} c_2\right)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{4}\left(e^{-t}(-2c_1 - 2c_2 t - c_2)\right)$$

$$y_2(t) = -\frac{e^{-t}}{4}(2c_1 + 2c_2 t + c_2) \quad (\checkmark)$$

A6, A8, A10