Μια συλλογή σύντομων ασκήσεων στα Μαθηματικά Γ′ λυκείου

Παναγιώτης Πετρίδης

Λύσεις

1.

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx = \beta\cdot\delta - \alpha\cdot\gamma \implies \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx = [xf(x)]_\alpha^\beta$$

$$\implies \int_\alpha^\beta f(x)dx = [xf(x)]_\alpha^\beta - \int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx \tag{1}$$

Θέτοντας $u = f^{-1}(x) \implies x = f(u) \implies dx = f'(u)du$ και $u_1 = f^{-1}(\gamma) = \alpha$, $u_2 = f^{-1}(\delta) = \beta$

$$\int_\gamma^\delta f^{-1}(x)dx = \int_\alpha^\beta uf'(u)du = \int_\alpha^\beta xf'(x)dx \tag{2}$$

Οπότε θα έχουμε:

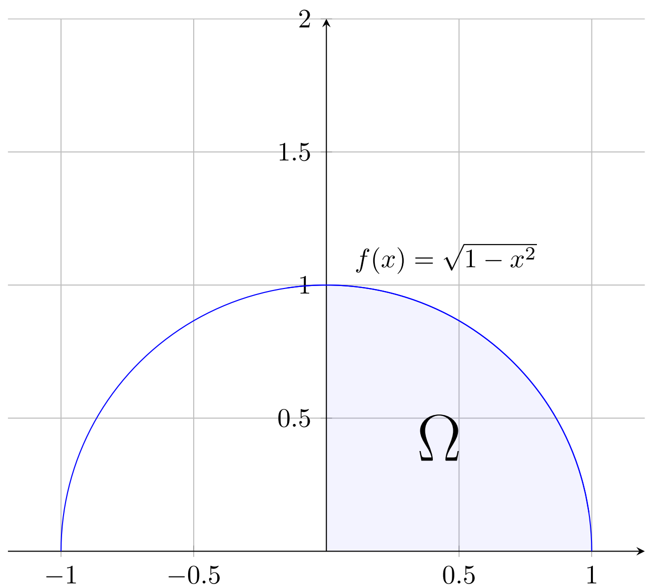
$$\xRightarrow[(2)]{(1)} \implies \int_\alpha^\beta f(x)dx = [xf(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta xf'(x)dx$$

Το οποίο ισχύει καθώς είναι ο ορισμός της ολοκλήρωσης κατα παράγοντες. ■

2.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1,1] \implies y = \sqrt{1-x^2} \implies y^2 = 1-x^2 \implies y^2 + x^2 = 1, y > 0$$

Άρα η f αποτελεί το πάνω κομμάτι ημικυκλίου



Άρα ισχύει ότι:

$$E(\Omega) = \frac{\pi\cdot r^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

3. Σωστή απάντηση: i

$$e^{\pi} > \pi^{e}$$
$$\overset{e^{\pi}>0}{\underset{\pi^{e}>0}{\Longrightarrow}} \pi > eln\pi$$
$$\Longrightarrow \pi - eln\pi > 0$$

Το οποίο ισχύει. Διότι:

Έστω $f(x) = x - elnx$, $x > 0$.

Η f είναι παραγωγήσιμη ως πράξεις παραγωγήσιμων σηναρτήσεων.

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \implies \frac{x-e}{x} = 0 \implies x = e$$

$$x > e \implies x - e > 0 \overset{x>0}{\implies} \frac{x-e}{x} > 0$$

$$x < e \implies x - e < 0 \overset{x>0}{\implies} \frac{x-e}{x} < 0$$

x	0	e	π	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\bullet$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα το $f(e)$ είναι (ολικό) ελάχιστο. Οποτέ θα έχουμε ότι:

$$f(\pi) > f(e)$$
$$\Longrightarrow \pi - eln\pi > e - elne$$
$$\Longrightarrow \pi - eln\pi > 0$$

$\blacksquare$

4. Αρχικά έχουμε ότι:

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\kappa} dx = \left[\frac{(1-x)^{\kappa+1}}{\kappa+1} \right]_{-1}^{1} = -\frac{2^{\kappa+1}}{\kappa+1}$$
$$\Longrightarrow \lim_{\kappa\to 0} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\kappa} dx = \lim_{\kappa\to 0} -\frac{2^{\kappa+1}}{\kappa+1} = \lim_{\kappa\to 0} -\frac{2^{\kappa+1}}{\kappa+1} = \lim_{\kappa\to 0} -\frac{e^{(\kappa+1)ln2}}{\kappa+1}$$
$$\overset{u=\kappa+1}{=\!=\!=} \lim_{u\to 0} -\frac{e^{uln2}}{u} = (-1)\cdot \pm\infty$$

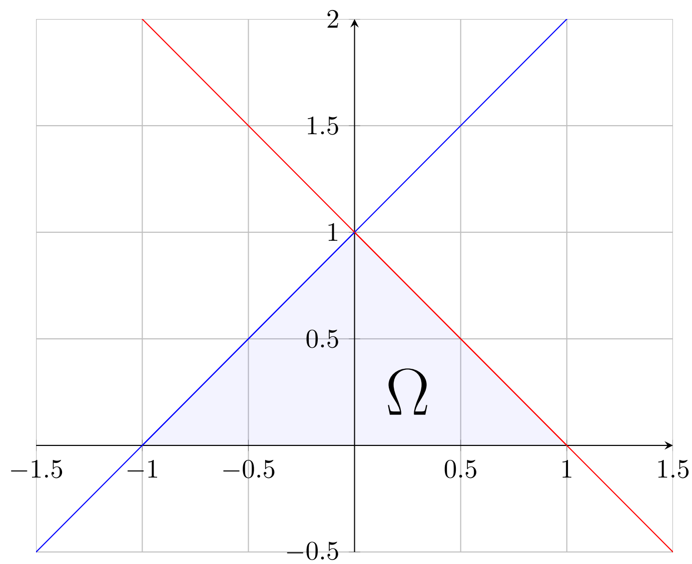
Άρα το όριο δεν υπάρχει.
Παίρνοντας το όριο στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{\kappa\to+\infty} -\frac{2^{\kappa+1}}{\kappa+1} = \lim_{\kappa\to+\infty} -\frac{2^{\kappa+1}}{\kappa+1} = \lim_{\kappa\to+\infty} -\frac{e^{(\kappa+1)ln2}}{\kappa+1} \overset{u=\kappa+1}{=\!=\!=} \lim_{u\to+\infty} -\frac{e^{uln2}}{u}$$
$$\underset{\text{DLH}}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=\!=\!=}} \lim_{u\to+\infty} -\frac{ln2\cdot e^{uln2}}{1} = -ln2\cdot(+\infty) = -\infty$$

5.

$$\begin{aligned} & y^2-2y-x^2+1=0 \implies y^2-2y-x^2+1-x+x=0 \\ \implies & y^2-2y-x^2+1-x+x-xy+xy=0 \\ \implies & y^2+xy-y-xy-x^2+x-y-x+1=0 \\ \implies & (y-x-1)(y+x-1)=0 \end{aligned}$$

Οπότε οι ευθείες είναι: $(\varepsilon_1) : y = x+1$ και $(\varepsilon_2) : y = -x+1$



Οπότε έχουμε ότι:

$$E(\Omega) = \frac{1}{2}2\cdot 1 = 1$$

6. Έχουμε ότι:

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{1}$$

Οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-lnx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{ln(\frac{x+h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot ln(1+\frac{h}{x})$$
$$\overset{u=\frac{h}{x}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{1}{x\cdot u}\cdot ln(1+u)=\lim_{u\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln((1+u)^{\frac{1}{u}})$$
$$\overset{(1)}{=}\frac{1}{x}\cdot lne=\frac{1}{x}$$

■

7.

$$f(x)=\varepsilon\varphi x, x\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}) \qquad\qquad y=\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x$$

Για την f έχουμε ότι:

$$f(x)=\varepsilon\varphi x, x\in D_f \implies f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0,\forall x\in D_f$$
$$f''(x)=2\frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Άρα η $f\uparrow[0,\frac{\pi}{2})=A_1$ και $f\uparrow(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})=A_2$

Για $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ η f : κυρτή αφού $f''(x)>0$, για $x\in(\frac{\pi}{2},\pi]$ η f : κοίλη αφού $f''(x)<0$, τέλος για $x\in[\pi,\frac{3\pi}{2})$ η f : κυρτή αφού $f''(x)>0$

Επειδή όμως η εξήσωση της εφαπτομένης της f στο 0 είναι: $y=x$ και η f κυρτή στο $[0,\frac{\pi}{2})$ η f είναι πάνω απο την $y=x$.

Όμως και $y=\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x<x$ οπότε η $f(x)\geq\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x$, ισότητα μόνο για $x=0$ στο $[0,\frac{\pi}{2})$

Για $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ η $f(x)<0$ και $\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x>0$ άρα η f δεν τέμνει την $y=\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x$ στο $(\frac{\pi}{2},\pi]$

Για $x\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$

$$g(x)=f(x)-\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x=\varepsilon\varphi x-\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x$$
$$\implies g(x)=\varepsilon\varphi x-\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x\implies g(x)=\varepsilon\varphi x-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{6}{7\pi}x=\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\frac{6}{7\pi}x$$
$$\implies g(x)=\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\left(\frac{7\pi}{6}\right)\cdot\frac{6}{7\pi}x$$

και

$$g'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-\frac{2\sqrt{3}}{7\pi}>0,\forall x\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$$

Αφού:

$$2\sqrt{3} < 2 \cdot 3 = 6 \implies 2\sqrt{3} < 6 < 7 \implies \frac{2\sqrt{3}}{7} < 1$$

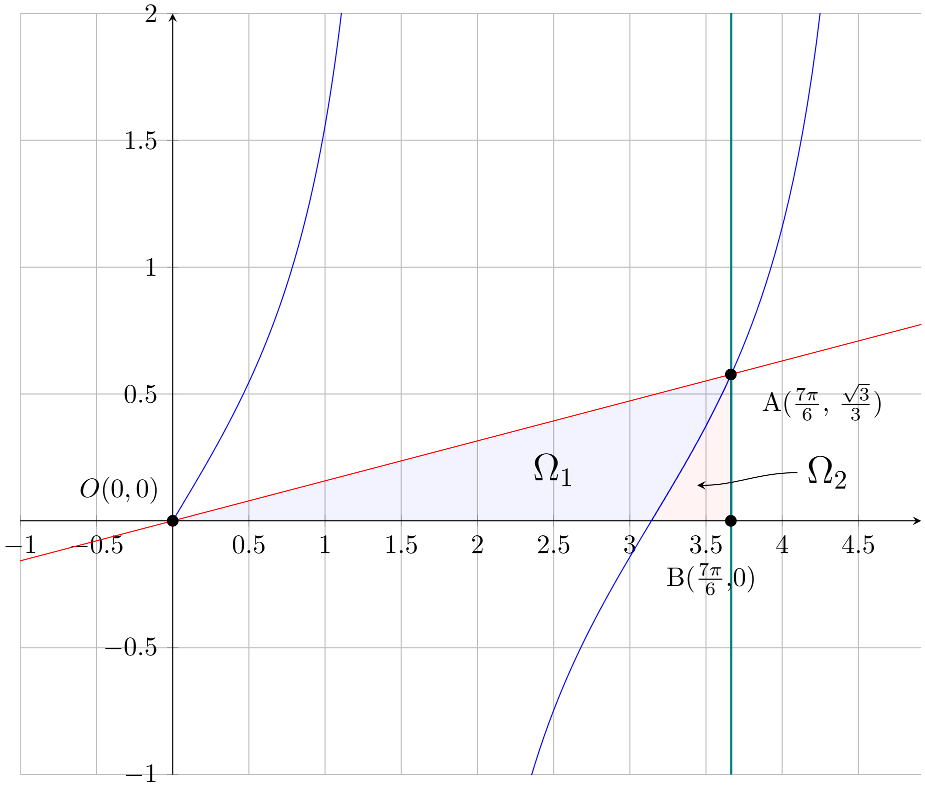
και

$$x \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \implies -1 < \sigma\upsilon\nu x \leq 0 \implies 1 < \sigma\upsilon\nu^2 x \implies \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 1$$

Άρα η $g \uparrow (\pi, \frac{3\pi}{2})$ και $g(\frac{7\pi}{6}) = 0$ άρα $x = \frac{7\pi}{6}$ μοναδική ρίζα στο $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

Άρα τελικά $x = 0$ και $x = \frac{7\pi}{6}$ μοναδικές ρίζες της εξήσωσης $f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{7\pi}x$

Κάνοντας μια πρόχειρη γραφική παράσταση έχουμε:



Οπότε έχουμε ότι $E(\Omega_1) = (AOB) - E(\Omega_2)$ Επειδή η f είναι περιοδική με περίοδο π θα ισχύει ότι:

$$E(\Omega_2) = \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)dx = \int_{\pi-\pi}^{\frac{7\pi}{6}-\pi} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$$

$$\implies E(\Omega_2) = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \varepsilon\varphi x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx \overset{\mathrm{u}=\sigma\upsilon\nu \mathrm{x}}{=\!=\!=} \int_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -\frac{(u)'}{u}dx$$

$$\implies E(\Omega_2) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{(u)'}{u}dx = \Big[lnu\Big]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} = ln1 - ln(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -ln(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Οπότε τέλος έχουμε ότι:

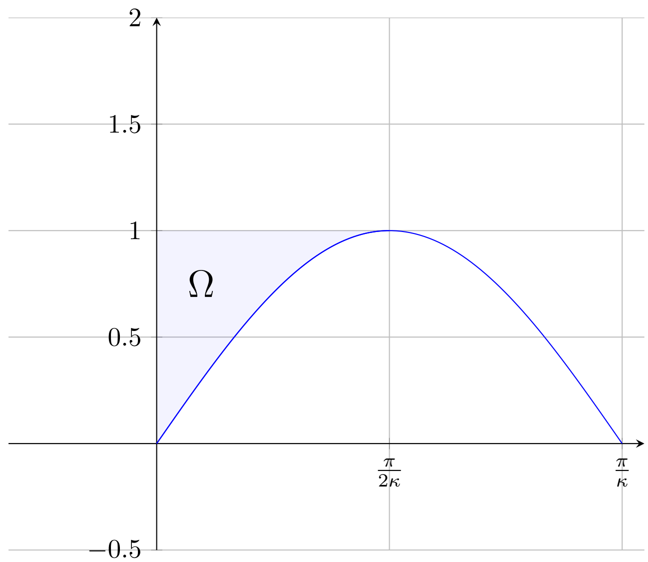
$$E(\Omega_1) = (AOB) - E(\Omega_2) = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} - ln(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\implies E(\Omega_1) = \frac{7\pi\sqrt{3}}{36} - ln(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

8. Έχουμε ότι:

$$f(x) = \eta\mu kx \quad x, k > 0 \quad x \leq \frac{\pi}{k} \tag{1}$$

Γραφηκά έχουμε ότι:



Οπότε:

$$E(\Omega) = \frac{\pi}{2\kappa} \cdot 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2\kappa}} f(x)dx = \frac{\pi}{2\kappa} - \int_0^{\frac{\pi}{2\kappa}} \eta\mu(kx)dx$$

$$\Longrightarrow E(\Omega) = \frac{\pi}{2\kappa} - \Big[-\frac{\sigma\nu\upsilon kx}{k}\Big]_0^{\frac{\pi}{2\kappa}} = \frac{\pi}{2\kappa} + \frac{\sigma\nu\upsilon(\frac{\pi}{2\kappa} \cdot \kappa)}{\kappa} - \frac{\sigma\nu\upsilon(0)}{k}$$

$$\Longrightarrow E(\Omega) = \frac{\pi}{2\kappa} - \frac{1}{\kappa} = \frac{\pi - 2}{2\kappa}$$

$$\lim_{\kappa \to +\infty} E(\Omega) = \lim_{\kappa \to +\infty} \frac{\pi - 2}{2\kappa} = (\pi - 2) \cdot 0 = 0$$