Π.χ1 $\quad Max\ F(x) = -3x_1 + \frac{x_2^2}{2}$

$$\upsilon.\pi \quad x_1^2 + x_2^2 \le 1, \quad x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ $\Rightarrow$ Max F κυρτή άρα δεν χρησιμοποιώ το ΚΚΤ. Γνωρίζουμε ότι βέλτιστο θα είναι σε ακρότατο,

$$Max\ F \quad \upsilon.\pi \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

$$L = -3x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow -3 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow x_2 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$

<u>Ακρότατα:</u> $(1,0)$ και $(0,1)$ και $(0,0)$

$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ \lambda = 3/2$
$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ \lambda = -1/2$
$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \lambda = 0$

$$|H^*| = \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 & 2x_1 \\ 0 & 1+2\lambda & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$F_{11} = 0 \quad F_{12} = 0$
$F_{21} = 0 \quad F_{22} = 1$
$g_1 = 2x_1,\ g_2 = 2x_2$
$g_{11} = 2,\ g_{12} = 0,\ g_{21} = 0,\ g_{22} = 2$

i) $x_1=1,\ x_2=0,\ \lambda=3/2$: Ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$|H^*| = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(H^*) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot 4) = -16 < 0$$

άρα το $x_1=1, x_2=0$ τ.Ε

ii) $x_1=0,\ x_2=1,\ \lambda=-1/2$: Ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$|H^*| = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(H^*) = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\,(0 \cdot 0 - 2 \cdot 2) = 4 > 0$$

τ.μ

iii) $x_1=x_2=0,\ \lambda=0$: $|H| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Επειδή δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο για όλα τα σημεία τότε δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Συνεπώς το μέγιστο θα είναι στο $(1,0)$
Αν είχαμε παραπάνω από ένα μέγιστα τότε θα κρατούσαμε αυτό που θα έδινε τη μέγιστη τιμή στην F
Αντίστοιχα για τα υποψήφια ελάχιστα αν η F ήταν min.

Εφόσον γνωρίζω ότι το βέλτιστο θα είναι σε ακρότατα το μόνο που μένει είναι να βρω τα ακρότατα και τον εσσιανό. Πάω στο σύστημα και για κάθε x_1, x_2 βρίσκω το λ με αντικατάσταση.

Θέμα 4 Ιούνιος

A) $\quad Max\ F(x) = x_1^2 + x_2^2$

$u.\pi \quad 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 \leq 1,\ x_1 \geq 0.5,\ x_2 \geq 0.$

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Max } F \text{ κυρτή δεν μπορώ να χρησιμοποιήσω KKT.}$$

Το βέλτιστο θα βρίσκεται σε ακρότατο.

Έχω να επιλύσω το παρακάτω πρόβλημα

$$Max\ F(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad u.\pi \quad 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 1 = 0$$

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 2x_1 + 4\lambda x_1 - \lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 2x_2 + 4\lambda x_2 - \lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 1 = 0$$

Ακρότατα: $(0.5, 0),\ \lambda = -1/2$

$(1/\sqrt{2}, 0),\ \lambda = -1/2$

$(0, 1/\sqrt{2}),\ \lambda = 0$

$$|H| = \begin{bmatrix} 2+4\lambda & -\lambda & 4x_1 - x_2 \\ -\lambda & 2+4\lambda & 4x_2 - x_1 \\ 4x_1 - x_2 & 4x_2 - x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$F_{11} = 2,\ F_{12} = 0$

$F_{21} = 0,\ F_{22} = 2$

$g_1 = 4x_1 - x_2,\ g_{11} = 4,\ g_{12} = -1$

$g_2 = 4x_2 - x_1,\ g_{21} = -1,\ g_{22} = 4$

$x_1=0.5,\ x_2=0,\ \lambda=-1/2 \qquad |H^*| = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(H^*) = -1/2 \begin{vmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix}$$

$$= -1/2\left(1/2 \cdot 0 - (2)(-1/2)\right) + 2(-1/4)$$

$$= -1/2 \qquad\qquad -1/2$$

$$= -1 < 0 \ \text{τ.ε}$$

$x_1=1/\sqrt{2},\ x_2=0,\ \lambda=-1/2 \qquad |H^*| = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 4/\sqrt{2} \\ 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(H^*) = -1/2 \begin{vmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} + 4/\sqrt{2} \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 4/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= -1/2(0+2) + 4/\sqrt{2}\,(1/2)$$

$$= -1 + \frac{4}{2\sqrt{2}} = -1 + \frac{2}{\sqrt{2}} > 0 \ \text{άρα τ.μ}$$

$x_1=0,\ x_2=1/\sqrt{2},\ \lambda=0 \qquad |H^*| = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 4/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(H^*) = 2 \begin{vmatrix} 2 & 4/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(-\frac{16}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -16 - 1 = -17 < 0 \quad \text{τ.ε}$$

Άρα τ.μ το $x_1 = 1/\sqrt{2},\ x_2=0$.

Θέμα 4 Σεπτεμβρίου

A) $\text{Max } F(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - x_1x_2$

υ.π $x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1$

Εξέταση ως προς την κυρτότητα:

$$\nabla^2 F = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Max } F \text{ κυρτή άρα δεν}$$

μπορώ να χρησιμοποιήσω το KKT άρα βέλτιστο σε ακρότατο.

$$L = 2x_1^2 + 4x_2^2 - x_1x_2 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 4x_1 - x_2 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow 8x_2 - x_1 + 4\lambda x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0$$

Ακρότατα: $x_1 = 1, x_2 = 0$ κλπ όπως πριν...

$x_1 = -1, x_2 = 0$

$x_2 = 1/\sqrt{2}, x_1 = 0$

$x_2 = -1/\sqrt{2}, x_1 = 0$