Τεχνικές Βελτιστοποίησης - 1η Εργαστηριακή Άσκηση

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ - 10697

Θέμα 1:

- Εξήγηση της μεθόδου

Η μέθοδος της διχοτόμησης είναι μια αριθμητική τεχνική που χρησιμοποιείται στη βελτιστοποίηση για την εύρεση του ελάχιστου (ή μέγιστου) μιας συνάρτησης. Η διαδικασία ξεκινά με τον καθορισμό ενός αρχικού διαστήματος $[a, b]$, όπου υποθέτουμε ότι βρίσκεται το ζητούμενο ελάχιστο (ή μέγιστο) της συνάρτησης $f(x)$. Για τη μέθοδο ορίζονται δύο βασικές παράμετροι: l και e. Το l είναι το ελάχιστο επιθυμητό μήκος του διαστήματος, στο οποίο η διαδικασία θα τερματιστεί όταν το μήκος του διαστήματος $[a, b]$ γίνει μικρότερο από το l. Αντίστοιχα, το e είναι μια πολύ μικρή σταθερά. Για τις δυο αυτές παραμέτρους πρέπει να ισχύει η σχέση $2e < l$ για να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος.

- Αλγόριθμος

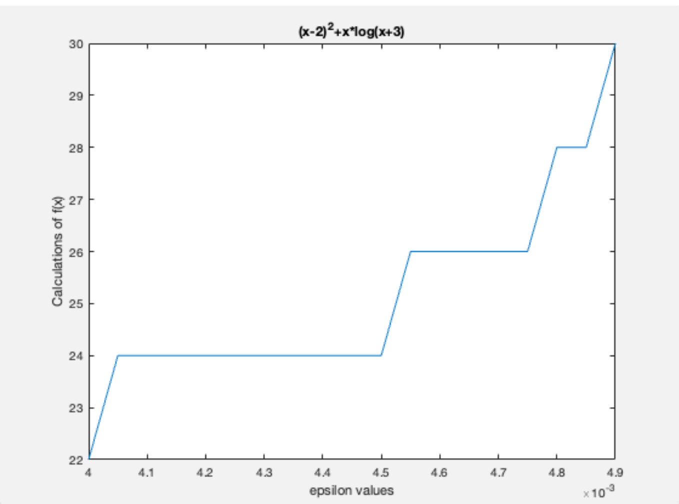
Σε κάθε βήμα της μεθόδου, υπολογίζουμε δύο ενδιάμεσα σημεία, x_1 και x_2, ως εξής:

$$x_1 = \frac{(a + b - e)}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{(a + b + e)}{2}$$

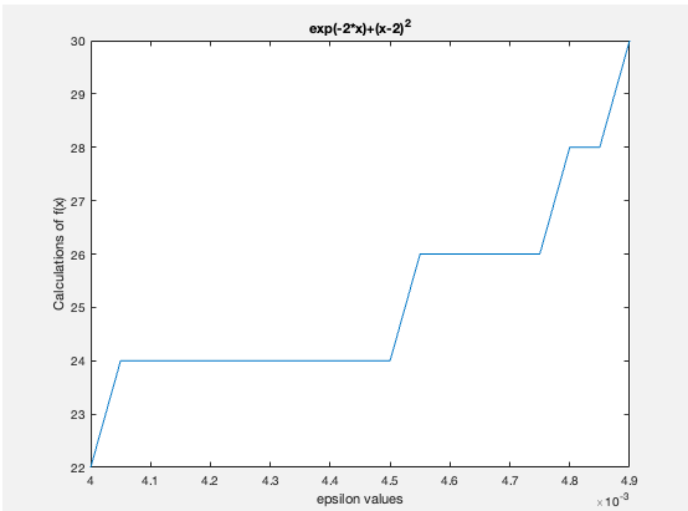
Κατόπιν, συγκρίνουμε τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία x_1 και x_2. Αν $f(x_1) < f(x_2)$, τότε το ελάχιστο βρίσκεται στο αριστερό μισό του διαστήματος, επομένως ανανεώνουμε το διάστημα σε $[a, x_2]$. Αντίστοιχα, αν $f(x_1) > f(x_2)$, το ελάχιστο βρίσκεται στο δεξί μισό, οπότε ανανεώνουμε το διάστημα σε $[x_1, b]$. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι το μήκος του διαστήματος $[a, b]$ να γίνει μικρότερο από l. Όταν συμβεί αυτό, το σημείο θεωρείται ως προσέγγιση του σημείου που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση.

- Μετρήσεις

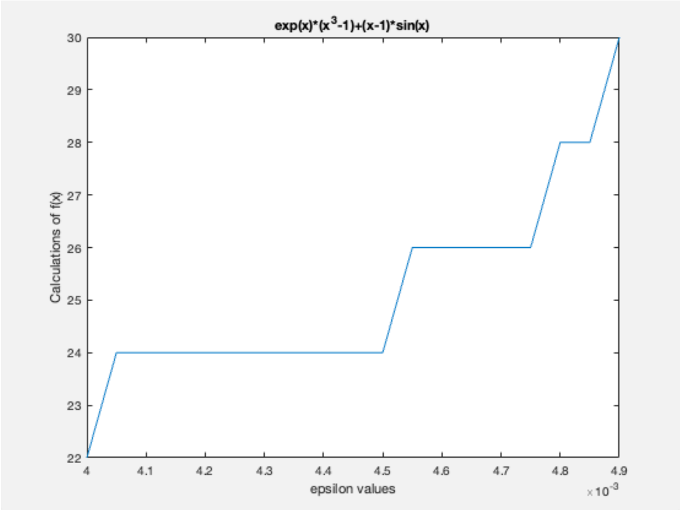
Ερώτημα 1:



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_1(x) = (x-2)^2 + x\,ln(x-3)$ - απόστασης από τη διχοτόμο για σταθερό $l = 0.01$



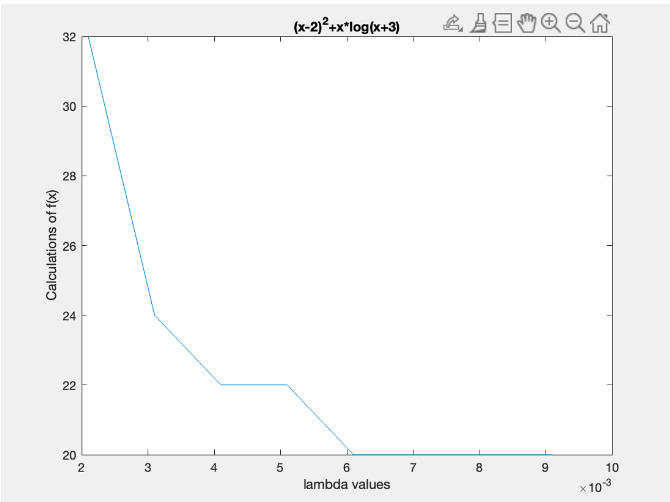
Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$ - απόστασης από τη διχοτόμο για σταθερό $l = 0.01$



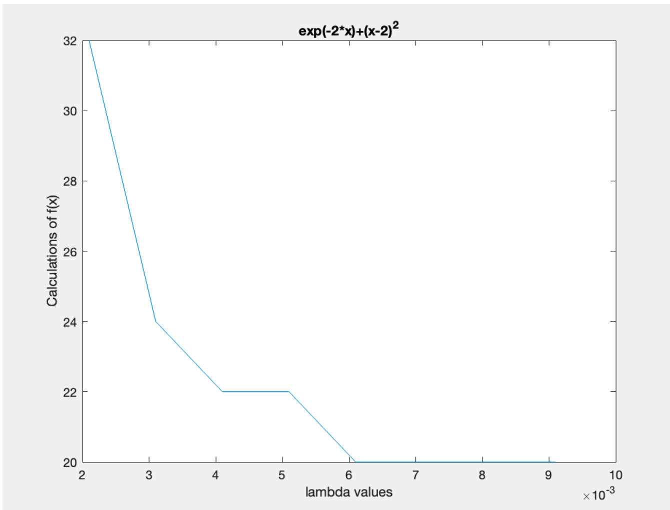
Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού
$f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x - 1)sin(x)$ - απόστασης από τη
διχοτόμο για σταθερό $l = 0.01$

Από τα παραπάνω διαγράμματα είναι προφανές ότι όσο πλησιάζει το e στην τιμή $\frac{l}{2}$ οι υπολογισμοί της τιμής $f(x)$ (άρα και οι επαναλήψεις) αυξάνονται, ανεξάρτητα από τον τύπο της συνάρτησης. Αυτό συμβαίνει διότι όταν το ε πλησιάζει το $\frac{l}{2}$, αυτό σημαίνει ότι η θέση της ρίζας είναι κοντά στη μέση του αρχικού διαστήματος $[a, b]$. Σε αυτή την περίπτωση, οι διχοτομίες δεν είναι τόσο αποτελεσματικές, καθώς η ρίζα μπορεί να βρίσκεται πολύ κοντά σε ένα από τα άκρα του διαστήματος, γεγονός που θα απαιτήσει περισσότερες επαναλήψεις για να την προσεγγίσει επαρκώς. Παρατηρείται ότι σε κάθε επανάληψη ο υπολογισμός της $f(x)$ γίνεται 2 φορές, καθώς τα x_1 και x_2 αλλάζουν κάθε φορά. Αυτό είναι και ένα ακόμη μειονέκτημα της μεθόδου αυτής, σε κάθε επανάληψη αλλάζουν και τα δυο άκρα του διαστήματος αναζήτησης όποτε διπλασιάζονται οι υπολογισμοί της συνάρτησης.

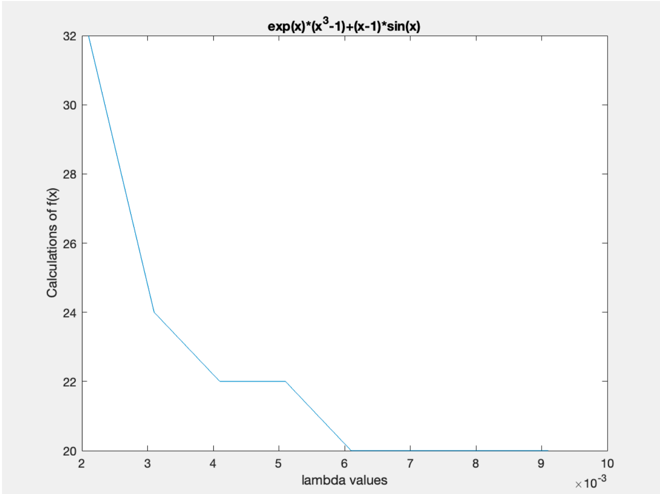
Ερώτημα 2:



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού
$f_1(x) = (x - 2)^2 + xln(x - 3)$ - τελικού εύρους
αναζήτησης για σταθερό $\varepsilon = 0.001$



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού
$f_2(x) = e^{-2x} + (x - 2)^2$ - τελικού εύρους αναζήτησης
για σταθερό $\varepsilon = 0.001$

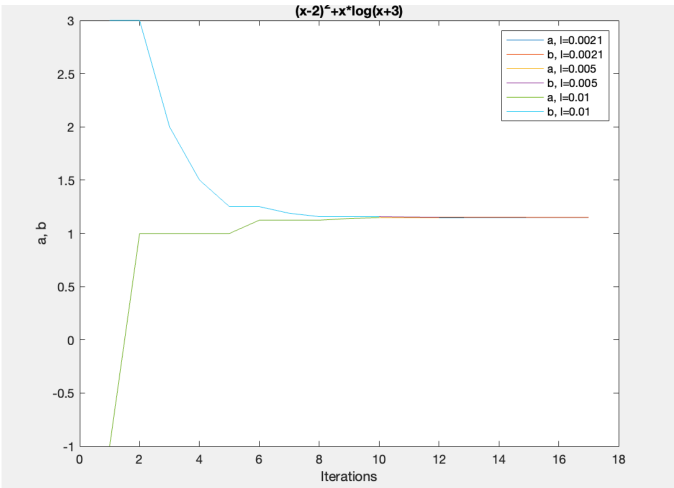


Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού
$f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x - 1)sin(x)$ - τελικού εύρους
αναζήτησης για σταθερό $\varepsilon = 0.001$

Από τα παραπάνω διαγράμματα φαίνεται ότι όσο πλησιάζει το l στην τιμή $2e$ οι υπολογισμοί της συνάρτησης $f(x)$ αυξάνονται εκθετικά. Σε αυτή την περίπτωση το διάστημα $[a, b]$ το οποίο καθορίζεται από το ε είναι πολύ μεγάλο σχετικά με το l και επομένως απαιτούνται παραπάνω επαναλήψεις για να συγκλίνει ο αλγόριθμος, άρα και παραπάνω υπολογισμοί της $f(x)$.

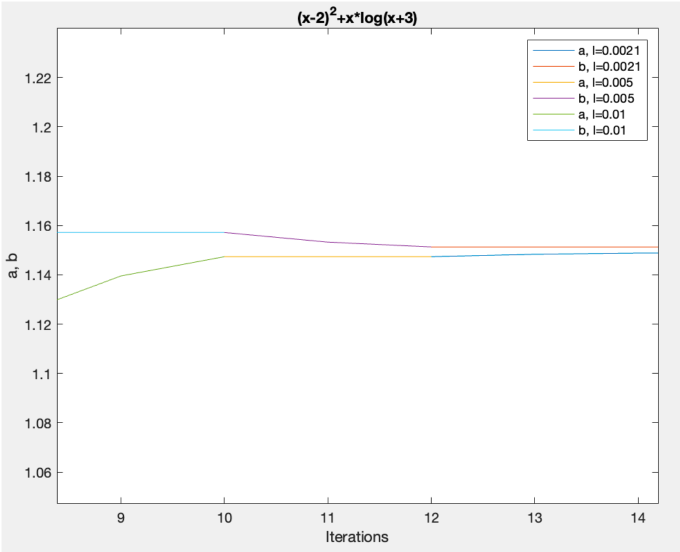
Ερώτημα 3:

Για την συνάρτηση $f_1(x) = (x-2)^2 + xln(x-3)$ για $l = 0.0021$, $l = 0.005$, $l = 0.01$ και $\varepsilon = 0.001$ προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.



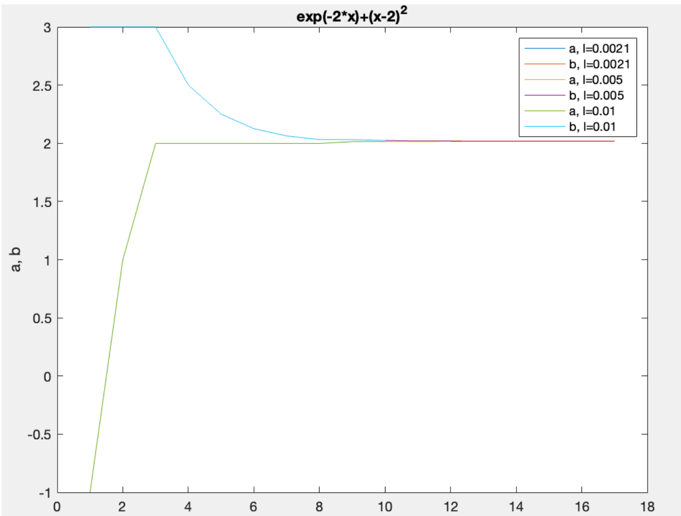
Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης
$f_1(x) = (x-2)^2 + xln(x-3)$

Παρατηρώ ότι καθώς ο αριθμός επαναλήψεων αυξάνεται, η γραφική παράσταση αλλάζει χρώμα, που προφανώς σημαίνει ότι ο αλγόριθμος για το συγκεκριμένο l τερματίζει και φαίνεται η γραφική παράσταση για διαφορετική τιμή του τελικού εύρους αναζήτησης. Είναι αναμενόμενο ένα τέτοιο διάγραμμα, αφού η τιμή l δεν επηρεάζει την λειτουργία του αλγορίθμου και για αυτό όλες οι παραστάσεις ξεκινάνε με την ίδια μορφή. Στη συνέχεια, καθώς συγκλίνει προς το αναζητούμενο σημείο, ο αλγόριθμος τερματίζει όταν φτάσει στο επιθυμητό εύρος ενώ στις υπόλοιπες συνεχίζει να συγκλίνει. Είναι διακριτές τρεις περιοχές χρωμάτων, όπου φαίνεται ξεκάθαρα για τις τιμές του l και σταθερό το ε πόσες επαναλήψεις χρειάστηκαν σε κάθε περίπτωση. Ακολουθεί μεγέθυνση του παραπάνω διαγράμματος για να τονιστεί η αναφερθούσα διακριτότητα.



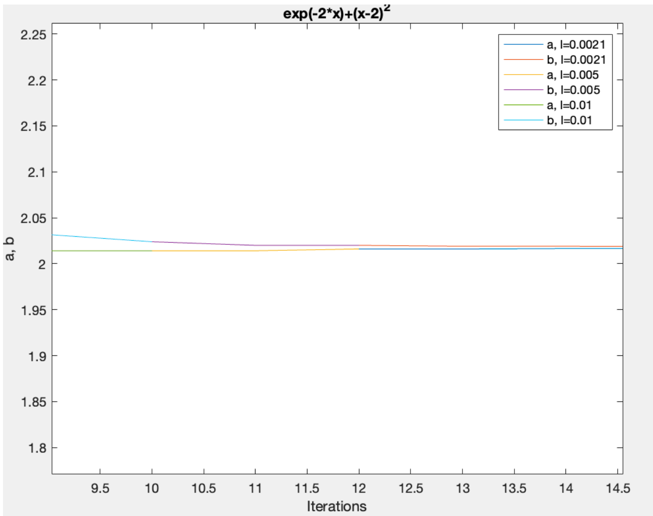
Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_1(x) = (x-2)^2 + x\,ln(x-3)$ (Μεγέθυνση)

Αντίστοιχα για την $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$ για $l = 0.0021$, $l = 0.005$, $l = 0.01$ και $\varepsilon = 0.001$ προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.



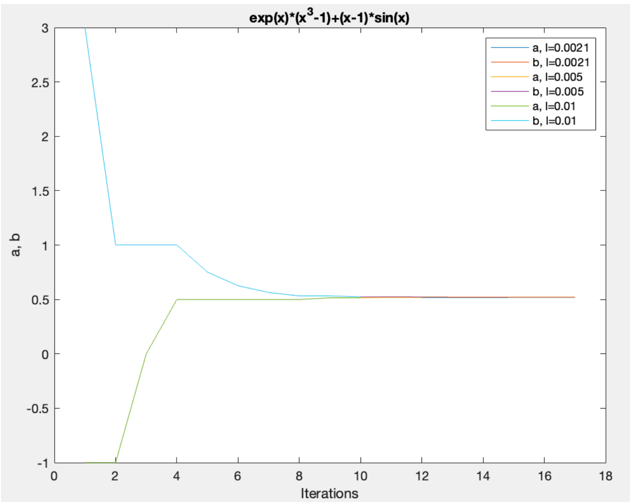
Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$

Ομοίως με πριν, με μεγέθυνση φαίνεται η διαφοροποίηση του τελικού εύρους αναζήτησης.

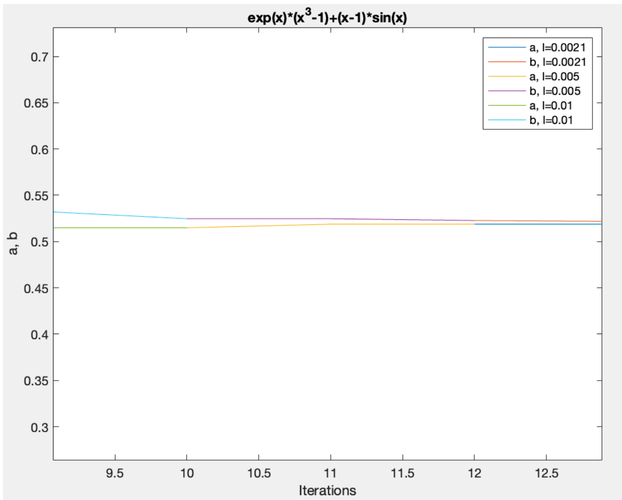


Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$ (Μεγέθυνση)

Αναλόγως, το ίδιο παρατηρείται και για την $f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x - 1)sin(x)$ για $l = 0.0021$, $l = 0.005$, $l = 0.01$ και $\varepsilon = 0.001$.



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x - 1)sin(x)$



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x - 1)sin(x)$ (Μεγέθυνση)

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αριθμός επαναλήψεων για σταθερό τελικό εύρος αναζήτησης και απόστασης από την διχοτόμο δεν επηρεάζεται από την συνάρτηση και για αυτό οι καμπύλες των διαγραμμάτων "αλλάζουν χρώμα" για ίδιο k κάθε φορά ανεξαρτήτως του τύπου της $f(x)$.

Θέμα 2:

- Εξήγηση της μεθόδου

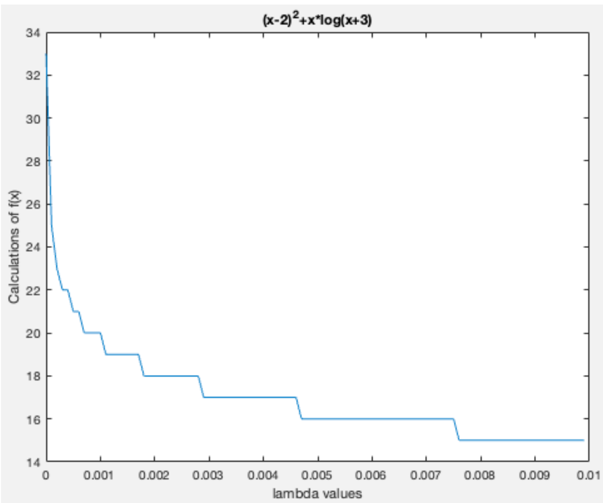
Η μέθοδος της Χρυσής Τομής είναι μια αριθμητική μέθοδος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται για να βρεθεί το ελάχιστο (ή το μέγιστο) μιας μονοδιάστατης συνάρτησης $f(x)$ εντός ενός κλειστού διαστήματος. Στη μέθοδο του χρυσού τομέα τα σημεία επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται κάποιες ιδιότητες. Η πρώτη από αυτές είναι το εύρος του νέου υποδιαστήματος αναζήτησης να συνδέεται με το προηγούμενο με μια σταθερά αναλογίας γ με $\gamma \in (0,1)$. Η άλλη είναι τα νέα $x_1,\ x_2$ για την επανάληψη $k+1$ πρέπει να επιλέγονται ώστε το ένα από αυτά να είναι ίδιο με το άλλο της προηγούμενης επανάληψης έτσι ώστε να απαιτείται μόνο ένας υπολογισμός της f κάθε φορά. Λύνοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν από τους τύπους για τα $x_1,\ x_2$ της επανάληψης $k+1$ προκύπτει η εξίσωση $\gamma^2+\gamma-1=0$ με ρίζες $\gamma=-1.618$ και $\gamma=0.618$, από τις οποίες αποδεκτή είναι μόνο η δεύτερη. Συνεπώς προκύπτει ότι $\gamma=0.618$. Παρουσιάζεται κι εδώ η τιμή l, το τελικό εύρος αναζήτησης.

- Αλγόριθμος

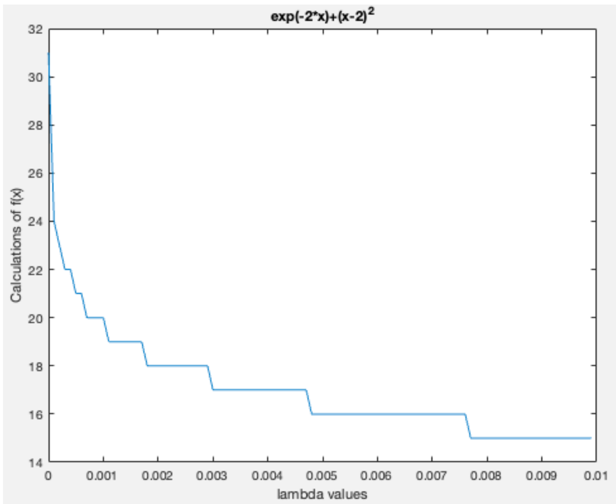
Για τον αλγόριθμο γίνεται αρχικοποίηση των $x_1,\ x_2$ για την πρώτη επανάληψη σύμφωνα με τους τύπους $x_1=a+(1-\gamma)(b-a)$ και $x_2=a+\gamma(b-a)$ με $\gamma=0.618$ και υπολογίζονται οι τιμές $f(x_1),\ f(x_2)$. Εφόσον δεν ικανοποιείται το κριτήριο για το τελικό εύρος αναζήτησης $l \geq b-a$, διακρίνονται δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση όπου $f(x_1)>f(x_2)$, το b παραμένει σταθερό και για το a ισχύει $a=x_1$. Υπολογίζεται η $f(x_1)$ και επανέρχεται στο πρώτο βήμα ο αλγόριθμος. Στην δεύτερη περίπτωση όπου $f(x_1)<f(x_2)$, το a παραμένει σταθερό και ισχύει $b=x_2$. Υπολογίζεται η $f(x_2)$ και ο αλγόριθμος επανέρχεται.

- Μετρήσεις

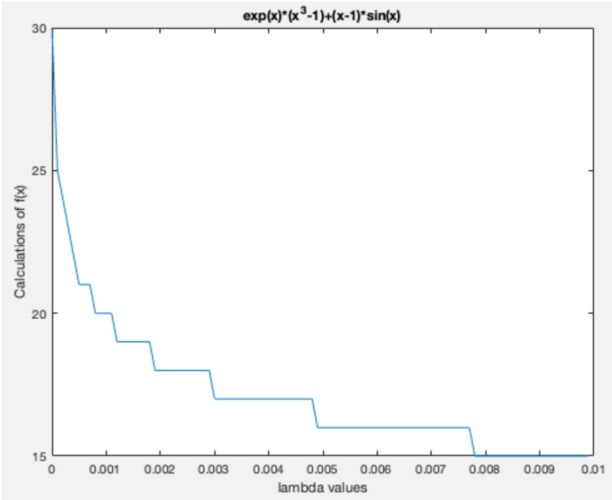
Ερώτημα 1:



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_1(x)=(x-2)^2+x\ln(x-3)$ - τελικού εύρους αναζήτησης



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_2(x)=e^{-2x}+(x-2)^2$ - τελικού εύρους αναζήτησης

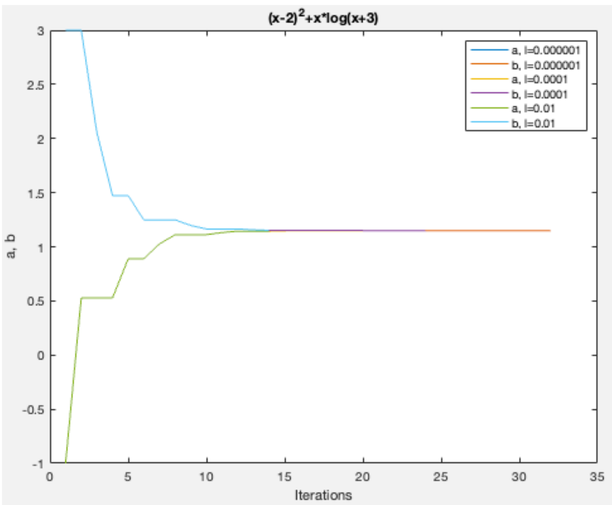


Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού
$f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x - 1)sin(x)$ - τελικού
εύρους αναζήτησης

Είναι εμφανές ότι οι γραφικές παραστάσεις και στα τρία διαγράμματα είναι σχεδόν ίδιες ανεξαρτήτως του τύπου της συνάρτησης και φαίνεται να μοιάζουν στην εκθετική συνάρτηση. Η f_3 χρειάστηκε έναν λιγότερο υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης για να ολοκληρωθεί ο αλγοριθμος. Αντλείται, έτσι, το συμπέρασμα ότι η ελαχιστοποίηση του τελικού εύρους αναζήτησης αυξάνει εκθετικά σχεδόν τον υπολογισμό της συνάρτησης $f(x)$, και άρα τον αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου. Το διάγραμμα που προέκυψε είναι αναμενόμενο, καθώς μεγαλύτερη ακρίβεια στην εύρεση της ρίζας (ελαχιστοποίηση τελικού εύρους αναζήτησης) συνεπάγεται και περισσότερους υπολογισμούς ανεξαρτήτως του τύπου της συνάρτησης. Στην συγκεκριμένη μέθοδο, στην πρώτη επανάληψη η $f(x)$ υπολογίζεται δυο φορές και μία για κάθε επανάληψη έπειτα από την πρώτη, σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο. Γίνεται κατανοητό από τις γραφικές παραστάσεις καθώς συγκρίνοντας με αυτές του ερωτήματος 1 του θέματος 1 για $l = 0.002$ χρειάστηκαν 32 επαναλήψεις ενώ εδώ μόλις 18.

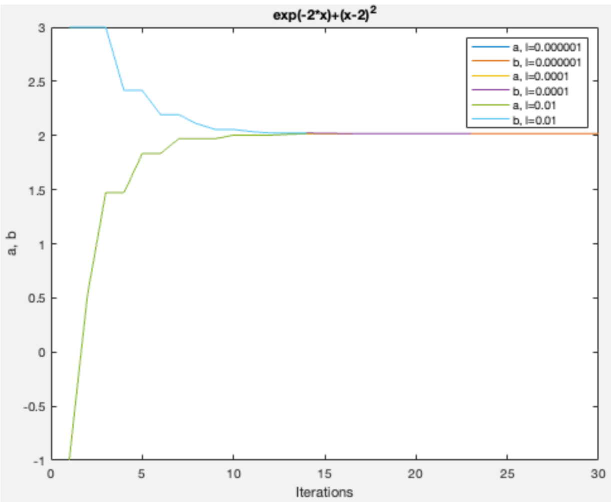
Ερώτημα 2:

Για την συνάρτηση $f_1(x) = (x - 2)^2 + xln(x - 3)$ για $l = 0.000001, l = 0.0001, l = 0.01$ προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.

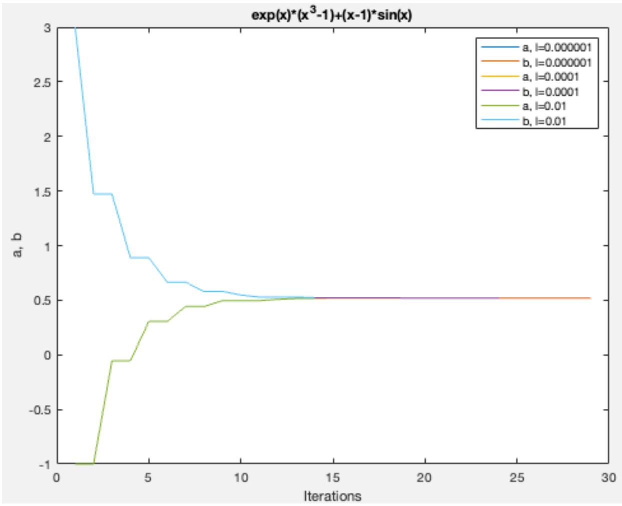


Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του
δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του
τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης
$f_1(x) = (x - 2)^2 + xln(x - 3)$

Αντίστοιχα με το προηγούμενο θέμα παρατηρούνται 3 ζώνες όπου τα χρώματα αλλάζουν επισημαίνοντας τον αριθμό επαναλήψεων που χρειάζεται για την επιθυμητή σύγκλιση σε κάθε περίπτωση. Είναι φανερό ότι συγκρίνοντας με τα διαγράμματα του ερωτήματος 3 του προηγούμενου θέματος η μέθοδος αυτή συγκλίνει πιο αργά από τη μέθοδο της διχοτόμου, καθώς η μια χρειάζεται 14 επαναλήψεις και η άλλη μόλις 10 για να επιτύχουν την επίλυση με την ίδια ακρίβεια ($l = 0.01$). Παρακάτω παρατίθενται τα αντίστοιχα ζητούμενα διαγράμματα για τις λοιπές συναρτήσεις όπου ισχύουν $l = 0.000001$, $l = 0.0001$ και $l = 0.01$.



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x-1)sin(x)$

Είναι αντιληπτό ότι ισχύουν τα ίδια χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν για την συνάρτηση f_1 αντίστοιχα για τις f_2 και f_3. Συνεπώς, η μέθοδος χρυσής τομής αργεί να συγκλίσει σε σχέση με την μέθοδο της διχοτόμου, απαιτεί δηλαδή παραπάνω επαναλήψεις για να συγκλίνει στο επιθυμητό όριο, ωστόσο χρειάζεται λιγότερους υπολογισμούς για να φτάσει στο ίδιο αποτέλεσμα.

Θέμα 3:

- Εξήγηση της μεθόδου:

Η μέθοδος Fibonacci μοιάζει με αυτή του χρυσού τομέα. Η διαφορά βρίσκεται στον επιπλέον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης μετά τη δεύτερη επανάληψη. Διαφοροποιείται στο ότι το υποδιάστημα αναζήτησης στην k επανάληψη δεν συνδέεται με αυτό της $k-1$ επανάληψης με μια σταθερά αλλά μεταβάλλεται από επανάληψη σε επανάληψη στηριζόμενη στην ακολουθία Fibonacci η οποία ορίζεται από την αναδρομική σχέση $F_{\nu+1} = F_\nu + F_\nu - 1,\ \ \nu = 1, 2, \ldots$. Τα x_1, x_2 για την επανάληψη k ορίζονται από τις εξισώσεις:

$$x_1 = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k-1}}(b_k - a_k),\ \ k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$x_2 = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k-1}}(b_k - a_k),\ \ k = 1, 2, \ldots, n-1$$

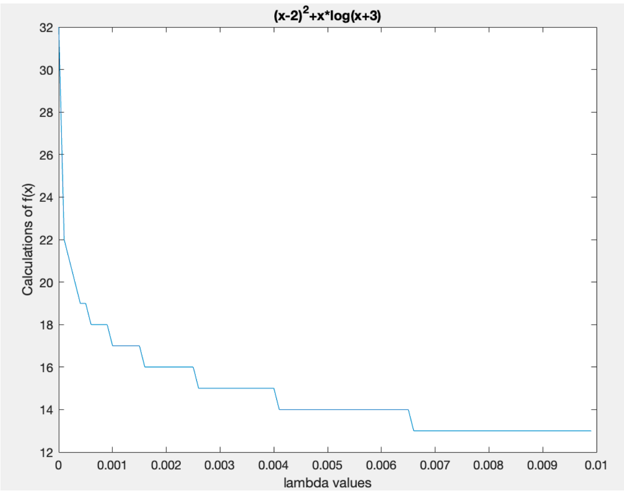
Διακρίνοντας περιπτώσεις για τη σχέση των $f(x_1)$ και $f(x_2)$, τα άκρα του διαστήματος αναζήτησης αλλάζουν για την επανάληψη $k+1$ όπου επιλέγονται έτσι ώστε το ένα από αυτά να ισούται με το x_1 ή x_2 της προηγούμενης επανάληψης, μειώνοντας το διάστημα αναζήτησης κατα $\dfrac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$ σε κάθε επανάληψη. Έτσι, ομοίως με την προηγούμενη μέθοδο που περιγράφηκε, απαιτείται κάθε φορά μόνο ένας νέος υπολογισμός της $f(x)$ από τον αλγόριθμο. Σε αντίθεση με τις παραπάνω μεθόδους, η μέθοδος Fibonacci απαιτεί τον εκ των προτέρων προσδιορισμό των συνολικών υπολογισμών n της αντικειμενικής συνάρτησης. Μετά από $n-1$ επαναλήψεις το διάστημα αναζήτησης θα έχει μειωθεί από $b_1 - a_1$ σε $b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{F_n}$. Επομένως ο όρος $\frac{b_1 - a_1}{F_n}$ επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις ακρίβειας στον υπολογισμό του ελαχίστου σε κάθε περίπτωση.

- Αλγόριθμος:

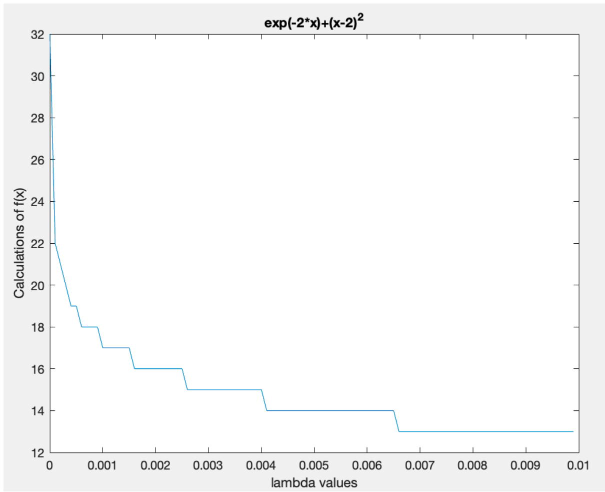
Για την αρχικοποίηση του αλγορίθμου επιλέγεται το εύρος του τελικού διαστήματος $l > 0$ και η σταθερά $\varepsilon > 0$, ορίζεται το αρχικό διάστημα αναζήτησης $[a, b]$ και επιλέγεται ο συνολικός αριθμός υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης $f(x)$ έτσι ώστε να ισχύει $F_n > \frac{b_1 - a_1}{l}$. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα $f(x_1)$ και $f(x_2)$ και ξεκινάει η πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου όπου διακρίνονται περιπτώσεις. Αν $f(x_1) > f(x_2)$ το a παίρνει την τιμή του x_1, το b παραμένει σταθερό, το x_1 γίνεται ίδιο με το x_2 και το x_2 αλλάζει σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους. Αν αυτή δεν είναι η προτελευταία επανάληψη ο αλγόριθμος επιστρέφει στο πρώτο βήμα για την επόμενη επανάληψη, αλλιώς το x_1 παραμένει σταθερό και το x_2 γίνεται $x_1 + \varepsilon$. Αν ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$ η ρίζα είναι στο $[x_1, b]$ αλλιώς στο $[a, x_2]$. Αν το αρχικό $f(x_1)$ είναι μικρότερο του $f(x_2)$ το a παραμένει σταθερό, το b γίνεται x_2, το x_2 γίνεται x_1 και το x_1 αλλάζει σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους. Αν αυτή είναι η προτελευταία επανάληψη τότε επαναλαμβάνεται η τελική διαδικασία, ειδάλλως ο αλγόριθμος επιστρέφει στο πρώτο βήμα.

- Μετρήσεις

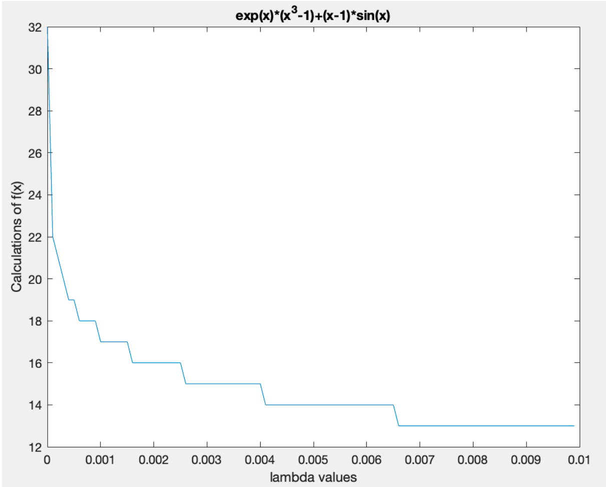
Ερώτημα 1:



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_1(x) = (x-2)^2 + x ln(x-3)$ - τελικού εύρους αναζήτησης



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$ - τελικού εύρους αναζήτησης

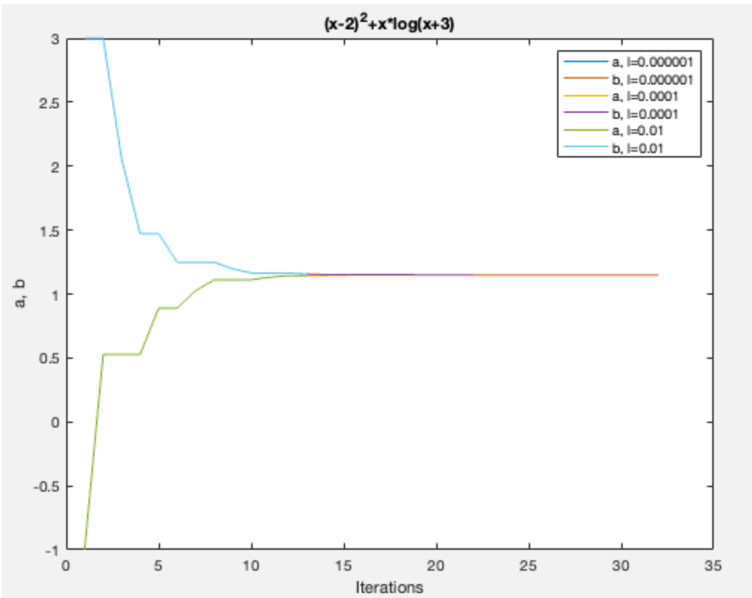


Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού
$f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x - 1)sin(x)$ - τελικού
εύρους αναζήτησης

Εύκολα αναγνωρίζεται ότι οι αλγόριθμοι έχουν αρκετά μεγάλη ομοιότητα. Για ίδιο τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$ ο αλγόριθμος χρυσής τομής χρειάστηκε 15 υπολογισμούς για τις συναρτήσεις ενώ ο αλγόριθμος Fibonacci χρειάστηκε 13. Αυτό δείχνει ότι ενώ οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν δυο σημεία για να χωρίσουν το αρχικό εύρος αναζήτησης, ο αλγόριθμος Fibonacci περιορίζει πιο αποτελεσματικά το εύρος αναζήτησης με το πέρασμα των επαναλήψεων.

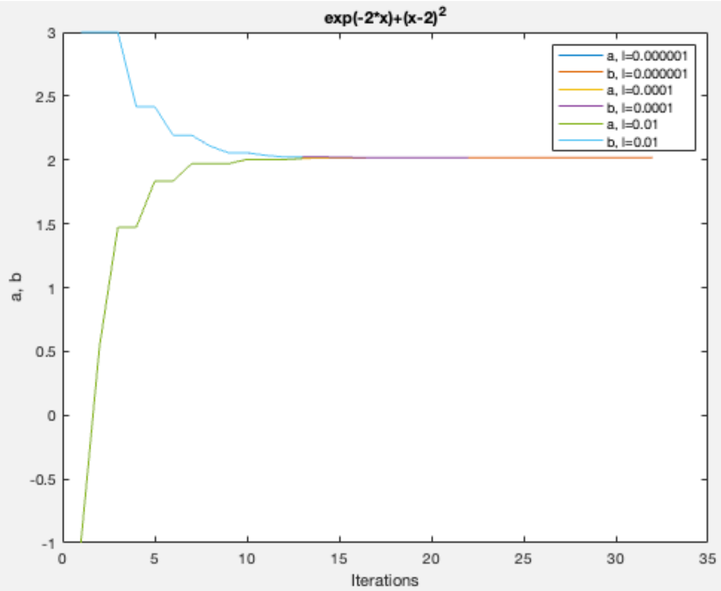
Ερώτημα 2:

Για την συνάρτηση $f_1(x) = (x - 2)^2 + xln(x - 3)$ για $l = 0.000001$, $l = 0.0001$, $l = 0.01$ και $\varepsilon = 0.001$ προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.

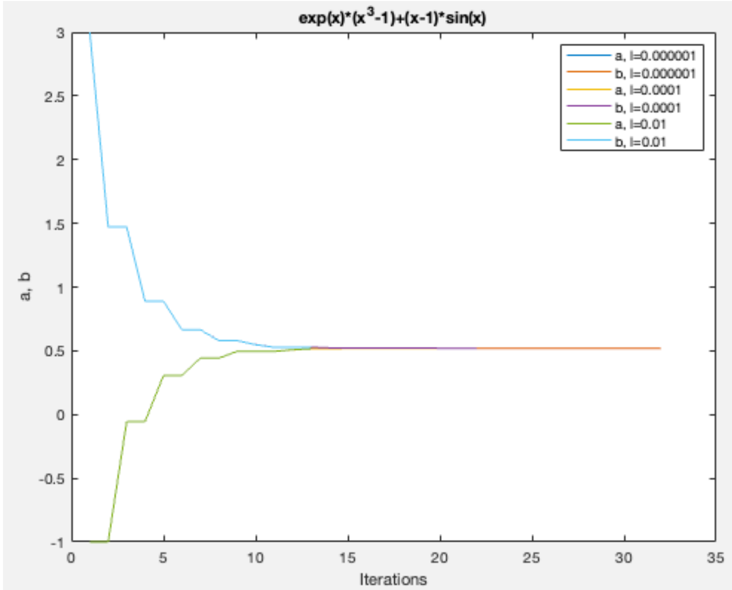


Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης
$f_1(x) = (x - 2)^2 + xln(x - 3)$ και $\varepsilon = 0.001$

Σε αυτό το διάγραμμα αποδεικνύεται και πάλι ότι ο αλγόριθμος Fibonacci είναι πιο αποτελεσματικός. Στην προηγούμενη περίπτωση χρειάστηκαν 14 επαναλήψεις για να επιτευχθεί τελικό εύρος αναζήτησης $l = 0.01$ ενώ αυτή τη φορά χρειάστηκαν 13, ενώ για $l = 0.0001$ η διαφορά είναι από 24 σε 22.
Παρακάτω παρατίθενται τα λοιπά διαγράμματα που ζητούνται.



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$ και $\varepsilon = 0.001$



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_3(x) = e^x(x^3 - 1) + (x-1)sin(x)$ και $\varepsilon = 0.001$

Αντίστοιχα αποτελέσματα παρατηρούνται και για τις συναρτήσεις f_2 και f_3. Για το ίδιο τελικό εύρος αναζήτησης ο αλγόριθμος Fibonacci κατάφερε να συγκλίνει 1 έως και 3 επαναλήψεις νωρίτερα.

Ωστόσο, παρόλο που ο αλγόριθμος χρυσής τομής είναι ελάχιστα λιγότερο αποδοτικός, ο ρυθμός μείωσης του διαστήματος είναι σταθερός, ενώ στον αλγόριθμο Fibonacci απαιτείται ο υπολογισμός της ακολουθίας Fibonacci καθώς ο ρυθμός μείωσης του διαστήματος είναι μεταβλητός.

Θέμα 4:

- Εξήγηση της μεθόδου:

Η μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγων διαφέρει από τις προηγούμενες τρεις μεθόδους διότι προϋποθέτει η συνάρτηση να είναι ψευδοκυρτή, άρα και διαφορίσιμη, και να είναι γνωστή η παράγωγός της στο διάστημα αναζήτησης $[a, b]$. Αυτή η μέθοδος χωρίζει το διάστημα αναζήτησης σε δυο ίσα μέρη, εξετάζει την κυρτότητα της συνάρτησης στα δυο μισά και προσαρμόζει με κάθε επανάληψη το διάστημα αυτό. Ακόμη, το κριτήριο τερματισμού, όπως και στον αλγόριθμο Fibonacci, δεν είναι το τελικό εύρος αναζήτησης αλλά η ολοκλήρωση των καθορισμένων επαναλήψεων.

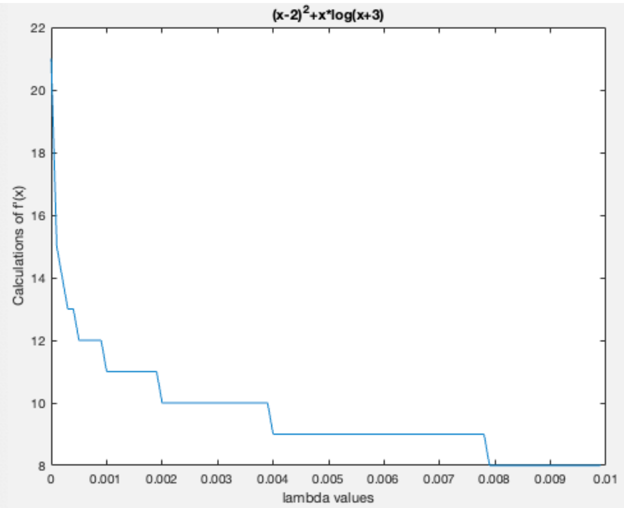
- Αλγόριθμος:

Για την αρχικοποίηση επιλέγεται εύρος τελικού διαστήματος λ>0 τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $0.5^2 \leq \dfrac{l}{b-a}$. Έστω $[\alpha_\kappa, \beta_\kappa]$ το διάστημα αναζήτησης στην k επανάληψη και $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$. Τότε διακρίνονται τρεις περιπτώσεις.

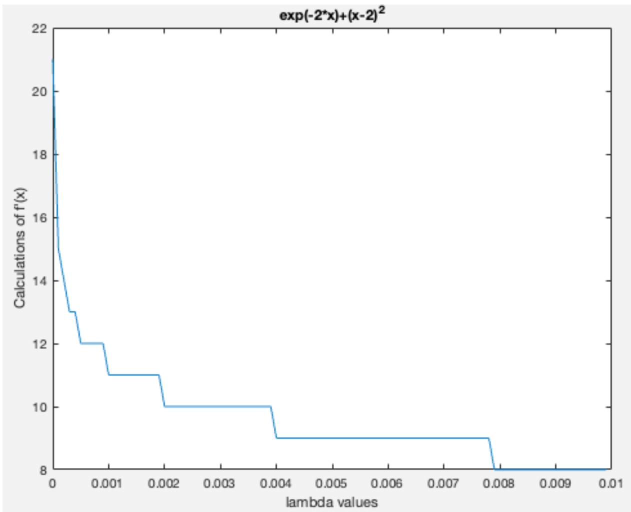
1. Αν $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_k} = 0$, τότε το σημείο ελάχιστου είναι το x_k
2. Αν $\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_k} > 0$, τότε $b_{k+1} = x_k$ και ο αλγόριθμος επιστρέφει στο πρώτο βήμα, αν $k = n$ ο αλγόριθμος τερματίζει.
3. Αν$\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_k} < 0$, τότε $a_{k+1} = x_k$ και ο αλγόριθμος επιστρέφει στο πρώτο βήμα, αν $k = n$ ο αλγόριθμος τερματίζει.

- Μετρήσεις:

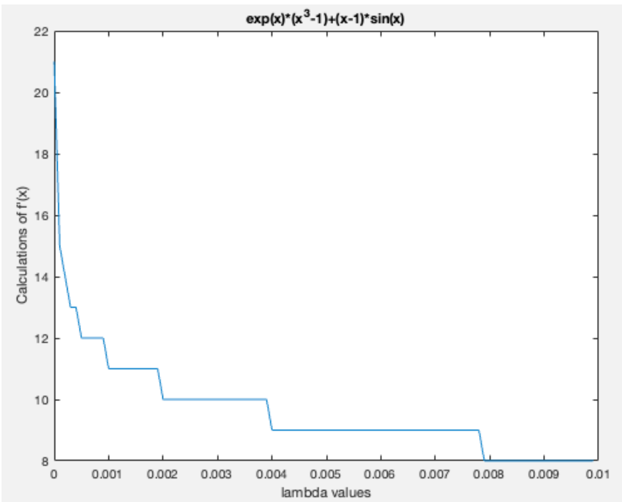
Ερώτημα 1:



Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_1'(x) = 2(x-2) + ln(x+3) + \frac{x}{(x+3)}$ - τελικού εύρους αναζήτησης



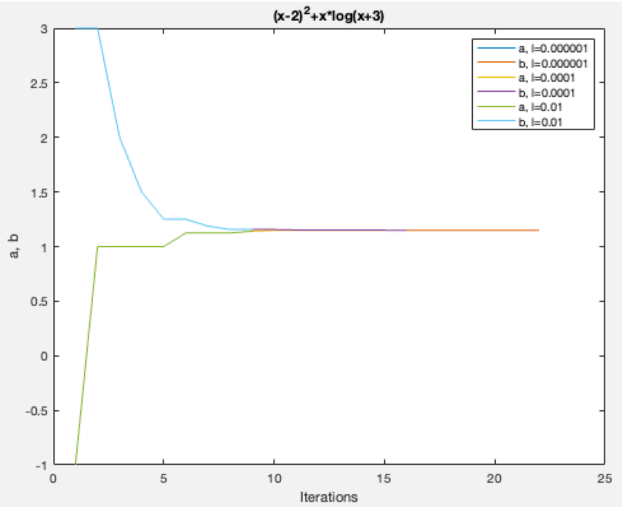
Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_2'(x) = 2(x-2) - 2e^{-2x}$ - τελικού εύρους αναζήτησης



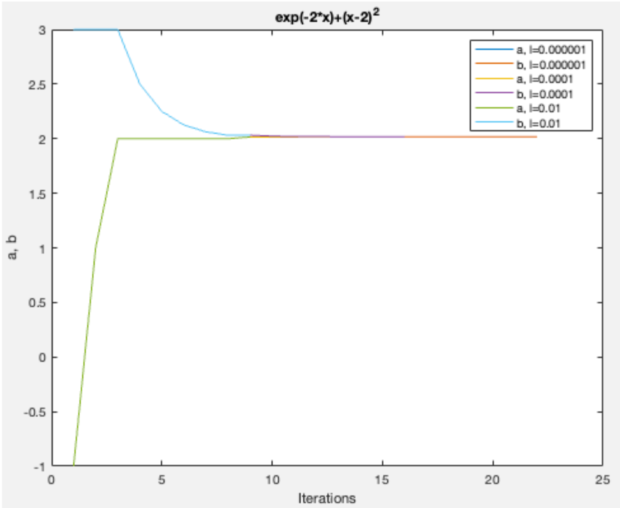
Διάγραμμα πλήθος υπολογισμού $f_3'(x) = sin(x) + cos(x)(x-1) + e^x(x^3 + 3x^2 - 1)$ - τελικού εύρους αναζήτησης

Όπως φαίνεται στα διαγράμματα, υπάρχει σημαντική μείωση στους υπολογισμούς συγκριτικά με την προηγούμενη μέθοδο. Ενώ απαιτούνταν 13 υπολογισμοί στη μέθοδο της χρυσής τομής, η μέθοδος διχοτόμησης με χρήση παραγώγου χρειάζεται μόλις 8. Αντίστοιχες παρατηρήσεις γίνονται και για διαφορετικές τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης.

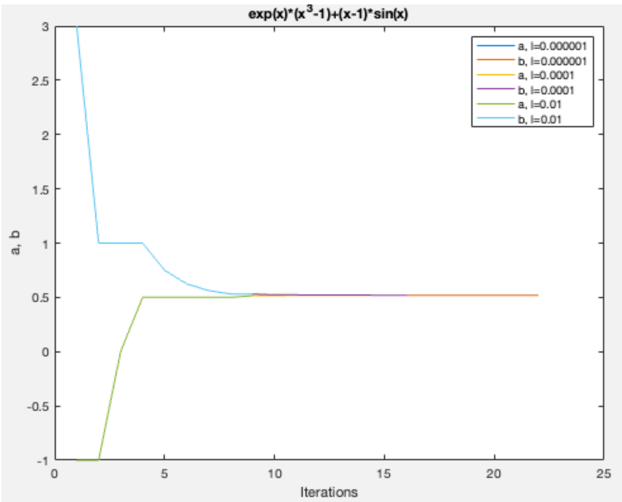
Ερώτημα 2:



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_1(x) = (x-2)^2 + x\,ln(x-3)$



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$



Άκρα του διαστήματος $[\alpha, b]$ συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k για διάφορες τιμές του τελικού εύρους αναζήτησης l της συνάρτησης $f_3(x) = e^x(x^3-1) + (x-1)sin(x)$

Αναμενόμενο είναι και σε αυτή την περίπτωση η συγκεκριμένη μέθοδος να είναι πιο αποτελεσματική. Για $l = 0.01$ χρειάζονται 9 επαναλήψεις ενώ στην μέθοδο χρυσής τομής 13, για $l = 0.0001$ η αντιστοιχία είναι 16 και 22, ενώ για $l = 0.000001$ είναι 22 έναντι 32. Οι αναλογίες ισχύουν και για τις τρεις συναρτήσεις.

Γενικά Σχόλια:

Σύμφωνα με τα ευρήματα αυτής της άσκησης η πιο αποδοτική μέθοδος για την εύρεση του ελαχίστου δοσμένης κυρτής μονοδιάστατης συνάρτησης είναι αυτή της Διχοτόμου με χρήση παραγώγου. Απαιτούνται οι λιγότεροι υπολογισμοί και οι λιγότερες επαναλήψεις για τη σύγκλιση στο σημείο. Ωστόσο, βασικό μειονέκτημα είναι η γνώση της παραγώγου της συνάρτησης f, γεγονός το οποίο δεν είναι πάντα εφικτό. Λιγότερο αποδοτικές είναι οι μέθοδοι της χρυσής τομής και Fibonacci, οι οποίες ακολουθούν την ίδια λογική αλλά χωρίζουν το διάστημα αναζήτησης με διαφορετικό τρόπο, και αυτός της τελευταίας είναι πιο αποδοτικός. Υπερισχύει, λοιπόν, η μέθοδος Fibonacci με ένα, όμως, μειονέκτημα. Ο λόγος του προηγούμενου διαστήματος αναζήτησης με το επόμενο δεν είναι σταθερός και απαιτείται ο υπολογισμός των λόγων αυτών, γεγονός το οποίο παραλείπεται από τα διαγράμματα. Αντιθέτως, στη μέθοδο της χρυσής τομής ο λόγος αυτός παραμείνει σταθερός. Σε όλες τις μεθόδους που αναφέρθηκαν χρειάζονται δύο αρχικοί υπολογισμοί της τιμής της συνάρτησης και ένας για κάθε επανάληψη που ακολουθεί. Αυτό δεν ισχύει για την τελευταία μέθοδο, τη μέθοδο της διχοτόμου, όπου χρειάζονται δυο υπολογισμοί σε κάθε επανάληψη. Η μέθοδος αυτή συγκλίνει γρηγορότερα από τη μέθοδο χρυσής τομής, χρειάζεται όμως τους διπλάσιους υπολογισμούς.