6^o Φροντιστήριο Μαθηματική Ανάλυση

Σπύρος Χαλκίδης Ε.ΔΙ.Π.

Νοέμβριος 2021

1 Ασκήσεις πάνω σε θετικά/αρνητικά ορισμένους/ημί-ορισμένους/μη ορισμένους πίνακες, βελτιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, παράγωγο πεπλεγμένης συνάρτησης

1.1 1^η Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-ορισμένος ή μη ορισμένος με δύο μεθόδους.

$|H_1| = f_{11} = 1 > 0.$

$|H_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0$

$|H_3| = 10\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 > 0$

Συνεπώς ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

2^{oc} τρόπος: Εξετάζοντας τις ιδιοτιμές:

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$

$(10-\lambda)((1-\lambda)(4-\lambda)-1) = (10-\lambda)(4-5\lambda+\lambda^2-1) = (10-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+3)$

Συνεπώς $|A-\lambda I| = 0 \iff \lambda^2-5\lambda+3 = 0$ ή $10-\lambda = 0$

Η συνθήκη $10-\lambda = 0$ δίνει $\lambda = 10 > 0$. Η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta = 25-12 = 13$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ οι οποίες είναι και οι δύο θετικές. Συνεπώς αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.

1.2 2^{η} Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-ορισμένος ή μη ορισμένος.
$|H_1| = f_{11} = -5 < 0.$
$|H_2| = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 19 > 0$
$|H_3| = -1 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -19 < 0$
Συνεπώς ο πίνακας είναι αρνητικά ορισμένος.

1.3 3^{η} Άσκηση

Να χαρακτηριστεί ο πίνακας A= $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ως θετικά/αρνητικά ορισμένος/ημί-ορισμένος ή μη ορισμένος.
$|H_1| = f_{11} = -1 < 0.$
$|H_2| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0$
Συνεπώς ο πίνακας είναι μη ορισμένος.

1.4 4^{η} Άσκηση

Να εξεταστεί ως προς τα τοπικά μέγιστα/ελάχιστα η συνάρτηση $y = -4x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_2 - x_3$.
Βρίσκουμε πρώτα τα στάσιμα σημεία:
$f_1 = 0 \iff -8x_1 = 0 \iff x_1 = 0.$
$f_2 = 0 \iff -4x_2 - 1 = 0 \iff x_2 = -\frac{1}{4}.$
$f_3 = 0 \iff -2x_3 - 1 = 0 \iff x_3 = -\frac{1}{2}.$
Συνεπώς το μοναδικό στάσιμο σημείο της συνάρτησης είναι το $x = (0, -1/4, -1/2)$.
Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης:
$f_{11} = -8, f_{12} = 0, f_{13} = 0.$
$f_{21} = 0, f_{22} = -4, f_{23} = 0.$
$f_{31} = 0, f_{32} = 0, f_{33} = -2.$
Εξετάζουμε τις ορίζουσες των ηγετικών κύριων ελλασσόνων της Εσσιανής μήτρας:
$|H_1| = f_{11} = -8 < 0.$
$|H_2| = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 32 > 0.$
$|H_3| = -2 \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -64 < 0.$
Οι ηγετικές κύριες ελλάσονες περιττής τάξης είναι αρνητικές και οι άρτιας τάξης θετικές. Συνεπώς έχουμε τοπικό μέγιστο στο $x = (0, -1/4, -1/2)$.

1.5 5^{η} Άσκηση

Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $F(x,y) = 4x^2 - 2y^2 + 4$ στο σημείο $(1,1)$.
$F_x(x,y) = 8x$.
$F_y(x,y) = -4y$.
Κλίση εφαπτομένης: $-\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = 2$.

1.6 6^{η} Άσκηση

Να υπολογίσετε την κλίση των ισοσταθμικών καμπυλών της $f(x) = x_1 - 2x_1x_2 - x_2$.
$f_{x_1}(x) = 1 - 2x_2$
$f_{x_2}(x) = -2x_1 - 1$
Κλίση ισοσταθμικών καμπυλών: $-\frac{f_{x_1}(x)}{f_{x_2}(x)} = -\frac{2x_2-1}{2x_1+1}$.