

# Περιεχόμενα

- Συναρτήσεις (Μέρος Α)
  - Ορισμός
  - Βασικές έννοιες
  - Τρόποι έκφρασης
  - Γραφική παράσταση
  - Χαρακτηριστικές συναρτήσεις
  - Γραφήματα στο Octave/Matlab

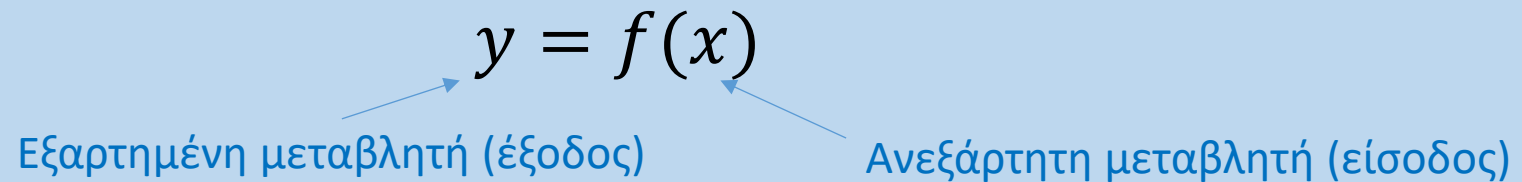
# Συνάρτηση $f$

**Ορισμός:** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη κενά σύνολα. Μία **συνάρτηση**  $f$  από το  $X$  στο  $Y$  είναι μια σχέση που συνδέει κάθε στοιχείο του  $X$  με ακριβώς ένα στοιχείο του  $Y$

$$y = f(x)$$

# Συνάρτηση $f$

**Ορισμός:** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη κενά σύνολα. Μία **συνάρτηση**  $f$  από το  $X$  στο  $Y$  είναι μια σχέση που συνδέει κάθε στοιχείο του  $X$  με ακριβώς ένα στοιχείο του  $Y$

$$y = f(x)$$


Εξαρτημένη μεταβλητή (έξοδος)

Ανεξάρτητη μεταβλητή (είσοδος)

# Συνάρτηση $f$

**Ορισμός:** Έστω  $X$  και  $Y$  δύο μη κενά σύνολα. Μία **συνάρτηση**  $f$  από το  $X$  στο  $Y$  είναι μια σχέση που συνδέει κάθε στοιχείο του  $X$  με ακριβώς ένα στοιχείο του  $Y$

$$y = f(x)$$

Εξαρτημένη μεταβλητή (έξοδος)

Ανεξάρτητη μεταβλητή (είσοδος)

- Αν τα σύνολα  $X$  και  $Y$  είναι σύνολα πραγματικών αριθμών, η συνάρτηση ονομάζεται **πραγματική συνάρτηση**
- Αν τα σύνολα  $X$  και  $Y$  είναι σύνολα μιγαδικών αριθμών, η συνάρτηση ονομάζεται **μιγαδική συνάρτηση** κλπ
- Εδώ θα ασχοληθούμε με πραγματικές συναρτήσεις

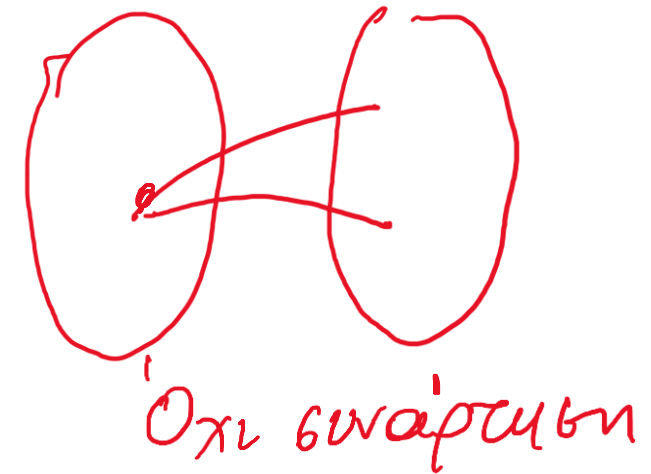
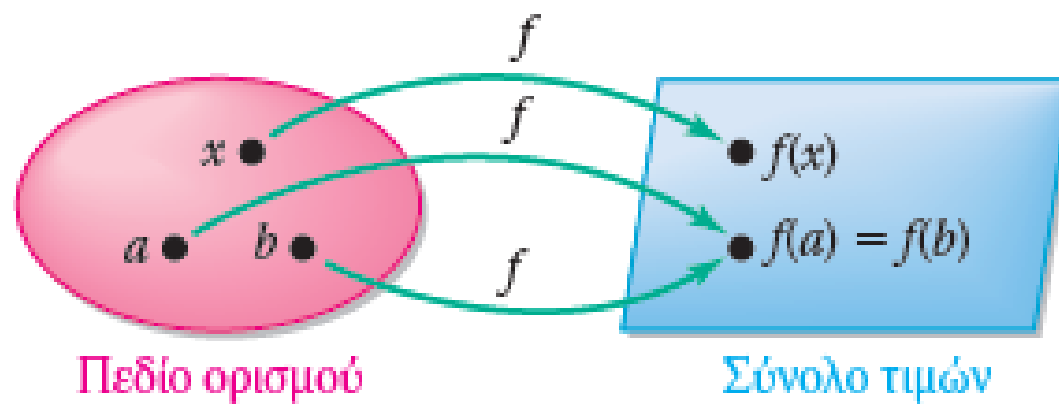
# Βασικές έννοιες

- Η συνάρτηση  $f$  λαμβάνει τιμές από το σύνολο  $A$  και παράγει τιμές στο σύνολο  $B$

$$f: A \rightarrow B$$

- Αν δοθεί η ίδια τιμή ως είσοδος θα παραχθεί η ίδια τιμή ως έξοδος
- **Πεδίο ορισμού συνάρτησης (domain):** είναι το σύνολο τιμών για το οποίο έχει νόημα η συνάρτηση
- **Πεδίο τιμών συνάρτησης (range):** είναι το σύνολο όλων των τιμών  $f(x)$  που παράγονται όταν το  $x$  μεταβάλλεται σε όλο το πεδίο ορισμού της  $f$ .

# Συνάρτηση

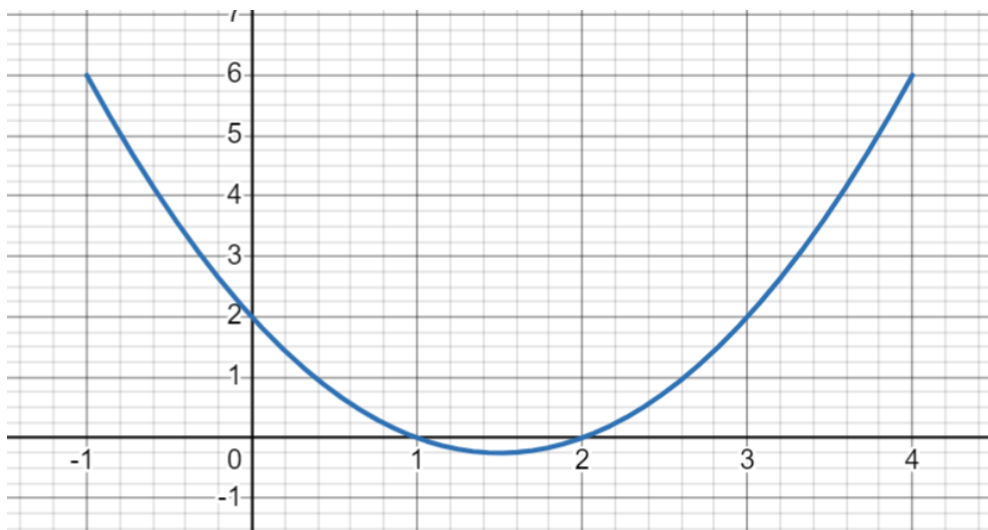


# Τρόποι έκφρασης συναρτήσεων

- Έκφραση με τύπο (αναλυτική έκφραση)

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

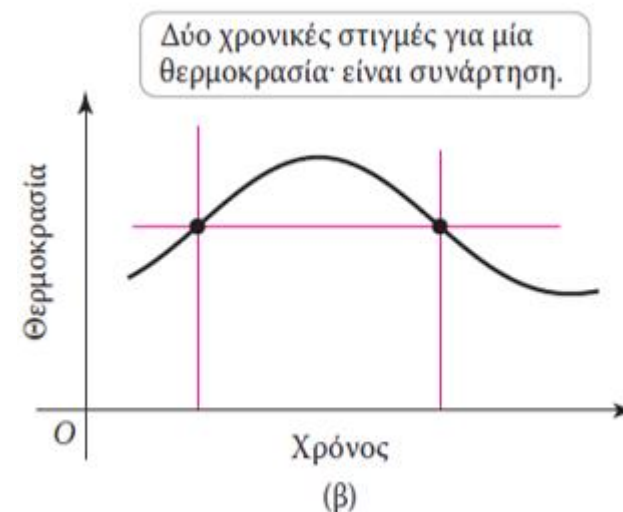
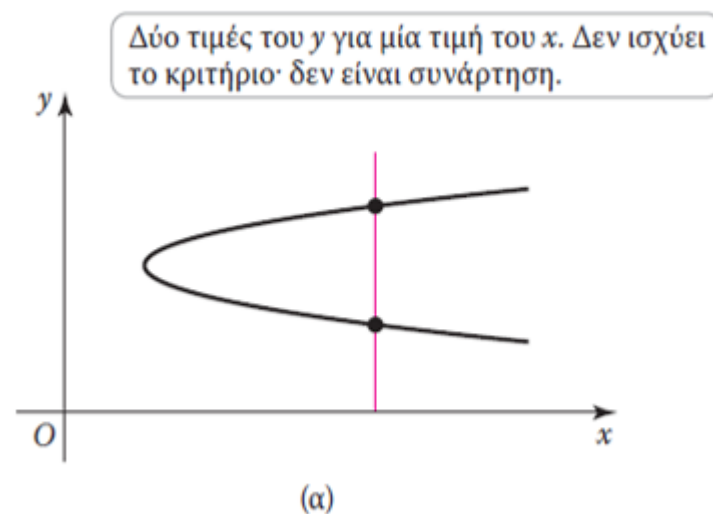
- Έκφραση με πίνακα τιμών
- Γραφική παράσταση συνάρτησης



$x$	$x^2 - 3x + 2$
-1	6
-0.5	3.75
0	2
0.5	0.75
1	0
1.5	-0.25
2	0
2.5	0.75
3	2
3.5	3.75
4	6

# Γραφική παράσταση συνάρτησης

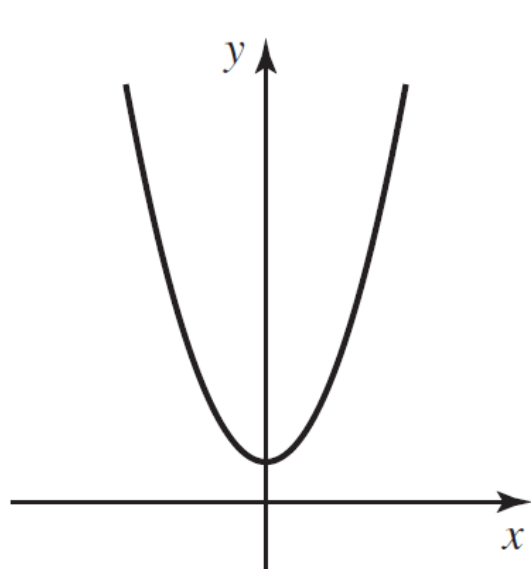
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με την ίδια τετμημένη
- **Κριτήριο της κατακόρυφης γραμμής:** δεν θα πρέπει η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης να τέμνεται από οποιαδήποτε κατακόρυφη γραμμή σε περισσότερα από ένα σημεία
- Αν για ένα σημείο  $x_0$  του άξονα  $x$  η κατακόρυφη γραμμή δεν τέμνει το γράφημα τότε το  $x_0$  δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$



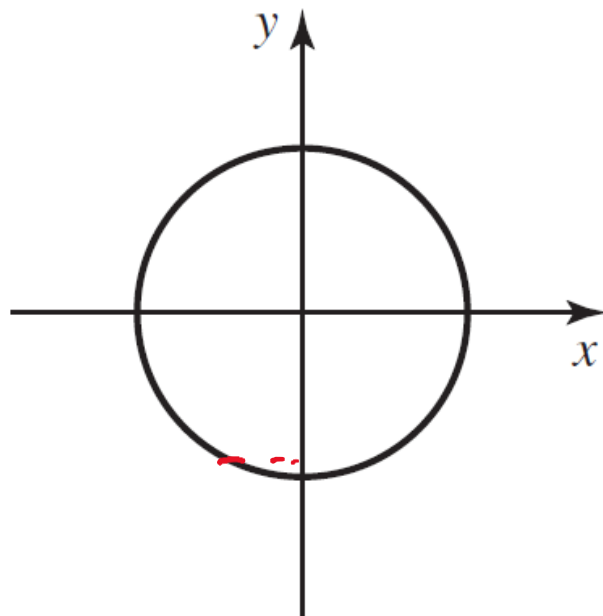


# Κριτήριο Κατακόρυφης Ευθείας

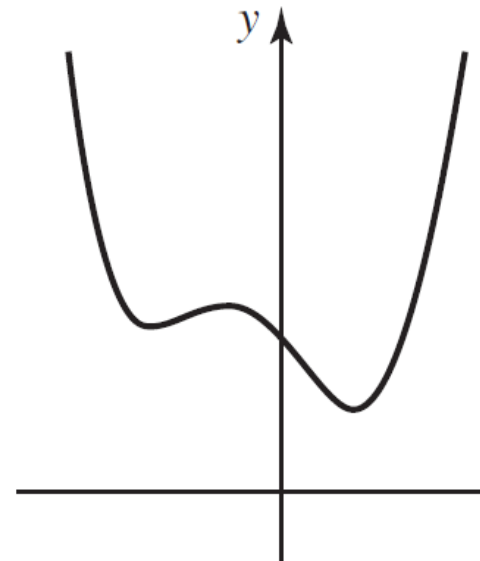
Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνει συνάρτηση;



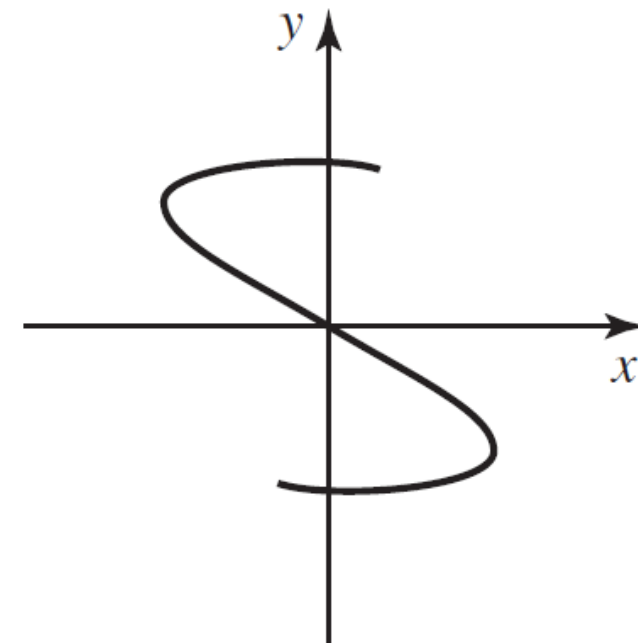
(α)



(β)



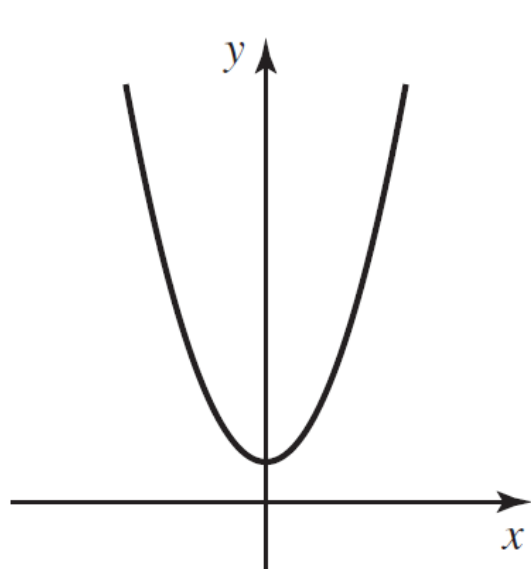
(γ)



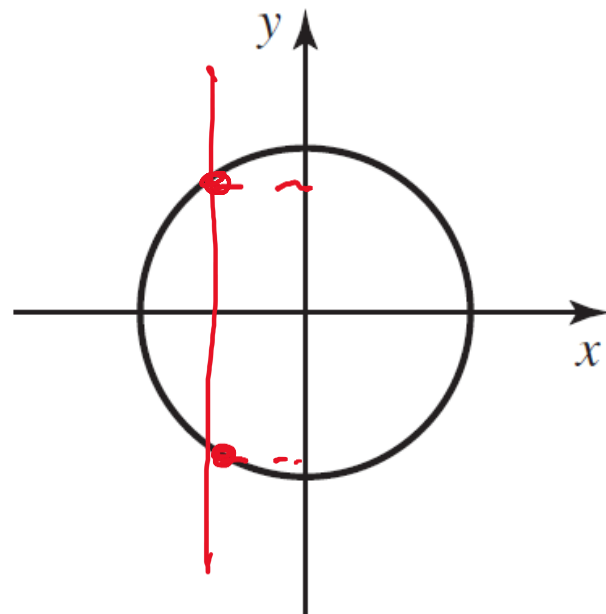
(δ)

# Κριτήριο Κατακόρυφης Ευθείας

Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνει συνάρτηση;

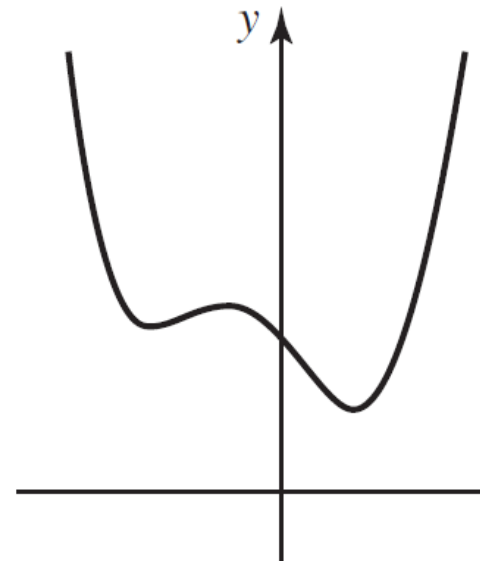


(α)

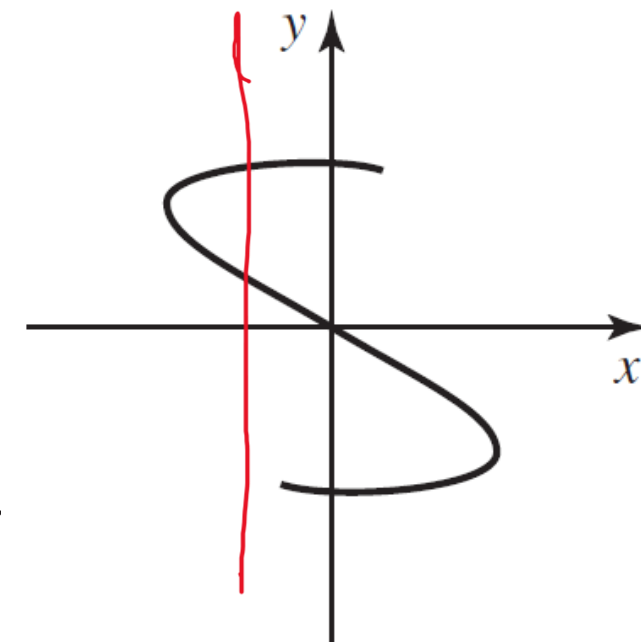


(β)

όχι συνάρτ



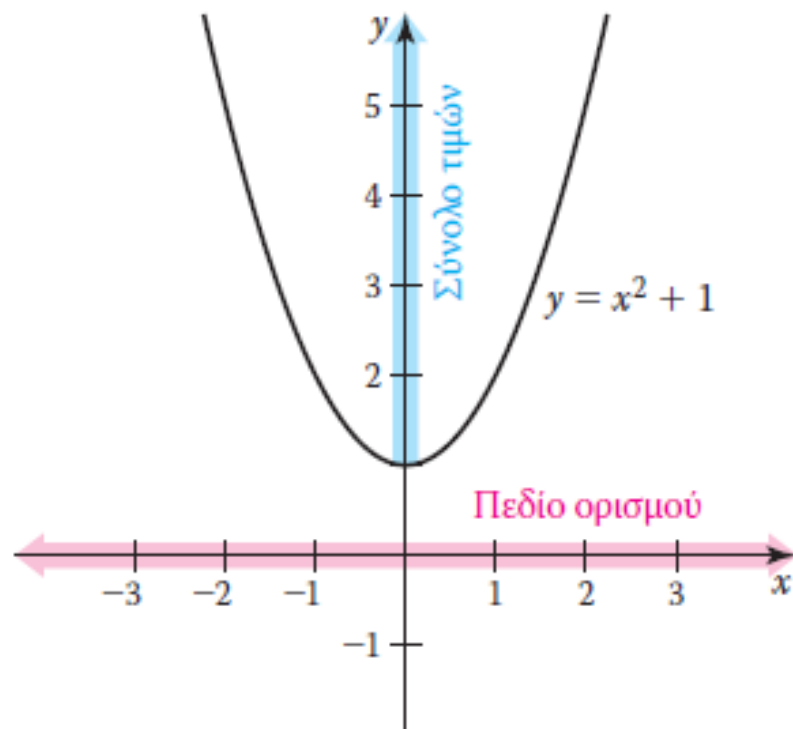
(γ)



(δ)

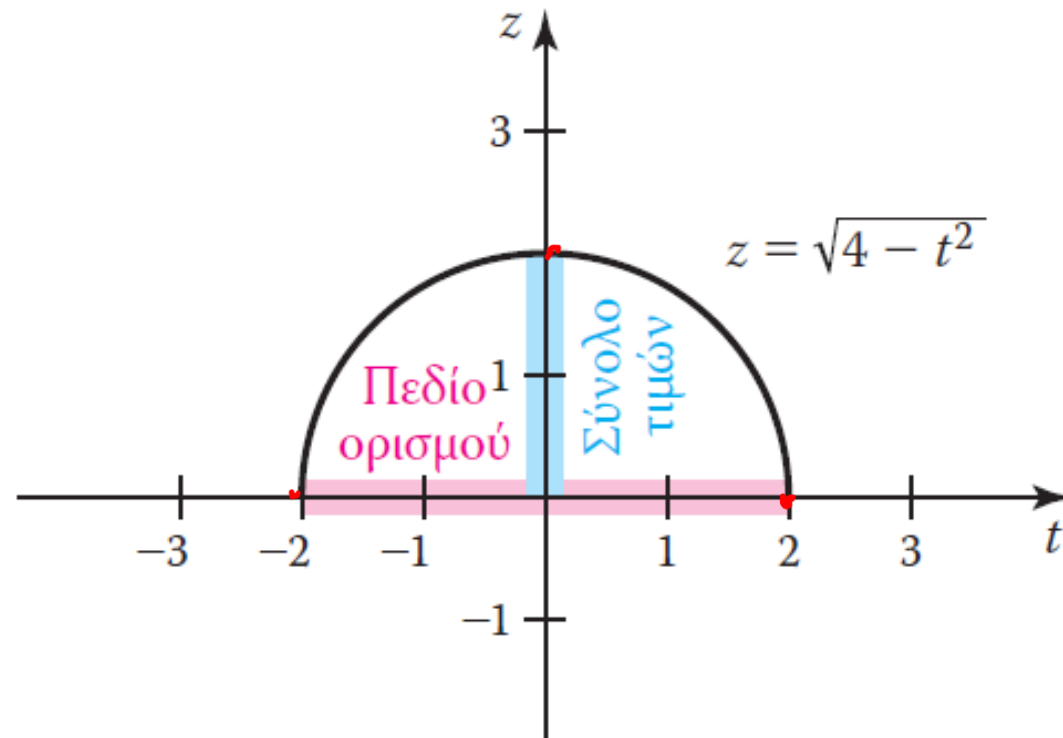
όχι

# Παράδειγμα 1

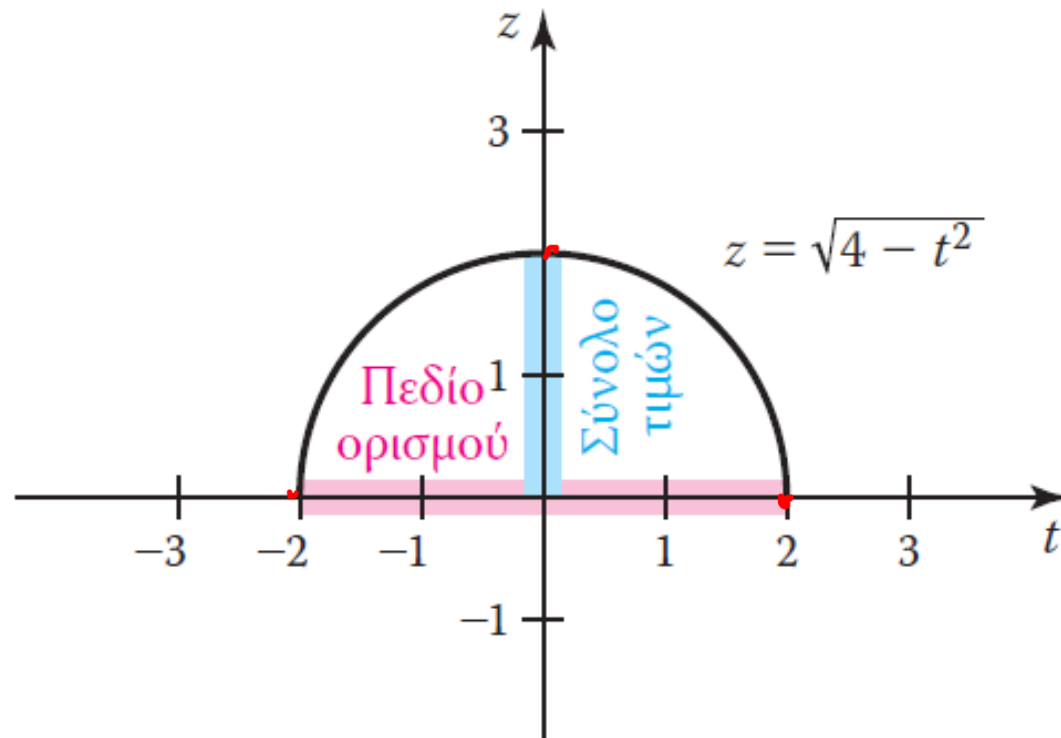


Η συνάρτηση  $f(x)=x^2+1$  είναι πολυωνυμική και ορίζεται για όλες τις τιμές του  $x$ . Επομένως  $D(f)= \mathbb{R}$ .  
Επειδή  $x^2 \geq 0$  για κάθε  $x$ , είναι  $x^2+1 \geq 1$ , άρα το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το  $[1, \infty)$ .

## Παράδειγμα 2



## Παράδειγμα 2



$$4 - t^2 \geq 0$$

$$4 \geq t^2$$

$$t^2 \leq 4$$

$$\sqrt{t^2} \leq \sqrt{4}$$

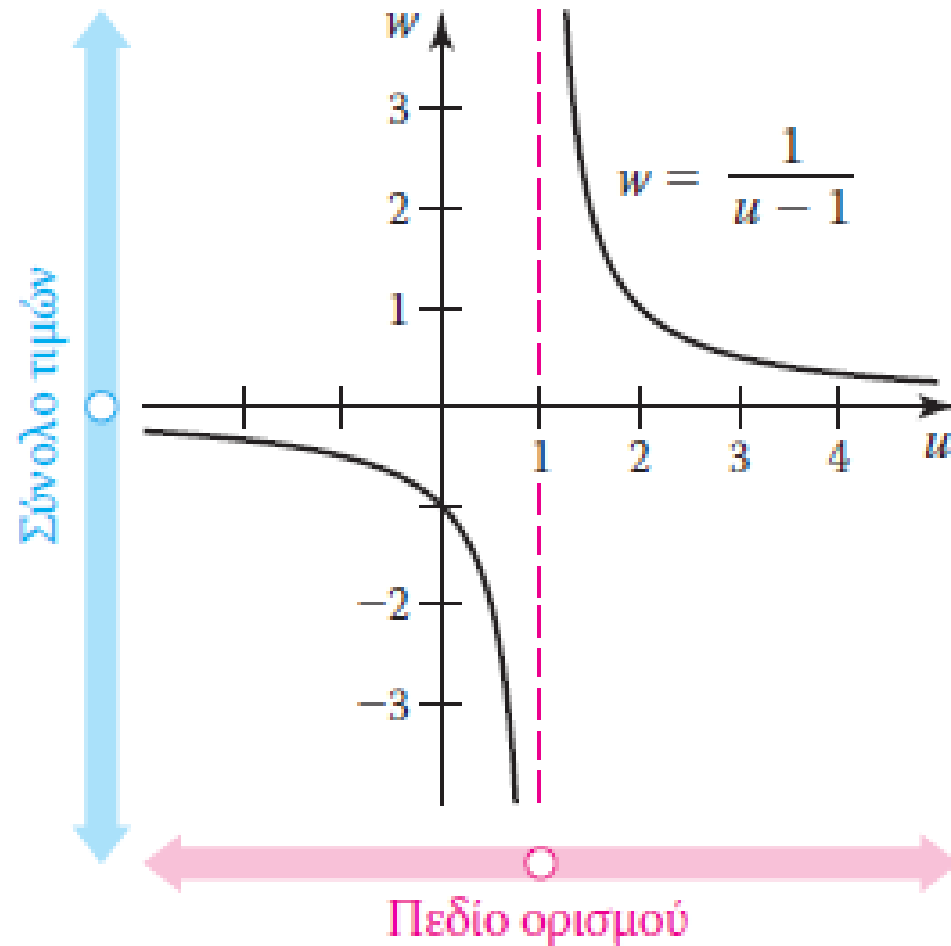
$$|t| \leq 2$$

$$-2 \leq t \leq 2$$

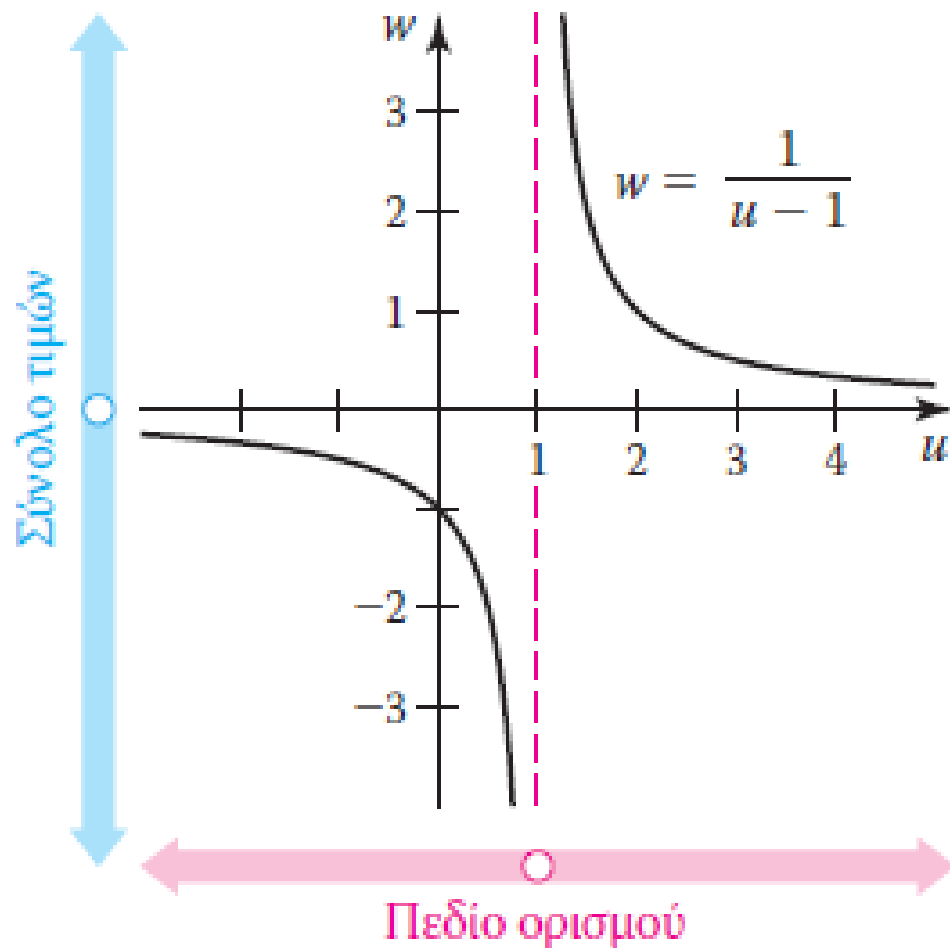
$$D(f) = [-2, 2]$$

$$R(f) = [0, 2]$$

# Παράδειγμα 3



# Παράδειγμα 3



$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^* =$$

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}^*$$

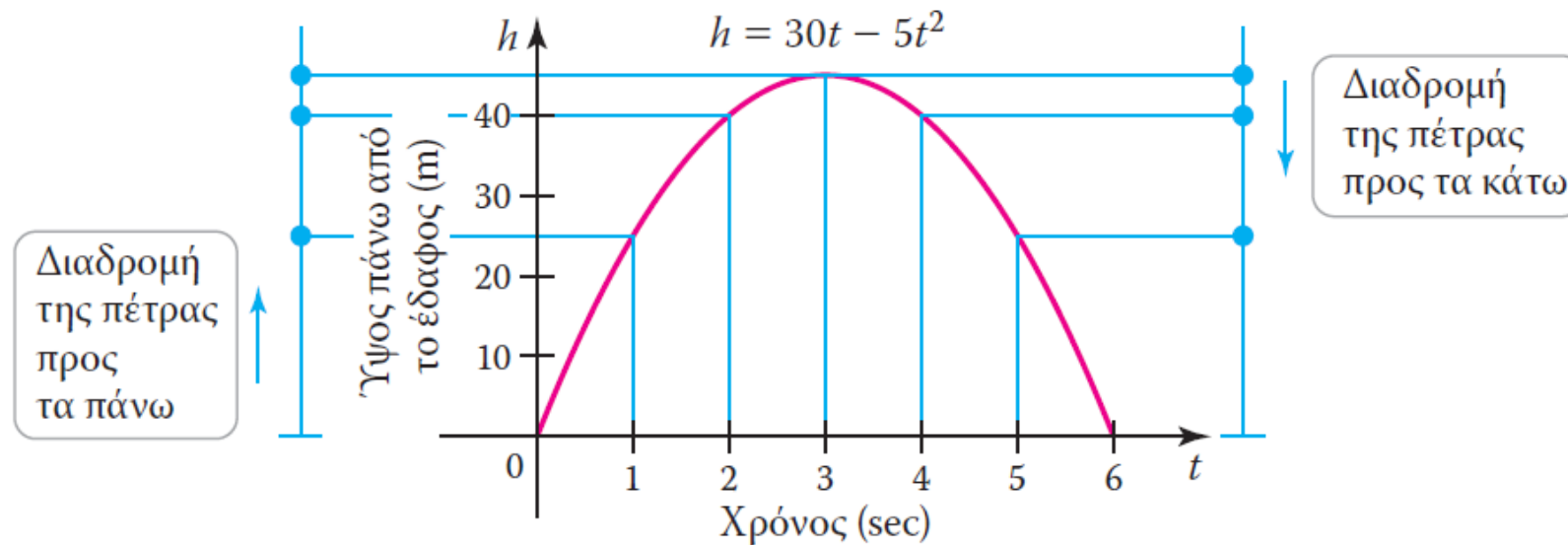
## Παράδειγμα 4

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα  $30m/sec$ . Το ύψος της πάνω από το έδαφος σε μέτρα δίνεται ως  $h = 30t - 5t^2$ . Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $h$ .



# Παράδειγμα 4

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  μια πέτρα ρίχνεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα  $30\text{m/sec}$ . Το ύψος της πάνω από το έδαφος σε μέτρα δίνεται ως  $h = 30t - 5t^2$ . Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $h$ .

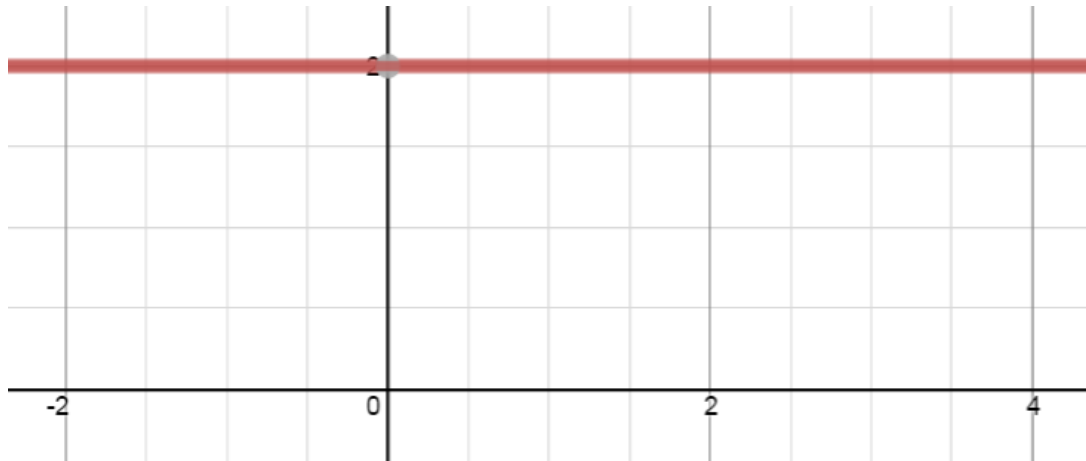


# Λύση

- Αν και η  $h$  ορίζεται για κάθε  $t$ , οι μόνοι συναφείς χρόνοι είναι η χρ. στιγμή  $t = 0$  και όταν βρίσκει το έδαφος  $t = 6$  (λύση της εξίσωσης  $h = 0 \Leftrightarrow 30t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow 5t(6 - t) = 0 \Leftrightarrow$ ).
- Άρα  $D(f) = [0,6]$
- Η μεγαλύτερη τιμή του  $h$  είναι στα μισά της διαδρομής δηλ. για  $t = 3$ . Τότε  $h = 45$ , άρα σύνολο τιμών  $R(f) = [0,45]$ .
- Σημείωση: Το παραπάνω γράφημα δεν είναι η τροχιά της πέτρας η οποία είναι κατακόρυφη.

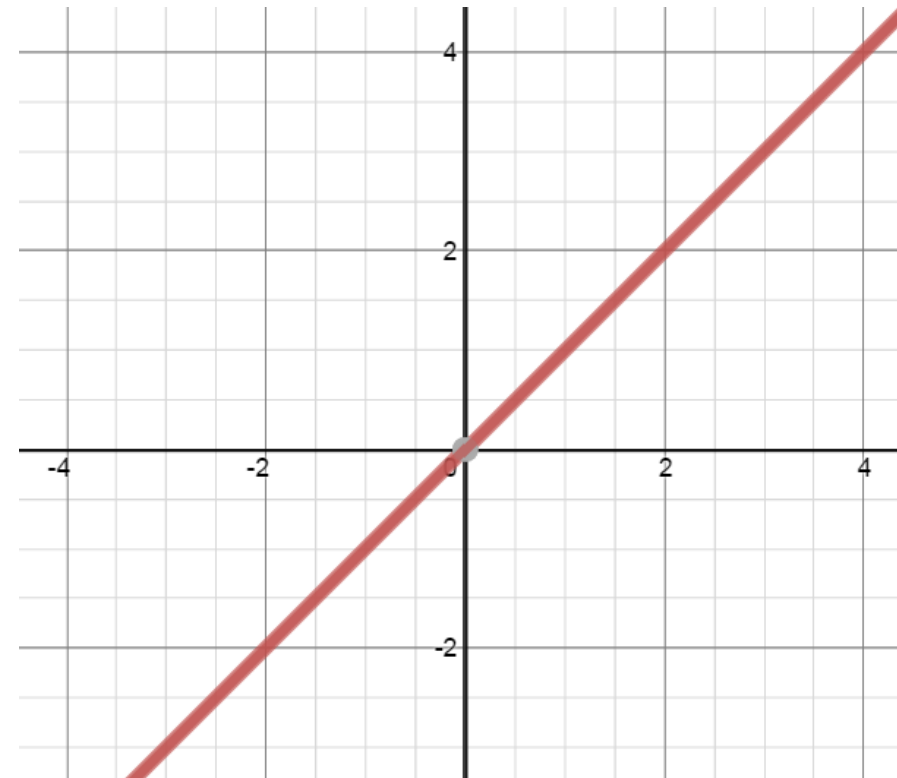
# Χαρακτηριστικές συναρτήσεις (1/6)

$$f(x) = k$$



σταθερή συνάρτηση

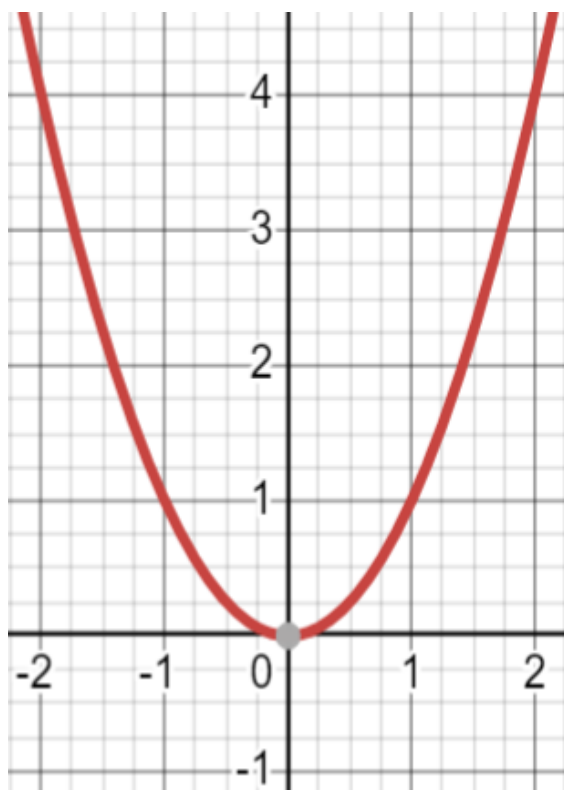
$$f(x) = x$$



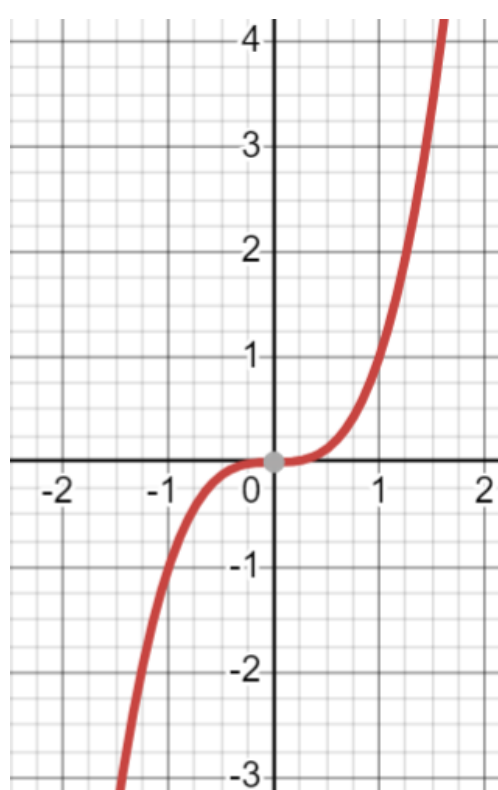
ταυτοτική συνάρτηση

# Χαρακτηριστικές συναρτήσεις (2/6)

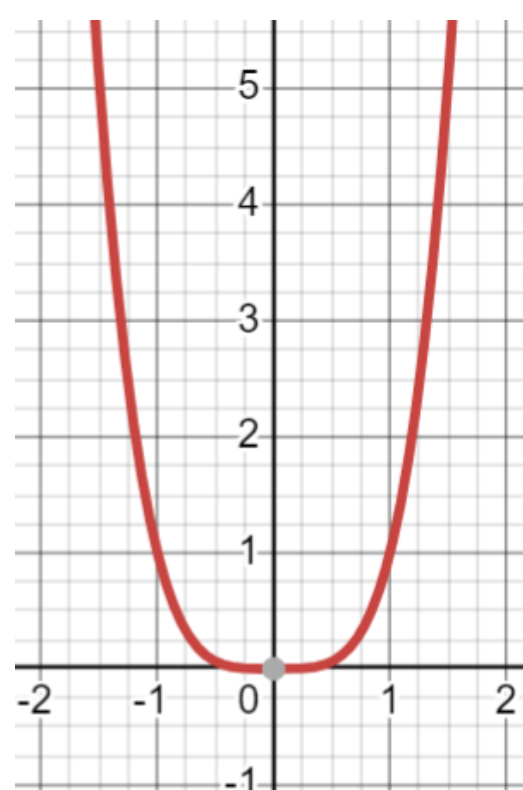
Συνάρτηση Δύναμης  $f(x) = x^n$ ,  $n$  θετικός ακέραιος



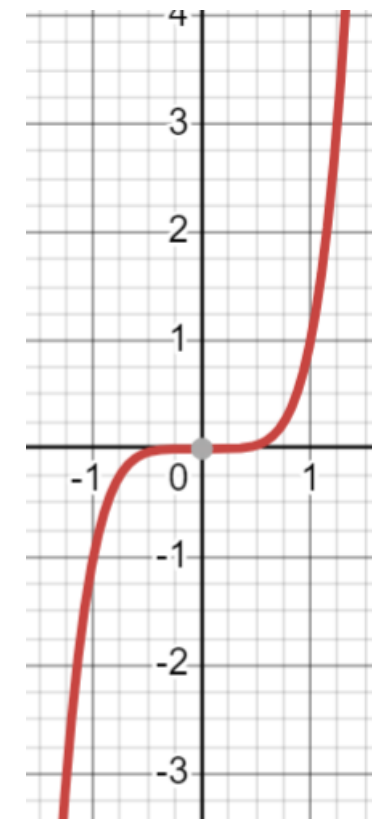
$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = x^3$$



$$f(x) = x^4$$



$$f(x) = x^5$$

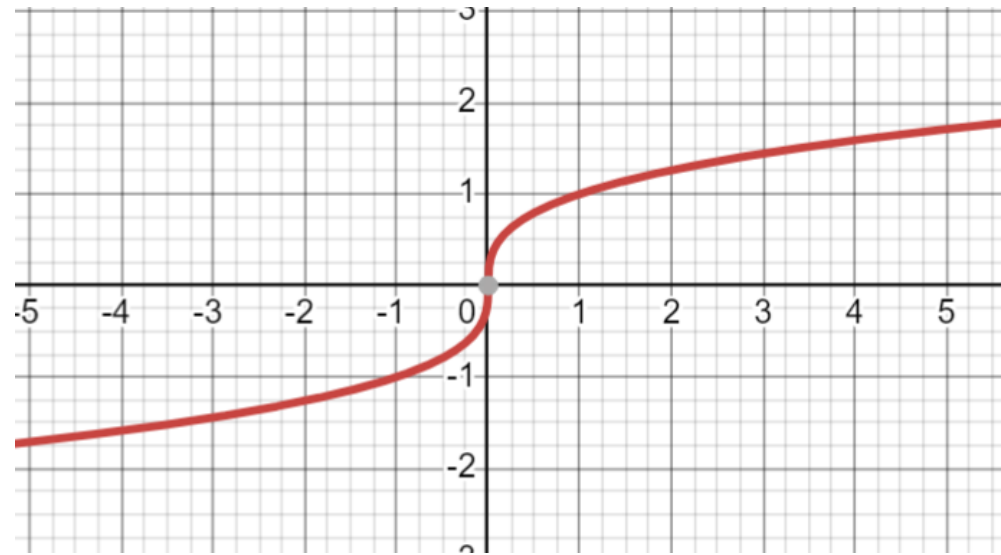
# Χαρακτηριστικές συναρτήσεις (3/6)

$$f(x) = \sqrt{x}$$



συνάρτηση τετραγωνικής ρίζας

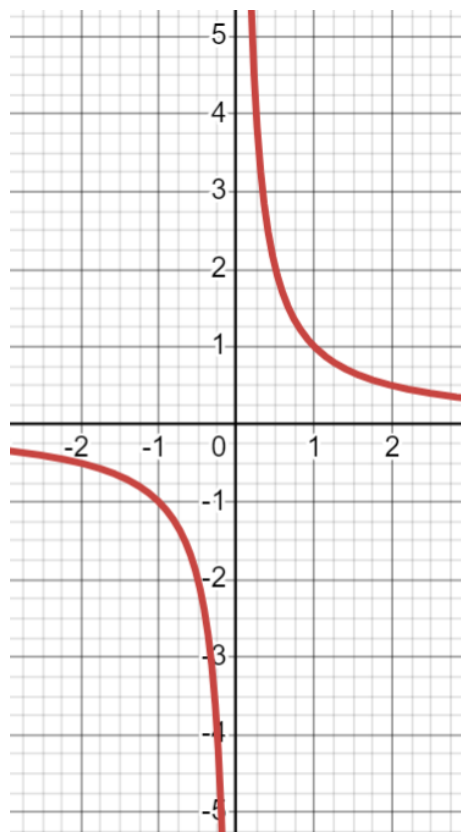
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



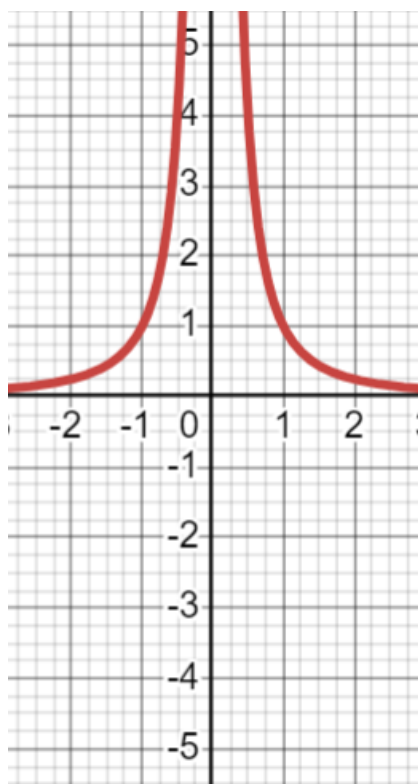
συνάρτηση κυβική ρίζας

# Χαρακτηριστικές συναρτήσεις (4/6)

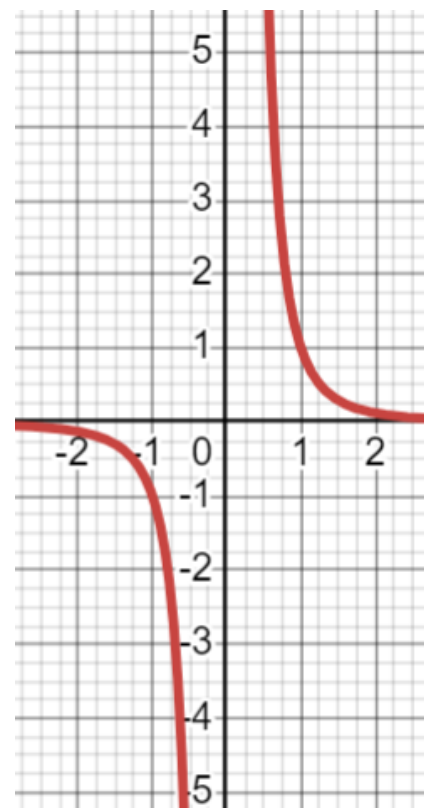
**Συνάρτηση Αντίστροφης Δύναμης**  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ,  $n$  θετικός ακέραιος



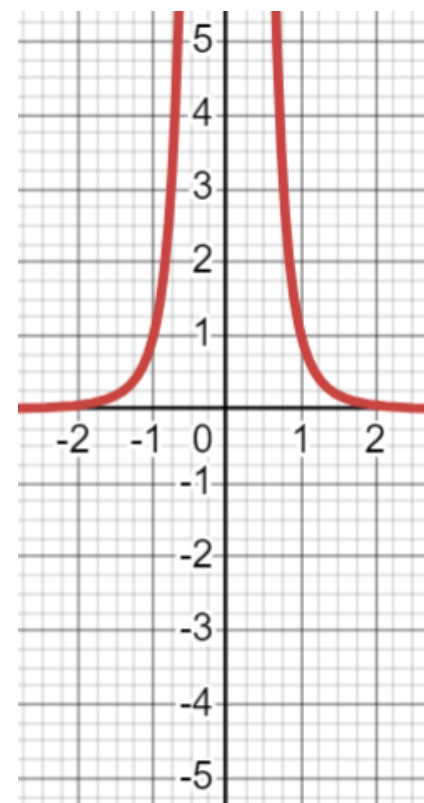
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



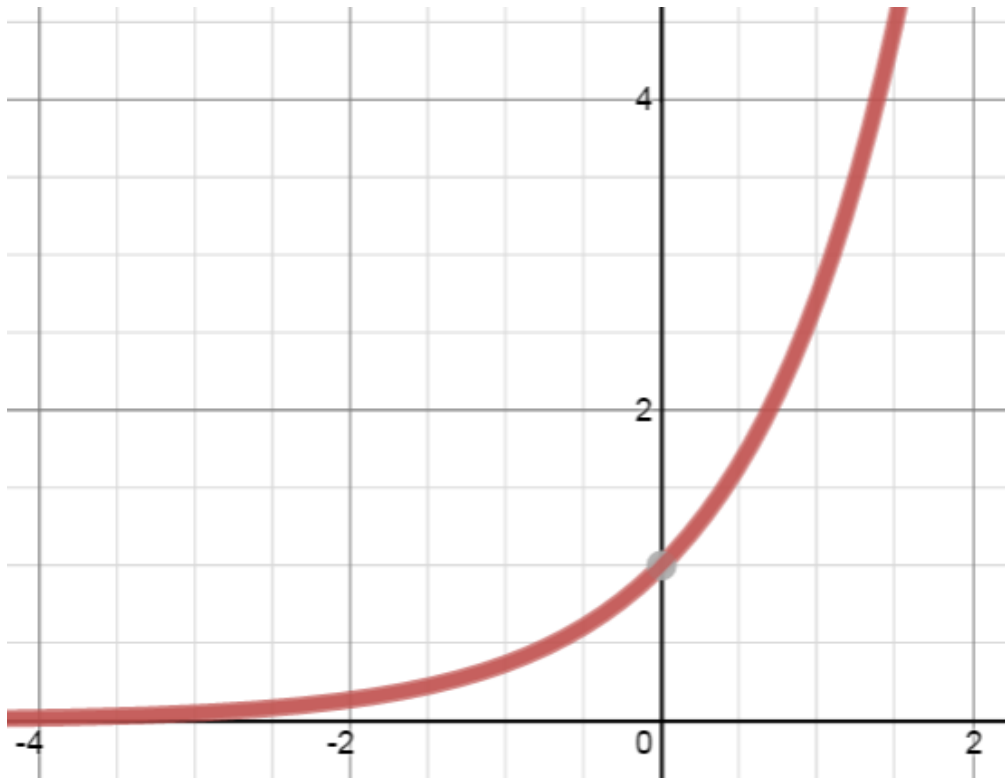
$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$



$$f(x) = \frac{1}{x^4}$$

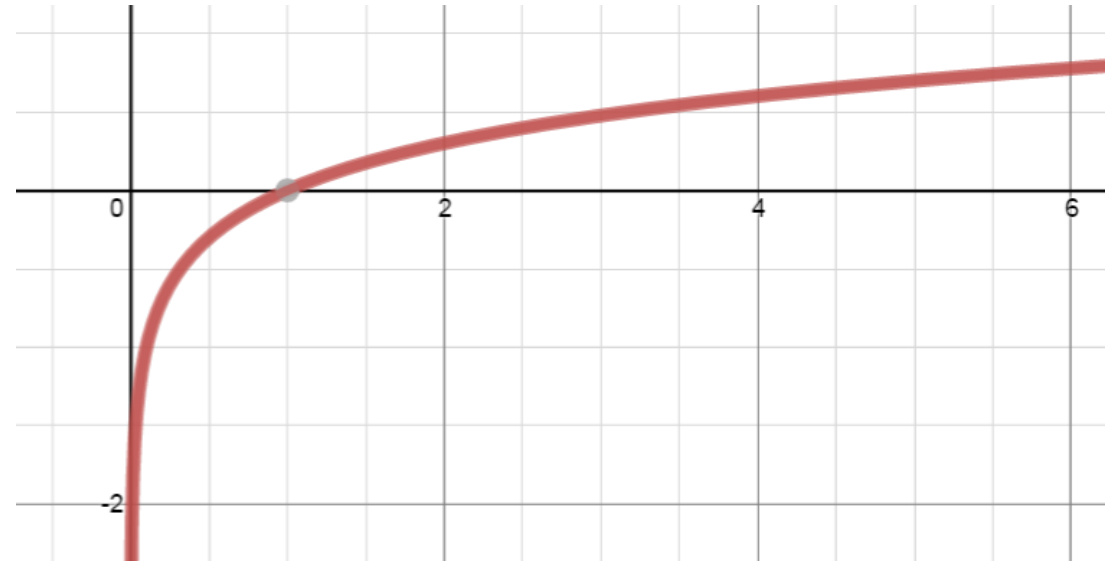
# Χαρακτηριστικές συναρτήσεις (5/6)

$$f(x) = e^x$$



εκθετική συνάρτηση

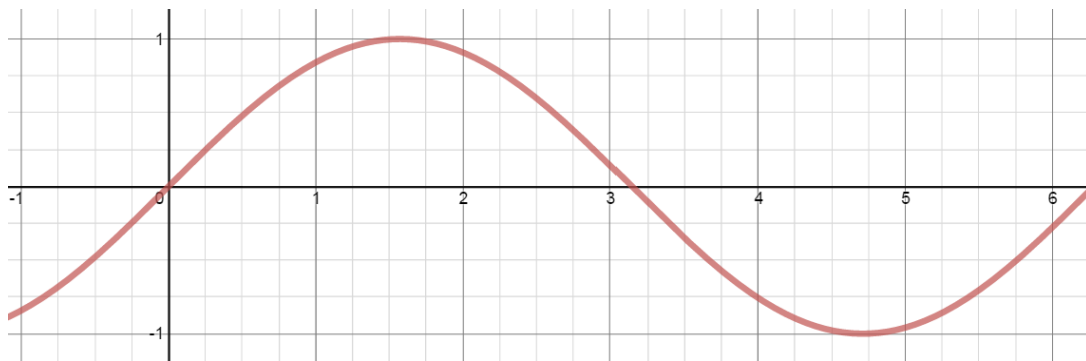
$$f(x) = \log(x)$$



λογαριθμική συνάρτηση

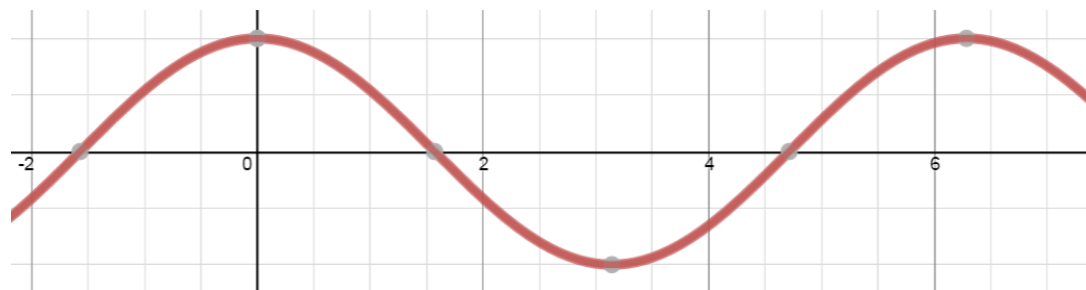
# Χαρακτηριστικές συναρτήσεις (6/6)

$\sin x$



ημίτονο

$\cos x$



συνημίτονο



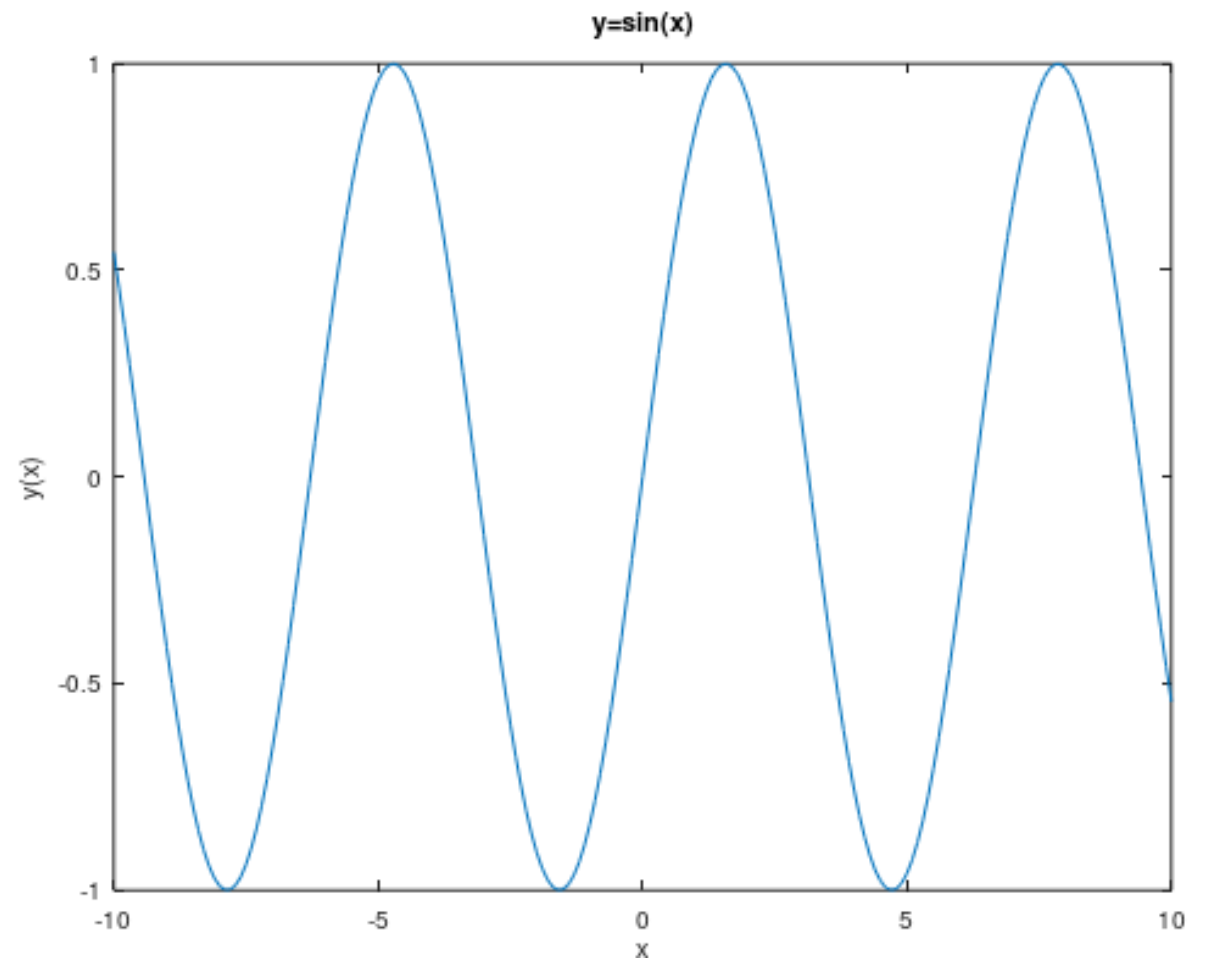
# Γραφήματα στο Octave/Matlab

## Εντολή **plot**

- Οι γραφικές παραστάσεις 2 διαστάσεων ( στο επίπεδο ) γίνονται με την εντολή - συνάρτηση **plot**
- Η plot γενικά απαιτεί 2 ορίσματα, τα οποία πρέπει να είναι διανύσματα με τον ίδιο αριθμό στοιχείων και σχεδιάζει τη γραφική παράσταση που ορίζουν τα σημεία των 2 διανυσμάτων

# Παράδειγμα

```
>> x = [-10:0.1:10];  
>> y=sin(x);  
>> plot(x,y)  
>> title("y=sin(x) ")  
>> xlabel("x")  
>> ylabel("y(x) ")
```



Ασκήσεις 1,2, 3, 4 ΣΕΤ1