Τεχνικές Βελτιστοποίησης - 3η Εργαστηριακή Άσκηση

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ - 10697

Θέμα 1:

Η συνάρτηση που θα μελετηθεί είναι η $f(x,y) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$ με $\nabla f(x,y) = [\frac{2}{3}x, 6y]$. Εμφανίζονται κρίσιμα σημεία για $\nabla f(x,y) = 0$, οπότε $x = y = 0$. Παίρνοντας τον εσσιανό πίνακα $\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0.66 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, φαίνεται ότι το $(0,0)$ είναι ολικό ελάχιστο της f, καθώς είναι θετικά ορισμένος. Για να αποδειχθεί η σύγκλιση της f στο $(0,0)$ με την μέθοδος της μέγιστης καθόδου θα πρέπει για κάθε επανάληψη να ισχύει $|\frac{x_{k+1}}{x_k}| < 1$ και $|\frac{y_{k+1}}{y_k}| < 1$. Το διάνυσμα της κλίσης είναι το $d_k = -\nabla f(x,y)$ και για κάθε επανάληψη ισχύει ότι:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \frac{2}{3} x_k$$
$$y_{k+1} = y_k - \gamma_k 6 y_k$$

Οπότε,

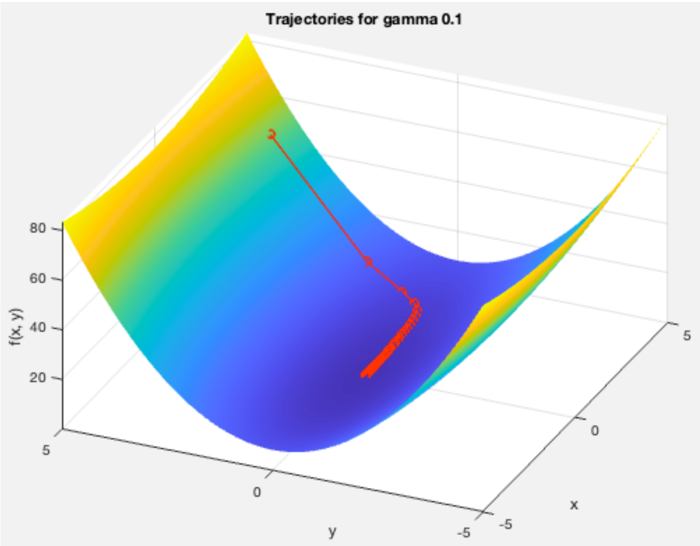
$$x_{k+1} = x_k(1 - \gamma_k \frac{2}{3})$$
$$y_{k+1} = y_k(1 - \gamma_k 6)$$

Πρέπει

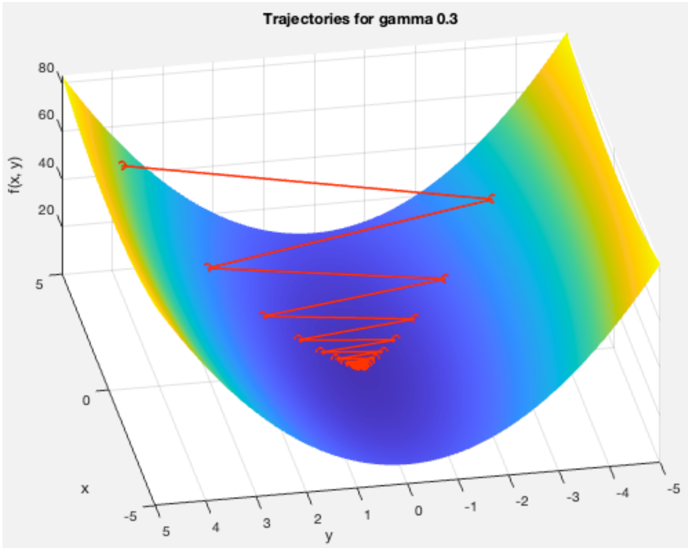
$$|\frac{x_{k+1}}{x_k}| < 1 \implies 0 < \gamma_k < 3$$
$$|\frac{y_{k+1}}{y_k}| < 1 \implies 0 < \gamma_k < \frac{1}{3}$$

Άρα για να συγκλίνει η μέθοδος με σταθερό βήμα θα πρέπει $\gamma < \frac{1}{3}$.

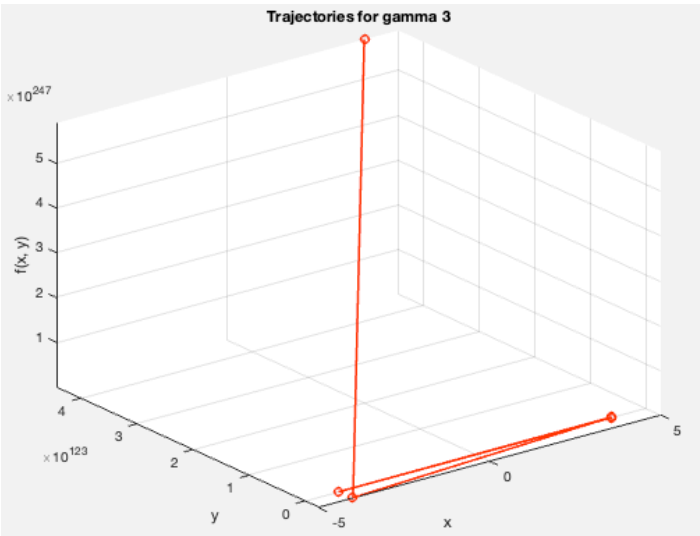
Στην παρακάτω μελέτη χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της μέγιστης καθόδου από την προηγούμενη εργασία για τα διαφορετικά βήματα $\gamma = 0.1$, $\gamma = 0.3$, $\gamma = 3$, $\gamma = 5$, ακρίβεια $\varepsilon = 0.001$ και αρχικό σημείο το $(4, 4)$ χωρίς περιορισμούς.



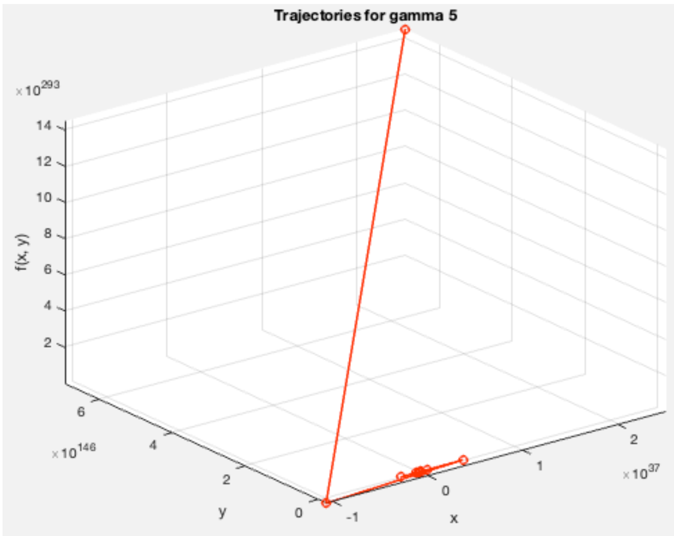
Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου με σταθερό βήμα $\gamma = 0.1$



Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου με σταθερό βήμα $\gamma = 0.3$

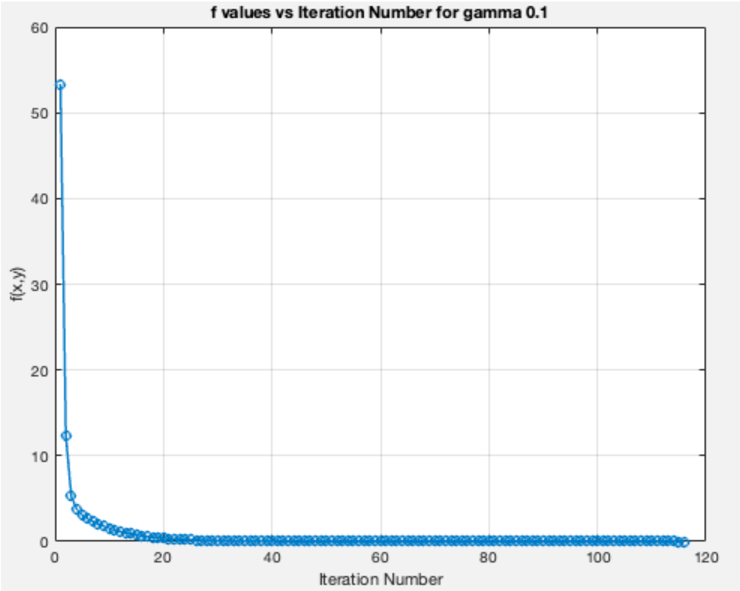


Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου με σταθερό βήμα $\gamma = 3$

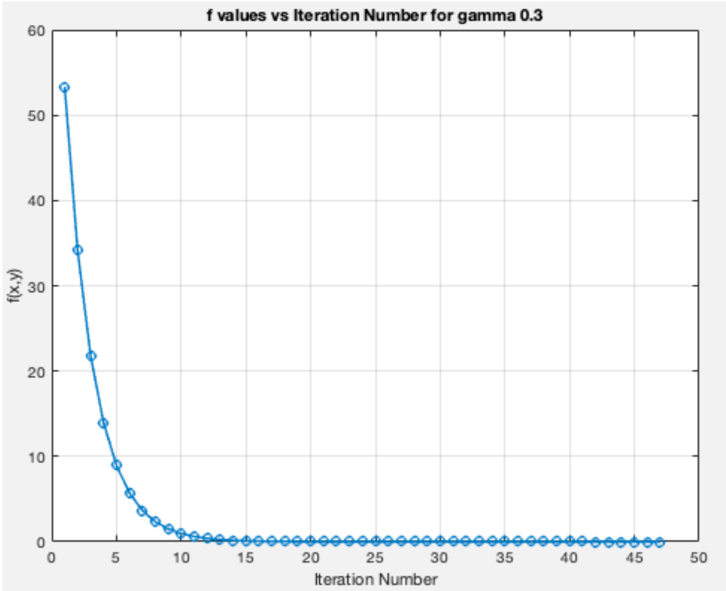


Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου με σταθερό βήμα $\gamma = 5$

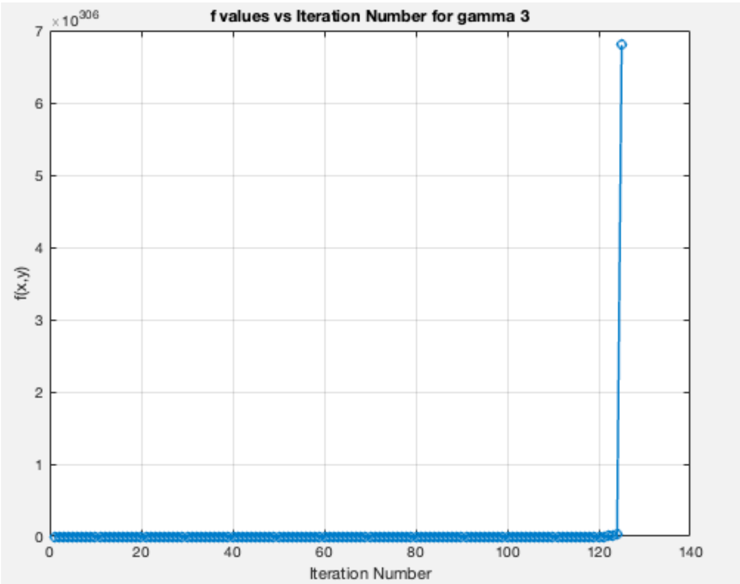
Αντίστοιχα, ακολουθούν τα γραφήματα σύγκλισης της συνάρτησης ως προς τον αριθμό επαναλήψεων.



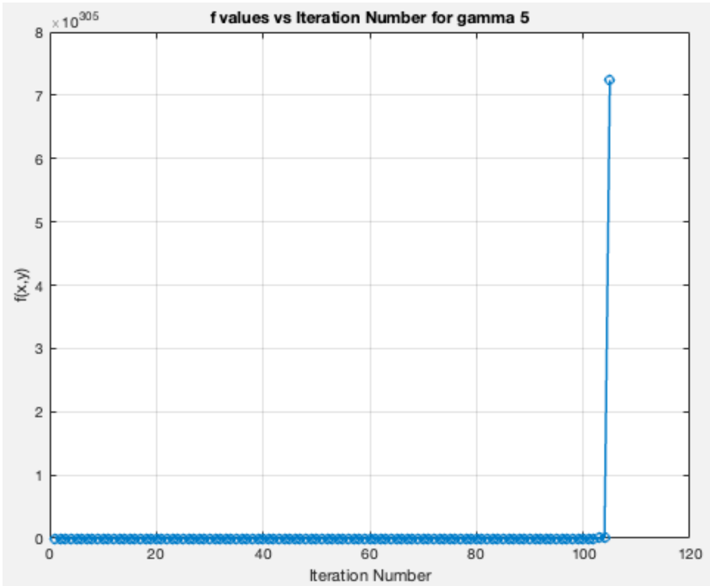
Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για σταθερό βήμα $\gamma = 0.1$



Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για σταθερό βήμα $\gamma = 0.3$



Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για σταθερό βήμα $\gamma = 3$



Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για σταθερό βήμα $\gamma = 5$

Είναι εμφανές ότι η μέθοδος συγκλίνει για τις δυο πρώτες περιπτώσεις, με εμφανώς πιο γρήγορο το βήμα $\gamma = 0.3$, το οποίο χρειάζεται 47 επαναλήψεις έναντι των 116 για $\gamma = 0.1$. Αντιθέτως, στις άλλες δυο περιπτώσεις ο αλγόριθμος δεν μπορεί να συγκλίνει όπως αποδείχθηκε παραπάνω. Η μεταβλητή y αποκλίνει σε πολύ μεγάλες τιμές όπως φαίνεται στις κλίμακες των διαγραμμάτων ενώ για η x εναλλάσσει πρόσημο.

Θέμα 2:

- Εξήγηση της μεθόδου

Η μέθοδος μέγιστης καθόδου με προβολή είναι μια τεχνική βελτιστοποίησης που επεκτείνει την κλασική μέθοδο μεγίστης καθόδου ώστε να αντιμετωπίζει προβλήματα με περιορισμούς. Σε αυτή τη μέθοδο, οι διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης εξασφαλίζουν μείωση της τιμής της συνάρτησης στόχου, ενώ παράλληλα διατηρούνται εντός ενός εφικτού συνόλου μέσω της χρήσης προβολών. Το κλειδί της μεθόδου είναι η προσαρμογή της κατεύθυνσης καθόδου έτσι ώστε να συμμορφώνεται με τους περιορισμούς του προβλήματος. Η μέθοδος χρησιμοποιείται σε προβλήματα όπου το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι κυρτό, προσφέροντας σταθερή και υπολογιστικά αποδοτική σύγκλιση.

- Αλγόριθμος

Η μέθοδος μεγίστης καθόδου με προβολή εφαρμόζεται για τη βελτιστοποίηση μιας κυρτής και διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$ σε ένα κλειστό και κυρτό σύνολο $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Στο πλαίσιο αυτό, στόχος είναι να εντοπιστεί ένα σημείο x που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση, ενώ παραμένει εντός του συνόλου X. Η διαδικασία ξεκινά με την επιλογή ενός αρχικού σημείου $x_0 \in X$. Στη συνέχεια, σε κάθε επανάληψη k, υπολογίζεται η κατεύθυνση καθόδου, η οποία δίνεται από την αρνητική κλίση της συνάρτησης $f(x)$ στο τρέχον σημείο, δηλαδή $-\nabla f(x_k)$. Η κατεύθυνση αυτή καθορίζει την κατεύθυνση της μεγαλύτερης μείωσης της συνάρτησης. Για να παραμείνει το σημείο εντός του συνόλου X, πραγματοποιείται προβολή του σημείου που προκύπτει από τη γραμμική ενημέρωση $x_k - s\nabla f(x_k)$, όπου $s > 0$ είναι ένα σταθερό βήμα. Η προβολή υπολογίζεται μέσω της σχέσης:

$$P_X(x) = \operatorname{argmin}_{z \in X} \|z - x\|^2,$$

που αντιστοιχεί στο πλησιέστερο σημείο του X προς το x. Το ενημερωμένο σημείο x_{k+1} προκύπτει από την προβολή:

$$x_{k+1} = P_X(x_k - \lambda \nabla f(x_k)) .$$

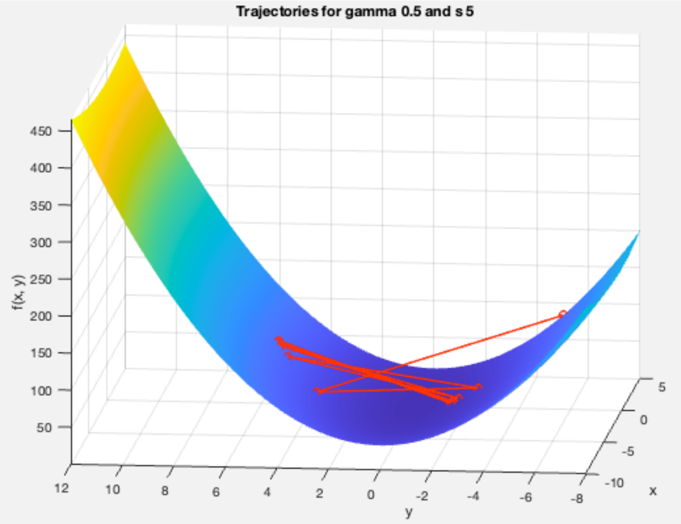
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί ένα από τα κριτήρια σύγκλισης, όπως η μικρή τιμή του $\|\nabla f(x_k)\|$ ή η υπέρβαση των προκαθορισμένων αριθμών επαναλήψεων του αλγορίθμου. Η μέθοδος αυτή είναι ιδανική όταν υπάρχουν περιορισμοί στη μορφή του χώρου λύσεων, καθώς η προβολή εξασφαλίζει ότι κάθε νέο σημείο παραμένει εφικτό. Ο ρυθμός σύγκλισης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την επιλογή του s, το οποίο πρέπει να είναι αρκετά μικρό για να διασφαλίσει τη σταθερότητα της μεθόδου.

- Μετρήσεις

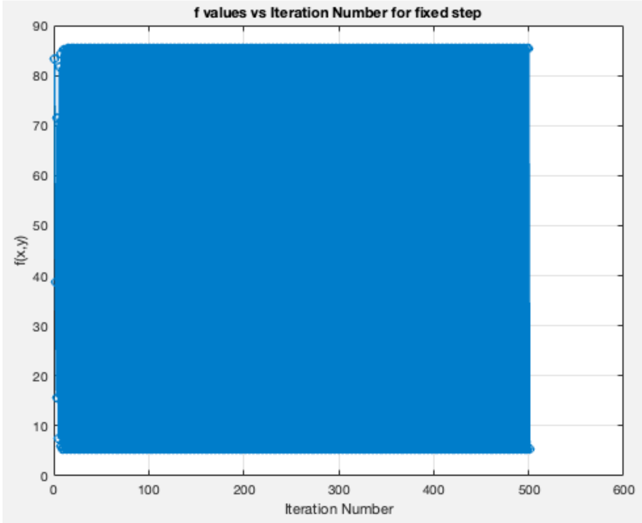
Το σύνολο

$$-10 < x_1 < 5$$
$$-8 < x_2 < 12$$

Είναι κυρτό οπότε το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί.
Για το σημείο εκκίνησης $(5, -5)$, $s = 5, \gamma = 0.5$ και ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$ προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα.



Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου με σταθερό βήμα $\gamma = 0.5$ και $s = 5$

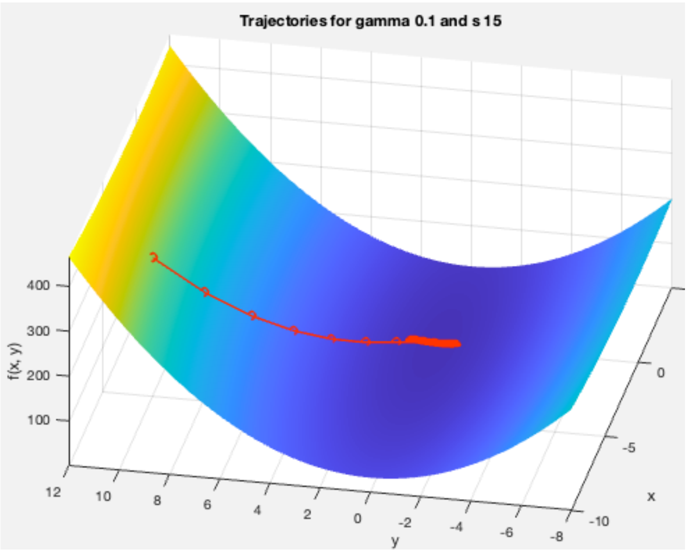


Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για σταθερό βήμα $\gamma = 0.5$ και $s = 5$

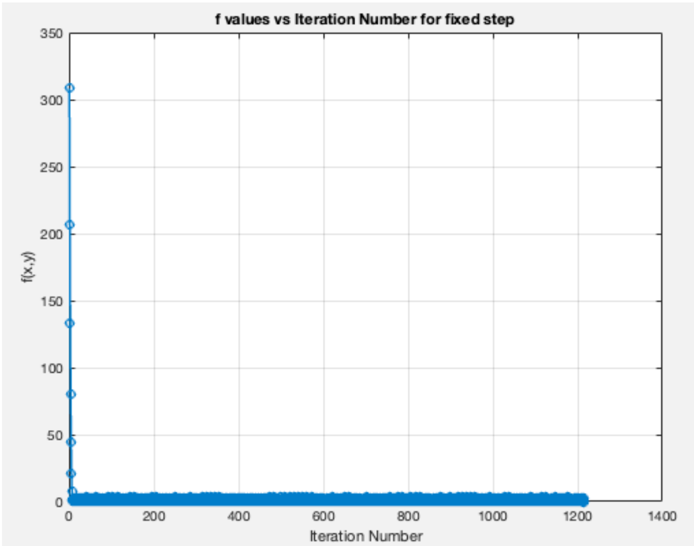
Είναι εμφανές ότι η μέθοδος δεν συγκλίνει. Ο αλγόριθμος φτάνει τις 500 επαναλήψεις ενώ ταλαντώνεται χωρίς να πλησιάζει το αναζητούμενο σημείο. Η διαφορά με το Θέμα 1 είναι ότι ο αλγόριθμος δεν αποκλίνει πλέον και ταυτόχρονα μένει εντός του συνόλου X.

Θέμα 3:

Για το σημείο εκκίνησης $(-5,10)$, $s = 15$, $\gamma = 0.1$ και ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$ προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα.

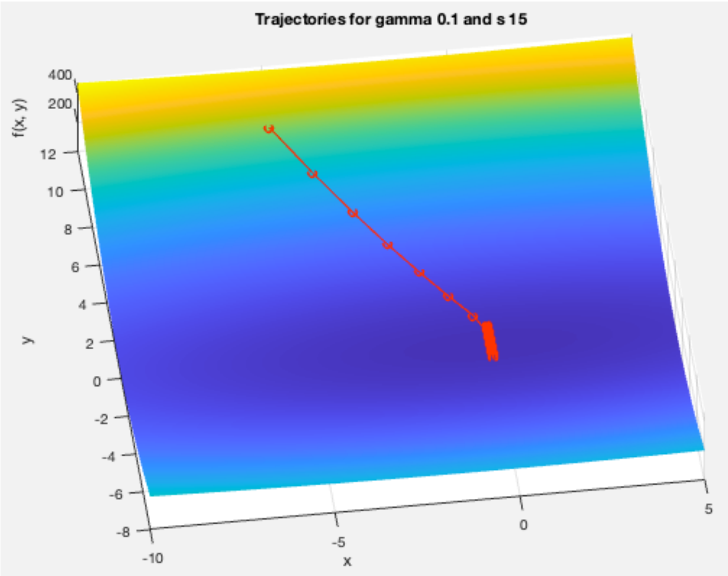


Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου με σταθερό βήμα $\gamma = 0.1$ και $s = 15$



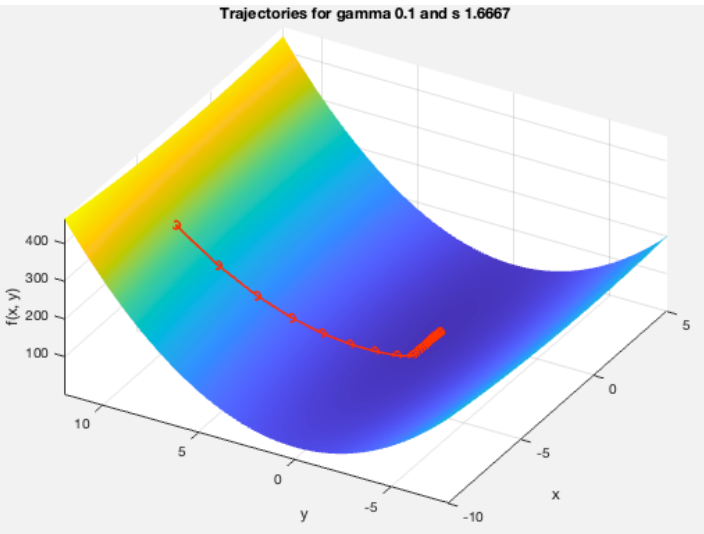
Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για σταθερό βήμα $\gamma = 0.1$ και $s = 15$

Παρατηρείται ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο μετά από μεγάλο αριθμό επαναλήψεων. Από το την γραφική παράσταση φαίνεται ότι το σημείο x_k ταλαντώνεται στον άξονα y, έχοντας συγκλίνει στον άξονα x.

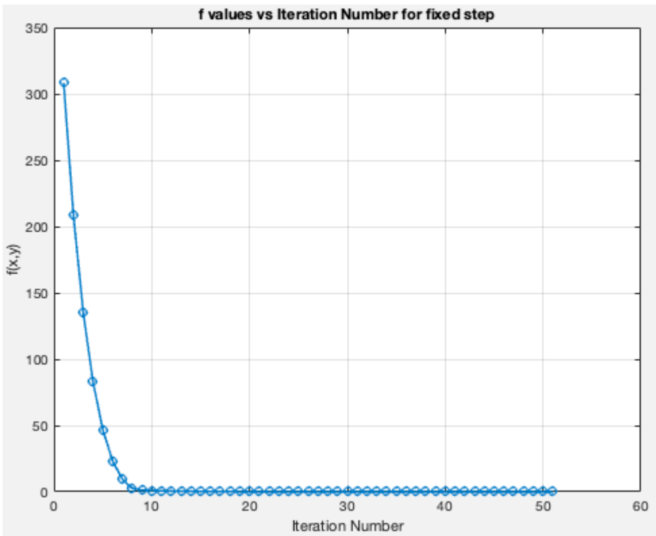


Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου
με σταθερό βήμα $\gamma = 0.1$ και $s = 15$

Εξετάζω το x και παρατηρώ ότι όταν η προβολή $\bar{x}_k$ βρεθεί εντός του συνόλου έχω $x_{k+1} = x_k(1 - \frac{2}{3}s_k\gamma_k)$, με $s_k\gamma_k = 1.5$, $x_{k+1} = 0$, οπότε θα βρεθώ σε μια επανάληψη στο 0 για το x. Εφόσον αυτό δεν ισχύει για το y, αφού χρειάζεται μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να συγκλίνει στο 0, ακολουθείται αντίστοιχη διαδικασία. Δηλαδή $y_{k+1} = y_k\left(1 - 6s_k\gamma_k\right)$ κρατώντας το $\gamma = 0.1$ σταθερό και επιλέγοντας $s_k = \frac{10}{6}$, προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα.



Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου
με σταθερό βήμα $\gamma = 0.1$ και $s = 1.6\dot{6}$



Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f
συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για
σταθερό βήμα $\gamma = 0.1$ και $s = 1.6\dot{6}$

Είναι εμφανές ότι ο αριθμός επαναλήψεων μειώθηκε σε μεγάλο βαθμό.

Θέμα 4:

Για τα συγκεκριμένα s και γ περιμένουμε ότι ο αλγόριθμος θα συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο μετά από κάποιον αριθμό επαναλήψεων. Όταν τα $\bar{x}_k$ και $\bar{y}_k$ έρθουν εντός του κυρτού συνόλου θα ισχύει:

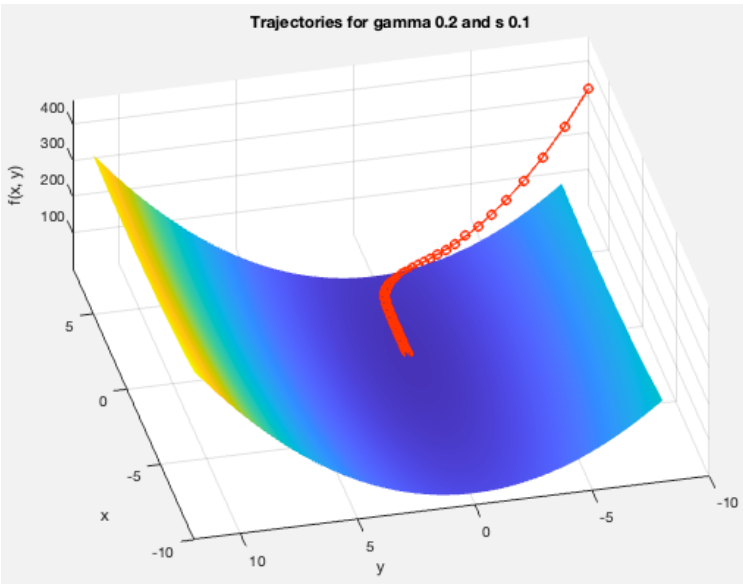
$$x_{k+1} = x_k(1 - \frac{2}{3}s_k\gamma_k), \quad y_{k+1} = y_k\left(1 - 6s_k\gamma_k\right)$$

Οπότε θα έχουμε σίγουρα σύγκλιση στο $(0,0)$ αφού $\gamma_k s_k = 0.02 < 0.333$. Κάνοντας αντικατάσταση:

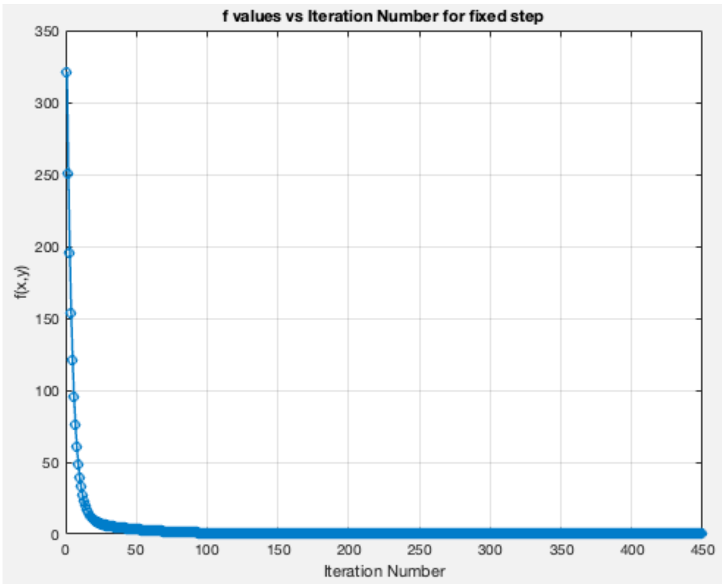
$$x_{k+1} = x_k(0.9866), y_{k+1} = y_k(0.88)$$

Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις, το y, καθώς έχει μικρότερη βάση, συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα από το x, πράγμα που επιβεβαιώνεται στη γραφική παράσταση. Επίσης, αξίζει να τονίσουμε ότι το x_k μειώνεται με πολύ αργό ρυθμό, οπότε περιμένουμε σχετικά μεγάλο αριθμό επαναλήψεων.

Για το σημείο εκκίνησης $(8, -10)$, $s = 0.1$, $\gamma = 0.2$ και ακρίβεια $\varepsilon = 0.01$ προκύπτουν τα παρακάτω διαγράμματα.



Γραφική Παράσταση της σύγκλισης της μεθόδου με σταθερό βήμα $\gamma = 0.2$ και $s = 0.1$



Διάγραμμα τιμών της συνάρτησης f συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων για σταθερό βήμα $\gamma = 0.2$ και $s = 0.1$

Ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων είναι 450. Λόγω των μικρών τιμών των γ, s η αργή σύγκλιση ήταν αναμενόμενη.