Π.Χ1 $\quad \text{Max } F(x) = -3x_1 + \frac{x_2^2}{2} \quad$ υ.π $\quad x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

Εξέταση Κυρτότητας F: $\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$|H_1| = 0 \geq 0,\ |H_2| = 0 \geq 0 \Rightarrow$ F κυρτή συνεπώς

Δεν μπορεί να εφαρμοστεί το KKT $\Rightarrow$ Το βέλτιστο θα βρίσκεται

σε ακρότατο.

$\varphi_1(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 1$: $(1,0), (0,1)$ και $(0,0)$

$\varphi_2(x) = x_1 \geq 0$

$\varphi_3(x) = x_2 \geq 0$

Σχηματίζω την $L = -3x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \lambda(-x_1^2 - x_2^2 + 1)$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -3 - 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow x_2 (1 - 2\lambda) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -x_1^2 - x_2^2 + 1 = 0$$

Αν $x_2 = 0$:

$x_1 = \pm 1$ (Αποκλείω το -1)

$\lambda = -3/2$

Αν $\lambda = 1/2$:

$x_1 = -3$

...

Έλεγχος για το $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $\lambda = -3/2$

$$|H| = \begin{bmatrix} F_{11} + \lambda g_{11} & F_{12} + \lambda g_{12} & g_1 \\ F_{21} + \lambda g_{21} & F_{22} + \lambda g_{22} & g_2 \\ g_1 & g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|H| = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(H) = 3 \overset{0}{\cancel{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}} - 0 \overset{0}{\cancel{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(H) = -2 \left(0 \cdot 0 - (-2)4\right) = -16 < 0$$

Δεν υπάρχει Τ.ψ σε εσωτερικό σημείο του εφικτού συνόλου

$S = \{ x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_1, x_2 \geq 0 \}$

Το max θα βρίσκεται σε ακρότατο.

$F(1,0)$, $F(0,1)$ και $F(0,0)$

$F(1,0) \rightarrow$ Τ.Ε

$F(0,1) = 1/2$ $\quad F(0,0) = 0$

Τ.ψ στο $(0,1)$.

$\boxed{\text{Π.Χ2}}$ Max $F(x) = x_1^3 - x_1 + x_2^2$ υ.π $4x_1^2 + x_2^2 - 4 \le 0$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Ακρότατα:
$(1,0)$
$(0,2)$
$(0,0)$

Εξέταση της F ως προς τη κυρτότητα:

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ για } x_1 \geq 0$$

$\Rightarrow$ F κυρτή συνεπώς το πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί με KKT

$$L = x_1^3 - x_1 + x_2^2 + \lambda(-4x_1^2 - x_2^2 + 4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 3x_1^2 - 1 - 8\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2x_2 - 2\lambda x_2 = 0 \Rightarrow 2x_2(1-\lambda) = 0 < \begin{matrix} x_2 = 0 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -4x_1^2 - x_2^2 + 4 = 0$$

Αν $x_2 = 0$:

$x_1 = \pm 1$ (Αποκλείω το -1 σύμφωνα με τη (2))

$\lambda = 1/4$

Αν $\lambda = 1$:

$3x_1^2 - 8x_1 - 1 = 0$, $\Delta = 64 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 7$

$$x_1 = \frac{8 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{8 \pm 2\sqrt{19}}{6} = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$$

$$-4\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)^2 - x_2^2 + 4 = 0$$

$$-4\left(\frac{16}{9} + \frac{19}{9}\right) - x_2^2 + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{140}{9} - x_2^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -x_2^2 = \frac{104}{9}$$ αδύνατο

Έλεγχος για το εφικτό ακρότατο: $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ \lambda = 1/4$

$F_{11} = 6x_1 \qquad g_1 = -8x_1$

$F_{12} = 0 \qquad g_2 = -2x_2$

$F_{21} = 0 \qquad g_{11} = -8$

$F_{22} = 2 \qquad g_{12} = 0$

$g_{21} = 0$

$g_{22} = -2$

$$|H| = \begin{bmatrix} 6x_1 - 8\lambda & 0 & -8x_1 \\ 0 & 2 - 2\lambda & -2x_2 \\ -8x_1 & -2x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|H| = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(H) = 4 \cdot 0 - 0 - 8 \begin{vmatrix} 0 & 3/2 \\ -8 & 0 \end{vmatrix} = -8 \cdot \frac{24}{2} = -96 < 0$$

άρα $(1,0)$ τ.ε

Άρα το max θα είναι σε ένα από τα ακρότατα

$F(0,0)=0$ και $F(0,2)=4$

Τ.ψ το $(0,2)$.