Σήματα και Συστήματα

Ενότητα 5: Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Εξάμηνο Διδασκαλίας: 3ο
Διδάσκων: Βασίλης Ασπιώτης
Email: v.aspiotis@uoi.gr

Στο προηγούμενο μάθημα...

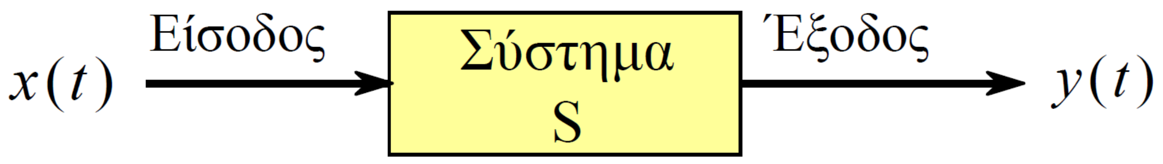
1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων
    - Συστήματα Συνεχούς Χρόνου
    - Συστήματα Διακριτού Χρόνου
2. Συνδέσεις Συστημάτων
3. Είδη Συστημάτων
    - Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
    - Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
    - Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
    - Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
    - Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Εξάρτηση της Εξόδου από Παρελθοντικές, Τρέχουσες ή Μέλλουσες Τιμές

a) $y(t) = x(t-1)$

$b)$ $y(t) = x(t)$

$c)$ $y(t) = x(t+1)$



Σχηματική περιγραφή του συστήματος S.

Έστω η x(t) παίρνει τις εξής τιμές:

x(-2) =1,5

x(-1) =2,0

x$(0) = 2{,}5$

x$(1) = 3{,}0$

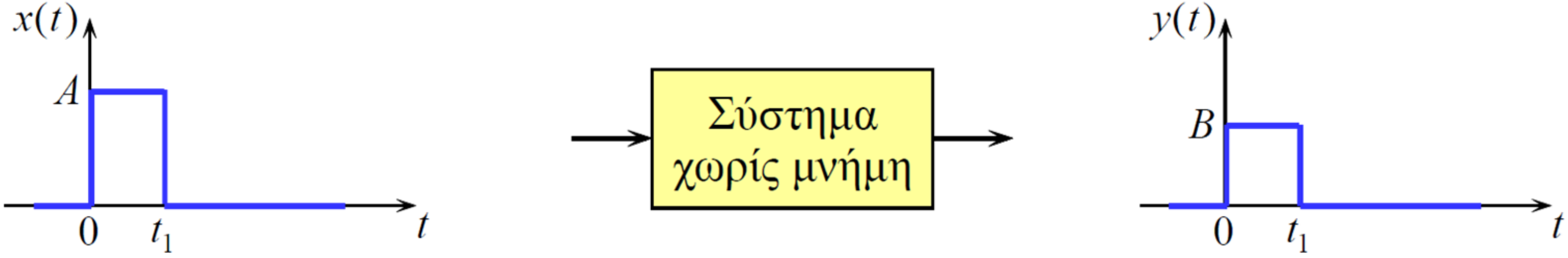
Στην a) για t=0 έχω:

$y(t) = y(0)$= x(-1)=2.0

t= 0 $\quad$ $t = -1$

Στατικά και δυναμικά συστήματα (1/6)

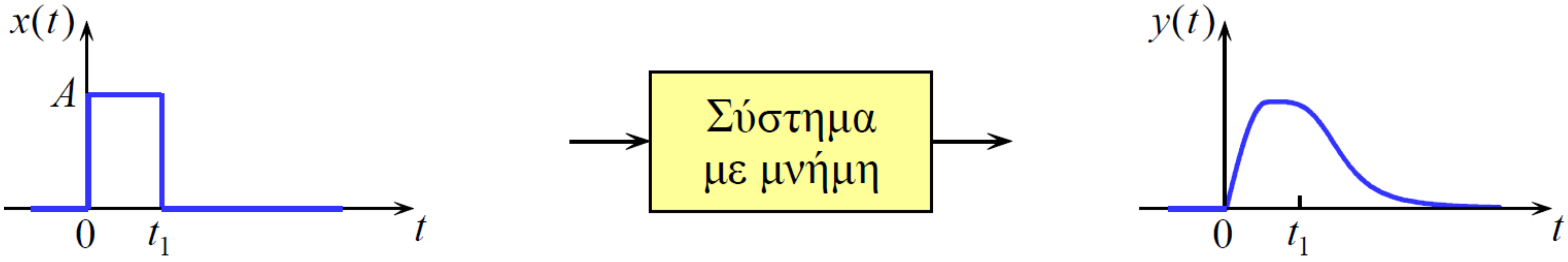
- Ένα σύστημα καλείται **στατικό** ή **σύστημα χωρίς μνήμη**, εάν για κάθε σήμα εισόδου η αντίστοιχη έξοδος για κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την **ίδια** χρονική στιγμή και όχι από προηγούμενες ή μελλοντικές τιμές της.



Η είσοδος και η έξοδος συστήματος χωρίς μνήμη.

Στατικά και δυναμικά συστήματα (2/6)

- Εάν ένα σύστημα δεν είναι στατικό, τότε καλείται **δυναμικό** ή **σύστημα με μνήμη**.



Η είσοδος και η έξοδος συστήματος με μνήμη.

- Η έξοδος ενός δυναμικού συστήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή εξαρτάται όχι μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή, αλλά επίσης και από (μερικές τουλάχιστον) προηγούμενες τιμές της εισόδου.

Στατικά και δυναμικά συστήματα (3/6)

- Ένα σύστημα που η έξοδός του τη χρονική στιγμή t προσδιορίζεται πλήρως από τις τιμές της εισόδου στο διάστημα $t - T$ έως t (ισχύει $T \geq 0$), λέμε ότι έχει **μνήμη μήκους T**.

- Εάν το T έχει μία πεπερασμένη τιμή, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα **πεπερασμένης μνήμης**, ενώ αν $T \to \infty$ το σύστημα είναι γνωστό ως σύστημα **άπειρης μνήμης**.

- Ένα στατικό σύστημα έχει μηδενική μνήμη ($T = 0$).

Στατικά και δυναμικά συστήματα (4/6)

Παραδείγματα στατικών και δυναμικών συστημάτων:

- Η ωμική αντίσταση είναι **σύστημα χωρίς μνήμη**, αφού η τάση στα άκρα της $u_R(\mathrm{t})$ (έξοδος) σε κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται από το ρεύμα $i(t)$ (είσοδος), που τη διαρρέει κατά την ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή ισχύει:

$$u_R(t) = Ri(t)$$

- Ο πυκνωτής είναι ένα **σύστημα με μνήμη**, αφού η τάση $u_C(\mathrm{t})$ στα άκρα του σε κάθε χρονική στιγμή είναι αποτέλεσμα όλου του ιστορικού του ρεύματος $i(t)$ που τον διαρρέει:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

Στατικά και δυναμικά συστήματα (5/6)

- Τα δυναμικά συστήματα απαιτούν προηγούμενες ή επόμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τιμή της εξόδου

- Για παράδειγμα

$$y(t) = 2x(t-1) + x(t)$$

$$y(t) = 2y(t-2) + x(t)$$

$$y(t) = tx(t-1) + x(t)$$

Στατικά και δυναμικά συστήματα (6/6)

- Τα στατικά συστήματα δεν απαιτούν τέτοιες τιμές, δηλαδή υπολογίζουν την έξοδο μόνο από τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή που βρίσκονται

- Για παράδειγμα

$$y(t) = 2x(t)$$

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y(t) = \log_{10} |x(t)|$$

Ευσταθή συστήματα (1/4)

- Ένα σύστημα διαθέτει ευστάθεια **Φραγμένης Εισόδου - Φραγμένης Εξόδου** και ονομάζεται **ΦΕΦΕ ευσταθές** όταν και μόνον όταν για κάθε φραγμένη είσοδο η έξοδός του παραμένει φραγμένη.

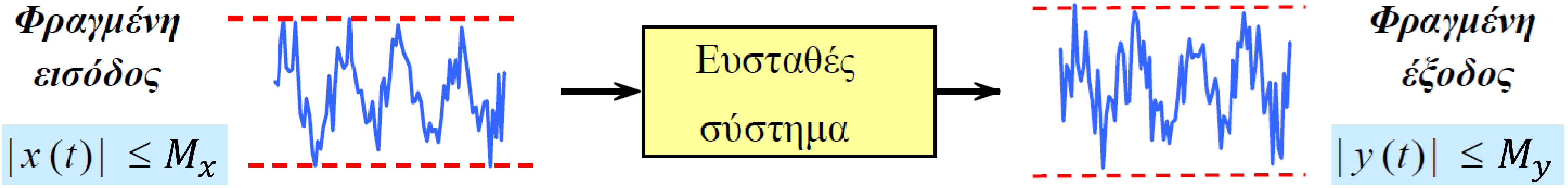
- Ένα σύστημα είναι BIBO-ευσταθές (BIBO – bounded input bounded output) όταν για κάθε θετικό αριθμό $M_x < \infty$ για τον οποίο ισχύει $|x(t)| \leq M_x$, υπάρχει (θετικός) αριθμός $M_y < \infty$ για τον οποίο να ισχύει $|y(t)| \leq M_y$. Δηλαδή:

$$|x(t)| \leq M_x \Rightarrow |y(t)| \leq M_y \qquad M_x, M_y \in \mathbb{R}$$

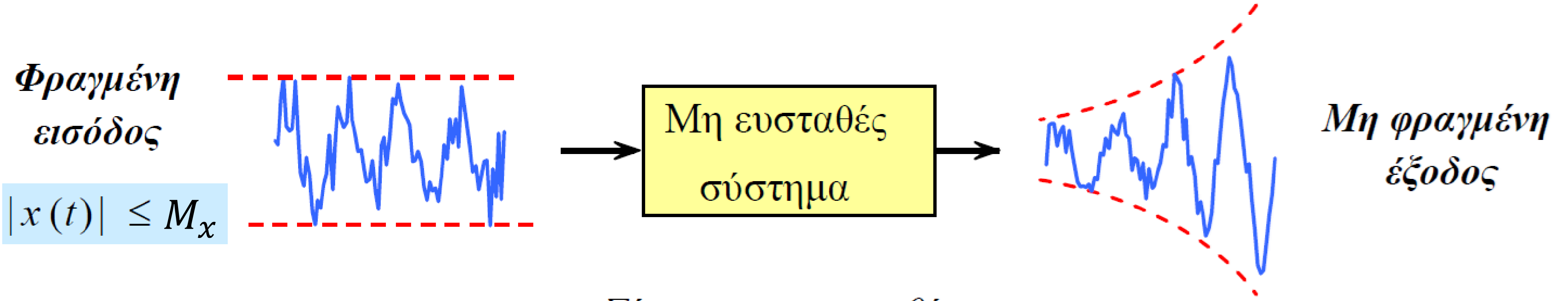
Ευσταθή συστήματα (2/4)

- Στην ουσία, η έννοια της ευστάθειας ενός συστήματος ταυτίζεται με την απαίτηση τα σήματα εισόδου και εξόδου να παραμένουν πεπερασμένα (φραγμένα) σε **πλάτος**.

Ευσταθή συστήματα (3/4)

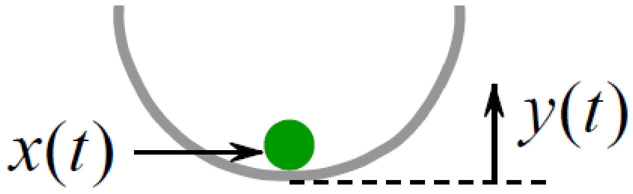


Σύστημα ευσταθές.

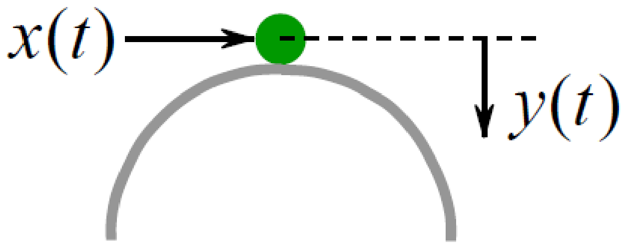


Σύστημα μη ευσταθές.

Ευσταθή συστήματα (4/4)



Στο σύστημα το σφαιρίδιο ισορροπεί και αν εφαρμοστεί μία μικρή οριζόντια δύναμη για μικρό χρονικό διάστημα θα μετακινηθεί λίγο και θα επανέλθει στην αρχική του θέση μετά από κάποιες ταλαντώσεις (το σύστημα θεωρείται πραγματικό και παρουσιάζει τριβές). Πρόκειται για ένα ***ευσταθές σύστημα***.



Στο σύστημα το σφαιρίδιο ισορροπεί αλλά αν μετακινηθεί λίγο λόγω μικρής και περιορισμένης διάρκειας οριζόντιας δύναμης, θα κυλίσει προς τα κάτω και δεν πρόκειται ποτέ να επανέλθει στην αρχική του θέση, κατάσταση που εκφράζει ότι το ***σύστημα είναι ασταθές***.

Παράδειγμα 1

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = x(t-1) + t$$

είναι ευσταθές.

Απάντηση

Αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό M_x,δηλ.

$$|x(t)| \leq M_x$$

Τότε η έξοδος $y(t)$ θα είναι

$$|y(t)| = |x(t-1) + t| \leq |x(t-1)| + |t| < M_x + |t| \rightarrow \infty$$

Όταν $t \rightarrow \pm\infty$. Άρα το σύστημα είναι **ασταθές**.

Παράδειγμα 2

- Ελέγξτε αν το σύστημα

$$y(t) = e^{x(t-2)}$$

είναι ευσταθές.

Απάντηση

Αν η είσοδος $x(t)$ είναι φραγμένη από έναν πραγματικό αριθμό M_x,δηλ.

$$|x(t)| \leq M_x$$

Τότε η έξοδος $y(t)$ θα είναι

$$|y(t)| = |e^{x(t-2)}| \leq |e^{M_x}| < \infty$$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα το σύστημα είναι **ευσταθές**.

Συνοψίζοντας ...

- **Γραμμικότητα**: Αν

$$x_1(t) \to y_1(t)$$

$$x_2(t) \to y_2(t)$$

Είναι ζεύγη εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε για οποιοδήποτε α, β το

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \to \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

Είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για το ίδιο σύστημα.

Συνοψίζοντας ...

- **Χρονική Αμεταβλητότητα** : Αν

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

Είναι ζεύγος εισόδου-εξόδου για ένα σύστημα, τότε

$$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$$

δηλ. αν η είσοδος καθυστερήσει κατά t_0, τότε και η έξοδος θα καθυστερήσει κατά t_0.

- **Αιτιατότητα:** Αιτιατά λέγονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της εξόδου <u>δεν απαιτεί μελλοντικές τιμές</u> της εισόδου.

Συνοψίζοντας ...

- **Δυναμικότητα**: Δυναμικά λέγονται τα συστήματα για τα οποία η έξοδός τους απαιτεί προηγούμενες τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί. Αν για κάθε είσοδο η αντίστοιχη έξοδος για κάθε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την <u>ίδια χρονική στιγμή</u> και όχι από προηγούμενες ή μελλοντικές τιμές της καλείται **στατικό**.

- **Ευστάθεια**: BIBO-ευσταθή λέγονται τα συστήματα για τα οποία ισχύει:

$$|x(t)| \leq M_x \Rightarrow |y(t)| \leq M_y \quad , M_x, M_y \in \mathbb{R}$$

δηλ. αν η είσοδος είναι φραγμένη κατά απόλυτη τιμή, τότε και η έξοδος είναι φραγμένη κατά απόλυτη τιμή

Βιβλιογραφία

1. **Σήματα και Συστήματα**, Σεραφείμ Καραμπόγιας, Κεφάλαιο 2, Ενότητες 2.1, 2.2, 2.3 (σελ.31-41)
2. **Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου**, Αθανάσιος Μάργαρης, Κεφ. 2, Ενότητες 2.1, 2.2, 2.3 (σελ. 44-54)
3. **Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων**, Σέργιος Θεοδωρίδης και συνεργάτες, Κεφ.1 Ενότητα 1.3 (σελ. 15-19)

Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

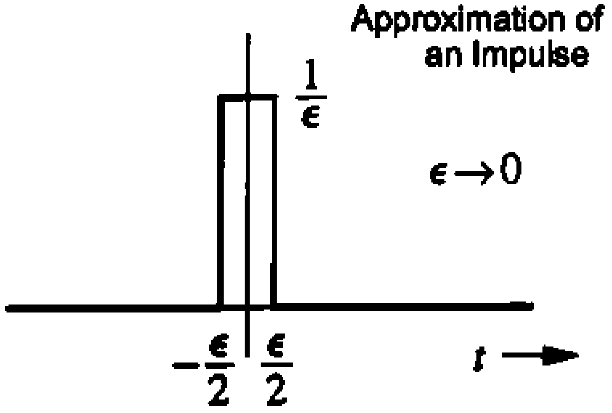
Περιεχόμενα

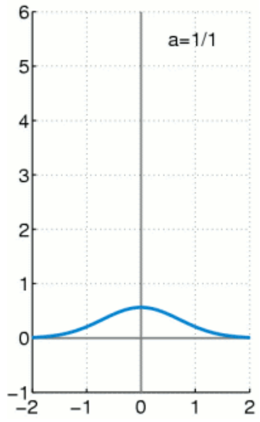
- Η Κρουστική Απόκριση των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων
- Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα
- Αναλυτικός Υπολογισμός της Συνέλιξης
- Ιδιότητες της Συνέλιξης
  - Αντιμεταθετική ιδιότητα
  - Προσεταιριστική ιδιότητα
  - Επιμεριστική ιδιότητα
  - Ταυτοτική ιδιότητα
  - Ιδιότητα Ομογένειας
  - Ιδιότητα Εύρους
- Γραφικός Υπολογισμός της Συνέλιξης

Κρουστική Συνάρτηση

- Η **κρουστική (impulse) συνάρτηση** ή κρουστικό σήμα ονομάζεται και συνάρτηση **δέλτα** ή συνάρτηση **Dirac**. Επιτρέπει την περιγραφή φαινομένων με στιγμιαία διάρκεια.

$$\delta(t) = \begin{Bmatrix} 0, \alpha\nu\ t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \end{Bmatrix}$$





μπορεί να θεωρηθεί σαν μία “συνάρτηση” που μηδενίζεται για κάθε t≠0 και το συνολικό εμβαδόν του τμήματος του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη δ(t) και τον άξονα των t είναι ίσο με την μονάδα.

Κάθε σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα σταθμισμένων ολισθημένων κρουστικών:

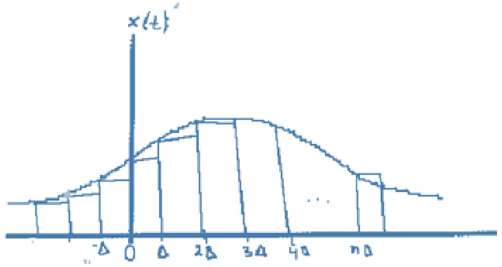
Κρουστική συνάρτηση: Ορισμός 1: $\delta(t-t_0)=0,\ t\neq t_0$ και $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$

Ορισμός 2: $\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$ όπου $x(t)$ συνεχής στο $t=t_0$

Ιδιότητα ολίσθησης: $x(t)\,\delta(t-t_0)=x(t_0)\,\delta(t-t_0)$

Θέτω $t_0=\tau$ οπότε έχω $x(t)\,\delta(t-\tau)=x(\tau)\,\delta(t-\tau)$

Οπότε $$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-\tau)\,d\tau=x(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau}_{1}=x(t)$$

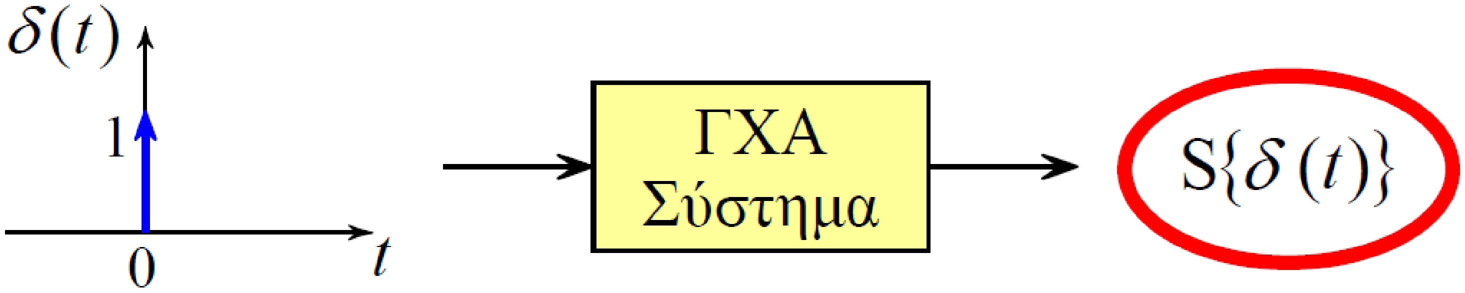


Σχέση εισόδου – εξόδου

- Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε τη σχέση με τη βοήθεια της οποίας προσδιορίζουμε την έξοδο ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος αν γνωρίζουμε:

α) το σήμα εισόδου του συστήματος και

β) την απόκριση του συστήματος (το σήμα εξόδου) όταν αυτό διεγείρεται από τη δ(t)



Η κρουστική απόκριση

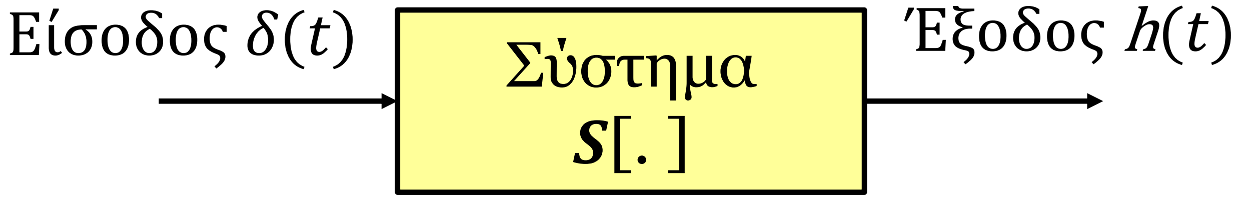
- Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα σήμα «ακαριαίας» μορφής, ένα σήμα που υπάρχει σε απειροστά μικρό χρονικό διάστημα.
- Σκεφτείτε ότι χτυπάτε ένα καμπανάκι (σύστημα) με ένα σφυρί (είσοδος) πολύ γρήγορα, όσο ακαριαία γίνεται. Μπορούμε να πούμε ότι ο ήχος που θα παραχθεί, δηλ. η έξοδος του συστήματος, χαρακτηρίζει το καμπανάκι.
- Η είσοδος αυτή θα διεγείρει το σύστημα και θα το αναγκάσει να παράξει κάποια έξοδο.
- Η έξοδος αυτή πρέπει να «μοιάζει» με την απόκριση μηδενικής εισόδου, αφού η ύπαρξή της οφείλεται σε είσοδο που υπάρχει μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή και μετά χάνεται.
- Αυτή η έξοδος ονομάζεται **κρουστική απόκριση.**

Η κρουστική απόκριση

- **Κρουστική απόκριση** (impulse response) ονομάζεται η έξοδος που παράγει ένα σύστημα όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.

- Αν το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο** (ΓΧΑ), η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \boldsymbol{S}[\delta(t)]$$



Η κρουστική απόκριση

- Αν το σύστημα είναι **γραμμικό αλλά όχι και χρονικά αμετάβλητο** , η κρουστική απόκριση $h(t, \tau)$ του συστήματος με είσοδο την μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t - \tau)$ που εφαρμόζεται κατά τη χρονική στιγμή τ, είναι:

$$h(t, \tau) = \boldsymbol{S}[\delta(t - \tau)]$$

Συνέλιξη σε ΓΧΑ Συστήματα

- Αποδεικνύεται ότι η έξοδος $y(t)$ ενός **ΓΧΑ συστήματος** που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία και έχει κρουστική απόκριση $h(t)$, όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα $x(t)$, δίνεται από:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Το ολοκλήρωμα ονομάζεται ***συνέλιξη*** (convolution) ή δίπλωση ή συνελικτικό ολοκλήρωμα μεταξύ των συναρτήσεων x(t) και h(t) και συμβολικά γράφεται ως:

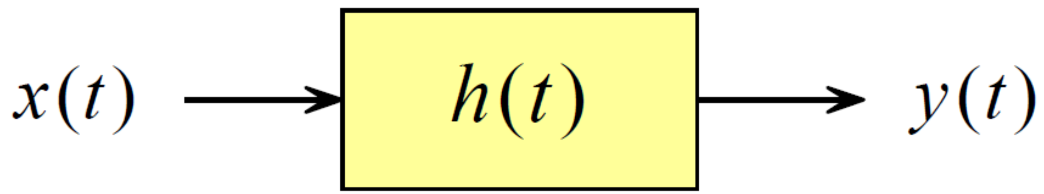
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$c_{xy}(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Συνέλιξη σε ΓΧΑ Συστήματα

- Παρατηρούμε ότι σε ένα ΓΧΑ σύστημα αρκεί η γνώση μιας μόνο συνάρτησης, της $h(t)$, για να περιγράφει πλήρως η σχέση μεταξύ του σήματος εισόδου $x(t)$ και του σήματος εξόδου $y(t)$ του συστήματος με τη βοήθεια του *ολοκληρώματος της συνέλιξης*.



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Συνέλιξη σε ΓΧΑ Συστήματα

- Αν το σύστημα εκτός από **ΓΧΑ είναι και αιτιατό** τότε η συνέλιξη απλοποιείται σε:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Αν το σήμα εισόδου είναι **αιτιατό σήμα**, τότε το σήμα εξόδου δίνεται από την

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Η Συνέλιξη αναλυτικά

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ ! ΌΧΙ το t. Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα.

- Το ολοκλήρωμα περιέχει δυο σήματα : το $x(\tau)$ και το $h(t-\tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας : *ανάκλαση* και *μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής :

$$h(t) \rightarrow h(\tau) \rightarrow h(-\tau) \rightarrow h(-\tau+t) = h(t-\tau)$$

- Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ.

- Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης.

Fun Facts για τη συνέλιξη

- Η συνέλιξη είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο που μας επιτρέπει να κατανοούμε και να επεξεργαζόμαστε τον κόσμο γύρω μας με τρόπους που δε θα ήταν δυνατοί αλλιώς!
- Χρησιμοποιείται στην κάμερα του κινητού σας
- Συνέλιξη στα Νευρωνικά Δίκτυα (CNNs)
- Ιστορική ανακάλυψη με εφαρμογές στη μουσική και την εικόνα
- Αναστρέψιμη και υπολογιστικά αποδοτική

Τέλος Ενότητας