①

Διάλεξη 12η: Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

Μορφές διαγράμματος φάσης

$r_1, r_2 > 0$: Όλα τα βελάκια αποκλίνουν από το σταθερό σημείο (Ασταθής κόμβος)

$r_1, r_2 < 0$: Όλα τα βελάκια συγκλίναν προς το σταθερό σημείο (Ευσταθής κόμβος)

$r_1 \cdot r_2 < 0$: Όταν κάποια βελάκια συγκλίναν προς το σταθερό σημείο και τα περισσότερα αποκλίνουν από το σταθερό σημείο.
(Σαγματικό σημείο → Ασταθής κόμβος)

$K = 0$: Όταν σχηματίζεται κύκλος (Τα βελάκια σχηματίζουν κύκλο)

$K > 0$: Τα βελάκια αποκλίναν από το σημείο που τείνει να σχηματιστεί κύκλος.
(Ασταθής εστία)

$K < 0$: Τα βελάκια συγκλίνουν προς το σημείο που τείνει να σχηματιστεί κύκλος.
(Ευσταθής εστία).

Περίπτωση 1η: Να βρεθεί σε ποιο διάγραμμα αντιστοιχεί ένα σύστημα.

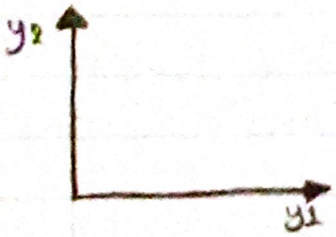
Μορφή:
$$y_1' = \pm a_{11}y_1 \pm a_{12}y_2 \pm b_1 \quad ,(1)$$
$$y_2' = \pm a_{21}y_1 \pm a_{22}y_2 \pm b_2 \quad ,(2)$$

• Σταθερό σημείο: Λύνω το σύστημα που προκύπτει από (1) = 0 και (2) = 0 και βρίσκω το $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$

- <u>Εύρεση r_1, r_2 ή κ:</u> $|A - I \cdot r| = 0$, όπου $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

και I ο μοναδιαίος, εξάγω το συμπέρασμα βάση r_1, r_2 ή κ και αναφέρω αν το σύστημα συγκλίνει ή αποκλίνει από το σταθερό σημείο (σταθερή κατάσταση).

Για να επιλέξω το σωστό διάγραμμα φάσης βλέπω που κοντά πέφτει το σταθερό σημείο καθώς μπορεί να υπάρχουν δύο διαγράμματα που αντιστοιχούν στα r_1, r_2 ή κ.



Σχεδιάζω το $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$

- <u>Περίπτωση 2η:</u> Άμεση μέθοδος $\boxed{y' = Ay}$

Βήμα 1°: $|A - rI| = 0$
Βήμα 2°: Για κάθε r αντικαθιστώ στην (1) και αυτό που προκύπτει το πολλαπλασιάζω με $\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$, βρίσκω μια σχέση

μεταξύ των k_1, k_2. Θέτω $k_1 = 1$ και βρίσκω το ιδιοδιάνυσμα
$y_i(t) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$

$y(t) = C_1 \cdot y_i(t) + C_2 \, y_j(t) \, e^{rt}$ θα προκύψει στο τέλος.

Περίπτωση 3η: Μέθοδος αντικατάστασης

$$y'_1 = a_{11}y_1 \pm a_{12}y_2 + b_1 ,(1)$$
$$y'_2 = a_{21}y_1 \pm a_{22}y_2 + b_2 ,(2)$$

Βήμα 1ο: Ξεκινάμε με τις ομογενείς λύσεις

$$y'_1 = a_{11}y_1 \pm a_{12}y_2 ,(3)$$
$$y'_2 = a_{21}y_1 \pm a_{22}y_2 ,(4)$$

- Παραγωγίζω την (3)

$$y''_1 = a_{11}y'_1 \pm a_{12}y'_2 ,(5)$$

- Αντικατάσταση του y'_2 στην (5)

$$y''_1 = a_{11}y'_1 \pm a_{12}(a_{21}y_1 \pm a_{22}y_2)$$

- Από (3): $y_2 = \dfrac{y'_1 - a_{11}y_1}{a_{12}}$,(6)

- Ξανά αντικατάσταση στην (5):

$$y''_1 - a_{11}y'_1 = \pm a_{12}\cdot a_{21}y_1 \pm a_{12}\cdot a_{22}\left(\frac{y'_1 - a_{11}y_1}{a_{12}}\right)$$

$$y''_1 - a_{11}y'_1 = \pm a_{12}\cdot a_{21}y_1 \pm a_{22}\cdot y'_1 \pm a_{22}\cdot a_{11}y_1$$

$$y''_1 - a_{11}y'_1 \pm a_{22}y'_1 \pm a_{12}a_{21}y_1 \pm a_{22}\cdot a_{11}y_1 = 0$$

Μετά πράξεις θα έχουμε $\pm \alpha y'' \pm \beta y' \pm \gamma y = 0$.
Διαφορική Εξίσωση 2ου βαθμού και θα πρέπει να βρούμε το τύπο της (Γενική λύση).

Σκοπός είναι να λύσουμε την ομογενή διαφορική Εξίσωση 2ου και να λύσουμε κατά τα γνωστά.
Αφού βρούμε την $y_1(t)$ και $y'_1(t)$ από την (6) βρίσκουμε και την $y_2(t)$.
Αν υπάρχουν b_1, b_2 βρίσκω το σταθερό σημείο $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ και προσθέτω σε κάθε $y(t)$ το δικό της.