Σειρές: $S_n = \sum_{n=k}^{\infty} a_k$ (άθροισμα n όρων ακολουθίας)

Κριτήριο του λόγου: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$

i) Αν $L<1 \to$ Συγκλίνουσα.

ii) Αν $L>1 \to$ Αποκλίνουσα.

iii) Αν $L=1 \to$ δεν υπολογίζεται με κριτήριο λόγου.

$\boxed{\text{Π.χ1}}$ $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^n}\cdot x\cdot n!}{\cancel{x^n}(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$ η σειρά συγκλίνει.

Ιδιότητες:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n}{5n^2+2n} = \frac{3}{5}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{n^3} = \dots$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$

$\boxed{\Pi.X2}$ Για ποιες τιμές του λ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot 2^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\lambda^{n+1}\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\lambda^n \cdot 2^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{\lambda^n}\cdot\lambda\cdot\cancel{2^n}\cdot 2\cdot n!}{\cancel{\lambda^n}\cdot\cancel{2^n}(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2\lambda}{n+1}\right| = 0 < 1$$, άρα $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ η σειρά συγκλίνει

$\boxed{\Pi.X3}$ $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2n}$, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda^{2(n+1)}}{\lambda^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{\lambda^{2n}}\cdot\lambda^2}{\cancel{\lambda^{2n}}}\right|$

$= \lambda^2$ Για να συγκλίνει η σειρά πρέπει $\lambda^2 < 1$

Συνεπώς συγκλίνει για $\lambda^2 < 1$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{4^n \cdot n}}$$ για ποιες τιμές του x συγκλίνει η σειρά

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{4^{n+1}(n+1)}}}{\dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{4^n \cdot n}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(x+1)^n}\,(x+1)\,\sqrt{4^n \cdot n}}{\cancel{(x+1)^n}\,\sqrt{4^n \cdot 4 \cdot (n+1)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)\cdot \cancel{\sqrt{4^n}} \cdot \sqrt{n}}{\cancel{\sqrt{4^n}} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)\cdot\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}} \right| = \frac{(x+1)}{2} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right|$$

$$= \frac{(x+1)}{2} \lim_{n\to\infty} \left| \sqrt{\frac{n}{n+1}} \right| = \frac{(x+1)}{2} \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right|} = \frac{(x+1)}{2} \cdot \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1+n} \right|} = \frac{(x+1)}{2} \cdot \sqrt{1}$$

$$= \frac{(x+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}^{\,0} = 1$$

Για να συγκλίνει η σειρά πρέπει $\frac{x+1}{2} < 1 \Rightarrow x+1<2 \Rightarrow$

$x < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει για $x < 1$

Ακολουθίες :

1η : $a_{n+1} = \frac{\lambda}{4} a_n + 1$, $a_0 = 1$ για ποιες τιμές του λ συγκλίνει

η ακολουθία $\left|\frac{\lambda}{4}\right| < 1 \Rightarrow |\lambda| < 4$

2η : $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1$ $a_0 = 1$ να βρείτε το όριο της

υποθέτοντας ότι συγκλίνει

Θέτω με $x = \lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Άρα $x = \frac{1}{2} x + 1 \Leftrightarrow$

$2x - x = 2 \Rightarrow \underline{x = 2}$