ΥΛΗ

1. Μετατροπή από κανονική σε τυποποιημένη μορφή
2. Γραφική Επίλυση ΠΓΠ με 2 μεταβλητές
3. Δυϊκή Θεωρία
4. Primal Simplex
5. Μέθοδος δύο φάσεων
6. Dual Simplex
7. Ανάλυση ευαισθησίας

Γ.Π

$$\min/\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

υ.Π

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{n}x_n \oplus b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \oplus b_2 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \oplus b_3 \end{aligned}\right\} \text{Τ.Π}$$

n = αριθμός μεταβλητών, $x_1, x_2, \dots x_n$ μεταβλητές

m = αριθμός περιορισμών, z αντικειμενική συνάρτηση

$\oplus = \{\geq, \leq\}$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, \quad A_{m \times n}$$

Συμπαγής μορφής: min/max $z = c^T x$

μ.π $Ax \oplus b$

με $c, x \in R^n$, $b \in R^m$ και $A \in R^{m \times n}$

Για να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος Simplex πρέπει να γίνει μετασχηματισμός από κανονική σε τυποποιημένη μορφή.

Κανόνες μετασχηματισμού:

1. Αν η Z είναι min μένει ως έχει. Αν η Z είναι max την κάνουμε min και αντιστρέφονται τα πρόσημα.

2. Οι ανισοτικοί περιορισμοί γίνονται ισοτικοί. Κάθε γραμμή που έχει ένα ανισοτικό περιορισμό σημειώνει μια μεταβλητή.

$$\left.\begin{array}{l} \leq \;\rightarrow\; +X_{n+1} \text{ Ελλειματική} \\ \geq \;\rightarrow\; -X_{n+1} \text{ Πλεονασματική} \end{array}\right\} \text{χαλαρές}$$

π.χ1

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4$$

μ.π

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \geq 4$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 3$$
$$x_j \geq 0, \ (j = 1, \ldots, 4)$$

$$\min Z = -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 4$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 3$$
$$x_j \geq 0, \ (j = 1, \ldots, 6)$$

$$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Π.Χ2

$$\min z = 2x_1 + x_2 + 4x_3$$

υ.π

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6 \longrightarrow -x_4$$

$$x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5 \longrightarrow -x_5$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \longrightarrow +x_6$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, 3)$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Δυϊκή Θεωρία

	min		max
Περιορισμός	$=$	$\longleftrightarrow$	μεταβλητή ελεύθερη
	$\geq$	$\longleftrightarrow$	μεταβλητή ≥ 0
	$\leq$	$\longleftrightarrow$	μεταβλητή ≤ 0
Μεταβλητή	Free	$\longleftrightarrow$	περιορισμός $=$
	≥ 0	$\longleftrightarrow$	περιορισμός $\leq$
	≤ 0	$\longleftrightarrow$	περιορισμός $\geq$

Δυϊκό $z = b^T w$, $A^T w \oplus c$

Π.Γ.Π min/max το Δ.Γ.Π max/min

Σε κάθε περιορισμό του πρωτεύοντος αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού.

Σε κάθε μεταβλητή του Π.Γ.Π αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού.

Π.χ.1

$$\max \; 2x_1 + 3x_2$$

μ.π.

$$-3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2$$
$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 3$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5$$
$$x_1 \text{ free}, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \leq 0$$

Δ.Γ.Π

$$\min \; Z = -2w_1 + 3w_2 + 5w_3$$

μ.π.

$$-3w_1 + w_2 + 2w_3 = 2$$
$$4w_1 - 2w_2 - w_3 \geq 3$$
$$-2w_1 + 3w_2 - w_3 \leq 0$$
$$w_1 \text{ free}, \; w_2 \leq 0, \; w_3 \geq 0$$

Θέμα 1ο:

$$\max\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 + 15x_5$$

$$\text{υ.π.}\quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 \le 17$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \le 20$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, 5)$$

α) Να γράψετε το δυϊκό του; $\min z = 17w_1 + 20w_2$

$$2w_1 + w_2 \geq 2, \quad (1)$$

$$2w_1 + 2w_2 \geq 4, \quad (2)$$

$$w_1 + 2w_2 \geq 10, \quad (3)$$

$$3w_1 + 4w_2 \geq 20, \quad (4)$$

$$4w_1 + w_2 \geq 15, \quad (5)$$

$$w_{1,2} \geq 0, \quad (6)$$

β) Είναι το σημείο $(w_1, w_2) = (2, 4)$ εφικτό;

Για να είναι εφικτή/μη εφικτή σημείο/λύση πρέπει να ισχύουν όλοι οι περιορισμοί.

(1) $2w_1 + w_2 \geq 2 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 4 \geq 2$ (✓)

(2) $2w_1 + 2w_2 \geq 4 \Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \geq 4$ (✓)

(3) $w_1 + 2w_2 \geq 10 \Rightarrow 2 + 2 \cdot 4 \geq 10$ (✓)

(4) $3w_1 + 4w_2 \geq 20 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \geq 20$ (✓)

(5) $4w_1 + w_2 \geq 15 \Rightarrow 4 \cdot 2 + 4 \not\geq 15$ (✗), συνεπώς εφόσον

, (7) $w_1, 2 \geq 0$
$2 \geq 0$
και
$4 \geq 0$

το τρέχων σημείο δεν ικανοποιεί τους περιορισμούς δεν είναι εφικτό.

Ιδιότητες: $A \cdot B$, $A_{c \times d}$, $B_{p \times q}$

Για να πολλαπλασιάσουμε $A \cdot B$ πρέπει το πλήθος των γραμμών του B να είναι ίσο με το πλήθος των στηλών του $A \Rightarrow \boxed{d = p}$

π.χ $\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}$ $\underset{2 \times 4}{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$ εφόσον $d = p$ μπορούμε να υπολογίσουμε το $A \times B$

$d = 2$ $\qquad$ $p = 2$

$B \times A$ δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \underset{1 \times 4}{\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

, Δημιουργείται πίνακας $D_{c \times q}$

Π.Χ3

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

φ.π

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 - x_3 \geq 0$$
$$x_j \geq 0, \ (j=1,\dots,3)$$

Π.Χ4

$$\max \quad z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4$$

φ.π

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \leq -8$$
$$-2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \leq -12$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leq 5$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 9$$
$$x_j \geq 0, \ (j=1,\dots,4)$$

1. Μετατροπή σε τυποποιημένη μορφή
2. Εύρεση c^T, b, A

Primal Simplex

$$\min \quad x_1 + x_2 - 4x_3$$
t.n
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \le 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 4$$
$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, 3)$$

$\Rightarrow$

$$\min \quad x_1 + x_2 - 4x_3$$
t.n
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$$
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4$$
$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, 6)$$

$$|B| = m = 3, \quad |N| = n - m = 6 - 3 = 3, \quad B = [4\ 5\ 6] \quad N = [1\ 2\ 3]$$

$$C^T = \begin{array}{c} \qquad C_N \qquad\qquad C_B \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} \quad A_N \qquad\quad A_B \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Επανάληψη 1

(Βήμα 0):

- $B^{-1} = A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $\underline{X_B} = B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0$

η βασική διαφέρουσα είναι εφικτή. (Άρα μπορεί να εφαρμοστεί ο primal Simplex)

$w^T = (c_B)^T \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$S_N = (c_N^T) - w^T A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$S_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

Βήμα 1: (έλεγχος βελτιστότητας)

Αν $s_N \geq 0$, το πρόβλημα είναι βέλτιστο. (Σταματάμε)

Επειδή $s_N \ngeq 0$ ο αλγόριθμος δεν σταματά

Βήμα 2: α. Επιλογή Εισερχόμενης: $l = N(\underline{t}) = N(3) = 3 \Rightarrow x_3$ η εισερχόμενη

b. Υπολογισμός στήλη περιστροφής:

$$\underline{h_l} = B^{-1} \cdot A_l = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix} \nleq 0$$

Εφόσον $h_l \nleq 0$ συνεχίζουμε στην επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής με τον έλεγχο ελαχίστου λόγου.

c. $x_k = x_B / h_l = \{9/2, x, 4/\underline{1}\}$

$k = B(r) = \beta(3) = 6 \Rightarrow x_6$ η εξερχόμενη, $\underline{r=3}$

<u>Βήμα 3:</u> $B = [4\ 5\ 3]$, $N = [1\ 2\ 6]$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = E^{-1} \cdot \underline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/\underline{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/\underline{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$h_3 = \underline{1}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$W^T = (C_B)^T \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$S_N = (C_N)^T - W^T A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$S_N = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Επανάληψη 2

Βήμα 1: Επειδή $SN \ngeq 0$ ο αλγόριθμος δε σταματα

Βήμα 2: a. Επιλογή εισερχόμενης: $l = N(t) = N(1) = 1 \Rightarrow x_1$ η

Εισερχόμενη.

b. Υπολογισμός στήλης περιστροφής:

$$h_l = B^{-1} \cdot A_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \nleq 0$$

c. Επιλογή εξερχόμενης:

$$x_k = x_B / h_l = \{\underline{1/3}, x, x\}$$

$k = B(r) = B(1) = 4 \Rightarrow x_4$ εξερχόμενη, $\underline{r=1}$

<u>Βήμα 3:</u> $B = [1\ 5\ 3]$, $N = [4\ 2\ 6]$

$$B^{-1} = E^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$X_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 6 \\ 13/3 \end{bmatrix}$$

$$w^T = (C_B)^T \cdot B^{-1} = [1\ 0\ -4] \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = [-1\ 0\ -2]$$

$$S_N = (C_N)^T - w^T A_N = [0\ 1\ 0] - [-1\ 0\ -2] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_N = [0\ 1\ 0] - [-1\ -3\ -2]$$

$$S_N = [1\ 4\ 2]$$

Επανάληψη 3

Βήμα 1: Επειδή $S_N \geq 0$ ο αλγόριθμος σταματά

Η βέλτιστη διαμέριση είναι $B = [1\ 5\ 3]$, $N = [4\ 2\ 6]$

Η βέλτιστη λύση $x^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1/3, 0, 13/3, 0, 6, 0)$

Η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι

$$z = w^T \cdot b = [-1\ 0\ -2]\begin{bmatrix}9\\2\\4\end{bmatrix} = -9 + 0 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = \underline{-17}$$

Αν είναι εξ αρχής max στο τέλος $z = -(w^T \cdot b)$