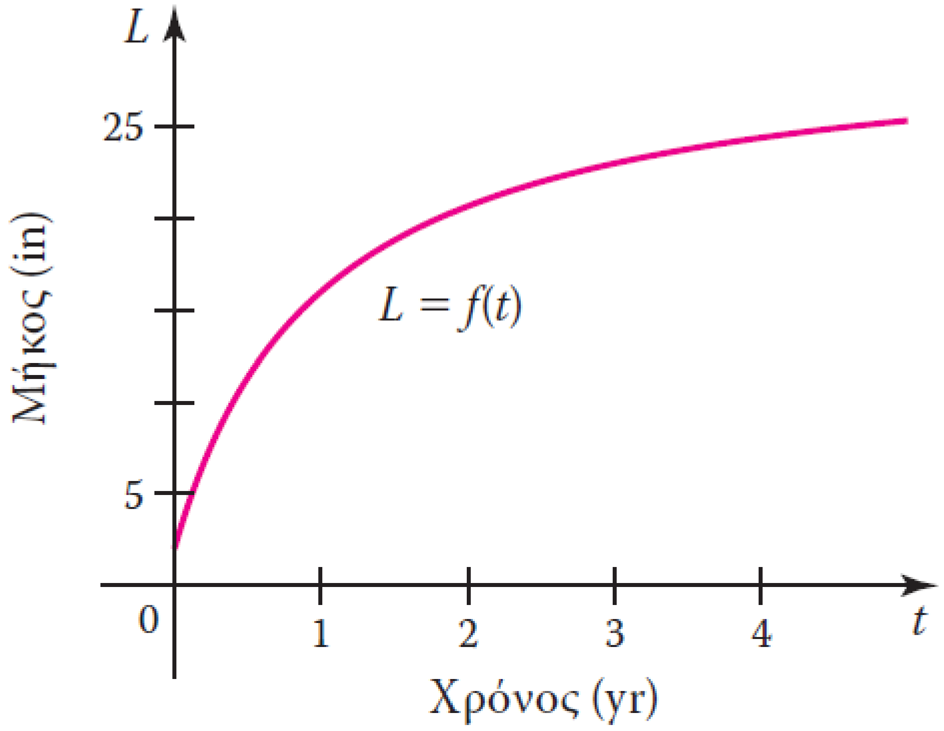
Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2024-2025

Συνέχεια Συναρτήσεων

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Παράδειγμα 1

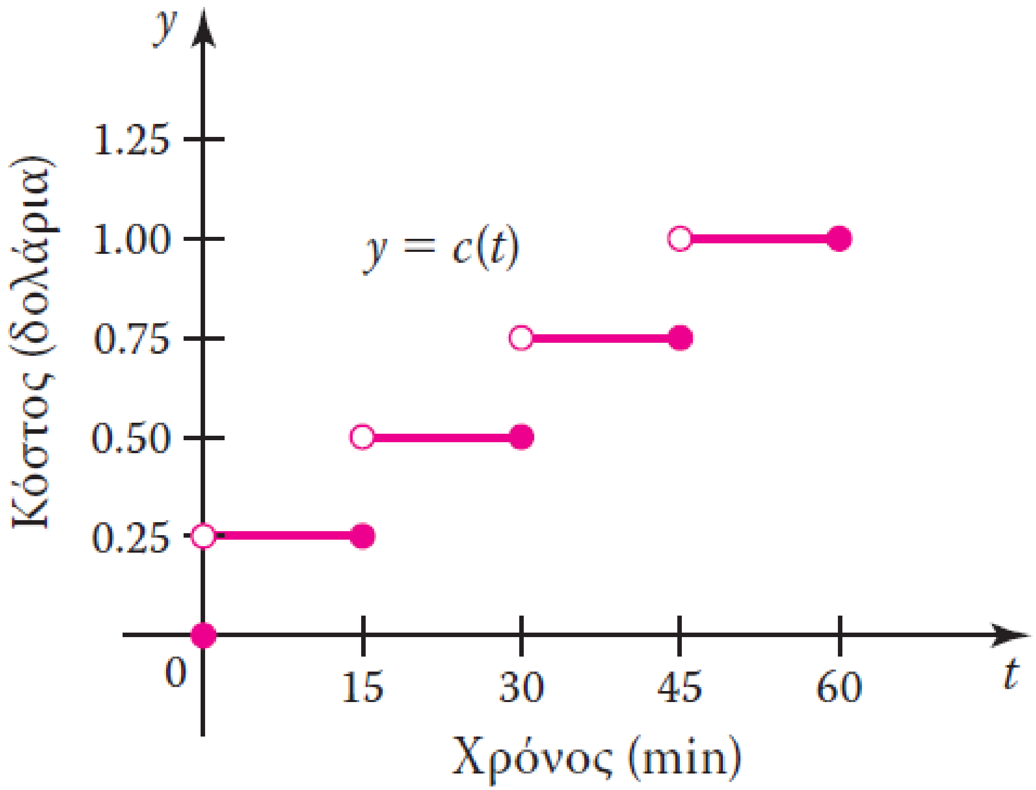
- $L = f(t)$ το μήκος του ψαριού t χρόνια μετά την εκκόλαψή του
- Το μήκος του ψαριού αλλάζει σταδιακά καθώς το t αυξάνεται



(α)

Παράδειγμα 2

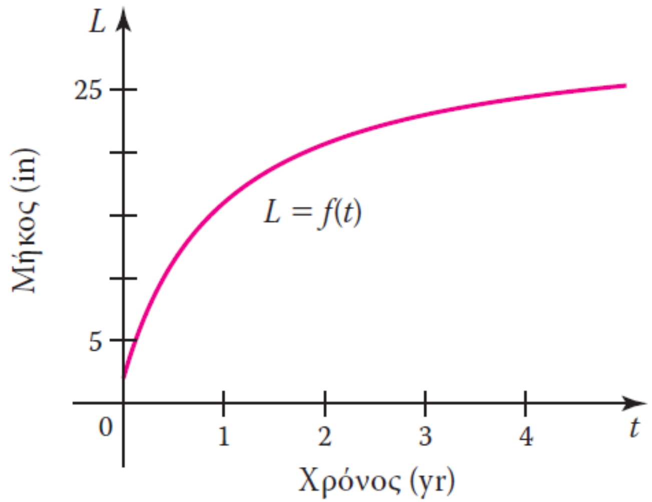
- Παρκόμετρο δέχεται μόνο κέρματα των 25 λ. και κάθε κέρμα αντιστοιχεί σε 15 min στάθμευσης
- $c(t)$ το κόστος (σε δολάρια) του χώρου στάθμευσης για t min
- Το γράφημα της $c(t)$ έχει διακοπές σε ακέραια πολ/σια των 15 min



(β)

Συνέχεια Συνάρτησης

- Κοινώς, λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι **συνεχής** στο a, εάν το γράφημα της f δεν έχει τρύπα ή μια διακοπή στο a,
- Δηλ. αν μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημά της κοντά στο a, χωρίς να σηκώσουμε το μολύβι



(α)

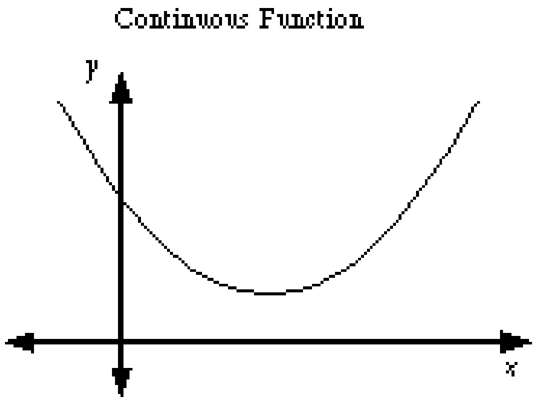
Συνέχεια Συνάρτησης

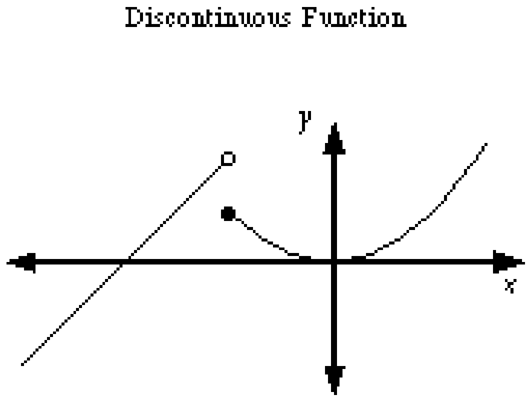
Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f και a ένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής** στο a όταν

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της λέγεται **συνεχής συνάρτηση**



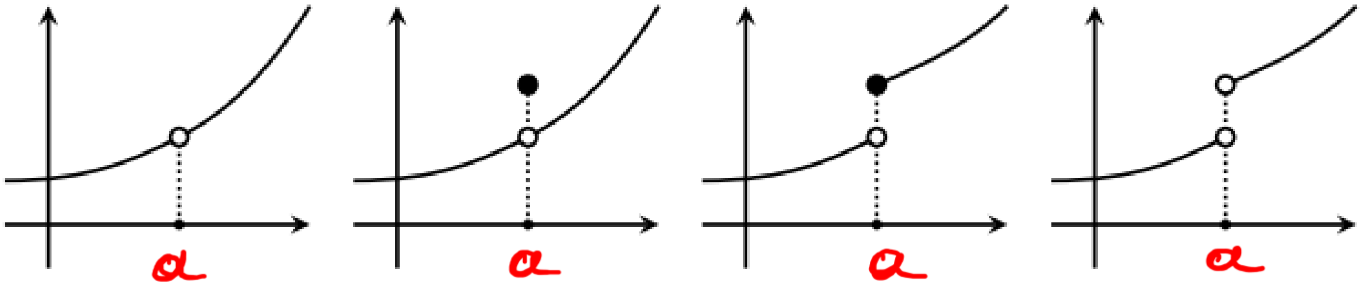


Προϋποθέσεις Συνέχειας

Για να είναι η f είναι **συνεχής** στο a πρέπει να ισχύουν όλα τα ακόλουθα:

1. Το $f(a)$ ορίζεται (το a ανήκει στο πεδίο ορισμού της f)
2. Το $\lim_{x \to a} f(x)$ υπάρχει
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (η τιμή της f ισούται με το όριο της f στο a)

Αν κάποια από τις παραπάνω προϋποθέσεις δεν ισχύει λέμε ότι η f είναι **ασυνεχής** στο a



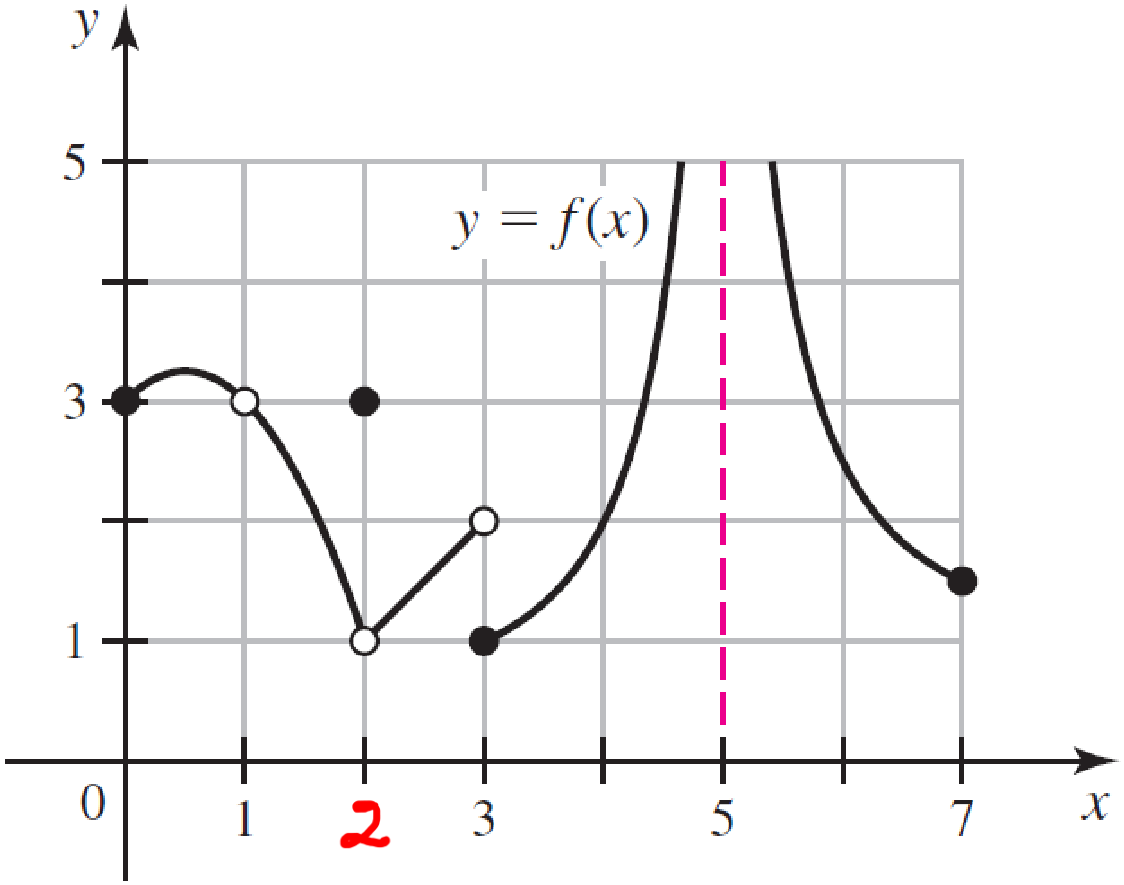
δεν ισχύουν: 1,3   3   2,3   1,2,3

$f(x)$ **είναι ασυνεχής** στο $x = a$

$\mathcal{D}(f) = [0,7] - \{1, 5\}$

Άσκηση

Σε ποια σημεία η f είναι ασυνεχής και γιατί.



<u>Λύση</u> $x=1$ δεν ορίζεται

$x=2$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1 \neq 3 = f(2)$

$x=3$ $\nexists \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$x=5$ δεν ορίζεται

Κατηγορίες γνωστών συνεχών συναρτήσεων

Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους:

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις
- Οι ρητές συναρτήσεις
- Οι συναρτήσεις $\sin(x)$ και $\cos(x)$
- Όλες οι τριγωνομετρικές και οι αντίστροφές τους
- Οι εκθετικές a^x και λογαριθμικές $log_a x$ συναρτήσεις

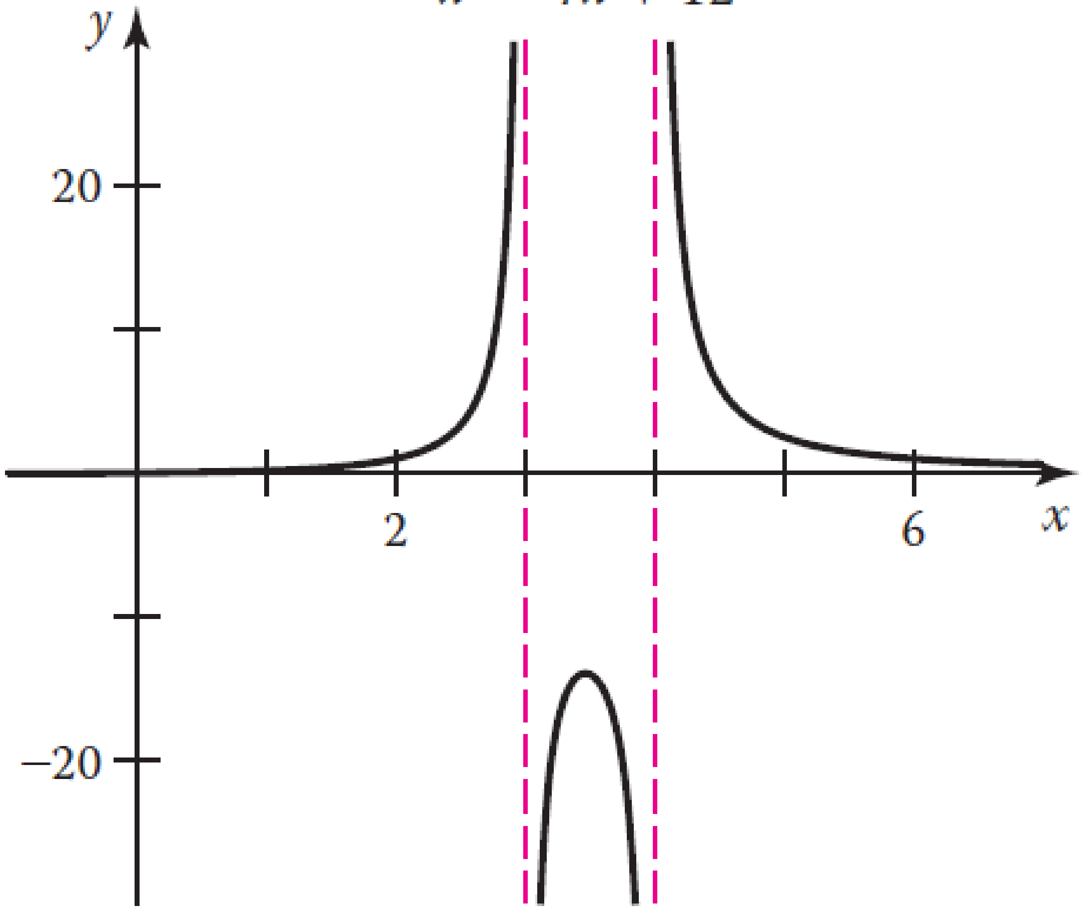
Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχής στο a, τότε είναι συνεχείς στο a και οι συναρτήσεις:

1. $f + g$
2. $c * f$, όπου $c \in \mathbb{R}$
3. $f * g$
4. $\frac{f}{g}$, υπό την προϋπόθεση $g(a) \neq 0$
5. $|f|$
6. $\sqrt[n]{f}$

Παράδειγμα 1

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 7x + 12}$$



Συνεχής παντού εκτός από τα $x = 3$ και $x = 4$.

Συνέχεια Σύνθετων Συναρτήσεων

Θεώρημα: Αν ισχύουν

- η συνάρτηση g είναι συνεχής στο a και
- η f είναι συνεχής στο $g(a)$,

τότε η σύνθετη συνάρτηση $f \circ g$ είναι συνεχής στο a

Όρια Σύνθετων Συναρτήσεων

Θεώρημα:

1. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο a και

   η f είναι συνεχής στο $g(a)$, τότε

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

2. Αν $\lim_{x \to a} g(x) = L$ και

   η f είναι συνεχής στο L, τότε

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x\to 2}\cos(\frac{x^2-4}{x-2})$

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ ← δεν ορίζεται στο $x=2$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$$

f συνεχής στο 4

$$\lim_{x\to 2}\cos\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)\right) = \cos(4)$$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \cos(\frac{x^2-4}{x-2})$

<u>Λύση</u>: Η συνάρτηση $f(x) = cosx$ είναι συνεχής. Η $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ δεν είναι συνεχής στο $x = 2$. Αλλά

$$\lim_{x \to 2}(\frac{x^2-4}{x-2}) = \lim_{x \to 2}(\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}) = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$$

Επομένως

$$\lim_{x \to 2} \cos(\frac{x^2-4}{x-2}) = \cos(\lim_{x \to 2}(\frac{x^2-4}{x-2})) = cos4 = -0.654.$$

Συνέχεια στα Άκρα

Ορισμός:

Μια συνάρτηση f είναι **συνεχής από δεξιά** (ή δεξιά συνεχής) στο a όταν

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

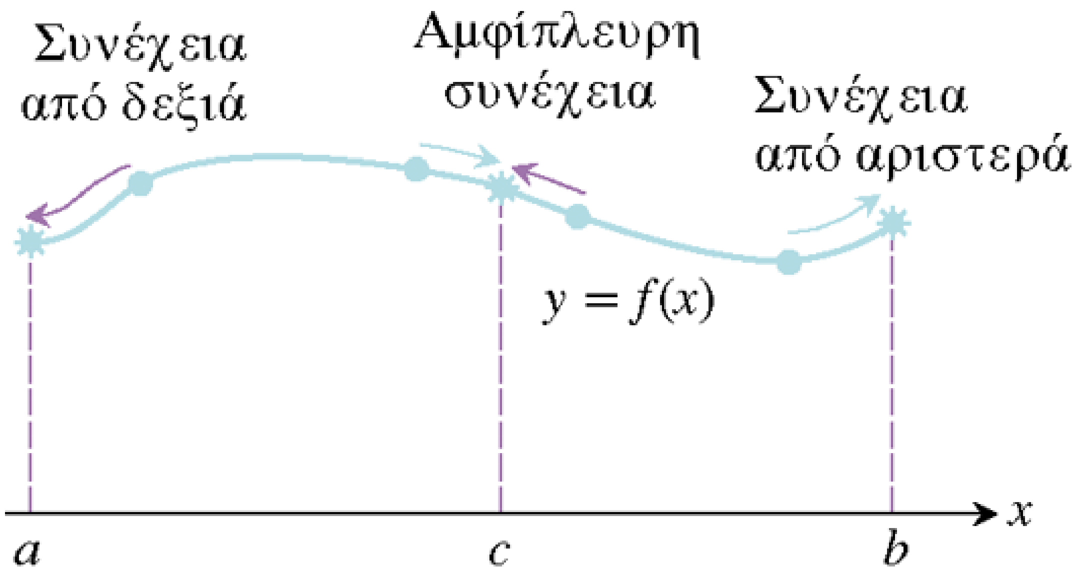
Μια συνάρτηση f είναι **συνεχής από αριστερά** (ή αριστερά συνεχής) στο a όταν

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Συνέχεια σε Διάστημα

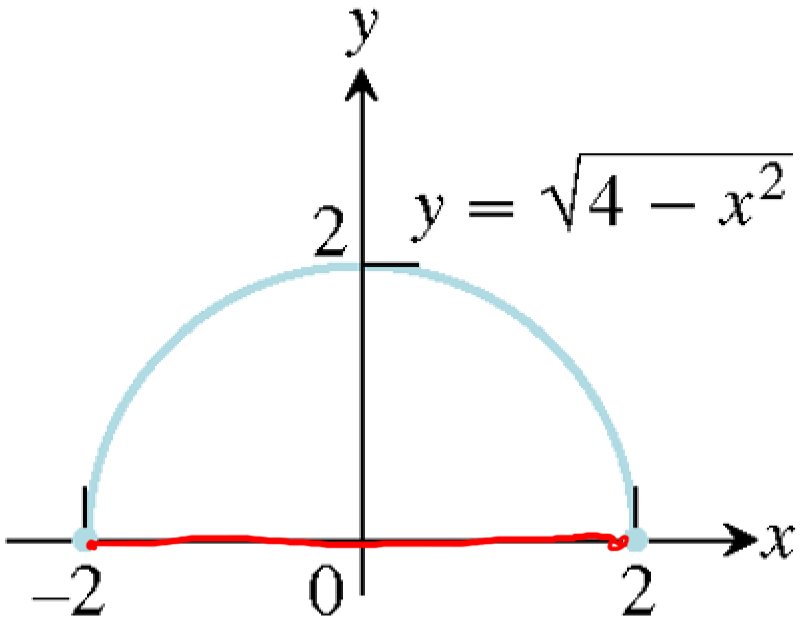
Ορισμός: Μια συνάρτηση f είναι **συνεχής σε ένα διάστημα $\boldsymbol{I}$** εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $a \in I$

Εάν το I περιέχει τα άκρα (κλειστό διάστημα), η συνέχεια στο I σημαίνει ότι η f είναι συνεχής από δεξιά ή από αριστερά στα άκρα του διαστήματος



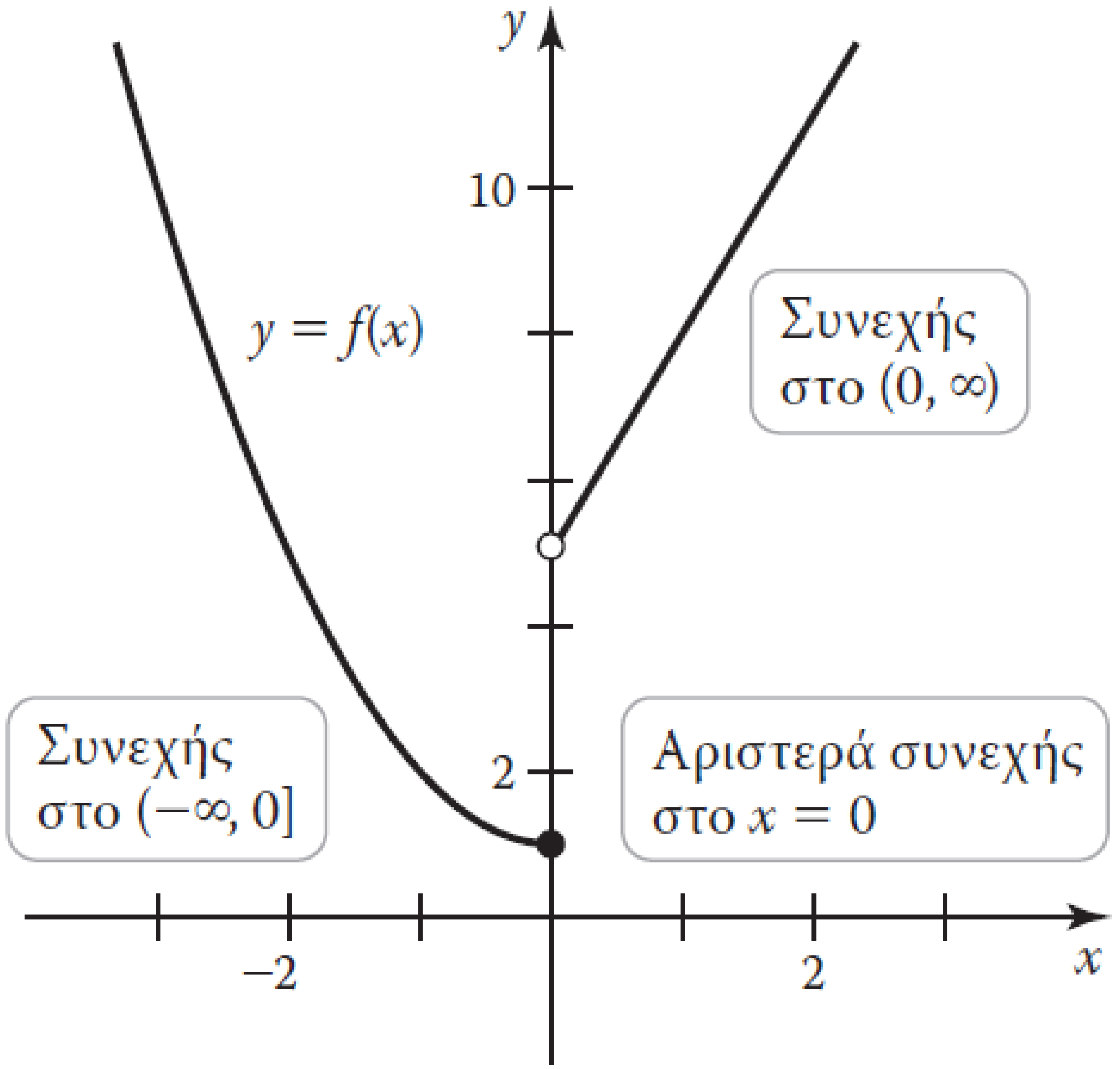
Παράδειγμα

Η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της



$D(f) = [-2, 2]$

Παράδειγμα



y
10
y = f(x)
Συνεχής στο (0, ∞)
Συνεχής στο (−∞, 0]
2
Αριστερά συνεχής στο x = 0
−2
2
x

Θεώρημα του Bolzano

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Αν

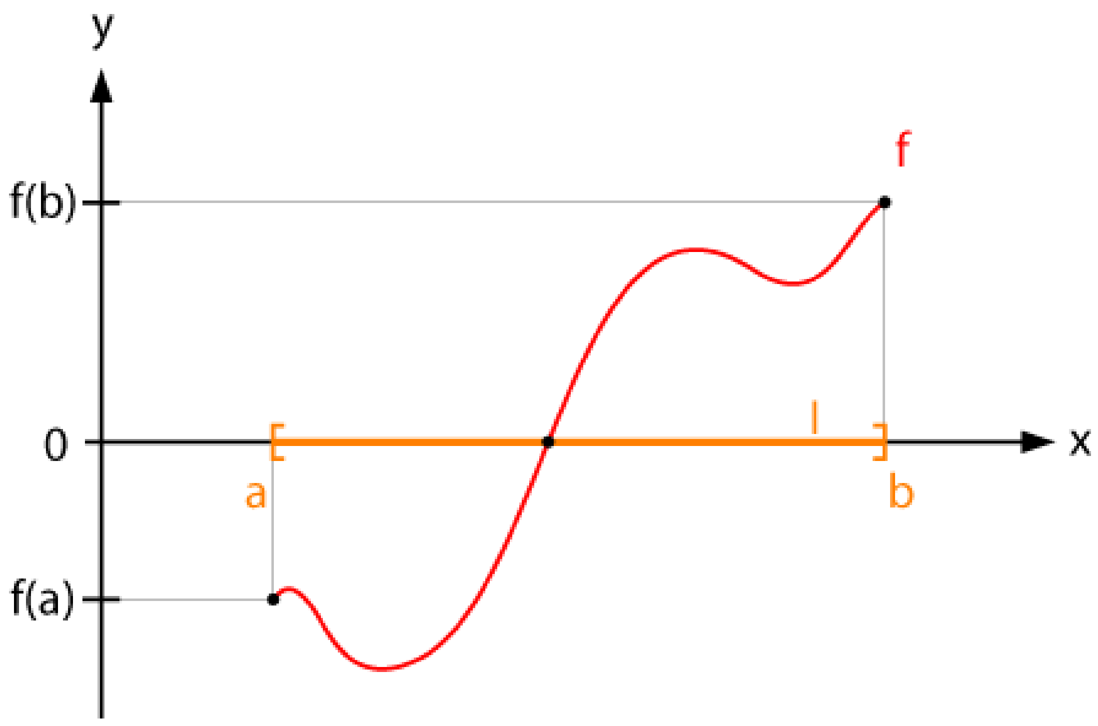
- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$
- $f(a) * f(b) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in (a, b)$$

τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0$$



http://demo.activemath.org/ActiveMath2/search/show.cmd?id=mbase://LeAM_calculus/contin/cor_root

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $(x+1)3^{x+1}=1$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η εξίσωση : $(x+1)3^{x+1} = 1$

έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1{,}0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x+1)3^{x+1} - 1$ στο $[-1{,}0]$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1{,}0]$
- $f(-1) = -1 < 0$ και $f(0) = 2 > 0$

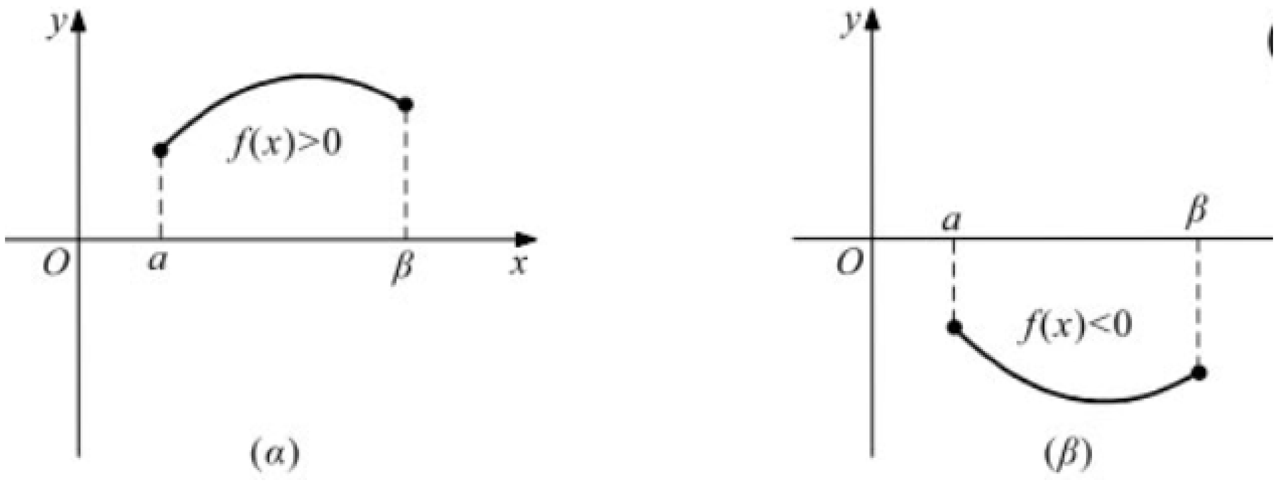
Από το θ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in (-1{,}0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0,$

δηλαδή η εξίσωση: $(x+1)3^{x+1} - 1 = 0$ έχει στο $(-1{,}0)$ μια τουλάχιστον ρίζα.

Συνέπειες Θεωρήματος Bolzano

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και **δε μηδενίζεται** σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή <u>διατηρεί πρόσημο στο διάστημα</u> Δ.

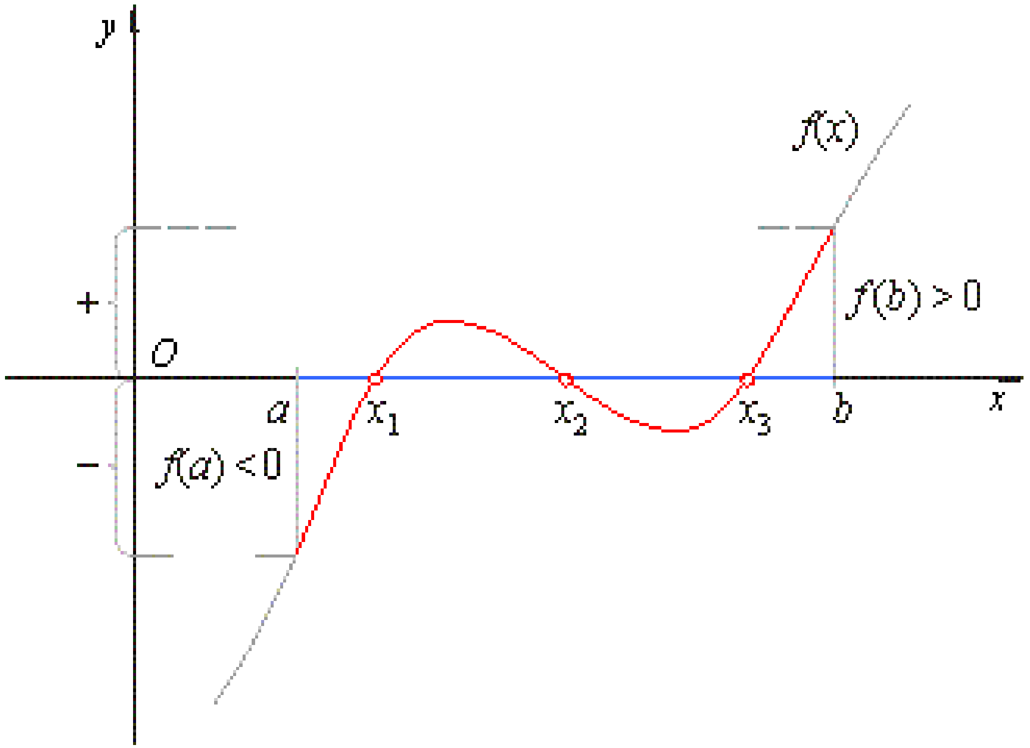


2. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Προσδιορισμός προσήμου συνεχούς συνάρτησης για διάφορες τιμές του x

Βήματα

1. Εύρεση των ριζών της f
2. Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζονται από τις διαδοχικές ρίζες επιλέγουμε έναν αριθμό a και υπολογίζουμε την $f(a)$. Το πρόσημο της $f(a)$ αποτελεί και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα



http://www.nabla.hr/CL-ContFunDerivativA.htm

Παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = sinx - cosx, \qquad x \in [0,2\pi]$$

Παράδειγμα

- Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = sinx - cosx, \qquad x \in [0,2\pi]$$

Λύση: Η f είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$.

Βήμα 1. Υπολογίζουμε τις ρίζες της f στο $[0,2\pi]$.

$sinx - cosx = 0 \Leftrightarrow sinx = cosx$

$$\Leftrightarrow tanx = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}\,, \qquad x = \frac{5\pi}{4}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Βήμα 2. Οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της στα διαστήματα

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \ \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \text{ και } (\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$$

Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα του ελέγχου του πρόσημου της f σε κάθε διάστημα

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$f(x) = sinx - cosx$$

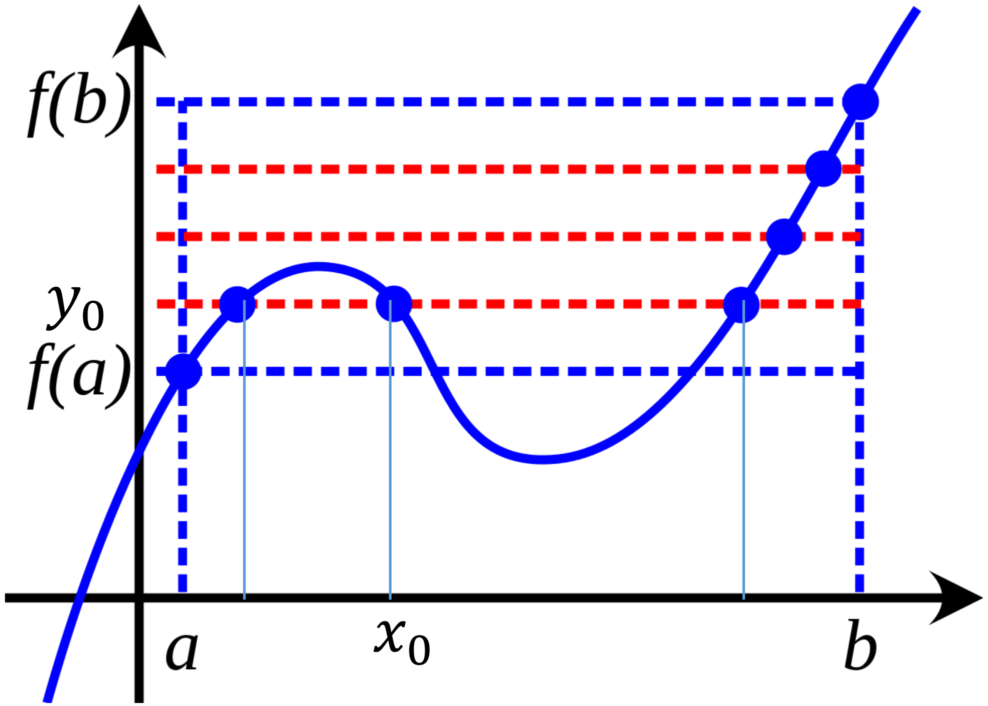
Διάστημα	$\left[0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$
Επιλεγμένος αριθμός x_0	0	$\frac{\pi}{2}$	2π
$f(x_0)$	-1	1	-1
Πρόσημο	$-$	$+$	$-$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Αν

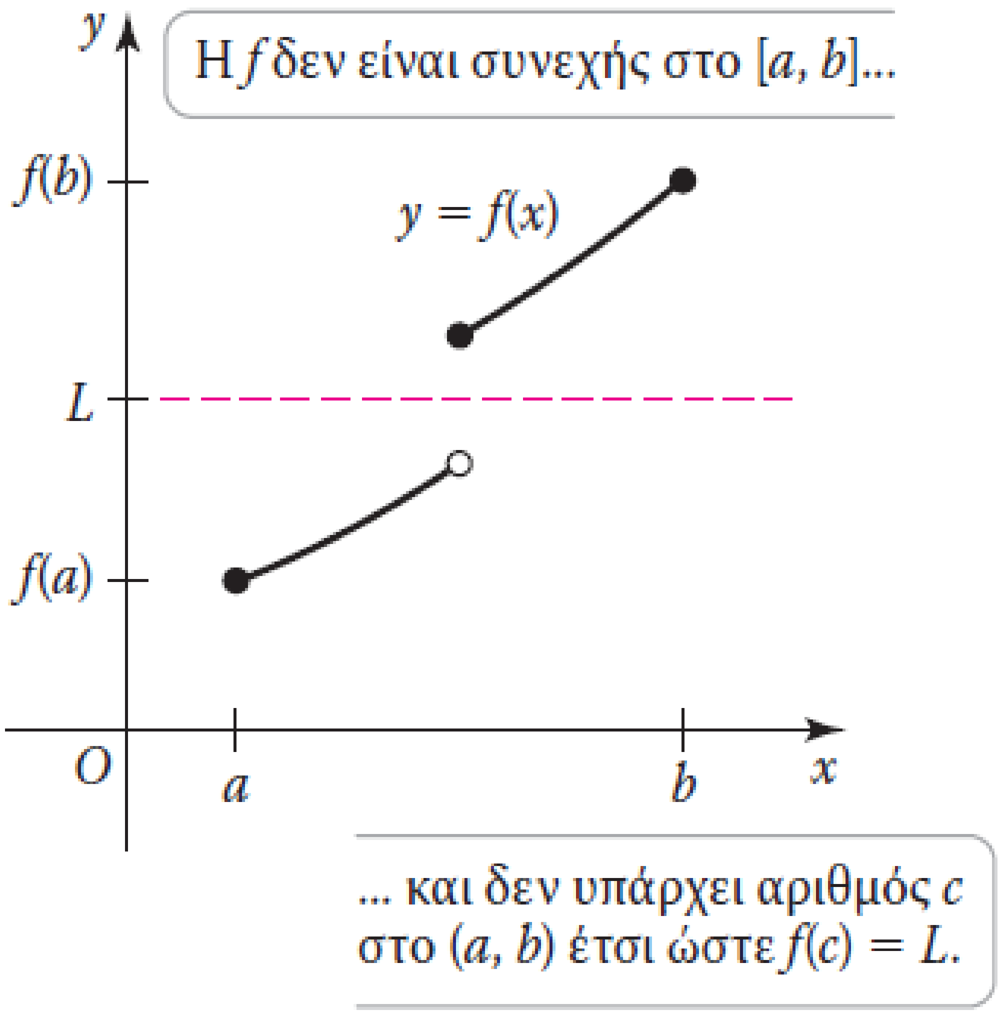
- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a) \neq f(b)$

τότε για κάθε αριθμό y_0 μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = y_0$.



Σχόλιο

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, b]$, τότε, δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές.



Εφαρμογή του θ. ενδιάμεσων τιμών

Ας υποθέσουμε ότι παρκάρετε το αυτοκίνητό σας στην αρχή ενός μονοπατιού σε ένα εθνικό πάρκο, για να αρχίσετε μια 2ωρη πεζοπορία έως μια λίμνη στις 7 π.μ. την Παρασκευή. Την Κυριακή το πρωί, θα αφήσετε τη λίμνη στις 7 π.μ. και θα αρχίσετε τη 2ωρη επιστροφή στο αυτοκίνητό σας. Ας υποθέσουμε ότι η λίμνη απέχει 3 μίλια από το αυτοκίνητό σας.

Εφαρμογή του θ. ενδιάμεσων τιμών

Ας υποθέσουμε ότι παρκάρετε το αυτοκίνητό σας στην αρχή ενός μονοπατιού σε ένα εθνικό πάρκο, για να αρχίσετε μια 2ωρη πεζοπορία έως μια λίμνη στις 7 π.μ. την Παρασκευή. Την Κυριακή το πρωί, θα αφήσετε τη λίμνη στις 7 π.μ. και θα αρχίσετε τη 2ωρη επιστροφή στο αυτοκίνητό σας. Ας υποθέσουμε ότι η λίμνη απέχει 3 μίλια από το αυτοκίνητό σας.

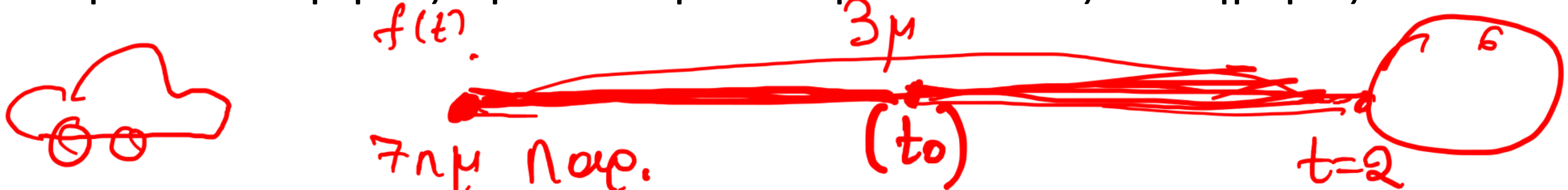
Έστω $f(t)$ η απόστασή σας από το αυτοκίνητό σας t ώρες μετά τις 7 π.μ. την Παρασκευή και $g(t)$ η απόστασή σας από το αυτοκίνητό σας t ώρες μετά τις 7 π.μ. την Κυριακή.

a. Υπολογίστε τις $f(0), f(2), g(0)$ και $g(2)$

b. Έστω $h(t) = f(t) - g(t)$. Βρείτε τα $h(0)$ και $h(2)$.

c. Να δείξετε ότι υπάρχει κάποιο σημείο κατά μήκος της διαδρομής που θα το περάσετε ακριβώς την ίδια ώρα το πρωί και στις δύο ημέρες.

$h(t_0)=0$



α. $f(0)=0 \quad f(2)=3 \quad , \quad g(0)=3 \quad , \quad g(2)=0$

b.

$$h(t)=f(t)-g(t)$$

$$h(0)=f(0)-g(0)=0-3=-3$$

$$h(2)=f(2)-g(2)=3-0=3$$

c) $h(0)\neq h(2) \Rightarrow$ Θ. ενδ. τιμών $\forall$ $\in[-3,3]$

$$\exists\ t_0 \in (0,2) : h(t_0)=0$$

$$f(t_0)-g(t_0)=0$$

a. Έχουμε $f(0) = 0,\ f(2) = 3,\ g(0) = 3,\ g(2) = 0$.

$b.$ $h(0) = -3,\ h(2) = 3$

c. Από το θ. ενδιαμέσων τιμών, αφού η h είναι συνεχής συνάρτηση στο $(0,2)$ και το 0 είναι ένα ενδιάμεσο σημείο του πεδίου τιμών της $[-3,3]$, συνεπάγεται ότι πρέπει να υπάρχει χρόνος t_0 μεταξύ του 0 και 2, τέτοιος ώστε

$$h(t_0) = 0 \Leftrightarrow f(t_0) = g(t_0)$$

δηλ. σε αυτόν τον χρόνο η απόσταση από το αυτοκίνητο είναι ίδια και τις δύο ημέρες, άρα περνάμε ακριβώς από το ίδιο σημείο αυτό το χρόνο.