Γιαννουτάκης Παναγιώτης

It1238@uom.edu.gr

It1238

Εισαγωγή στην Ανάλυση Αλγορίθμων

Ασκήσεις (1)

1) **i)** Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=0	$T_{fetch} + T_{store}$
i<n	$\left(2T_{fetch} + T_{<}\right) x\ (n+1)$
++i	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ n$
++k	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ n$

Σύνολο $T(n) = t_1 + t_2 n$

Όπου $t_1 = 3T_{fetch} + T_{store} + T_{<}$

Και $t_2 = 6T_{fetch} + 2T_{+} + 2T_{store} + T_{<}$

ii) Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=1	$T_{fetch} + T_{store}$
i<n	$\left(2T_{fetch} + T_{<}\right) x\ (\overline{\log_2 n} + 1)$
i*=2	$\left(2T_{fetch} + T_{*} + T_{store}\right) x\ \overline{\log_2 n}$
++k	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ \overline{\log_2 n}$

Σύνολο $T(n) = t_1 + t_2 \overline{\log_2 n}$

Όπου $t_1 = 3T_{fetch} + T_{store} + T_{<}$

Και $t_2 = 6T_{fetch} + T_{+} + T_{*} + 2T_{store} + T_{<}$

iii) Εντολή Χρόνος

i=n-1	$2T_{fetch} + T_{-} + T_{store}$
i!=0	$\left(2T_{fetch} + T_{<}\right) x \ (\overline{\log_2 n} + 1)$
i/=2	$\left(2T_{fetch} + T_{/} + T_{store}\right) x \ \overline{\log_2 n}$
++k	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x \ \overline{\log_2 n}$

Σύνολο $T(n) = \ t_1 + t_2 \overline{\log_2 n}$
Όπου $t_1 = 4T_{fetch} + T_{store} + T_{<} + T_{-}$
Και $t_2 = 6T_{fetch} + T_{+} + T_{/} + 2T_{store} + T_{<}$

iv) Εντολή Χρόνος

i=0	$T_{fetch} + T_{store}$
i<n	$\left(2T_{fetch} + T_{<}\right) x \ (n+1)$
++i	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x \ n$
I%2;==0	$\left(3T_{fetch} + T_{<} + T_{/}\right) x \ n$
++k	$2T_{fetch} + T_{+} + T\_store) \ x \ \overline{{}^{n}/_{2}}$

Αν το n είναι άρτιος αριθμός, θα κάνει $T(n) = t_1 n + \ t_2$ και αν είναι περιττός θα κάνει $T(n) = t_1 n + \ t_3$, όπου $t_1 = 8T_{fetch} + 2T_{<} + \frac{3}{2}T_{+} + \frac{3}{2}T_{store} + T_{/}$, και $t_2 = 3T_{fetch} + T_{<} + T\_store$ και $t_3 = 4T_{fetch} + T_{<} + \frac{1}{2}T_{+} + \frac{3}{2}T_{store}$.

v) Εντολή Χρόνος

i=0	$T_{fetch} + T_{store}$
i<n	$\left(2T_{fetch} + T_{<}\right) x \ (n+1)$
++i	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x \ n$
j=0	$\left(T_{fetch} + T_{store}\right) x \ n$
j<n	$(2T_{fetch} + T_{<}) \ x \ n(n+1)$
++j	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x \ n^2$
++k	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x \ n^2$

Σύνολο $T(n) = \ t_1 n^2 + t_2 n + \ t_3$
Όπου $t_1 = 6T_{fetch} + 2T_{+} + 2T_{store} + T_{<}$
Και $t_2 = 7T_{fetch} + 2T_{<} + 2T_{store} + T_{+}$
Και $t_3 = 3T_{fetch} + T_{store} + T_{<}$

vi) Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=0	$T_{fetch} + T_{store}$
i<n	$\left(2T_{fetch} + T_{<}\right) x\ (n+1)$
++i	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ n$
j=1	$\left(T_{fetch} + T_{store}\right) x\ n$
j<n	$(2T_{fetch} + T_{<})\ x\ (\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) + n)$
++j	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)$
++k	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)$

Από θεωρία αθροισμάτων βγαίνει ότι $\sum_{i=0}^{n-1}(n-i) = \sum_{i=0}^{n-1} n - \sum_{i=0}^{n-1} i = \sum_{i=0}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n} i = n\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} i = n(n-1+1) - \frac{n(n+1)}{2} = n^2 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

Οπότε ο συνολικός χρόνος θα είναι $T(n) = t_1 n^2 + t_2 n + t_3$
Όπου $t_3 = 3T_{fetch} + T_{store} + T_{<}$
Και $t_2 = 10T_{fetch} + \frac{5}{2}T_{<} + 3T_{store} + 2T_{+}$
Και $t_1 = 3T_{fetch} + T_{store} + \frac{1}{2}T_{<} + T_{+}$

vii) Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=0	$T_{fetch} + T_{store}$
i<n	$\left(2T_{fetch} + T_{<}\right) x\ (n+1)$
++i	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ n$
j=0	$\left(T_{fetch} + T_{store}\right) x\ n$
j<i*i	$(3T_{fetch} + T_{*} + T_{<})\ x\ (\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n)$
++j	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ \sum_{i=0}^{n-1} i^2$
++k	$\left(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store}\right) x\ \sum_{i=0}^{n-1} i^2$

Από θεωρία αθροισμάτων βγαίνει ότι $\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

Οπότε ο συνολικός χρόνος θα είναι $T(n) = t_1 n^3 + t_2 n^2 + t_3 n + t_4$
Όπου $t_4 = 3T_{fetch} + T_{store} + T_{<}$
Και $t_3 = \frac{55}{6}T_{fetch} + \frac{7}{6}T_{*} + \frac{4}{3}T_{+} + \frac{13}{6}T_{<} + \frac{7}{3}T_{store}$
Και $t_2 = \frac{7}{2}T_{fetch} + T_{+} + T_{store} + \frac{1}{2}T_{<}$
Και $t_1 = \frac{7}{3}T_{fetch} + \frac{2}{3}T_{+} + \frac{2}{3}T_{store} + \frac{1}{3}T_{<}$

2) i) Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=0	2
i<n	$3(n+1)$
++i	$4n$
++k	$4n$

Σύνολο $T(n) = 11n + 5$

ii) Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=1	2
i<n	$3(\overline{\log_2 n} + 1)$
i*=2	$4\,\overline{\log_2 n}$
++k	$4\,\overline{\log_2 n}$

Σύνολο $T(n) = 11\,\overline{\log_2 n} + 5$

iii) Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=n-1	4
i!=0	$3\,(\overline{\log_2 n} + 1)$
i/=2	$4\,\overline{\log_2 n}$
++k	$4\,\overline{\log_2 n}$

Σύνολο $T(n) = 11\,\overline{\log_2 n} + 7$

iv) Εντολή Χρόνος

Εντολή	Χρόνος
i=0	2
i<n	$3(n+1)$
++i	$4n$
I%2;==0	$5n$
++k	$4\,\overline{n/2}$

Αν το n είναι άρτιος αριθμός το σύνολο θα είναι T(n) = 14n+5. Άμα το n είναι περιττός αριθμός θα είναι T(n) = 14n+7

v) Εντολή	Χρόνος
i=0	2
i<n	$3(n+1)$
++i	$4n$
j=0	$2n$
j<n	$3n(n+1)$
++j	$4\,n^2$
++k	$4n^2$

Σύνολο $T(n) = \ 11n^2 + 12n + \ 5$

vi) Εντολή	Χρόνος
i=0	2
i<n	$3\ (n+1)$
++i	$4n$
j=1	$2n$
j<n	$3(\frac{n^2+n}{2} + n)$
++j	$4\ \frac{n^2+n}{2}$
++k	$4\ \frac{n^2+n}{2}$

Σύνολο $T(n) = \ \frac{11}{2}n^2 + \frac{35}{2}n + 5$

vii) Εντολή	Χρόνος
i=0	2
i<n	$3\ (n+1)$
++i	$4n$
j=0	$2n$
j<i*i	$5(\frac{2n^3+3n^2+n}{6} + n)$
++j	$4\,\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$
++k	$4\,\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

Σύνολο $T(n) = \frac{13}{3}n^3 + \frac{13}{2}n^2 + \frac{97}{6}n + 5$

3) Το πρόγραμμα για τον υπολογισμό του παραγοντικού με μη αναδρομικό τρόπο είναι το παρακάτω.

```
Unsigned int Factorial(unsigned int n)
{
    Unsigned int result = 1;
    For(unsigned int i=1; i<=n; i++) {
            Result *= I;
    }
    Return result;
}
```

Εντολή	Χρόνος (λεπτομερές μοντέλο)	Χρόνος (απλοποιημένο μοντέλο)
Result = 1	$T_{fetch} + T_{store}$	2
i = 1;	$T_{fetch} + T_{store}$	2
i <= n	$(2T_{fetch} + T_{<})\ x\ (n+1)$	3(n+1)
i++	$(2T_{fetch} + T_{+} + T_{store})\ x\ n$	4n
result *= i	$(2T_{fetch} + T_{*} + T_{store})\ x\ n$	4n
return result	$T_{return} + T_{fetch}$	2

Σύνολο $T(n) = t_1 n + t_2$ Και $T(n) = 11n + 9$

Όπου $t_1 = 6T_{fetch} + 2T_{store} + T_{*} + T_{+} + T_{<}$

Και $t_2 = 5T_{fetch} + t_{return} + 2T_{store} + T_{<}$

4) Ο αλγόριθμος περιέχει μια υπό συνθήκη εντολή. Οπότε σύμφωνα και με το ζητούμενο του προβλήματος καταλαβαίνουμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης θα είναι όταν η συνθήκη είναι πάντοτε ψευδής, με αποτέλεσμα να μην μπει ποτέ μέσα στο σώμα της και να εκτελεστούν όλα τα βήματα των δύο βρόχων for που έχουμε. Για να υπολογίσουμε τον χρόνο εκτέλεσης θα γράψουμε στην αρχή τον αλγόριθμο σε πρόγραμμα. Αυτό θα είναι :

```
DiscreteElements (unsigned int n) {
    For (unsigned int i = 0; I <= n - 2; ++i) {
        For (unsigned int j = i + 1;  j<= n - 1; ++j) {
            If (A[i] == A[j])
                Return False;
        }
    }
    Return True;
}
```

Για τον υπολογισμό του χρόνου εκτέλεσης του προγράμματος με τον λεπτομερές μοντέλο παίρνουμε τα παρακάτω στοιχεία.

Εντολή	Χρόνος
i = 0	2
i <= n - 2	$5n$
++i	$4(n-1)$
j = i + 1	$4(n-1)$
j <= n - 1	$5(K+n-1)$
++j	$4K$
A[i] == A[j]	$9K$
Return False	2
Return True	2

Για να υπολογίσουμε πόσα βήματα κάνει ο εσωτερικός βρόχος αρκεί να βρούμε το K που με θεωρία αθροισμάτων έχουμε:

$$K = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i-1+1) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i)$$

Έστω $k = n - i - 1$. Άρα για $i = 0,\ k = n - 1\ και\ για\ i = n - 2, k = n - 1 - n + 2 = 1$
Αντικαθιστώ και έχω

$$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = K$$

Άρα ο συνολικός χρόνος εκτέλεσης χειρότερης περίπτωσης είναι $T(n) = 9n^2 + 4n - 7$ και στον ασυμπωτικό συμβολισμό θα είναι $O(n^2)$.

5) Για την άσκηση κάνω έναν συμβιβασμό και θεωρώ ότι για την σύγκριση των βρόχων for θα γίνεται μια φορά επιπλέον από ότι τα βήματα στο σώμα του βρόχου, όπως γίνεται και κανονικά δηλαδή. Επίσης στο τμήμα του αλγορίθμου όταν λέει to n θα θεωρώ ότι σημαίνει $\leq n$. Επίσης στις πράξεις θα θεωρώ και την πράξη της διαίρεσης.

i) 1)

Εντολή	Πράξεις
$3n + 2i - 1$	$4(n-3)$
$n - 1$	$1(n-2)$

Άρα $S(n) = 5n - 14$

2)

Εντολή	Πράξεις
$n/2$	$(\underline{{}^{n}/_{2}} + 1)$
$n - i$	$\underline{{}^{n}/_{2}}$

Άρα $S(n) = n + 1$

3)

Εντολή	Πράξεις
$2n$	$K + n$
$2n + ij$	$3K$

Όπου

$$K = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n} 1 = \sum_{i=1}^{n}(2n - 1 + 1) = \sum_{i=1}^{n} 2n = 2n\sum_{i=1}^{n} 1 = 2n(n - 1 + 1) = 2n^2$$

Άρα $S(n) = 8n^2 + n$

4) Εντολή Πράξεις

Εντολή	Πράξεις
$3n$	$F+n-1$
$a[k]-b[j]$	F

Όπου

$$F=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{3n}1=\sum_{i=2}^{n}(3n-1+1)=\sum_{i=2}^{n}3n=3n\sum_{i=2}^{n}1=3n(n-2+1)=3n^2-3n$$

Άρα $S(n)=6n^2-5n-1$

5) Εντολή Πράξεις

Εντολή	Πράξεις
$n-1$	n
$k+1$	$F+n-1$
$a[k]\ +\ b[j]$	F

Όπου

$$F=\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k+1}1=\sum_{k=1}^{n-1}(k+1-1+1)=\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=\frac{(n-1)n}{2}+(n-1-1+1)=\frac{n^2+n+2}{2}$$

Άρα $S(n)=n^2+3n+1$

6) Εντολή Πράξεις

Εντολή	Πράξεις
$s+a[j]$	F
$t+s^2$	n

Όπου

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n}(i-1+1)=\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

Άρα $S(n)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$

7) Εντολή Πράξεις

$i+1$	n
$pc[j]$	F
$qc[j]^2$	$2\,F$
$p+q$	n

Όπου

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n}(n-i-1+1) = \sum_{i=1}^{n}(n-i) = \sum_{i=1}^{n} n - \sum_{i=1}^{n} i$$
$$= n(n-1+1) - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Άρα $S(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}$

8) Εντολή Πράξεις

$i-1$	$F+n$
$s+j(i-j+1)$	$4F$
s^2	$2n$

Όπου

$$F = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} 1 = \sum_{k=1}^{n}(i-1-1+1) = \sum_{k=1}^{n}(i-1) = \sum_{k=1}^{n} i - \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)}{2} - (n-1+1)$$
$$= \frac{n^2-n}{2}$$

Άρα $S(n) = \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$

9) Εντολή Πράξεις

$\dfrac{(i+1)/_2}{(n-i)(n-j)}$	$2(F+n)$
	$3F$

Όπου

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{(i+1)/_2} 1 = \sum_{i=1}^{n} \left(i + 1/_2 - 1 + 1 \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i + 1/_2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)n}{2} + n \right) = \frac{n^2 + 3n}{4}$$

Άρα $S(n) = \frac{5}{4} n^2 + \frac{23}{4} n$

10) Εντολή Πράξεις

$2n$	$F + n$
ijk	$2P$

Όπου

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{n} 1 = n \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n} 1 = 2n^2 \sum_{i=1}^{n} 1 = 2n^2 n = 2n^3$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2n} 1 = 2n \sum_{i=1}^{n} 1 = 2nn = 2n^2$$

Άρα $S(n) = 4n^3 + 2n^2 + n$

11) Εντολή Πράξεις

ijk	$3F$

Όπου

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

Άρα $S(n) = \frac{1}{2} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + n$

ii) Χάριν απλότητας και εξοικονόμησης χρόνου η ασυμπτωτική ανάλυση Ο δεν γίνεται αναλυτικά για κάθε περίπτωση παρά μόνο για την πρώτη και στις υπόλοιπες ασκήσεις παρατίθεται κατευθείαν το αποτέλεσμα.

1) Η συνάρτηση μας είναι η $S(n) = 5n - 14$ και ο ασυμπτωτική ανάλυση του είναι $O(n)$. Αυτό σημαίνει ότι $O\big(g(n)\big) = \{S(n)\colon \exists c\epsilon R, \exists n_0 \in N\colon \forall n \geq n_0, S(n) \leq cg(n)\}$

Ισχύει $5n - 14 = O(n)$. Για να το δείξουμε, πρέπει να προσδιορίσουμε μια σταθερά c και έναν n_0.

$$\forall n \geq n_0, 5n - 14 \leq cn \iff 5 - \frac{14}{n} \leq c$$

Ή επειδή

$$5 - \frac{14}{n} \leq c \; αν \; c \geq 5 \; με \; n \geq 14$$
$$\Rightarrow c = 5 \; και \; n_0 = 14.$$

Άρα υπάρχουν τα $n_0 \; και \; c$ οπότε η υπόθεση $5n - 14 = O(n)$ ισχύει.

2) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$n + 1 = O(n)$$

3) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$8n^2 + n = O(n^2)$$

4) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$6n^2 - 5n - 1 = O(n^2)$$

5) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$n^2 + 3n + 1 = O(n^2)$$

6) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n = O(n^2)$$

7) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} = O(n^2)$$

8) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n = O(n^2)$$

9) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{5}{4}n^2 + \frac{23}{4}n = O(n^2)$$

10) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$4n^3 + 2n^2 + n = O(n^3)$$

11) Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + n = O(n^3)$$

Γιαννουτάκης Παναγιώτης
It1238@uom.edu.gr
It1238