$\boxed{1.1}$ $y_{t+1} = \frac{1}{4} y^2_t - \frac{1}{2}$, (1) $\boxed{y_0 = 4}$

i) Γ.Λ

ii) Σταθ.

iii) ευστάθεια;

Λύση $a = 1/4$, $\beta = -1/2$

$$Y_t = C(1/4)^t + \left(\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} \right)$$

$$Y_t = \underline{C}(1/4)^t - \frac{2}{3} \Rightarrow Y_t = \frac{14}{3}(1/4)^t - \frac{2}{3}$$

Για $t=0$: $4 = C - \frac{2}{\cancel{3}} \Rightarrow 12 = 3C - 2 \Rightarrow C = \frac{14}{3}$

ii) Θέτω με $y = y_{t+1} = y_t$. Άρα στην (1)

$$y = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2 \pm 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \underline{1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

iii) $F(y) = \frac{1}{4} \cdot y^2 - \frac{1}{2}$, $F'(y) = \frac{y}{2}$

$(c)' = 0$

$(x^\nu)' = \nu x^{\nu - 1}$

Για $y = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}$: $F'(y) = \left| \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right| > 1$

άρα ασταθές το σημείο ισορροπίας

Για $y = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}$: $F'(y) = \left| \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right| < 1$

Επειδή $-1 < \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) < 0$ $\quad -1 \quad -0.11 \quad 0$

Είναι ευσταθές με ταλαντώσεις

1.5 $y_{t+1} - y_t = 5 \Rightarrow y_{t+1} = y_t + 5$

Γ.Λ; $a = 1, \beta = 5$

άρα $y_t = c + 5t$

$\beta^x \cdot \beta^y = \beta^{x+y}$

$\frac{\beta^x}{\beta^y} = \beta^{x-y}$

$\beta^{-y} = \frac{1}{\beta^y}$

1.4 $y_{t+1} = y_t^{3/4}$, (1)

i) Σταθ;

ii) Ευστάθεια;

Θέτω $y = y_{t+1} = y_t$

άρα στην (1): $y^1 = y^{3/4} \Rightarrow y^{3/4} \cdot (y^{1/4} - 1) = 0$

$y = 0$ ή $y = 1$

$F(y) = y^{\frac{3}{4}}$, $F'(y) = \frac{3}{4} y^{-1/4}$

$\longrightarrow \left(\frac{1}{0}\right)$

Για $y=0$: $F'(y) = \frac{3}{4} \frac{1}{y^{1/4}}$, απειρίζεται

άρα ασταθές.

Για $y=1$: $F'(y) = \left|\frac{3}{4} \cdot 1\right| < 1$

και $1 > \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$ ευσταθές και σύγκλιση με μονοτονία

Ερώτημα 3Α ii) $y_{t+1} = y_t^2 - 1$, (1)

i) Θέτω $y = y_{t+1} = y_t$, άρα στην (1)

$y = y^2 - 1 \Rightarrow y^2 - y - 1 = 0$, $\Delta = 1 - 4 \cdot 1(-1) = 5$

$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

ii) $F(y) = y^2 - 1$, $F'(y) = 2y$

Για $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$F'(y) = \left| \cancel{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{\cancel{2}}\right) \right| > 1$

άρα ασταθές

Για $y = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $f'(y) = \left| 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \right| > 1$

άρα ασταθές και αυτό το σημείο

$$a y_{t+2} \pm \beta y_t \pm \gamma y_t = \underline{x}$$

1. <u>Γ.Λ</u>; ομογενή λύση + σταθερό (Αν υπάρχει)

$= $ τη ομογενής

$\underline{2)}$ $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t \Big| = 8 \, , \, 1$

i. $r>j$ Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 - 5r + 1 = 0 \, , \quad \Delta = 25 - 4 = 21 > 0$$

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$y_t = \overbrace{\underbrace{c_1\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^t + c_2\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^t}_{\text{ομογενή}} - \frac{8}{3}}^{\text{μη ομογενής}}$$

Θέτω $y = y_{t+2} = y_{t+1} = y_t$

άρα από την 1 έχω: $y - 5y + y = -8 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{8}{3}}$

Επειδή $\frac{5+\sqrt{21}}{2} > 1$ ασταθές

το σημείο ισορροπίας

1.6] $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 5$, $\bar{y} = \frac{5}{2}$

Να βρεθεί η Γ.Λ; $r^2 - 2r + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ $\qquad \sqrt{\Delta}\, i$

$$\boxed{k = -\frac{\beta}{2a}, \quad m = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$k = 1$, $m = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}\, i}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}\, i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\, i$$

$$R = \sqrt{k^2 + m^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$\theta = \cos(K/R) = \cos(1/\sqrt{3})$$

$$y_t = \underbrace{\underbrace{(\sqrt{3})^t\left(c_1 \cdot \cos(t \cdot \cos(1/\sqrt{3})) + c_2 \cdot \sin(t \cdot \cos(1/\sqrt{3}))\right)}_{\text{ομογενή}} + \frac{5}{2}}_{\text{μη ομογενή}}$$

Επειδή $R = |\sqrt{3}| > 1$ το σταθερό σημείο είναι ασταθές.

Ερώτημα 3 Β $\quad \overset{\alpha x^2}{y_{t+2}} - \overset{\beta x}{y_{t+1}} + \overset{\gamma}{\frac{1}{4} y_t} = 10, \quad (1)$

i) Τ.Ν;

ii) Να εξεταστεί το σταθ σημείο

Λύση/ Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 - r + \frac{1}{4} = 0, \quad \Delta = 1 - \cancel{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cancel{4}} = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

θέτω $\bar{y} = y_{t+2} = y_{t+1} = y_t$

Άρα στην (1): $\cancel{\bar{y}} - \cancel{\bar{y}} + \frac{1}{4}\bar{y} = 10 \Leftrightarrow$

$$\bar{y} = 40$$

$$y_t = C_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^t \cdot t + 40$$

$\Delta = 0$: Επειδή $r_1 = r_2 = \frac{1}{2} < 1$, το σταθερό σημείο είναι ευσταθές

Ερώτημα 3Β Φεβ 22

$$2y_{t+2} - y_{t+1} + \frac{1}{2}y_t = 5 \quad (1), \quad \bar{y}$$

i) Γ.Λ.: $2r^2 - r + \frac{1}{2} = 0$ $\quad \Delta = 1 - 4 \cdot \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) = -3 < 0$

$$k = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{4}, \quad m = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$R = \sqrt{k^2 + m^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = 1/2$$

$$\theta = \cos(k/R) = \cos(1/4 / 1/2) = \cos(1/2) = \frac{\pi}{3}$$

θέτω με $\bar{y} = y_{t+2} = y_{t+1} = y_t$

Άρα $2y - y + \frac{1}{2}y = 5 \Rightarrow \frac{3}{2}\bar{y} = 5 \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{10}{3}}$

$$y_t = (1/2)^t \left(C1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right) + C2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right) \right) + \frac{10}{3}$$

$\Delta < 0$: Επειδή $|R| = |1/2| \leq 1$

Το σταθερό σημείο είναι ευσταθές

8) $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 4y_t = 4$ όταν $y_0 = 2$ και $y_1 = 4$ να βρεθεί η γενική λύση;

$r^2 - 4r + 4 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$r_{1,2} = \frac{-\beta}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$\bar{y} = 4$ $\quad y_t = C_1 2^t + C_2 \cdot t\, 2^t + 4$

Για $t=0$: $2 = C_1 + 4 \Rightarrow \boxed{C_1 = -2}$

Για $t=1$: $4 = 2C_1 + 2C_2 + 4 \Rightarrow \boxed{C_2 = 2}$

$$y_t = -2 \cdot 2^t + 2 \cdot t \cdot 2^t + 4$$

$$y_t = 2^t(-2 + 2t) + 4$$

$\boxed{1.6}$ $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 3y_t = 5$, (1)

$\bar{y} - 4\bar{y} + 3\bar{y} = 5$ αδύνατο

$r^2 - 4r + 3 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$

$r_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$ 3, 1

Στάσιμο σημείο

$y_t = A_0 + A_1 t$

$y_{t+1} = A_0 + A_1(t+1)$

$y_{t+2} = A_0 + A_1(t+2)$

$\cancel{A_0} + \cancel{A_1 t} + 2A_1 - \cancel{4A_0} - \cancel{4A_1 t} - 4A_1 + \cancel{3A_0} + \cancel{3A_1 t} = 5 \iff$

$-2A_1 = 5$

$\boxed{A_1 = -\frac{5}{2}}$

$y_t = C_1 3^t + C_2 - \frac{5}{2} t$

$= x \cdot t \qquad y_t = A_0 + A_1 t$

$= x \cdot e^t \qquad y_t = A_0 + A_1 e^t$

$= x \ln e^t \qquad y_t = A_0 + \ln e^t$

$\underline{\qquad\qquad\qquad} = X$

$\underbrace{x A_0 \pm y A_1}_{} \underbrace{\pm 2 A_1 t = x t}_{}$

$X A_0 \pm y A_1 = 0 \qquad \pm A_1 t = x t \qquad A_0, A_1;$