203: Διακριτά Μαθηματικά
Κεφάλαιο 6: Γραφήματα

Σπυρίδων Τζίμας

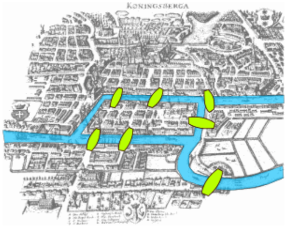
Εαρινό Εξάμηνο 2025

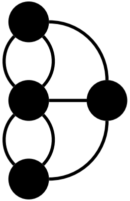
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg

Η χρήση γραφημάτων για την μοντελοποίηση προβλημάτων ξεκίνησε από πολύ παλιά.

Ο διάσημος μαθηματικός Euler (1707–1783) μελέτησε το ακόλουθο πρόβλημα:
«Μπορούμε να περιηγηθούμε σε ολόκληρη την πόλη του Königsberg διασχίζοντας κάθε γέφυρα ακριβώς μία φορά;»





Ο Euler έδειξε πως κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό μοντελοποιώντας το πρόβλημα ως γράφημα.
Θα δούμε τη λύση του Euler αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο.

Γραφήματα

Ένα ζεύγος $G = (V, E)$ καλείται

- (μη-κατευθυνόμενο) γράφημα ((undirected) graph)
  αν κάθε στοιχείο του E είναι υποσύνολο δύο στοιχείων του V,
  δηλαδή της μορφής $\{u, v\}$ όπου $u, v \in V$, και
- κατευθυνόμενο γράφημα (directed graph)
  αν κάθε στοιχείο του E είναι ζεύγος του $V \times V$,
  δηλαδή της μορφής (u, v) όπου $u, v \in V$.

Τα στοιχεία του V καλούνται κορυφές (vertices) ή κόμβοι (nodes)
και το ίδιο το V καλείται το σύνολο κορυφών του G.

Τα στοιχεία του E καλούνται (κατευθυνόμενες) ακμές ((directed) edges)
και το ίδιο το E καλείται το σύνολο ακμών του G.

Τον πληθικούς αριθμούς $|V|$ και $|E|$ συνηθίζουμε να τους συμβολίζουμε
με τα γράμματα n και m αντίστοιχα.

Γειτονιά Κορυφών

Μία ακμή $\{u, v\}$ ή (u, v) συνηθίζουμε να την συμβολίζουμε απλά uv.

Μία ακμή λέμε ότι προσπίπτει στις δύο κορυφές που αυτή συνδέει.
Οι κορυφές αυτές καλούνται τα άκρα (endpoints) της ακμής.

Δύο κορυφές που προσπίπτουν στην ίδια ακμή καλούνται γειτονικές (adjacent).

Το σύνολο των κορυφών που είναι γειτονικές με μία κορυφή v του γραφήματος G καλείται η γειτονιά (neighborhood) της v στο G και συμβολίζεται με $N_G(v)$. Ο πληθικός αριθμός $|N_G(v)|$ καλείται ο βαθμός (degree) της v στο G και συμβολίζεται με $\deg_G v$.

Πρόταση: Σε κάθε γράφημα $G = (V, E)$,
το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του G ισούται με $2m$. Συμβολικά:

$$\sum_{v \in V} \deg_G v = 2m$$

Γειτονιά Κορυφών

Αν το γράφημα G είναι κατευθυνόμενο,
τότε μία ακμή λέμε ότι εξέρχεται από το πρώτο άκρο της και εισέρχεται στο δεύτερο.

Το σύνολο των κορυφών που είναι γειτονικές με μία κορυφή v του G επειδή προσπίπτουν σε ακμές εισερχόμενες στην v καλείται η έσω γειτονιά της v στο G και συμβολίζεται με $N_G^-(v)$. Ο πληθικός αριθμός $|N_G^-(v)|$ καλείται ο έσω βαθμός της v στο G και συμβολίζεται $\deg_G^- v$.

Το σύνολο των κορυφών που είναι γειτονικές με μία κορυφή v του G επειδή προσπίπτουν σε ακμές εξερχόμενες από την v καλείται η έξω γειτονιά της v στο G και συμβολίζεται $N_G^+(v)$. Ο πληθικός αριθμός $|N_G^+(v)|$ καλείται ο έξω βαθμός της v στο G και συμβολίζεται $\deg_G^+ v$.

Για κάθε κορυφή v του γραφήματος G, ισχύει $\deg_G v = \deg_G^- v + \deg_G^+ v$.

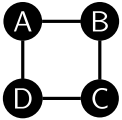
Ισομορφισμός Γραφημάτων

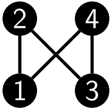
Δύο γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$ καλούνται ισόμορφα ή ισομορφικά αν υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία $f : V_1 \to V_2$ μεταξύ των κορυφών τους τέτοια ώστε

για κάθε $\left.\begin{array}{c} u_1, v_1 \in V_1 \\ u_2, v_2 \in V_2 \end{array}\right\}$ με $\left.\begin{array}{c} u_2 = f(u_1) \\ v_2 = f(v_1) \end{array}\right\}$ να ισχύει $\quad u_1 v_1 \in E_1 \Leftrightarrow u_2 v_2 \in E_2,$

δηλαδή τα u_1, v_1 να είναι γειτονικά στο G_1 αν και μόνο αν τα u_2, v_2 είναι γειτονικά στο G_2.

Παράδειγμα: Είναι ισόμορφα τα ακόλουθα γραφήματα; Ναι.





$V_1 \xrightarrow{f} V_2$	
A	1
B	4
C	3
D	2

$V_1 \xrightarrow{g} V_2$	
A	2
B	3
C	4
D	1

Παρατήρηση: Αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ δύο γραφημάτων, τότε δεν είναι πάντα μοναδικός.

Υπογραφήματα

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$.

Για κάθε $X \subseteq V$, το γράφημα $G[X] = (X, E|_X)$, όπου $E|_X$ το σύνολο των ακμών στο E με άκρα μόνο από το X, καλείται το υπογράφημα του G που επάγεται από το X ή απλά επαγόμενο υπογράφημα του G.

Ένα γράφημα $H = (U, D)$ καλείται υπογράφημα του G αν $U \subseteq V$ και $D \subseteq E|_U$.

Πράξεις σε Γραφήματα

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$.

Προσθήκη Κορυφής
Το γράφημα μετά από προσθήκη της κορυφής v στο G είναι το $G + v = (V \cup \{v\}, E)$.

Αφαίρεση Κορυφής
Το γράφημα μετά από αφαίρεση της κορυφής v από το G είναι το $G - v = G[V \setminus \{v\}]$.

Προσθήκη Ακμής
Το γράφημα μετά από προσθήκη της ακμής e στο G είναι το $G + e = (V, E \cup \{v\})$ υπό την προϋπόθεση ότι και τα δύο άκρα της e είναι στο V.

Αφαίρεση Ακμής
Το γράφημα μετά από αφαίρεση της ακμής e από το G είναι το $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Μονοπάτια και Κύκλοι

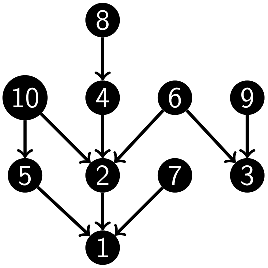
Καλούμε περίπατο (walk) κάθε ακολουθία κορυφών ενός (κατευθυνόμενου) γραφήματος τέτοια ώστε στο γράφημα να υπάρχει (κατευθυνόμενη) ακμή από κάθε όρο της ακολουθίας στον επόμενο. Ειδικότερα:

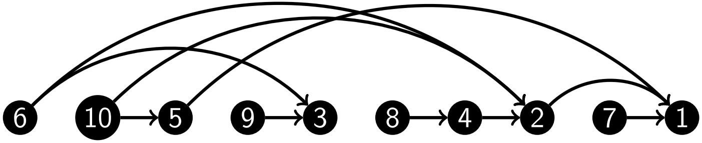
- Αν ο πρώτος όρος διαφέρει από τον τελευταίο, τότε την καλούμε ανοικτό περίπατο.
- Αν επιπλέον διατρέχει κάθε ακμή το πολύ μία φορά, τότε την καλούμε ίχνος (trail).
- Αν επιπλέον διατρέχει κάθε κορυφή το πολύ μία φορά, τότε την καλούμε μονοπάτι (path).
- Αν ο πρώτος όρος ισούται με τον τελευταίο, τότε την καλούμε κλειστό περίπατο.
- Αν επιπλέον διατρέχει κάθε ακμή το πολύ μία φορά, τότε την καλούμε κύκλωμα (circuit).
- Αν επιπλέον διατρέχει κάθε κορυφή το πολύ μία φορά, τότε την καλούμε κύκλο (cycle).

Τοπολογική Διάταξη

Μία διάταξη $\leq$ επί του συνόλου V των κορυφών ενός κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$ καλείται τοπολογική διάταξη του G αν $u < v$ για κάθε $(u, v) \in E$.

Παράδειγμα:





Αποδεικνύεται ότι ένα κατευθυνόμενο γράφημα έχει τοπολογική διάταξη αν και μόνο αν είναι άκυκλο.

Αλγόριθμος Τοπολογικής Ταξινόμησης

Η διαδικασία κατασκευής ή διαπίστωσης μη ύπαρξης τοπολογικής διάταξης καλείται τοπολογική ταξινόμηση. Ακολουθεί ο σχετικός αλγόριθμος.

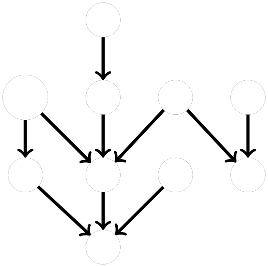
Είσοδος: Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.
Έξοδος: Μία τοπολογική διάταξη του G ή ότι δεν υπάρχει.

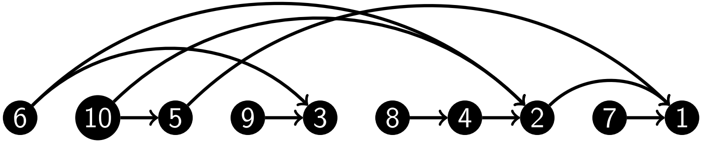
- Αρχικοποιούμε μία κενή λίστα L.
- Για όσο υπάρχει κορυφή v του G με $\deg_G^- v = 0$, δηλαδή χωρίς εισερχόμενες ακμές:
  - Επιλέγουμε αυθαίρετα μία κορυφή v του G με $\deg_G^- v = 0$.
  - Προσθέτουμε την v στο τέλος της L.
  - $G \leftarrow G - v$, δηλαδή αφαιρούμε την v από το G.
- Αν δεν υπάρχει πλέον κορυφή του G,

  τότε επιστρέφουμε την L,
  αλλιώς επιστρέφουμε ότι δεν υπάρχει τοπολογική διάταξη του G.

Αλγόριθμος Τοπολογικής Ταξινόμησης

Παράδειγμα: Κατασκευάστε ή διαπιστώστε ότι δεν υπάρχει τοπολογική διάταξη του γραφήματος που ακολουθεί.





Συνεκτικότητα

Για κάθε γράφημα $G = (V, E)$, θεωρούμε τη σχέση $R(G)$ επί του V που ορίζεται ως εξής:
Για κάθε $u, v \in V$: $u \; R(G) \; v$ αν και μόνο αν υπάρχει περίπατος στο G από την u στην v.

Αν ένα γράφημα G είναι μη-κατευθυνόμενο, τότε αποδεικνύεται ότι η σχέση $R(G)$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας επί του συνόλου των κορυφών του G. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης καλούνται συνεκτικές συνιστώσες (connected components) του G.
Αν για κάθε δύο κορυφές του G υπάρχει περίπατος με άκρα αυτές τις κορυφές, τότε ολόκληρο το σύνολο κορυφών του G είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του G και το μη-κατευθυνόμενο γράφημα G καλείται συνεκτικό (connected).

Ένα κατευθυνόμενο γράφημα καλείται:

- ασθενώς συνεκτικό (weakly connected) αν για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει περίπατος από την πρώτη στη δεύτερη ή αντίστροφα (δηλ. τουλάχιστον προς τη μία κατεύθυνση)·
- ισχυρώς συνεκτικό (strongly connected) αν για κάθε ζεύγος κορυφών υπάρχει περίπατος από την πρώτη στη δεύτερη και αντίστροφα (δηλ. και προς τις δύο κατευθύνσεις).

Ίχνη και Κυκλώματα Euler

Ένα ίχνος (αντίστοιχα κύκλωμα) ενός γραφήματος καλείται ίχνος (αντίστοιχα κύκλωμα) Euler αν διατρέχει όλες τις ακμές του γραφήματος.

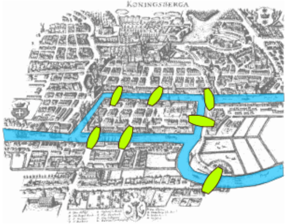
Θεώρημα: Έστω ένα συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G.

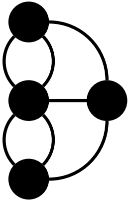
- ✔ Το G έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν
  όλες οι κορυφές του G έχουν άρτιους βαθμούς.
- ✔ Το G έχει ίχνος Euler αν και μόνο αν
  ακριβώς δύο κορυφές του G έχουν περιττούς βαθμούς.
  Αυτές οι κορυφές αποτελούν τα δύο άκρα του ίχνους Euler.

Ερώτημα: Σε τι διαφέρει από το προηγούμενο το αντίστοιχο θεώρημα
ύπαρξης ιχνών και κυκλωμάτων Euler σε κατευθυνόμενα γραφήματα;

Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg

Άσκηση: Υπάρχει κύκλωμα Euler στο γράφημα της πόλης του Königsberg;

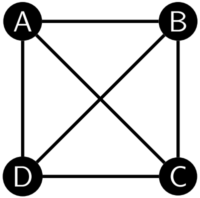


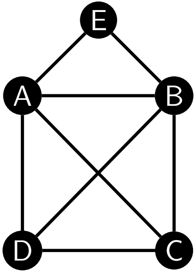


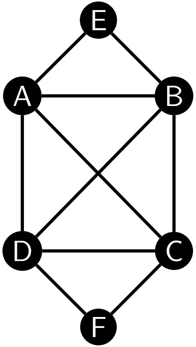
Απάντηση: Όχι, γιατί το γράφημα έχει τέσσερεις κορυφές βαθμού 3,
άρα δεν έχει όλες τις κορυφές άρτιου βαθμού.

Ίχνη και Κυκλώματα Euler

Άσκηση: Προσδιορίστε αν υπάρχει ίχνος ή κύκλωμα Euler σε καθένα από τα γραφήματα που ακολουθούν.







Απάντηση:	όχι ίχνος	ναι ίχνος	όχι ίχνος
	όχι κύκλωμα	όχι κύκλωμα	ναι κύκλωμα

Αλγόριθμος Κατασκευής Κυκλώματος Euler

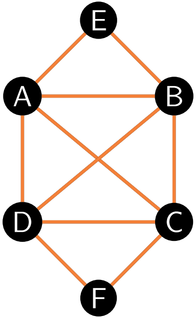
Μία ακμή e ενός γραφήματος G καλείται γέφυρα αν το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του $G - e$ είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του G.

Είσοδος: Ένα συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$.
Έξοδος: Ένα κύκλωμα Euler.

1. Αρχικοποιούμε μία κενή λίστα L.
2. Διαλέγουμε οποιαδήποτε κορυφή u του G και την προσθέτουμε στην L.
3. Για όσο $N_G(u) \neq \varnothing$, δηλαδή η u έχει γειτονικές κορυφές:
    1. Αν υπάρχει κορυφή $v \in N_G(u)$ τέτοια ώστε η uv δεν είναι γέφυρα,
       τότε επιλέγουμε αυθαίρετα μία κορυφή v του G τέτοια ώστε η uv δεν είναι γέφυρα,
       αλλιώς επιλέγουμε αυθαίρετα μία οποιαδήποτε κορυφή v του G.
    2. $G \leftarrow G - uv$, δηλαδή αφαιρούμε την uv από το G.
    3. προσθέτουμε την v στο τέλος της L.
    4. $u \leftarrow v$
4. Επιστρέφουμε την L.

Ίχνη και Κυκλώματα Euler

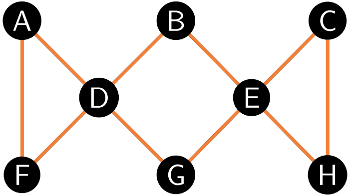
Άσκηση: Κατασκευάστε ένα κύκλωμα Euler του ακόλουθου γραφήματος.



Απάντηση: Ένα κύκλωμα Euler είναι το: (A, B, C, D, A, E, B, D, F, C, A)

Ίχνη και Κυκλώματα Euler

Άσκηση: Κατασκευάστε ένα κύκλωμα Euler του ακόλουθου γραφήματος.



Απάντηση: Ένα κύκλωμα Euler είναι το: (A, D, G, E, C, H, E, B, D, F, A)

Μονοπάτια και Κύκλοι Hamilton

Ένα μονοπάτι (αντίστοιχα κύκλος) ενός γραφήματος καλείται μονοπάτι (αντίστοιχα κύκλος) Hamilton αν διατρέχει όλες τις κορυφές του γραφήματος.

Τα προβλήματα απόφασης της ύπαρξης κύκλου και μονοπατιού Hamilton είναι NP-πλήρη. Δεν υπάρχει γνωστός αλγόριθμος για την επίλυσή τους. Καταφεύγουμε στην χρήση

- αποτελεσμάτων που ισχύουν μόνο σε ειδικές κλάσεις γραφημάτων και
- ικανών και αναγκαίων συνθηκών.

Παράδειγμα Κλάσης Γραφημάτων: Ένα γράφημα καλείται πλήρες αν όλες οι κορυφές του είναι γειτονικές μεταξύ τους. Κάθε πλήρες γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές έχει κύκλο Hamilton.

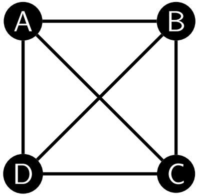
Παραδείγματα Αναγκαίας Συνθήκης: Σε κάθε γράφημα που έχει κύκλο Hamilton:

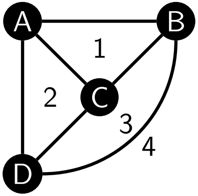
- ✓ Όλες οι κορυφές έχουν βαθμό τουλάχιστον 2.
- ✓ Δεν υπάρχουν γέφυρες.

Επίπεδα Γραφήματα

Ένα γράφημα καλείται επίπεδο (planar) αν υπάρχει απεικόνισή του στο επίπεδο τέτοια ώστε οι ακμές του να μην τέμνονται παρά μόνο στις κοινές τους κορυφές.

Παράδειγμα: Επιβεβαιώστε ότι το ακόλουθο γράφημα είναι επίπεδο με κατάλληλη επαναπεικόνιση στο επίπεδο.





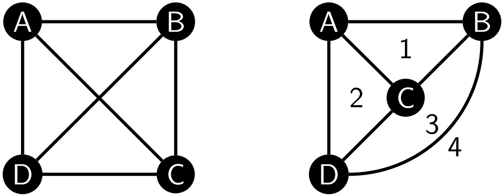
Μία τέτοια απεικόνιση διαχωρίζει το επίπεδο σε περιοχές που δεν τέμνονται παρά μόνο στις κοινές τους κορυφές και ακμές. Οι περιοχές αυτές του επιπέδου καλούνται πλευρές (faces).

Ο Τύπος του Euler

Θεώρημα: Έστω ένα συνεκτικό επίπεδο γράφημα. Αν συμβολίσουμε με v, e και f το πλήθος των κορυφών του, των ακμών του και των πλευρών του αντίστοιχα, τότε:

$$v - e + f = 2$$

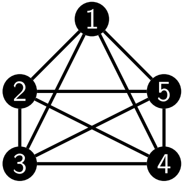
Παράδειγμα: Επιβεβαιώστε τον τύπο του Euler για το ακόλουθο συνεκτικό επίπεδο γράφημα.



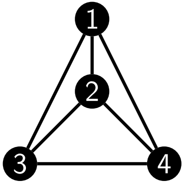
Έχουμε $v = 4$, $e = 6$ και $f = 4$, άρα $v - e + f = 4 - 6 + 4 = 2$. ✔

Μη-επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα: Είναι το ακόλουθο γράφημα επίπεδο;



K_5

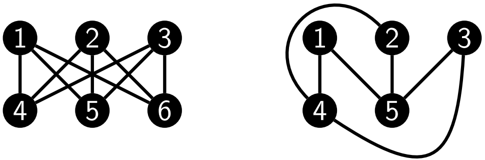


K_4

Δεν υπάρχει απεικόνιση της $5^{ης}$ κορυφής και των ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν στο επίπεδο τέτοιες ώστε οι ακμές να μην τέμνονται παρά μόνο στις κοινές τους κορυφές.
Άρα το γράφημα K_5 δεν είναι επίπεδο, ενώ το γράφημα K_4 είναι επίπεδο.

Μη-επίπεδα Γραφήματα

Παράδειγμα: Είναι το ακόλουθο γράφημα επίπεδο;



$K_{3,3}$ $K_{3,2}$

Δεν υπάρχει απεικόνιση της $6^{ης}$ κορυφής και των ακμών που προσπίπτουν σε αυτήν στο επίπεδο τέτοιες ώστε οι ακμές να μην τέμνονται παρά μόνο στις κοινές τους κορυφές.
Άρα το γράφημα $K_{3,3}$ δεν είναι επίπεδο, ενώ το γράφημα $K_{3,2}$ είναι επίπεδο.

Ομοιομορφισμός Γραφημάτων

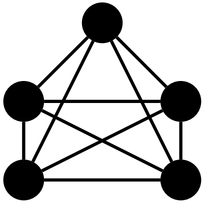
Υποδιαίρεση Ακμής
Η αντικατάσταση μίας ακμής με μία νέα κορυφή και δύο νέες ακμές από τη νέα κορυφή προς τα δύο άκρα της παλαιάς ακμής.

Ένα γράφημα H καλείται υποδιαίρεση ενός γραφήματος G
αν προκύπτει από το G μετά από μία ακολουθία υποδιαιρέσεων ακμής.

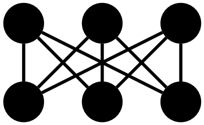
Δύο γραφήματα G_1 και G_2 καλούνται ομοιομορφικά αν υπάρχουν υποδιαιρέσεις H_1 και H_2 των G_1 και G_2 αντίστοιχα τέτοιες ώστε τα H_1 και H_2 να είναι ισομορφικά γραφήματα.

Το Θεώρημα του Kuratowski

Ένα γράφημα είναι επίπεδο αν και μόνο αν δεν έχει υπογράφημα το οποίο είναι ομοιομορφικό ενός από τα ακόλουθα γραφήματα.



K_5



$K_{3,3}$