

## Ασκήσεις (2)

### Άσκηση 1

Υποθέστε ότι συγκρίνουμε την υλοποίηση της ταξινόμησης με εισαγωγή και της ταξινόμησης με συγχώνευση στον ίδιο υπολογιστή. Για εισόδους μεγέθους  $n$ , η ταξινόμηση με εισαγωγή απαιτεί  $8n^2$  βήματα ενώ η ταξινόμηση με συγχώνευση  $64n \lg n$ . Για ποιες τιμές του  $n$  ταξινόμηση με εισαγωγή υπερτερεί της ταξινόμησης με συγχώνευση; (Χρησιμοποιήστε, αν κρίνετε σκόπιμο, όποιο υπολογιστικό πρόγραμμα θέλετε.)

### Άσκηση 2

- i) Αν  $f(n) = 3n^2 - n + 4$  και  $g(n) = n \log n + 5$ , δείξτε ότι  $f(n) + g(n) = O(n^2)$ .
- ii) Αν  $f(n) = \sqrt{n}$  και  $g(n) = \log n$ , δείξτε ότι  $f(n) + g(n) = O(\sqrt{n})$ .
- iii) Δείξτε ότι  $(n+a)^k = \Theta(n^k)$ , όπου  $a$  και  $k$  είναι πραγματικές σταθερές με  $k > 0$ .
- iv) Εξηγήστε αν είναι σωστοί οι εξής ισχυρισμοί:
  - α)  $2^{n+1} = O(2^n)$
  - β)  $2^{2n} = O(2^n)$

### Άσκηση 3

Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f(n)$  και  $g(n)$  πίνακα

| $f(n)$        | $g(n)$        |
|---------------|---------------|
| $10n$         | $n^2 - 10n$   |
| $n^3$         | $n^2 \log n$  |
| $n \log n$    | $n + \log n$  |
| $\log n$      | $\sqrt[k]{n}$ |
| $\ln n$       | $\log n$      |
| $\log(n+1)$   | $\log n$      |
| $\log \log n$ | $\log n$      |
| $2^n$         | $10^n$        |
| $n^m$         | $m^n$         |

εξηγήστε αν  $f(n) = O(g(n))$ , και αν  $g(n) = O(f(n))$ .

### Άσκηση 4

Λύστε κάθε μία από τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις

1.  $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 0, \\ aT(n-1) + O(1) & n > 0, \end{cases} \quad a > 1.$
2.  $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 0, \\ aT(n-1) + O(n) & n > 0, \end{cases} \quad a > 1.$
3.  $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1, \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + O(1) & n > 1, \end{cases} \quad a \geq 2.$
4.  $T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1, \\ aT(\lfloor n/a \rfloor) + O(n) & n > 1, \end{cases} \quad a \geq 2.$

## Άσκηση 5

Υπολογίστε αυστηρά ασυμπτωτικά  $O$  φράγματα για τους χρόνους εκτέλεσης των Προγραμμάτων 1.1, 1.2, 1.3, 2.5 και 2.6 (διαφάνειες (1) των παραδόσεων του μαθήματος).

## Άσκηση 6

**Αλγόριθμος:** Υπολογισμός κατά όρους της τιμής ενός πολυωνύμου

// Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει την τιμή ενός πολυωνύμου  $a[n]x^n + a[n-1]x^{n-1} + \dots + a[2]x^2 + a[1]x + a[0]$  με υπολογισμό κάθε όρου του πολυωνύμου ξεχωριστά, αρχίζοντας από τον  $a[0]$ , και προσθέτοντάς τον σε ένα συνολικό άθροισμα.]

//**Είσοδος:**  $n$  [ένας μη αρνητικός ακέραιος],

//  $a[0], a[1], a[2], \dots, a[n]$  [μια συστοιχία πραγματικών αριθμών],

//  $x$  [ένας πραγματικός αριθμός]

//**Εξοδος:** η τιμή `polyval` του πολυωνύμου.

```
polyval := a[0]
for i := 1 to n
    term := a[i]
    for j := 1 to i
        term := term · x
    polyval := polyval + term
```

- Έστω  $S(n)$  το πλήθος των προσθέσεων και πολλαπλασιασμών που πρέπει να πραγματοποιηθούν κατά την εκτέλεση του Αλγορίθμου για ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ . Εκφράστε το  $S(n)$  συναρτήσει του  $n$ .
- Εκφράστε την πολυπλοκότητα  $S(n)$  του Αλγορίθμου στον συμβολισμό  $O$ .

## Άσκηση 7

**Αλγόριθμος Horner**

// Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει την τιμή ενός πολυωνύμου  $a[n]x^n + a[n-1]x^{n-1} + \dots + a[2]x^2 + a[1]x + a[0]$  με διαδοχικές προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς, όπως φαίνεται στην παράσταση  $((\dots((a[n]x + a[n-1])x + a[n-2])x + \dots + a[2])x + a[1])x + a[0]$ .

//Σε κάθε βήμα, με αρχή το  $a[n]$ , η τρέχουσα τιμή της μεταβλητής `polyval` πολλαπλασιάζεται με  $x$  και ο επόμενος μικρότερος συντελεστής προστίθεται στη μεταβλητή.]

//**Είσοδος:**  $n$  [ένας μη αρνητικός ακέραιος]

// $a[0], a[1], a[2], \dots, a[n]$  [μια συστοιχία πραγματικών αριθμών],

// $x$  [ένας πραγματικός αριθμός]

//**Εξοδος:** η τιμή `polyval` του πολυωνύμου.

```
polyval := a[n]
for i := 1 to n
    polyval := polyval · x + a[n - i]
```

- Έστω  $M(n)$  το πλήθος των προσθέσεων και πολλαπλασιασμών που πρέπει να γίνουν κατά την εκτέλεση του Αλγορίθμου για ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ . Εκφράστε το  $M(n)$  συναρτήσει του  $n$ .
- Εκφράστε την πολυπλοκότητα  $M(n)$  του Αλγορίθμου στον συμβολισμό  $O$ .

- iii) Πώς συγκρίνεται η πολυπλοκότητα αυτή με την πολυπλοκότητα του Αλγορίθμου της Άσκησης 6;