Π α ν ε π ι σ τ ή μ ι ο Ι ω α ν ν ί ν ω ν 1/2025
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Εξάμηνο Α, **Τμήμα Β**
Μάθημα: **Λογική Σχεδίαση**

Θέμα 1ο (3 μονάδες)
Δίνονται οι αριθμοί $\boldsymbol{α=301_{10}}$, $\boldsymbol{β=201_{10}}$, $\boldsymbol{γ=100_{10}}$.
Α. Να γραφούν οι αριθμοί α, β, γ, σε δυαδική αναπαράσταση με 12 ψηφία και σε δεκαεξαδική αναπαράσταση με 3 ψηφία. Η μετατροπή να εξηγηθεί αναλυτικά μόνο για τον αριθμό α. (1 μονάδα)
Β. Να γραφούν οι αντίθετοί τους στο δυαδικό και στο δεκαεξαδικό σε μορφή συμπληρώματος του δύο και του δεκαέξι, διατηρώντας το μήκος λέξης των αριθμών σε κάθε περίπτωση, δηλαδή 12 δυαδικά ψηφία και 3 δεκαεξαδικά ψηφία. (1 μονάδα)
Γ. Να γίνουν αναλυτικά οι πράξεις α + β και α – γ στο δυαδικό και στο δεκαεξαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του πρώτου ερωτήματος. Η διαφορά (α - γ) να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα συμπληρώματα ως προς τις αντίστοιχες βάσεις από το ερώτημα Β. (1 μονάδα)

Θέμα 2ο (2.5 μονάδες)
Βρείτε τον πίνακα αληθείας των συναρτήσεων ***f, g*** και εκφράστε κάθε συνάρτηση ως άθροισμα ελαχιστόρων και ως γινόμενο μεγιστόρων:

$f(x, y, z) = (y' + z)(x + y')$ (1 μονάδα)

$g(a, b, c, d) = bd' + acd' + ab'c + a'c'$ (1 μονάδα)

Να υπολογιστεί η τιμή της λογικής παράστασης:

$[f(0,0,0)+f(0,1,0)]\cdot f(1,1,0)$ (0,5 μονάδα)

Θέμα 3ο (2 μονάδες)
Δίνεται η λογική συνάρτηση:

$F(w, x, y, z) = F = Σ(0, 2, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$

Α. Να απλοποιηθεί με χρήση του χάρτη Karnaugh. (1 μονάδα)
Β. Να σχεδιαστεί το λογικό της κύκλωμα **με τον μικρότερο δυνατό αριθμό πυλών NAND**. (1 μονάδα)

Θέμα 4ο (2.5 μονάδες)
Υλοποιήστε έναν πλήρη αθροιστή με δύο πολυπλέκτες 4-σε-1.

Καλή Επιτυχία

Θέμα 1ο

Α Ερώτημα:

Μετατροπή του 301 από δεκαδικό σε δυαδικό:

Διά 2	Πηλίκο	Υπόλοιπο (Ψηφίο)	Θέση Bit #
(301)/2	150	1	0
(150)/2	75	0	1
(75)/2	37	1	2
(27)/2	18	1	3
(18)/2	9	0	4
(9)/2	4	1	5
(4)/2	2	0	6
(2)/2	1	0	7
(1)/2	0	1	8

$= (100101101)_2$

Με 12 ψηφία (με κόκκινο τα ψηφία που προσθέτω για να γίνει 12-ψήφιος ο αριθμός):

$\mathbf{(0001\ 0010\ 1101)_2}$

Μετατροπή του $(301)_{10}$ = $\mathbf{(0001\ 0010\ 1101)_2}$ από δυαδικό σε δεκαεξαδικό:

0001	0010	1101
1	**2**	**D(13)**

$= (12D)_{16}$

Με τον ίδιο τρόπο:

$(201)_{10} = (0000\ 1100\ 1001)_2 = (0C9)_{16}$

$(100)_{10} = (0000\ 0110\ 0100)_2 = (064)_{16}$

Συνολικά:

Δεκαδικό	Δυαδικό	Δεκαεξαδικό
301	0001 0010 1101	12D
201	0000 1100 1001	0C9
100	0000 0110 0100	064

Β Ερώτημα:

Αντίθετος του $(301)_{10}$ ως συμπλήρωμα του 2:

Ξεκινώ από δεξιά στον δυαδικό αριθμό, αφήνω ως έχουν τα ψηφία μέχρι και το πρώτο '1' και μετά συμπληρώνω τα υπόλοιπα ψηφία. Για το $(301)_{10}$ = $(0001\ 0010\ 1101)_2$ το πρώτο '1' το συναντάμε στη θέση 0, άρα

$(0001\ 0010\ 1101)'_2 = (1110\ 1101\ 0011)_2$

Με τον ίδιο τρόπο, για τους $(201)_{10}$ και $(100)_{10}$ αντίστοιχα, είναι:

$(0000\ 1100\ 1001)'_2 = (1111\ 0011\ 0111)_2$

$(0000\ 0110\ 0100)'_2 = (1111\ 1001\ 1100)_2$

Αντίθετος του 301 ως συμπλήρωμα του 16:

Υπολογίζω το συμπλήρωμα ως προς 15, και προθέτω μια μονάδα:

	F(15)	F(15)	F(15)
-	1	2	D(13)
	E(14)	D(13)	2
Προσθέτω το 1		+	1
	E(14)	D(13)	3

ή

Από τον αντίθετο του $(301)_{10}$ στο δυαδικό:

1110	1101	0011
E(14)	**D(13)**	**3**

Με τον ίδιο τρόπο:

Αντίθετος του $(201)_{10}$ ως συμπλήρωμα του 16, είναι:

	F(15)	**F(15)**	**F(15)**
-	0	C(12)	9
	F(15)	3	6
Προσθέτω το 1		+	1
	F(15)	3	7

ή

Από τον αντίθετο του $(201)_{10}$ στο δυαδικό:

1111	**0011**	**0111**
F	**3**	**7**

Αντίθετος του $(100)_{10}$ ως συμπλήρωμα του 16, είναι:

	F(15)	**F(15)**	**F(15)**
-	0	6	4
	F(15)	9	B(11)
Προσθέτω το 1		+	1
	F	9	C(12)

ή

Από τον αντίθετο του $(100)_{10}$ στο δυαδικό:

1111	**1001**	**1100**
F	**9**	**C(12)**

Συνολικά, τα συμπληρώματα είναι:

Δεκαδικός	**Αντίθετος Δυαδικός (12 ψηφία)**	**Αντίθετος Δεκαεξαδικός (3 ψηφία)**
301	1110 1101 0011	ED3
201	1111 0011 0111	F37
100	1111 1001 1100	F9C

Γ Ερώτημα:

$\alpha + \beta = (301)_{10} + (201)_{10} = (502)_{10}$

Δυαδική πρόσθεση:

								1			1		**Κρατούμενα**
	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	$(301)_{10}$
+	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	$(201)_{10}$
	0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**$(502)_{10}$**

Δυαδική αφαίρεση (με χρήση συμπληρώματος του 2):

$\alpha - \gamma = (301)_{10} - (100)_{10} = (201)_{10}$

	1	**1**	**1**			**1**	**1**	**1**	**1**				**Κρατούμενα**
	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	$(301)_{10}$
+	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	Συμπλήρωμα του 2 $(100)_{10}$
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**$(201)_{10}$**

Προσοχή, έχουμε κρατούμενο, άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό. Αγνοούμε το τελευταίο κρατούμενο. Δηλαδή, $(0000\ 1100\ 1001)_2 = (201)_{10}$.

Δεκαεξαδική πρόσθεση:

		1		**Κρατούμενα**
	1	2	D(13)	$(301)_{10}$
+	0	C(12)	9	$(201)_{10}$
	1	F(15)	6	$(502)_{10}$

Δεκαεξαδική αφαίρεση (με χρήση συμπληρώματος του 16):

		1		Κρατούμενα
	1	2	D(13)	$(301)_{10}$
+	F(15)	9	C(12)	(Συμπλήρωμα του 2 $(100)_{10}$
1	0	C(12)	9	$(201)_{10}$

Προσοχή, έχουμε κρατούμενο, άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό. Αγνοούμε το τελευταίο κρατούμενο. Δηλαδή, $(09C)_{16} = (201)_{10}$.

Θέμα 2ο

f(x, y , z) = (y' + z)(x + y')

m_i / M_i	x	y	z	y' + z	x + y'	f
0	0	0	0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	**1**	**1**	**1**
2	0	1	0	**0**	**0**	**0**
3	0	1	1	**1**	**0**	**0**
4	1	0	0	**1**	**1**	**1**
5	1	0	1	**1**	**1**	**1**
6	1	1	0	**0**	**1**	**0**
7	1	1	1	**1**	**1**	**1**

Με βάση τον πίνακα αληθείας έχουμε:

- Ελαχιστόροι: ***f(x, y, z) = Σ (0, 1, 4, 5, 7)***
- Μεγιστόροι: ***f(x, y, z) = Π (2, 3, 6)***

g(a, b, c, d) = bd' + acd' + ab'c + a'c'

m_i / M_i	a	b	c	d	bd'	acd'	ab'c	a'c'	g
0	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**1**	1
1	0	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**1**	1
2	0	0	1	0	**0**	**0**	**0**	**0**	0
3	0	0	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**	0
4	0	1	0	0	**1**	**0**	**0**	**1**	1
5	0	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**1**	1
6	0	1	1	0	**1**	**0**	**0**	**0**	1
7	0	1	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**	0
8	1	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**	0
9	1	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	0
10	1	0	1	0	**0**	**1**	**1**	**0**	1
11	1	0	1	1	**0**	**0**	**1**	**0**	1
12	1	1	0	0	**1**	**0**	**0**	**0**	1
13	1	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	0
14	1	1	1	0	**1**	**1**	**0**	**0**	1
15	1	1	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**	0

Με βάση τον πίνακα αληθείας έχουμε:

- Ελαχιστόροι: **g(a, b, c, d) = Σ (0, 1, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 14)**
- Μεγιστόροι: **g(a, b, c, d) = Π (2, 3, 7, 8, 9, 13, 15)**

Με βάση τον πίνακα αληθείας της f:

[f(0,0,0)+f(0,1,0)]·f(1,1,0) = [f(m0)+f(m2)]f(m6)=[1+0]0 = 0

Θέμα 3ο

Α Ερώτημα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

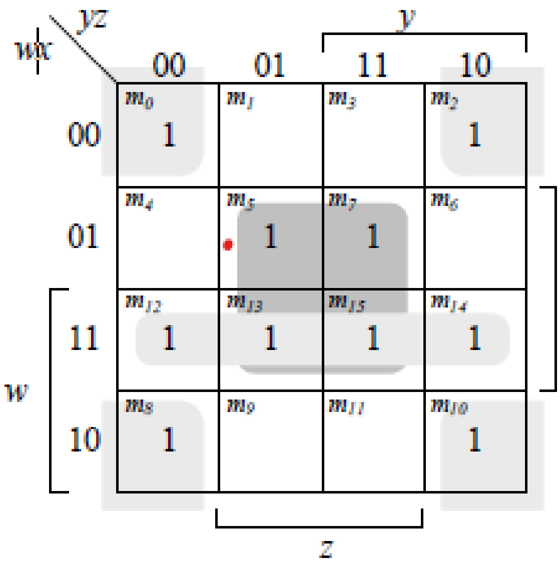
$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 2, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$$

Τοποθετούμε στον χάρτη Karnaugh το λογικό 1, στους ελαχιστόρους που δείχνει η παραπάνω συνάρτηση. Στη συνέχεια, εντοπίζουμε τις μεγαλύτερες δυνατές ομάδες (2, 4, 6, 8, 16) λογικών 1 ή αλλιώς τους θεμελιώδεις και απλούς πρωτεύοντες όρους, όπως φαίνεται στον πίνακα παρακάτω. Προκύπτουν οι ομάδες:

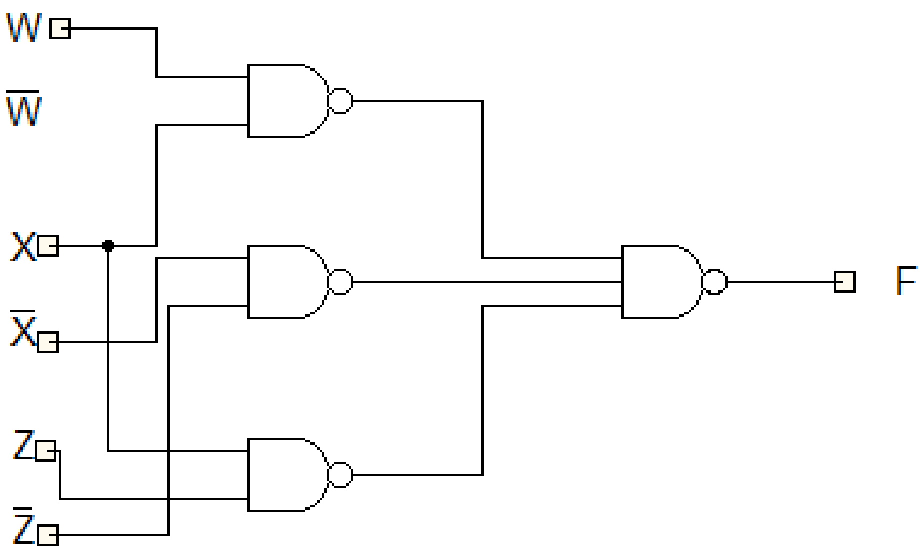
$$(m_0, m_2, m_8, m_{10}) = x'z'$$
$$(m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15}) = wx$$
$$(m_5, m_7, m_{13}, m_{15}) = xz$$

Τέλος, αθροίζουμε τους όρους και σχηματίζουμε την απλοποιημένη συνάρτηση που δίνεται παρακάτω:

$$F(w, x, y, z) = \Sigma(0, 1, 2, 5, 8, 9, 10) = x'z' + wx + xz$$



Β Ερώτημα:



Λογικό κύκλωμα

Θέμα 4ο

Πίνακας Αληθείας του πλήρη αθροιστή:

m_i	a	b	cin	S		C	
0	0	0	0	0	S= cin	0	C= 0
1	0	0	1	1		0	
2	0	1	0	1	S= cin’	0	C= cin
3	0	1	1	0		1	
4	1	0	0	1	S= cin’	0	C= cin
5	1	0	1	0		1	
6	1	1	0	0	S= cin	1	C= 1
7	1	1	1	1		1