Άσκηση 20

20. Η ποσότητα ενός προϊόντος (σε 1000άδες κιλών) που πωλείται από μία βιομηχανία τροφίμων σε μία μέρα είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την παρακάτω:

$$\varphi(x)=\begin{cases} \alpha x & 0\le X\le 3 \\ \alpha(6-x) & 3< X\le 6\end{cases}$$

Ζητείται:

α) Να βρεθεί η τιμή του α, με την οποία η φ(x) είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να πωληθούν σε μία μέρα (I) 3000 κιλά ή περισσότερα, (II) από 1500 μέχρι 4500 κιλά;

γ) Είναι τα ενδεχόμενα (I) και (II) της ερώτησης (β) ανεξάρτητα;

1

Άσκηση 20(α)

- για να είναι η φ(x) συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας πρέπει να ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)dx} + \int_{0}^{3}\alpha x dx + \int_{3}^{6}\alpha(6-x)dx + \cancel{\int_{6}^{+\infty}\varphi(x)dx} = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + 6\alpha x\Big|_3^6 - \frac{\alpha x^2}{2}\Big|_3^6 = 1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2}\cdot 9 + 6\alpha(6-3) - \frac{\alpha}{2}(36-9) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}\alpha + 18\alpha - \frac{27}{2}\alpha = 1 \Rightarrow 9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9}$$

2

Άσκηση 20(β)

I:

$$P(x\ge 3) = \int_3^6 \varphi(x)dx = \int_3^6 \frac{1}{9}(6-x)dx =$$

$$= \frac{1}{9}6x\Big|_3^6 - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_3^6 =$$

$$= \frac{6}{9}(6-3) - \frac{1}{9}\cdot\frac{36-9}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

3

Άσκηση 20(β)

II:

$$P(1{,}5 \le x \le 4{,}5) = \int_{1,5}^{3}\frac{1}{9}x dx + \int_{3}^{4,5}\frac{1}{9}(6-x)dx =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{1,5}^{3} + \frac{6}{9}x\Big|_3^{4,5} - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_3^{4,5} =$$

$$= \frac{1}{18}\left(9-\frac{9}{4}\right) + \frac{6}{9}\left(\frac{9}{2}-3\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{81}{4}-9\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{3}{8} + 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{4}$$

4

Άσκηση 20(γ)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Ενδεχόμενο } I \rightarrow P(I) = \frac{1}{2} \\ \text{Ενδεχόμενο } II \rightarrow P(II) = \frac{3}{4} \end{array}\right| \Rightarrow I\cap II = 3 \le x \le 4{,}5 \text{ και}$$

$$P(3\le x\le 4{,}5) = \int_3^{4,5}\frac{1}{9}(6-x)dx = \frac{6}{9}x\Big|_3^{9/2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_3^{9/2} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{2}-3\right) - \frac{1}{18}\left(\frac{81}{4}-9\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

5

Άσκηση 20(γ)

$$\left.\begin{array}{r} P(I\cap II) = \frac{3}{8} \\ P(I)\cdot P(II) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8} \end{array}\right\} P(I\cap II) = P(I)\cdot P(II)$$

- άρα τα ενδεχόμενα I και II είναι ***ανεξάρτητα***

6

Άσκηση 21

21. Η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας σχετικής συχνότητας:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \theta & 0 \le X \le \theta \\ \kappa & \theta < X \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ζητείται να βρεθούν:
α) Το κ συναρτήσει του θ.
β) Η μέση τιμή της Χ.

7

Άσκηση 21(α)

Πρέπει να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{\theta}\varphi(x)dx + \int_{\theta}^{1}\varphi(x)dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\theta}\theta dx + \int_{\theta}^{1}\kappa dx = 1 \Rightarrow \theta x\Big|_{0}^{\theta} + \kappa x\Big|_{\theta}^{1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta^2 + \kappa - \kappa\theta = 1 \Rightarrow \kappa(1-\theta) = 1-\theta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{1-\theta^2}{1-\theta} \Rightarrow \kappa = \frac{\cancel{(1-\theta)}\cdot(1+\theta)}{\cancel{1-\theta}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\kappa = \theta + 1}$$

8

Άσκηση 21(β)

$$\mu = (\bar{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx \Rightarrow \int_{0}^{\theta} x\theta dx + \int_{\theta}^{1}\kappa x dx =$$

$$= \theta\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\theta} + \kappa\frac{x^2}{2}\Big|_{\theta}^{1} = \theta\cdot\frac{\theta^2}{2} + \kappa\frac{1^2-\theta^2}{2} =$$

$$= \frac{\theta^3}{2} + (\theta+1)\frac{1-\theta^2}{2} = \frac{\theta^3}{2} + \frac{\theta-\theta^3}{2} + \frac{1-\theta^2}{2} =$$

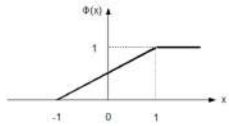
$$= \frac{\cancel{\theta^3} + \theta - \cancel{\theta^3} + 1 - \theta^2}{2} = \frac{-\theta^2+\theta+1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \bar{x} = \frac{-\theta^2+\theta+1}{2}$$

9

Άσκηση 22

22. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γραφικά μια συνάρτηση και ζητείται:
α) Να ελεγχθεί κατά πόσο μπορεί αυτή να είναι συνάρτηση αθροιστικής πιθανότητας της μεταβλητής Χ.
β) Να βρεθεί και να σχεδιαστεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Χ.
γ) Να βρεθούν η μαθηματική προσδοκία της Χ και της Ζ=2Χ.



10

Άσκηση 22

α) Θα πρέπει να ισχύουν:
- $0 \le \Phi(x) \le 1$ για $\forall$ x
- $\Phi(+\infty)=1$
- $\Phi(-\infty)=0$
- $\Phi(x_\alpha) \le \Phi(x_\beta)$ $\forall$ $x_\alpha < x_\beta$, δηλαδή η Φ(x) είναι **μη φθίνουσα**

β) Η Φ(x) είναι της μορφής y=αx+b και διέρχεται από τα σημεία (-1,0) και (1,1).

(-1,0): 0=α(-1)+b→ α=b
(1,1): 1=α+b→ α=1-b

α=b=1/2 άρα Φ(x)=1/2·x+1/2

11

Άσκηση 22

- Άρα η Φ(x) είναι:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ \frac{x+1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x < +\infty \end{cases} \quad \varphi(x) = \Phi'(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$

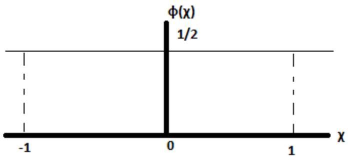
- Άρα η φ(x) είναι:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & 1 < x < +\infty \end{cases} \text{ και ισχύει}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx = \frac{x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

12

Άσκηση 22



13

Άσκηση 22 (γ)

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{-1}^{1} x\varphi(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \underline{E(x) = 0} \rightarrow \text{βλέπε σχήμα}$$

$$E(2x) = 2E(x) = 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{E(2x) = 0}$$

14

Άσκηση 23

23. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται ως εξής:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Να βρεθούν η μέση τιμή, η μεταβλητότητα και η ροπή τέταρτης τάξης ως προς x_0=0 της μεταβλητής X.

15

Άσκηση 23

- Μέση τιμή

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx = \int_{0}^{1} x3x^2dx = \int_{0}^{1} 3x^3dx =$$

$$= 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} \Rightarrow E(x) = \frac{3}{4}$$

16

Άσκηση 23

- Μεταβλητότητα

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2\varphi(x)dx = \int_0^1 (x - \frac{3}{4})^2 3x^2dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{9}{16})3x^2dx = \int_0^1 3x^4dx - \frac{9}{2}\int_0^1 x^3dx + \frac{27}{16}\int_0^1 x^2dx =$$

$$= 3\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{9}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{\cancel{27}}{16}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{9}{8} + \frac{9}{16} =$$

$$= \frac{48}{80} - \frac{90}{80} + \frac{45}{80} = \frac{3}{80} = \underline{0{,}0375}$$

17

Άσκηση 23

- Ροπή 4ης τάξης ως προς x_o=0

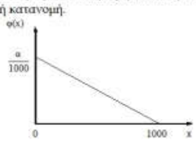
$$\mu'_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_o)^4\varphi(x)dx = \int_0^1 x^4\varphi(x)dx =$$

$$= \int_0^1 3x^6dx = 3\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{3}{7}$$

18

Άσκηση 24

24. Η τυχαία μεταβλητή X, που είναι η διάρκεια ζωής ενός ημιαγωγού σε ώρες λειτουργίας του, έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την παρακάτω τριγωνική κατανομή.



Ζητείται να βρεθούν:
α) η τιμή του α,
β) η μαθηματική προσδοκία της ζωής των ημιαγωγών,
γ) η συνάρτηση της αθροιστικής πιθανότητας,
δ) η μαθηματική προσδοκία της συνάρτησης Z = 2X+1000.

19

Άσκηση 24

- $y = \kappa x + \lambda$

$$\left.\begin{array}{l}\text{για } x=0 \to y=\dfrac{\alpha}{1000} \\ x=1000 \to y=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}\lambda=\dfrac{\alpha}{1000} \\ 0=1000\kappa+\lambda \Rightarrow \kappa=-\dfrac{\lambda}{1000} \Rightarrow \kappa=-\dfrac{\alpha}{1000^2}\end{array}$$

- Άρα:

$$y=-\frac{\alpha}{1000^2}x+\frac{\alpha}{1000}=\frac{\alpha}{1000}\left(1-\frac{x}{1000}\right)$$

20

Άσκηση 24

α)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1 \Rightarrow \int_0^{1000}\frac{\alpha}{1000}\left(1-\frac{x}{1000}\right)dx=1 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha}{1000}x\Big|_0^{1000}-\frac{\alpha}{1000}\cdot\frac{x^2}{2\cdot 1000}\Big|_0^{1000}=1 \Rightarrow \alpha-\frac{\alpha}{2}=1 \Rightarrow \alpha=2$$

β)

$$E(x)=\int_0^{1000}x\varphi(x)dx=\int_0^{1000}x\frac{2}{1000}\left(1-\frac{x}{1000}\right)dx=$$

$$\frac{2}{1000}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1000}-\frac{2}{1000}\frac{x^3}{3\cdot 1000}\Big|_0^{1000}=1000-\frac{2}{3}\cdot 1000$$

$$=333{,}33 \text{ ώρες}$$

21

Άσκηση 24

γ)

$$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt=\int_0^x\frac{2}{1000}\left(1-\frac{t}{1000}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{1000}\left(t-\frac{t^2}{2\cdot 1000}\right)\Big|_0^x=\frac{2x}{1000}-\frac{x^2}{1000^2}$$

$$\text{Έλεγχος}: \quad \Phi(1000)=\frac{2\cdot 1000}{1000}-\frac{1000^2}{1000^2}=2-1=1 \quad \text{O.K.}$$

δ)

$$E(2x+1000)=2E(x)+1000=$$

$$2\cdot\frac{1000}{3}+1000=1666{,}666 \text{ ώρες}$$

22

Άσκηση 25

25. Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\varphi(x)=\begin{cases} x/4 & 0\le X\le 2 \\ 1-x/4 & 2\le X\le 4 \\ 0 & \text{αλλού}\end{cases}$$

α) Να βρεθούν η μέση τιμή μ και η τυπική απόκλιση σ της τυχαίας μεταβλητής X.
β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η X να λάβει τιμή μεγαλύτερη του 3 .

23

Άσκηση 25(α)

$$E(x)=\int_0^2 x\varphi(x)dx+\int_2^4 x\varphi(x)dx=\int_0^2 x\frac{x}{4}dx+\int_2^4 x\left(1-\frac{x}{4}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\frac{x^2}{4}dx+\int_2^4\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx=\frac{x^3}{12}\Big|_0^2+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\Big|_2^4\right)=$$

$$=\frac{8}{12}+\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{12}-\frac{4}{2}+\frac{8}{12}\right)=\frac{8}{12}+\left(8-\frac{16}{3}-2+\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+6-\frac{14}{3}=6-\frac{12}{3}=$$

$$=6-4=2=\mu$$

24

Άσκηση 25(α)

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$$

$$E(x^2) = \int_0^4 x^2 \varphi(x)dx = \int_0^2 x^2 \frac{x}{4}dx + \int_2^4 x^2 (1 - \frac{x}{4})dx =$$

$$= \ldots\ldots\ldots = 4{,}67$$

$$\text{άρα } \sigma^2 = 4{,}67 - 4 = 0{,}67 \Rightarrow \sigma = \sqrt{0{,}67} = 0{,}818$$

25

Άσκηση 25(β)

$$P(x>3) = \int_3^4 \varphi(x)dx = \int_3^4 \left(1 - \frac{x}{4}\right)dx = \left(x - \frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_3^4 =$$

$$= 4 - \frac{16}{8} - 3 + \frac{9}{8} = \frac{1}{8}$$

26

Άσκηση 29

29. Ο αριθμός X των έργων που αναλαμβάνει μία εταιρεία κατασκευών ανά έτος έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0.05, & x = 2 \\ 0.15, & x = 3 \\ 0.20, & x = 4 \\ 0.35, & x = 5 \\ 0.25, & x = 6 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α-2) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X.

(β-2) Ποια είναι η πιθανότητα να αναλάβει η εταιρεία τουλάχιστον 5 έργα σε ένα έτος, αν γνωρίζουμε ότι θα αναλάβει περισσότερα από 2 έργα;

(γ-2) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή του αριθμού των έργων που αναλαμβάνει η εταιρεία σε ένα έτος.

(δ-2) Υπολογίστε την τυπική απόκλιση του αριθμού των έργων που αναλαμβάνει η εταιρεία σε ένα έτος.

27

Άσκηση 29 (α)

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 0.05, & 2 \le x < 3 \\ 0.20, & 3 \le x < 4 \\ 0.40, & 4 \le x < 5 \\ 0.75, & 5 \le x < 6 \\ 1, & x \ge 6 \end{cases}$$

28

Άσκηση 29 (β)

$$P(X \ge 5 | X > 2) = P(X \ge 5 | X \ge 3) = \frac{P(X \ge 5, X \ge 3)}{P(X \ge 3)} =$$

$$= \frac{P(X \ge 5)}{P(X \ge 3)} = \frac{0{,}35 + 0{,}25}{1 - 0{,}05} = \frac{0{,}60}{0{,}95} = 0{,}6316$$

29

Άσκηση 29 (γ)

$$\mu = E(X) =$$

$$= \sum_{x=2}^{6} x f(x) =$$

$$= 2 \times 0{,}05 + 3 \times 0{,}15 + 4 \times 0{,}20 + 5 \times 0{,}35 + 6 \times 0{,}25 =$$

$$= 4{,}60$$

30

Άσκηση 29 (δ)

$$\sigma = \sqrt{var(X)} = \sqrt{E(X^2) - E^2(X)},$$

$$E(X^2) = \sum_{x=2}^{6} x^2 f(x) =$$

$$= 4 \cdot 0,05 + 9 \cdot 0,15 + 16 \cdot 0,20 + 25 \cdot 0,35 + 36 \cdot 0,25 = 22,50$$

άρα $\sigma = \sqrt{22,50 - 4,60^2} = \sqrt{1,34} = 1,1576$

31

Άσκηση 30

30. Λόγω απεργίας του προσωπικού των αστικών συγκοινωνιών έχει υπολογιστεί ότι το 40% του προσωπικού μιας επιχείρησης δεν θα προσέλθει στην εργασία του. Το τμήμα συσκευασίας της επιχείρησης διαθέτει 12 υπαλλήλους. Ποια είναι η πιθανότητα να παρουσιαστούν στο τμήμα αυτό τουλάχιστον 8 υπάλληλοι για την τακτοποίηση των παραγγελιών της επόμενης μέρας

32

Άσκηση 30

- Ο αριθμός των υπαλλήλων που δεν θα εμφανιστούν (X) ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παράμετρο p = 0,4
- Άρα $P(X \le 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$
- Από τον πίνακα 1.1 **ή** από τον τύπο

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

για n = 12, p = 0,4, έχουμε:

33

Άσκηση 30

$P(X = 0) = (1-p)^n = 0,002$

$P(X = 1) = np(1-p)^{n-1} = 0,017$

$$P(X = 2) = \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = 0,064$$

$$P(X = 3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^3 (1-p)^{n-3} = 0,142$$

$$P(X = 4) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} p^4 (1-p)^{n-4} = 0,213$$

34

Άσκηση 30

- Άρα

  $P(X \le 4) = 0,002 + 0,017 + 0,064 + 0,142 + 0,213 = 0,438$
- Ο πίνακας 1.2 δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί γιατί δεν υπάρχει n=12 (η γραμμική παρεμβολή είναι υπερβολική εδώ)
- Η άσκηση λύνεται και με Y: ο αριθμός των υπαλλήλων που θα εμφανιστούν (**p = 0,6** σε αυτή την περίπτωση)

35

Άσκηση 31

31. Μια δοκιμή συνίσταται στη λήψη τριών συσκευών από την παραγωγή και στον έλεγχο αυτών. Η πιθανότητα να λειτουργεί μία από αυτές είναι 0,90 και να έχει βλάβη 0,10. Εάν οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής X είναι ο αριθμός των συσκευών που λειτουργούν, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της X και να παρασταθεί γραφικά.

36

Άσκηση 31

- Ο αριθμός των συσκευών που λειτουργούν (X) ακολουθεί διωνυμική κατανομή με p=0,9 και n=3

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

- Άρα

$P(X = 0) = (1 - p)^n = 0{,}001$

$P(X = 1) = np(1 - p)^{n-1} = 0{,}027$

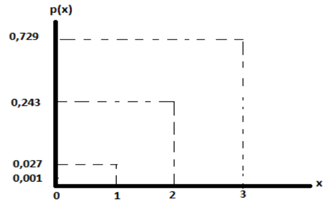
$$P(X = 2) = \frac{n(n-1)}{2} p^2 (1-p)^{n-2} = 0{,}243$$

$$P(X = 3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} p^3 (1-p)^{n-3} = 0{,}729$$

37

Άσκηση 31

- Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης πιθανότητας είναι:



38

Άσκηση 32

32. Το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων μιας βιομηχανίας είναι 4%. Καθημερινά παραδίνονται σε πελάτη της βιομηχανίας 135 συσκευασίες των 50 μονάδων η καθεμία. Πόσες από τις συσκευασίες αυτές έχουν:
α) το πολύ 2 ελαττωματικά προϊόντα;
β) τουλάχιστον 3 ελαττωματικά προϊόντα;
(Ο υπολογισμός να γίνει και με τη Διωνυμική κατανομή και με την κατανομή Poisson).

39

Άσκηση 32

<u>Λύση με χρήση διωνυμικής κατανομής</u>:

- n=50, p=0,04. Άρα:

$$P(X = 0) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{50}{0} 0{,}04^0 (1-0{,}04)^{50} = 0{,}1299$$

$$P(X = 1) = \binom{50}{1} 0{,}04 (1-0{,}04)^{49} = 0{,}2706$$

$$P(X = 2) = \binom{50}{2} 0{,}04^2 (1-0{,}04)^{48} = 0{,}2762$$

πίνακας 1.2: n=50 , p=0,04
$p(x \geq 3) = 0{,}3233$
$p(x \leq 2) = 1 - p(x \geq 3) = 1 - 0{,}3233 = 0{,}6767$

40

Άσκηση 32

α) Άρα υπάρχουν το πολύ 2 ελαττωματικά με πιθανότητα

$$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} P(x) = 0{,}1299 + 0{,}2706 + 0{,}2762 = 0{,}6767$$

β) Η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 ελαττωματικά είναι

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}6767 = 0{,}3233$$

- Άρα: $0{,}6767 \cdot 135 = 91{,}35 \approx 91$ συσκευασίες περιέχουν το πολύ 2 ελαττωματικά
- και $0{,}3233 \cdot 135 = 43{,}65 \approx 44$ (= 135 – 91) συσκευασίες περιέχουν τουλάχιστον 3 ελαττωματικά

41

Άσκηση 32

Αν

- p πολύ μικρό (≤0,1)
- n πολύ μεγάλο και np = λ (≤ 5)

τότε η διωνυμική κατανομή προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την κατανομή Poisson

42

Άσκηση 32

Λύση με χρήση κατανομής Poisson:

$$P(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \text{ όπου } \lambda = np = 50\cdot 0{,}04 = 2$$

- Άρα

$$P(X=0)=\frac{2^0}{0!}e^{-2}=e^{-2}=0{,}1353$$

$$P(X=1)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}=2e^{-2}=0{,}2707$$

$$P(X=2)=\frac{2^2}{2!}e^{-2}=2e^{-2}=0{,}2707$$

43

Άσκηση 32

- Άρα

από τον πίνακα 2 για λ=2 & r=2

$$P(X\le 2)=\sum_{x=0}^{2}P(x)=0{,}1353+0{,}2707+0{,}2707=0{,}6767$$

και $P(X\ge 3)=1-P(x\le 2)=1-0{,}6767=0{,}3233$

- Δηλαδή
  - Άρα: $0{,}6767\cdot 135=91{,}35\approx 91$ συσκευασίες περιέχουν το πολύ 2 ελαττωματικά
  - και $0{,}3233\cdot 135=43{,}65\approx 44\ (=135-91)$ συσκευασίες περιέχουν τουλάχιστον 3 ελαττωματικά

44

Άσκηση 33

33. Σε ένα εργοστάσιο συμβαίνουν 2 ατυχήματα κατά μέσο όρο κάθε εβδομάδα. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες να συμβούν:
    α) το πολύ 2 ατυχήματα σε μία εβδομάδα
    β) το πολύ 2 ατυχήματα σε 2 εβδομάδες
    γ) το πολύ 2 ατυχήματα σε καθεμία από 2 διαδοχικές, ενδεικτικές εβδομάδες.

45

Άσκηση 33

- Ο αριθμός ατυχημάτων /εβδομάδα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ = 2 (ατυχ./εβδ.)

α) $P_1(X\le 2)=\sum_{x=0}^{2}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}=$

$=e^{-2}+2e^{-2}+2e^{-2}=5e^{-2}=0{,}6767$ (και από πίνακα 2)

β) λ_2=4 (ατυχ./2 εβδ.)

$P_2(X\le 2)=\sum_{x=0}^{2}\frac{\lambda_2{}^x}{x!}e^{-\lambda_2}=\frac{4^0}{0!}e^{-4}+\frac{4^1}{1!}e^{-4}+\frac{4^2}{2!}e^{-4}=$

$=e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}=13e^{-4}=0{,}2381$ (και από πίνακα 2)

46

Άσκηση 33

γ)

E_1: να συμβούν το πολύ 2 ατυχήματα την 1η εβδομάδα

E_2: να συμβούν το πολύ 2 ατυχήματα την 2η εβδομάδα

$$P(E_1)=P(E_2)=P(X\le 2)=0{,}6767$$

E_1, E_2: ανεξάρτητα, άρα:

$\boxed{P(E_1\cap E_2)}=P(E_1)\cdot P(E_2)=$

$=P_1(x\le 2)\cdot P_1(x\le 2)=0{,}6767^2=\boxed{0{,}4579}$

47

Άσκηση 34

34. Μια αεροπορική εταιρία διαπίστωσε ότι κατά μέσο όρο το 5% των επιβατών με κρατημένες θέσεις δεν εμφανίζονται κατά την αναχώρηση του αεροπλάνου. Γι' αυτό πουλάει 75 εισιτήρια για αεροπλάνο 70 θέσεων. Ποια είναι η πιθανότητα να μη μείνει κανείς χωρίς θέση (δηλ. να έχουν όλοι θέση);

48

Άσκηση 34

<u>Λύση με χρήση διωνυμικής κατανομής</u>:

- Ο αριθμός των επιβατών που **δεν** προσέρχονται (X) ακολουθεί διωνυμική κατανομή με p = 0,05 και n = 75

*p=0,05 → η πιθανότητα «επιτυχίας», δηλ. η πιθανότητα να **μην** προσέλθει ένας επιβάτης*

- Πιθανότητα να μείνει κάποιος χωρίς θέση:

→ αυτοί που ήρθαν (Y) να είναι ≥ 71

→ αυτοί που δεν ήρθαν (X) να είναι ≤ 4

49

Άσκηση 34

$$P(X\leq 4)=\sum_{x=0}^{4}\binom{75}{x}0{,}05^{x}(1-0{,}05)^{75-x}=0{,}95^{75}+75\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95^{74}+$$

$$+\frac{74\cdot 75}{2}0{,}05^{2}\cdot 0{,}95^{73}+\frac{73\cdot 74\cdot 75}{6}0{,}05^{3}\cdot 0{,}95^{72}+$$

$$\frac{72\cdot 73\cdot 74\cdot 75}{24}0{,}05^{4}\cdot 0{,}95^{71}=$$

$$=0{,}0213+0{,}084+0{,}164+0{,}21+0{,}199=0{,}6783$$

Άρα, η πιθανότητα να βρουν όλοι θέση είναι:

$1 - 0{,}6783 = 0{,}3217$

50

Άσκηση 34

<u>Λύση με χρήση κατανομής Poisson</u>:

- Επειδή p=0,05<**0,1** (μικρό) χρησιμοποιούμε Poisson με λ = np = 75·0,05 = 3,75 < **5**

$$P(X\leq 4)=\sum_{x=0}^{4}\left(\frac{3{,}75^{x}}{x!}\right)e^{-3{,}75}=\ldots=0{,}6775$$

51

Άσκηση 34

- Εναλλακτικά: από πίνακα αθροιστικών πιθανοτήτων

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=3{,}7\Rightarrow P_1(x\leq 4)=0{,}6872\\ \lambda_2=3{,}8\Rightarrow P_2(x\leq 4)=0{,}6678\end{array}\right\}\ \lambda=3{,}75$$

$$P(x\leq 4)=0{,}6872+(0{,}6678-0{,}6872)\frac{3{,}75-3{,}7}{3{,}8-3{,}7}\Rightarrow$$

$P(x\leq 4)=0{,}6775$

και

$1-P(x\leq 4)=1-0{,}6775=0{,}3225$

52

Άσκηση 34

- Πώς γίνεται η **γραμμική παρεμβολή**:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1\to p_1\\ \lambda_2\to p_2\\ \lambda\to p=;\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\lambda_2-\lambda_1\to p_2-p_1\\ \lambda-\lambda_1\to p-p_1=;\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda-\lambda_1}=\frac{p_2-p_1}{p-p_1}\Rightarrow$$

$$p=p_1+(p_2-p_1)\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

53

Άσκηση 36

36. Σε μια εταιρία μεταφορών 2 αυτοκίνητα κατά μέσο όρο παρουσιάζουν βλάβη κάθε μέρα. Αν για τη διόρθωση κάθε βλάβης απασχολείται ένας μηχανικός για μια ολόκληρη μέρα, να βρεθεί πόσους μηχανικούς θα πρέπει να διαθέτει η εταιρία, έτσι ώστε να υπάρχει με πιθανότητα 95%, διαθέσιμος μηχανικός για την επιδιόρθωση τυχόν βλάβης.

54

Άσκηση 36

- Ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν μέχρι z αυτοκίνητα, άρα να χρειαστώ μέχρι z μηχανικούς;
- X: αριθμός αυτοκινήτων με βλάβη (ανά ημέρα)
- Αφού αντιστοιχεί ένας μηχανικός ανά βλάβη πρέπει:

$$P(X \le z) = 0{,}95$$

- Π.χ. $P(X) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \xrightarrow{X=0} \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} = 0{,}1353$

- *Ερμηνεία του 0,1353: αν δεν έχω κανένα μηχανικό (z=0) ή πιθανότητα να **μην έχω πρόβλημα** (αν δεν έρθει κανένα αυτοκίνητο) είναι 13,53%. Η (συμπληρωματική) πιθανότητα 86,47% δείχνει το πόσο μεγάλο κίνδυνο διατρέχω*

55

Άσκηση 36

$$\left.\begin{aligned} P(0) &= e^{-2} = 0{,}1353 \\ P(1) &= 2e^{-2} = 0{,}2707 \\ P(2) &= 2e^{-2} = 0{,}2707 \\ P(3) &= \frac{4}{3}e^{-2} = 0{,}1805 \\ P(4) &= \frac{2}{3}e^{-2} = 0{,}0903 \end{aligned}\right\} \simeq 0{,}95$$

Άρα χρειαζόμαστε 4 μηχανικούς

- Αν έχω 1 μηχανικό, δεν έχω πρόβλημα, αν εμφανιστεί 0 ή 1 αυτοκίνητα με βλάβη κλπ
- Κατευθείαν από πίνακα 2: για λ=2 και n=4

56

Άσκηση 37

37. Από ένα φωτεινό σηματοδότη διέρχονται κατά μέσο όρο κάθε λεπτό 10 αυτοκίνητα, ο αριθμός των οποίων ακολουθεί κατανομή Poisson. Ποιες είναι οι πιθανότητες:
    α) να διέλθουν μέσα σε 6 δευτερόλεπτα τουλάχιστον 2 αυτοκίνητα;
    β) να διέλθουν μέσα σε δύο διαφορετικά χρονικά διαστήματα των 6 δευτερολέπτων, στο ένα το πολύ 2 αυτοκίνητα και στο άλλο τουλάχιστον 1;

57

Άσκηση 37(α)

x: αριθμός αυτοκινήτων που διέρχονται από τον σηματοδότη σε 6 sec.
Ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ=10αυτ/min=1αυτ/6sec.

$$P(x \ge 2) = 1 - P(x \le 1) = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-1} - e^{-1} =$$

$$1 - 2e^{-1} = 0{,}2642$$

58

Άσκηση 37(β)

E: να διέλθουν σε 2 διαφορετικά χρονικά διαστήματα 6 sec στο ένα το πολύ 2 αυτοκίνητα και στο άλλο τουλάχιστον 1.
E1: στο 1ο το πολύ 2 αυτοκίνητα και στο 2ο τουλάχιστον 1 αυτοκίνητο
E2: στο 1ο τουλάχιστον 1 αυτοκίνητο και στο 2ο το πολύ 2 αυτοκίνητα.

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

E1,E2: δεν είναι αμοιβαίως αποκλειόμενα

59

Άσκηση 37

- X_α: αριθμός αυτοκ. το 1ο χρονικό διάστημα των 6 sec
- X_β: αριθμός αυτοκ. το 2ο χρονικό διάστημα των 6 sec

$$P(E_1) = P[(x_\alpha \le 2) \cap (x_\beta \ge 1)] = P[x_\alpha \le 2] \cdot P[x_\beta \ge 1]$$

$$P[x_\alpha \le 2] = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{5}{2}e^{-1} = \underline{0{,}9197}$$

$$P[x_\beta \ge 1] = 1 - P[x_\beta = 0] = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = 1 - e^{-1} = \underline{0{,}6321}$$

- άρα

$$P(E_1) = 0{,}9197 \cdot 0{,}6321 = \underline{0{,}5813} = P(E_2)$$

60

Άσκηση 37

$$P(E_1 \cap E_2) = P[[(X_\alpha \le 2) \cap (X_\beta \ge 1)] \cap [(X_\alpha \ge 1) \cap (X_\beta \le 2)]] =$$

$$= P[1 \le X_\alpha \le 2] \cdot P[1 \le X_\beta \le 2]$$

$$P[1 \le x \le 2] = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{3}{2} e^{-1} = \underline{0{,}5518}$$

- άρα

$$P(E_1 \cap E_2) = 0{,}5518 \cdot 0{,}5518 = 0{,}3045$$

$$P(E) = 0{,}5813 \cdot 0{,}5813 - 0{,}3045 = \underline{0{,}8581}$$

61

Άσκηση 39

39. Σε ένα συνεργείο επισκευής αυτοκινήτων οι αφίξεις των αυτοκινήτων, που προσέρχονται για επισκευή, είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή 16 αυτοκίνητα ανά 8ωρο. Ζητείται:

α) Ποια είναι η μέση τιμή του χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων;

β) Ποια είναι η πιθανότητα σε χρονικό διάστημα δύο ωρών να μην εμφανιστεί κανένα αυτοκίνητο για επισκευή;

62

Άσκηση 39

- Αφίξεις ~ Poisson με λ=16 αυτ./8ωρο

  ➔ χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ~ Εκθετική κατανομή $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ με $\lambda = \frac{16}{8} = 2$ αυτ./ώρα

- σ.π.π. ➔ $\varphi(t) = 2e^{-2t}$

α) $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ ώρα $= \frac{1}{16}$ 8ωρα

63

Άσκηση 39

β) 1ος τρόπος:

$$P(T > 2) = 1 - P(T \le 2) = 1 - \int_0^2 2e^{-2t} dt = 1 - 2 \left. \frac{e^{-2t}}{-2} \right|_0^2 =$$

$$= 1 + \left. e^{-2t} \right|_0^2 = 1 + e^{-4} - 1 = e^{-4} = 0{,}0183 \quad (\text{ή} \quad 1{,}83\%)$$

ή κατ'ευθείαν από $\boxed{P(T \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \left(\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \right)}$

ως $P(T \le 1) = 1 - e^{-4 \cdot 1}$ όπου t = 1 δίωρο και λ=4 αυτ./2ωρο

ή $P(T \le 2) = 1 - e^{-2 \cdot 2}$ όπου t = 2 ώρες και λ=2 αυτ./ώρα

64

Άσκηση 39

β) 2ος τρόπος:

Αφού λ = 2 αυτ./ώρα ή 4 αυτ./2 ώρες ➔

ο αριθμός αφίξεων αυτοκινήτων ανά 2 ώρες (X) ~ Poisson με μέση τιμή λ=4 αυτ./2 ώρες

$$P(x = 0) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = 0{,}0183$$

65

Άσκηση 41

41. Αν θεωρήσουμε ότι ένας πληθυσμός ακολουθεί κανονική κατανομή με μ=50 και σ=4, τότε να υπολογιστούν:

α) η πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει τιμές $x > 55$.

β) η πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει τιμές $47 \le x \le 54$.

γ) η τιμή x_0 της μεταβλητής X, για την οποία τιμή x_0 ισχύει ότι το 35% των τιμών της μεταβλητής X είναι μεγαλύτερο από αυτήν.

66

Άσκηση 41 (α)

$\mu = 50$, $\sigma = 4$

$$P(x > 55) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{55-50}{4}\right) =$$
$$= P(z > 1{,}25) = 1 - P(z \le 1{,}25) =$$
$$= 1 - 0{,}8943 = 0{,}1057 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(x > 55) = \underline{0{,}1057}$$

67

Άσκηση 41 (β)

$$P(47 \le x \le 54) = P\left(\frac{47-50}{4} \le \frac{x-\mu}{\sigma} \le \frac{54-50}{4}\right) =$$
$$= P(-0{,}75 \le z \le 1) = P(z \le 1) - P(z \le -0{,}75) =$$
$$= P(z \le 1) - P(z > 0{,}75) =$$
$$= P(z \le 1) - [1 - P(z \le 0{,}75)] =$$
$$= 0{,}8413 - 1 + 0{,}7734 = \underline{0{,}6147}$$

68

Άσκηση 41 (γ)

$$P(x > x_o) = 0{,}35 \Rightarrow P(z > z_o) = 0{,}35 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - P(z \le z_o) = 0{,}35 \Rightarrow P(z \le z_o) = 0{,}65 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_o = \underline{0{,}385}$$

$$z_o = \frac{x_o - \mu}{\sigma} = 0{,}385 \Rightarrow \frac{x_o - 50}{4} = 0{,}385 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_o = 4 \cdot 0{,}385 + 50 \Rightarrow x_o = 51{,}54$$

69

Άσκηση 44

44. Η διάμετρος των αξόνων ορισμένου τύπου είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με την ονομαστική και τυπική απόκλιση σ = 20 μm. Να υπολογιστεί το ποσοστό των παραγομένων αξόνων με διάμετρο που υπερβαίνει την ονομαστική κατά 50 μm ή περισσότερο.

70

Άσκηση 44

$$P(x > \mu_{ov} + 50) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{\mu_{ov} + 50 - \mu_{ov}}{\sigma}\right) =$$
$$= P\left(z > \frac{\mu_{ov} + 50 - \mu_{ov}}{20}\right) = P\left(z > \frac{50}{20}\right) = P(z > 2{,}5) =$$
$$= 1 - P(z \le 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

- Γενικά:
  - $P(z > 2) = 1 - P(z \le 2)$
  - $P(z < -1) = P(z > 1) = 1 - P(z \le 1)$
  - $P(z \ge -5) = P(z \le 5)$

71

Άσκηση 45

45. Σε ένα κονσερβοποιείο η πλήρωση των κουτιών κονσέρβας γίνεται αυτόματα με μέση τιμή περιεχομένου 350 γραμμάρια και τυπική απόκλιση 10 γραμμάρια.

α) Αν υποτεθεί ότι το περιεχόμενο (καθαρό βάρος της κονσέρβας) ακολουθεί κανονική κατανομή, ποιο είναι το ποσοστό των κονσερβών που έχουν καθαρό βάρος μικρότερο των 330 γραμμαρίων;

β) Έστω επίσης, ότι η μέση ποσότητα που εμπεριέχεται σε κάθε κονσέρβα είναι δυνατόν να μεταβληθεί με κατάλληλη ρύθμιση της μηχανής, αλλά η τυπική απόκλιση παραμένει η ίδια με την προηγούμενη περίπτωση. Σε ποια μέση τιμή πρέπει να ρυθμιστεί η μηχανή, αν μόνο 2% από τα κουτιά κονσέρβας πρέπει να περιέχουν ποσότητα μικρότερη των 350 γραμμαρίων;

γ) Αν απαιτείται η μηχανή αυτή να είναι ρυθμισμένη, έτσι ώστε το 90% των πληρωμένων κονσερβών να περιέχουν ποσότητα, που κυμαίνεται μεταξύ ± 10 γραμμαρίων από την μέση ποσότητα, ποια είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη μεταβλητότητα του περιεχομένου κάθε κονσέρβας;

72

Άσκηση 45 (α)

$\mu = 350,\ \sigma = 10$

$$P(X < 330) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{330-350}{10}\right) =$$
$$= P(Z < -2) = P(Z > 2) =$$
$$= 1 - P(Z \le 2) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 =$$
$$= 0{,}0228$$

73

Άσκηση 45 (β)

η «καμπάνα» δεξιά

$$P(X < 350) = 0{,}02 \Rightarrow P\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma} < \frac{350-\mu_1}{10}\right) = 0{,}02$$
$$P(Z < -z_1) = 0{,}02 \Rightarrow P(Z > z_1) = 0{,}02 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - P(Z < z_1) = 0{,}02 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(Z < z_1) = 0{,}98 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_1 = 2{,}054$$

Άρα $-z_1 = -2{,}054 = \dfrac{350-\mu_1}{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu_1 \cdot 350 = +20{,}54 \Rightarrow \mu_1 = 370{,}54$$

74

Άσκηση 45 (γ)

Πρέπει το 90% των κονσερβών να είναι μεταξύ μ-10 και μ+10

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{\mu-10-\mu}{\sigma} = -\frac{10}{\sigma} \\ z_2 &= \frac{\mu+10-\mu}{\sigma} = \frac{10}{\sigma} \end{aligned}\right\} \text{ και } P[(\mu-10) \le x \le (\mu+10)] = 0{,}90 \Rightarrow$$

$$P\left[\overset{z_1}{-\frac{10}{\sigma}} \le z \le \overset{z_2}{\frac{10}{\sigma}}\right] = 0{,}90 \Rightarrow P\left[z \le \frac{10}{\sigma}\right] - P\left[z < -\frac{10}{\sigma}\right] = 0{,}90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[z \le \frac{10}{\sigma}\right] - \left(1 - P\left[z \le \frac{10}{\sigma}\right]\right) = 0{,}90 \Rightarrow 2P\left[z \le \frac{10}{\sigma}\right] = 1{,}9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[z \le \frac{10}{\sigma}\right] = 0{,}95 \Rightarrow \frac{10}{\sigma} = 1{,}645 \Rightarrow \sigma = \frac{10}{1{,}645} \Rightarrow \sigma = 6{,}079$$

ή $\underline{\sigma^2 = 36{,}95}$

75

Άσκηση 46

46. Η κατανομή των ημερομισθίων των εργατών μίας βιομηχανίας, που απασχολεί 1200 εργάτες, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ=20 € και τυπική απόκλιση σ=3,6 €. Να υπολογιστούν:

α) Ο αριθμός των εργατών, που έχουν ημερομίσθιο μεγαλύτερο από 27,2 €.

β) Ο αριθμός των εργατών, που έχουν ημερομίσθιο μέχρι 16,4 €.

γ) Το ημερομίσθιο x_0, μέχρι του οποίου αμείβεται το 60% των εργατών.

76

Άσκηση 46 (α)

$$P(X > 27{,}20) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{27{,}20-20{,}00}{3{,}60}\right)$$
$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2) =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Άρα $0{,}0228 \cdot 1200 = 27{,}3 \simeq 27$ εργάτες

77

Άσκηση 46 (β)

$$P(X \le 16{,}40) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{16{,}40-20{,}00}{3{,}60}\right)$$
$$= P(z \le -1) = P(z > 1) = 1 - p(z \le 1) =$$
$$= 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

Άρα $0{,}1587 \cdot 1200 = 190{,}44 \simeq 190$ εργάτες

78

Άσκηση 46 (γ)

$$P(X \le x_o) = 0{,}6 \Rightarrow P(z \le z_o) = 0{,}6$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0{,}25) = 0{,}5987 \\ \Phi(0{,}26) = 0{,}6026\end{array}\right\} \Phi(0{,}2533) = 0{,}6$$

$0{,}26 - 0{,}25 = +0{,}01 \quad 0{,}6026 - 0{,}5987 = +0{,}0039$
x; $\quad 0{,}6 - 0{,}5987 = 0{,}0013$
$x = 0{,}01 \cdot 0{,}0013 / 0{,}0039 = 0{,}0033$
Άρα $z = 0{,}25 + 0{,}0033 = 0{,}2533$

$$z_o = 0{,}2533 \Rightarrow \frac{x_o - 20{,}00}{3{,}60} = 0{,}2533 \Rightarrow$$

$$x_o = \mu + z_o\sigma = 20{,}00 + 3{,}60 \cdot 0{,}2533 = 20{,}91\ €$$

79

Άσκηση 48

48. Οι μετρήσεις ενός πειράματος έχουν χαθεί. Είναι όμως γνωστό ότι το 80% αυτών είχαν τιμή μικρότερη ή ίση του 5 και το 25% μεγαλύτερη του 2. Να βρεθεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αυτών, αν είναι γνωστό ότι αυτές ακολουθούν την κανονική κατανομή.

80

Άσκηση 48

$$P(x \le 5) = 0{,}8 \Rightarrow P(z \le z_1) = 0{,}8$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0{,}84) = 0{,}7995 \\ \Phi(0{,}85) = 0{,}8023\end{array}\right\} \Phi(0{,}842) = 0{,}8$$

για $\uparrow$ 0,0028 $\quad \uparrow$ z 0,01
για $\uparrow$ 0,005 $\quad$;

$$x = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}0005}{0.0028} = 0{,}001786$$

$$z = 0{,}84 + 0{,}001786 \approx 0.842$$

άρα $z_1 = 0{,}842 \Rightarrow \dfrac{5-\mu}{\sigma} = 0{,}842 \quad (1)$

81

Άσκηση 48

- Ομοίως:

$$P(x > 2) = 0{,}25 \Rightarrow P(x \le 2) = 0{,}75 \Rightarrow P(z \le z_2) = 0{,}75$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(0{,}67) = 0{,}7486 \\ \Phi(0{,}68) = 0{,}7517\end{array}\right\} \Phi(0{,}675) = 0{,}75$$

άρα $z_2 = 0{,}675 \Rightarrow \dfrac{2-\mu}{\sigma} = 0{,}675 \quad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{array}{l}\mu = 10{,}1257 \\ \sigma = 17{,}964\end{array}$$

82

Άσκηση 52

52. Τυχαίο δείγμα τριών εξαρτημάτων λαμβάνεται από παρτίδα 70 εξαρτημάτων. Αν 6 από τα 70 εξαρτήματα της παρτίδας είναι ελαττωματικά, να υπολογιστεί η πιθανότητα κανένα από τα τρία εξαρτήματα του δείγματος να μην είναι ελαττωματικό.

83

Άσκηση 52

- Δίνεται ότι n = 3, N = 70, M = 6 και x = 0
- Επειδή N μικρό, οι έλεγχοι είναι εξαρτημένοι, άρα ...
- ... το πλήθος των εξαρτημάτων, X, που είναι ελαττωματικά ακολουθεί την **υπεργεωμετρική** κατανομή
- Ζητώ την P(X = 0) όπου

$$P(X) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

84

Άσκηση 52

$$P(X=0)=\frac{\binom{M}{0}\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{6}{0}\binom{70-6}{3}}{\binom{70}{3}}=\frac{\frac{6!}{0!(6-0)!}\frac{64!}{3!(64-3)!}}{\frac{70!}{3!(70-3)!}}=0{,}761$$

- Αλλιώς:
  - P_1: η πιθανότητα το 1ο εξάρτημα να μην είναι ελατ/κό ➔ 64/70
  - P_2: η πιθανότητα το 2ο εξάρτημα να μην είναι ελατ/κό ➔ 63/69
  - P_3: η πιθανότητα το 3ο εξάρτημα να μην είναι ελατ/κό ➔ 62/68
- Η πιθανότητα και τα 3 να μην είναι ελατ/κα:

$$P=P_1\cdot P_2\cdot P_3=\frac{64}{70}\frac{63}{69}\frac{62}{68}=0{,}761$$

85

Άσκηση 53

53. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\varphi(x) = \theta e^{-\theta(x-10)},\ x > 10$$

α) Με βάση τις παρατηρήσεις:

15 - 12 - 18 - 20 - 24 - 11 - 26 - 17 - 10 - 21 - 19 - 23

να προσδιοριστεί η παράμετρος θ με την μέθοδο των ροπών.

β) Να αποδειχθεί ότι η φ(x) είναι όντως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η X να πάρει τιμή μικρότερη από 20.

86

Άσκηση 53(α)

Όπως στο παράδειγμα 4.1 του Ψωινού θα υπολογίσουμε τη ροπή 1ης τάξης ως προς x_0=0 τόσο του πληθυσμού, όσο και του δείγματος. Συγκεκριμένα η ροπή 1ης τάξης ως προς x_0=0 του πληθυσμού είναι:

$$\mu_1' = \int_{10}^{+\infty} x\theta e^{-\theta(x-10)}dx$$

87

Άσκηση 53(α)

$$E(X)=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{10}^{+\infty} x\theta e^{-\theta(x-10)}dx=\theta\int_{10}^{+\infty} xe^{-\theta(x-10)}dx=$$

$$=\theta\left(\left[-\frac{1}{\theta}xe^{-\theta(x-10)}\right]_{10}^{+\infty}-\int_{10}^{+\infty}\left(-\frac{1}{\theta}\right)e^{-\theta(x-10)}dx\right)=$$

$$=\theta\left(\frac{1}{\theta}10+\frac{1}{\theta}\left[\frac{e^{-\theta(x-10)}}{-\theta}\right]_{10}^{+\infty}\right)=$$

$$=10-\frac{1}{\theta}(-1)\quad \text{άρα}\quad E(X)=10+\frac{1}{\theta}$$

88

Άσκηση 53(α)

- 1η ροπή του δείγματος:

$$m_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{15+12+18+20+24+11+26+17+10+21+19+23}{12}$$

δηλαδή $m_1 = 18$

- Εξισώνοντας τις δυο ροπές προκύπτει:

$$m_1=E(X)\Leftrightarrow 18=10+\frac{1}{\theta}\Leftrightarrow \boxed{\hat{\theta}=\frac{1}{8}}$$

89

Άσκηση 53(β)

Για να είναι η φ(x) όντως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα πρέπει το ακόλουθο ολοκλήρωμα να είναι ίσο με τη μονάδα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-10)}{8}}}{8}dx=1$$

90

Άσκηση 53(β)

- Είναι:

$$\int_{10}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-10)}{8}}}{8}dx=\int_{10}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{8}}e^{\frac{10}{8}}}{8}dx=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\int_{10}^{+\infty}e^{-\frac{x}{8}}dx=$$

$$=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\frac{e^{-\frac{x}{8}}}{-\frac{1}{8}}\Bigg|_{10}^{+\infty}=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\left(0-\frac{e^{-\frac{10}{8}}}{-\frac{1}{8}}\right)=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\frac{e^{-\frac{10}{8}}}{\frac{1}{8}}=1$$

91

Άσκηση 53(γ)

Η πιθανότητα να πάρει η X τιμή μικρότερη από 20 υπολογίζεται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$\int_{10}^{20}\frac{e^{-\frac{(x-10)}{8}}}{8}dx=\int_{10}^{20}\frac{e^{-\frac{x}{8}}e^{\frac{10}{8}}}{8}dx=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\int_{10}^{20}e^{-\frac{x}{8}}dx=$$

$$=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\frac{e^{-\frac{x}{8}}}{-\frac{1}{8}}\Bigg|_{10}^{20}=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\left(\frac{e^{-\frac{20}{8}}}{-\frac{1}{8}}-\frac{e^{-\frac{10}{8}}}{-\frac{1}{8}}\right)=\frac{e^{\frac{10}{8}}}{8}\frac{e^{-\frac{20}{8}}-e^{-\frac{10}{8}}}{-\frac{1}{8}}=$$

$$e^{\frac{10}{8}}\cdot\left(e^{-\frac{10}{8}}-e^{-\frac{20}{8}}\right)=1-e^{\frac{10}{8}}e^{-\frac{20}{8}}=1-e^{\frac{10}{8}-\frac{20}{8}}=1-e^{-\frac{10}{8}}=1-\frac{1}{e^{\frac{10}{8}}}=0{,}713$$

92