$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2$$

Κυρτότητα της F:

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2, \quad F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 2, \quad F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -1$$

$$F_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1, \quad F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -1, \quad F_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 2$$

$$(c)' = 0$$

$$(c \cdot x)' = c$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu - 1}$$

$$\nabla^2 F = H = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Α' τρόπος:

- $|H_1| = F_{11}$, $|H_2| = \det(H)$
- $|H_1| \geq 0$ και $|H_2| \geq 0 \Rightarrow F$ κυρτή
- $|H_1| \leq 0$ και $|H_2| \geq 0 \Rightarrow F$ κοίλη

Β' τρόπος:

- F_{11} και $F_{22} \geq 0 \Rightarrow F$ κύρτη
- F_{11} και $F_{22} \leq 0 \Rightarrow F$ κοίλη

i) Αν F Max δεν θα μπορούσε να εφαρμοστεί το ΚΚΤ.

ii) Αν F Min η 1η προϋπόθεση του ΚΚΤ θα ίσχυε.

$\boxed{\Pi.X1}$ $\quad \text{Max } F(x) = -\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(x_2 - \frac{1}{2}\right)^2$

υ.π $\quad 2x_1 + x_2 \le 2, \quad x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0$

Βήμα 1: • Εξέταση κυρτότητας της F: $F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = -2$, $F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$

$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} = -2(x_1 - 1/2) = -2x_1 + 1$, $F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 0$, $F_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = -4$

$F_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = -4(x_2 - 1/2) = -4x_2 + 2$,

$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ Επειδή $F_{11} \le 0$ και $F_{22} \le 0$ F κοίλη

• Εφικτή Περιοχή: $\varphi_1 = -2x_1 - x_2 + 2 \ge 0$

$\varphi_2 = x_1 \ge 0$

$\varphi_3 = x_2 \ge 0$

κοίλες ως γραμμικές $\Rightarrow$ Ε.Π κυρτό σύνολο

Μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα ΚΚΤ ...

Βήμα 2: Σχηματίζουμε την λαγκρανζιανή:

$$L = F(x) + \lambda_i \varphi_i(x)$$

$$L = -(x_1 - 1/2)^2 - 2(x_2 - 1/2)^2 + \lambda_1(-2x_1 - x_2 + 2) + \lambda_2 x_1$$
$$+ \lambda_3 x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -2x_1 + 1 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad ,(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -4x_2 + 2 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad ,(2)$$

$$\lambda_1 \cdot (-2x_1 - x_2 + 2) = 0$$
$$\lambda_2 \cdot x_1 = 0$$
$$\lambda_3 x_2 = 0$$
$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda_{1,2,3} \geq 0$$

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \neq 0)$

Υποθέτω ότι όλοι οι περιορισμοί είναι ανενεργοί $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Άρα από (1) και (2) $\quad -2x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1/2$

$-4x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/2$

Έλεγχος της τρέχουσας λύσης: $\varphi_1 = -2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + 2 \geq 0$ (✓)

$\varphi_2 = x_1 \geq 0$ (✓)

$\varphi_3 = x_2 \geq 0$ (✓)

$\lambda_{1,2,3} \geq 0$ (✓)

Εφόσον αυτή η λύση ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς το σημείο $x = [1/2, 1/2]^T$ είναι το μέγιστο της F υπό τους δεδομένους περιορισμούς.

Θέμα 4

Β) $\text{Min } F(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - x_1 x_2$

υ.π $\varphi_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1$

Βήμα 1: • Εξέταση της F ως προς τη κυρτότητα

$F_1 = 4x_1 - x_2 \qquad F_{11} = 4 \qquad F_{12} = -1 \qquad \nabla^2 F = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

$F_2 = 8x_2 - x_1 \qquad F_{21} = -1 \qquad F_{22} = 8$

$\Longrightarrow F_{11} \geq 0$ και $F_{22} \geq 0 \Longrightarrow F$ κυρτή

• Εφικτή Περιοχή: $\varphi_1(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 1 \geq 0$

$\nabla^2 \varphi_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_1$ κοίλη επειδή $|H_1| = -2 \leq 0$ και $|H_2| = 8 \geq 0$

$\Rightarrow$ Ε.Π κυρτό σύνολο

Μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα KKT οπότε το βέλτιστο θα βρίσκεται σε εσωτερικό σημείο ή ακρότατο της εφικτής περιοχής.

Βήμα 2: Σχηματίζουμε τη λαγκρανζιανή

$$L = -F(x) + \lambda_i \varphi_i(x)$$

$$L = -2x_1^2 - 4x_2^2 + x_1 \cdot x_2 + \lambda_1(-x_1^2 - 2x_2^2 + 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -4x_1 + x_2 - 2\lambda_1 x_1 = 0 \quad ,(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -8x_2 + x_1 - 4\lambda_1 x_2 = 0 \quad ,(2)$$

$$\lambda_1(-x_1^2 - 2x_2^2 + 1) = 0$$

$$\varphi_1 \geq 0$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

Υποθέτω ότι όλοι οι περιορισμοί είναι ανενεργοί ($\varphi_1 \neq 0$) $\Rightarrow \lambda_1 = 0$

Άρα από (1) και (2): $\left.\begin{array}{l} -4x_1 + x_2 = 0 \\ -8x_2 + x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$

Έλεγχος αν η λύση είναι εφικτή: $\varphi_1(x) = -x_1^2 - 2x_2^2 + 1 \geq 0$ (✓)

$\lambda_1 \geq 0$ (✓)

Συμπερασματικά, βρήκαμε ότι στο $x = [0,0]^T$ ικανοποιούνται οι συνθήκες του ΚΚΤ άρα έχουμε βρει μέγιστο για την $-F$ ή αντίστοιχα ελάχιστο για την αρχική F.

Π.Χ2)

$$\max_x F(x) = -(x_1-1)^2 - 2(x_2-1)^2$$

υ.π $\varphi_1(x) = 2x_1 + x_2 \leq 2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Βήμα 1: • $\nabla^2 F = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow F$ κοίλη

• Ε.Π: $\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -2x_1 - x_2 + 2 \geq 0 \\ \varphi_2(x) &= x_1 \geq 0 \\ \varphi_3(x) &= x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ κοίλες ως γραμμικές

$\Rightarrow$ Ε.Π είναι Κ.Σ

Συνεπώς, μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα ΚΚΤ ...

Θέμα 2: Σχηματίζουμε τη λαγκρανζιανή

$$L = f(x) + \lambda_i \varphi_i(x)$$

$$L = -(x_1-1)^2 - 2(x_2-1)^2 + \lambda_1(-2x_1 - x_2 + 2)$$
$$+ \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -2x_1 + 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad ,(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -4x_2 + 4 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \quad ,(2)$$

$$\lambda_1 \cdot (-2x_1 - x_2 + 2) = 0$$

$$\lambda_2 \cdot x_1 = 0$$

$$\lambda_3 \cdot x_2 = 0$$

$$\varphi_{1,2,3} \geq 0$$

$$\lambda_{1,2,3} \geq 0$$

Υποθέτουμε ότι όλοι οι περιορισμοί είναι ανενεργοί ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \neq 0$)

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Άρα από (1),(2): $\left.\begin{array}{l} -2x_1 + 2 = 0 \\ -4x_2 + 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$

Έλεγχος αν η λύση είναι εφικτή: $\varphi_1 = -2x_1 - x_2 + 2 \geq 0$ (X)

$\varphi_2 = x_1 \geq 0$ (✓)

$\varphi_3 = x_2 \geq 0$ (✓)

$\lambda_{1,2,3} \geq 0$

Παρατηρούμε ότι παραβιάζεται ο φ_1:

$\Rightarrow$ Ενεργοποιώ τον περιορισμό $\Rightarrow \varphi_1(x) = 0$ και $\lambda_1 \neq 0$

$\Rightarrow$ $-2x_1 - x_2 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2 - 2x_1}$ *

Στην (2): $-4(2-2x_1)+4-\lambda_1=0 \iff$

$$-8+8x_1+4-\lambda_1=0 \iff$$

$$\boxed{8x_1-4=\lambda_1} \implies \boxed{\lambda_1=\frac{40}{9}-4=\frac{4}{9}>0}$$

Στην (1): $-2x_1+2-2(8x_1-4)=0 \iff$

$$-18x_1+10=0 \iff$$

$$\boxed{x_1=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}}$$

$$\boxed{x_2=2-\frac{10}{9}=\frac{8}{9}}$$

Έλεγχος αν η λύση είναι εφικτή: $\varphi_1=-2x_1-x_2+2\geq 0 \implies -\frac{10}{9}-\frac{8}{9}+2\geq 0\ (\checkmark)$

$\varphi_2=x_1\geq 0\ (\checkmark)$

$\varphi_3=x_2\geq 0\ (\checkmark)$

$\lambda_{1,2,3}\geq 0$

Συνεπώς το μέγιστο της F θα βρίσκεται στο

$x = [5/9, 8/9]^T$ με $\lambda_1 = 4/9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Πίνακας Συμπερασμάτων:

Πότε μπορεί να εφαρμοστεί το ΚΚΤ:

Εφαρμόζεται όταν: i) Max F κοίλη ή Min F κυρτή (Max −F κοίλη)

ii) Η εφικτή περιοχή να είναι κυρτό σύνολο: όλες οι $\boxed{\varphi_i \geq 0}$ κοίλες

- Εφόσον μπορεί να εφαρμοστεί το ΚΚΤ το βέλτιστο θα βρίσκεται σε εσωτερικό σημείο ή ακρότατο της εφικτής περιοχής.
- Αν δεν μπορεί να εφαρμοστεί το ΚΚΤ το βέλτιστο θα βρίσκεται σε ακρότατο.

$$\text{Max } f(x) = -3x_1 + \frac{x_2^2}{2}$$

υ.π $\underline{x_1^2 + x_2^2 \leq 1}$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

- εξέταση κυρτότητας της F: $\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow F$ κυρτή

$\Rightarrow$ Δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα ΚΚΤ συνεπώς το βέλτιστο θα βρίσκεται σε ακρότατο.

Ακρότατα: Για $x_1 = 0$ στην φ_1: $x_2 = \pm 1 \Rightarrow (0,1), (1,0), (0,0)$

$x_2 = 0$ στην φ_1: $x_1 = \pm 1$

$$L = F(x) + \lambda \varphi_1(x) = -3x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -3 + 2\lambda x_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2 + 2\lambda x_2 = 0$$

Εξετάζω το $x_1=0,\ x_2=1,\ \lambda=-1/2$: $g(x)=x_1^2+x_2^2-1$

$$g_1=\frac{\partial g}{\partial x_1}=2x_1,\quad g_2=2x_2,\quad g_{11}=2,\quad g_{12}=0,\quad g_{21}=0,\quad g_{22}=2$$

$$F_{11}=0,\quad F_{12}=0,\quad F_{21}=0,\quad F_{22}=1$$

$$|H|=\begin{bmatrix} F_{11}+\lambda g_{11} & F_{12}+\lambda g_{12} & g_1 \\ F_{21}+\lambda g_{21} & F_{22}+\lambda g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 0 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\det(H)=-1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}-\overset{0}{\cancel{0}}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}+\overset{0}{\cancel{0}}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(H)=-1\,(0\cdot 0-2\cdot 2)=4>0$$ άρα τ.μ.

Εξετάζω το $x_1=0, x_2=0, \lambda=0$: $|H| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Δεν αποτελεί τ.α

Εξετάζω το $x_1=1, x_2=0, \lambda=3/2$: $H = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 2x_1 \\ 0 & 1+2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(H) = 3 \overset{0}{\cancel{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}} - 0 \overset{0}{\cancel{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$ άρα τ.ε