



Σήματα και Συστήματα

Ενότητα 4: Συστήματα συνεχούς χρόνου

Εξάμηνο Διδασκαλίας: 3^ο

Διδάσκων: Βασίλης Ασπιώτης

Email: v.aspiotis@uoi.gr

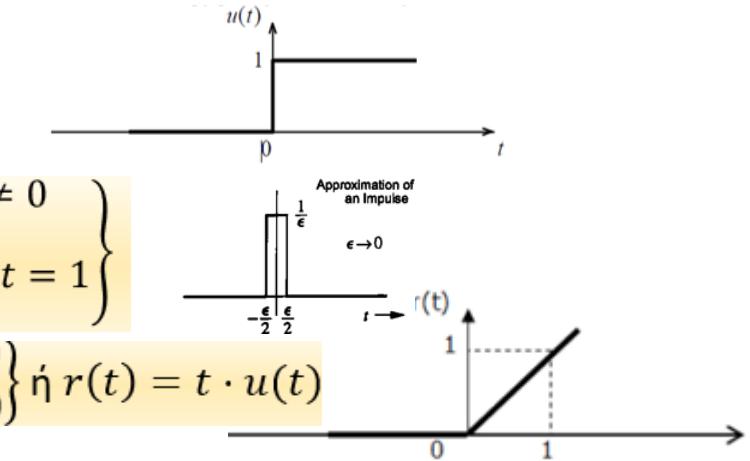
Στο προηγούμενο μάθημα... Στοιχειώδη Σήματα

1. Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση
2. Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Δέλτα
3. Η Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης (Ράμπα)
4. Εκθετικά Σήματα
5. Ημιτονοειδή Σήματα
6. Τετραγωνικός Παλμός
7. Τριγωνικός Παλμός
8. Συνάρτηση Δειγματοληψίας
9. Τραίνο κρουστικών συναρτήσεων (σήμα Comb)

Στο προηγούμενο μάθημα... Στοιχειώδη Σήματα

1. Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση
2. Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Δέλτα
3. Η Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης (Ράμπα)
4. Εκθετικά Σήματα
5. Ήμιτονοειδή Σήματα
6. Τετραγωνικός Παλμός
7. Τριγωνικός Παλμός
8. Συνάρτηση Δειγματοληψίας
9. Τραίνο κρουστικών συναρτήσεων (σήμα Comb)

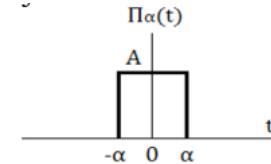
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



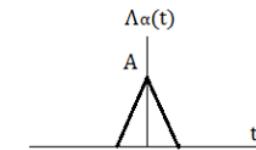
$$x(t) = A\beta^{st}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

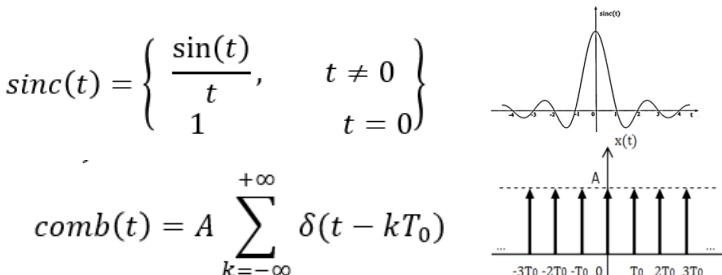
$$\Pi_\alpha(t) = \begin{cases} A, & t < |a| \\ 0, & t > |a| \end{cases}$$



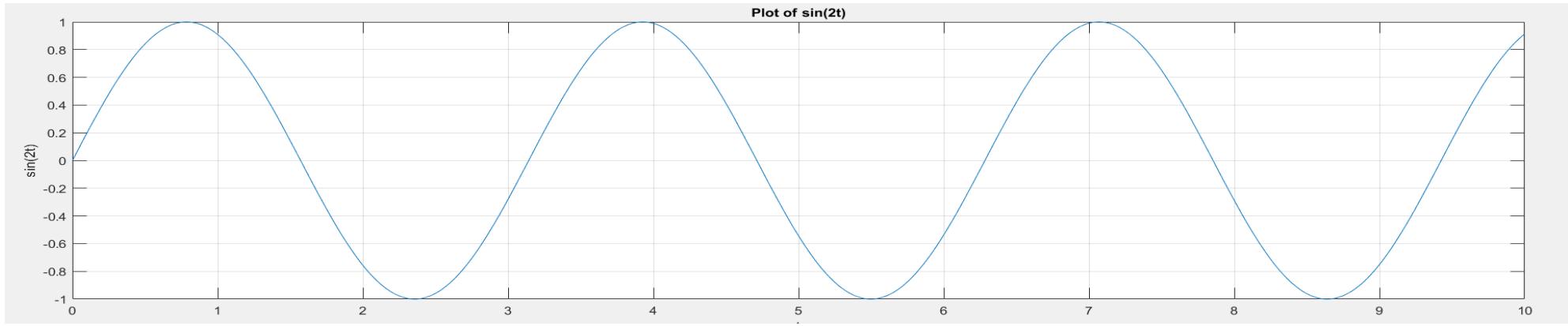
$$\Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{|t|}{a}\right), & t < |a| \\ 0, & t > |a| \end{cases}$$



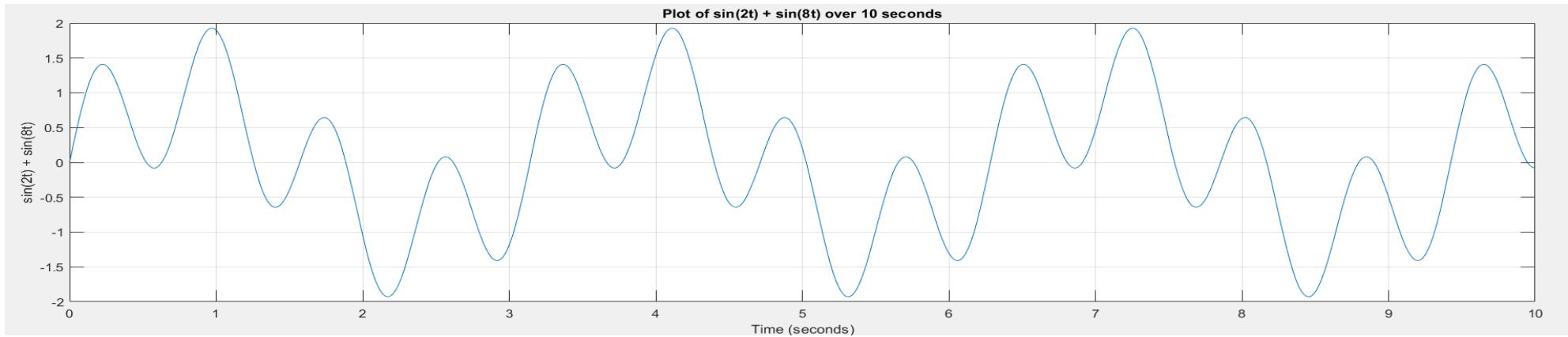
$$comb(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



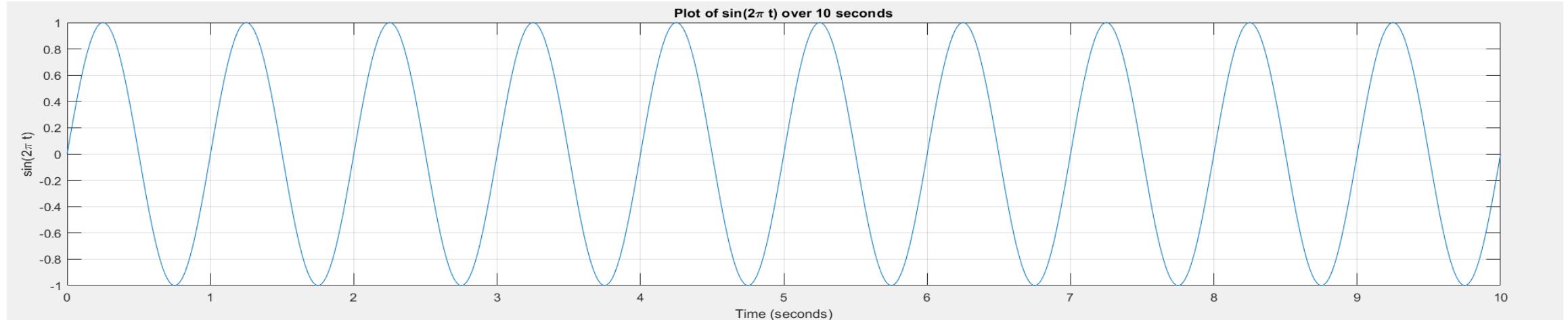
$$\sin(2t)$$



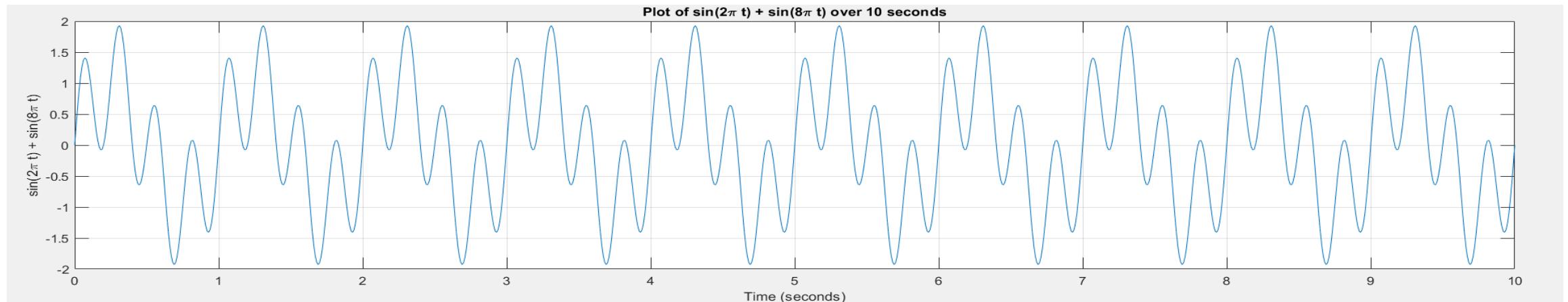
$$\sin(2t) + \sin(8t)$$



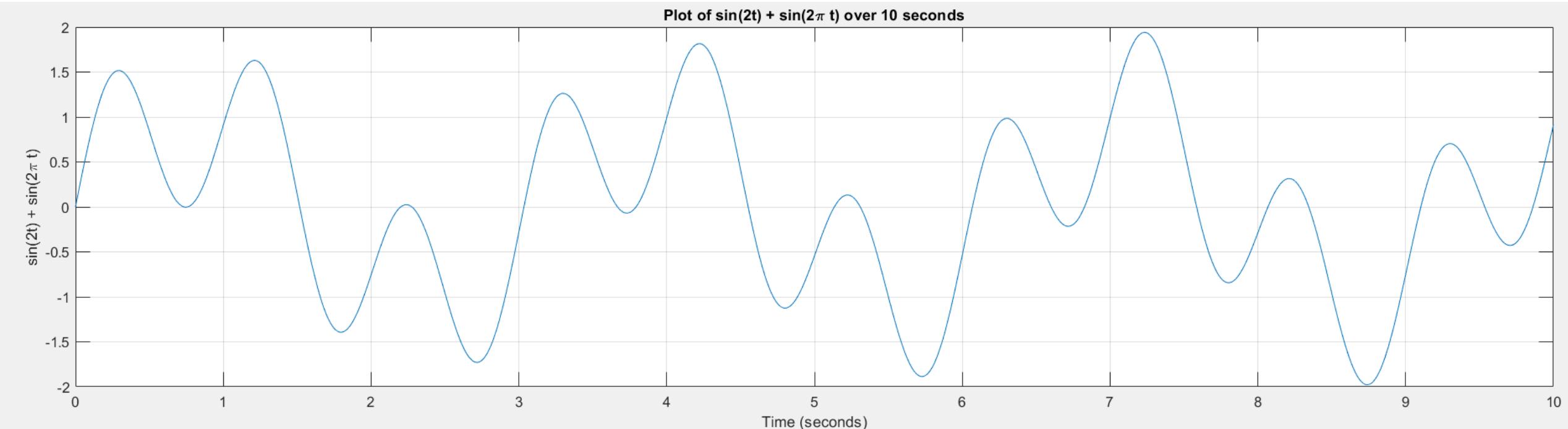
$$\sin(2\pi t)$$



$$\sin(2\pi t) + \sin(8\pi t)$$



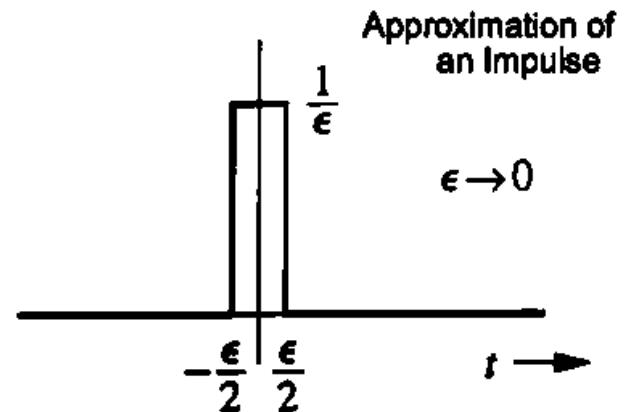
$$\sin(2t) + \sin(2\pi t)$$



Κρουστική Συνάρτηση (1/2)

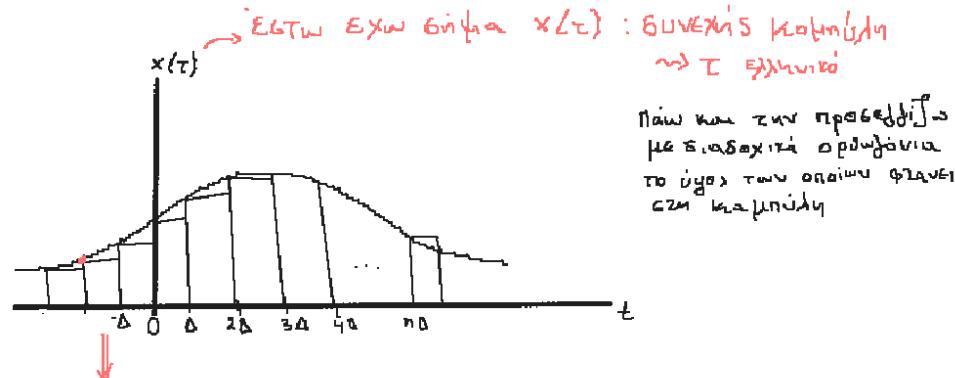
- Η **κρουστική (impulse) συνάρτηση** ή κρουστικό σήμα ονομάζεται και συνάρτηση **δέλτα** ή συνάρτηση **Dirac**. Επιτρέπει την περιγραφή φαινομένων με στιγμιαία διάρκεια.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$



μπορεί να θεωρηθεί σαν μία “συνάρτηση” που μηδενίζεται για κάθε $t \neq 0$ και το συνολικό εμβαδόν του τμήματος του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $\delta(t)$ και τον άξονα των t είναι ίσο με την μονάδα.

Κάθε σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα σταθμισμένων ολισθημένων κρουστικών:

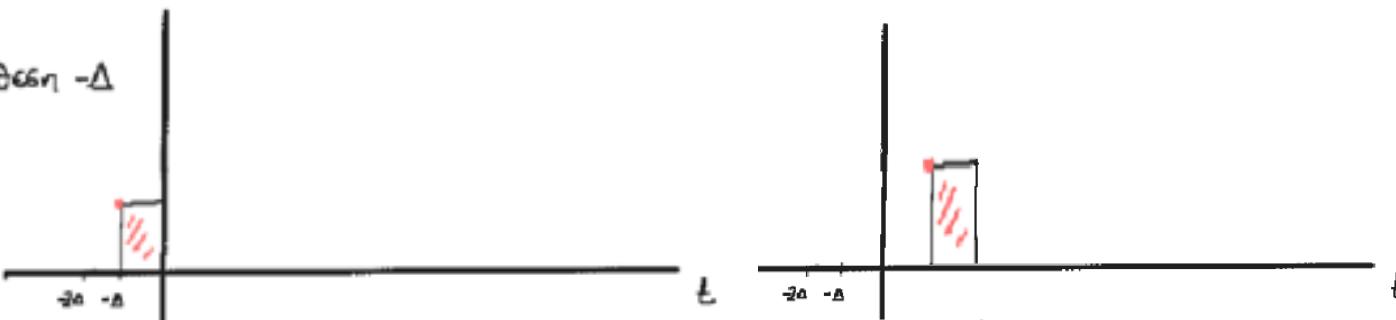


$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$

π.χ.
 x στη δεξιά -2Δ



π.χ.
 x στη δεξιά $-\Delta$



Περιεχόμενα ενότητας

1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων

- Συστήματα Συνεχούς Χρόνου
- Συστήματα Διακριτού Χρόνου

2. Συνδέσεις Συστημάτων

3. Είδη Συστημάτων

- Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
- Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
- Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
- Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
- Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Ορισμός συστήματος

- Σύστημα είναι κάθε οντότητα που επενεργεί σε κάποιο σήμα $x(t)$ και ως αποτέλεσμα παράγει ένα (νέο) σήμα $y(t)$.
- Από μαθηματική άποψη ένα σύστημα θεωρείται ως ένας μετασχηματισμός $S[.]$ που μετασχηματίζει ένα σήμα $x(t)$ σε ένα άλλο σήμα $y(t)$ σύμφωνα με τη σχέση $y(t) = S[x(t)]$.
- Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται **σχέση εισόδου – εξόδου** και περιγράφει ένα σύστημα στο πεδίο του χρόνου (time domain) με βάση την είσοδο και την έξοδό του, αγνοώντας πλήρως την εσωτερική δομή και περιγραφή του συστήματος.

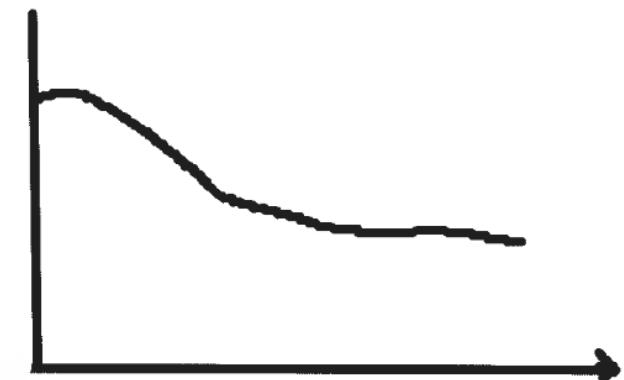
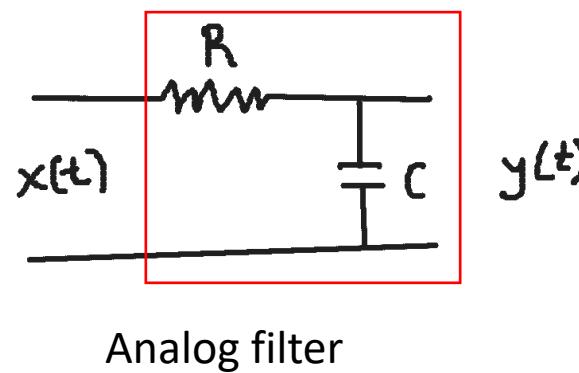
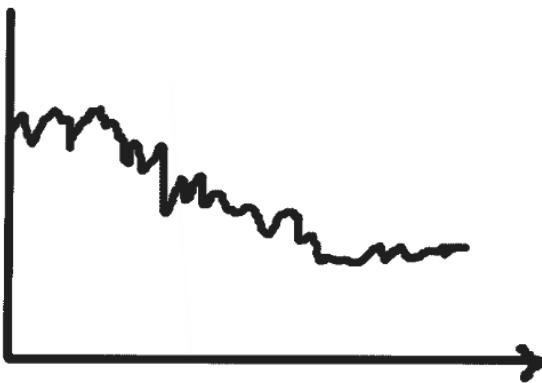


Σχηματική περιγραφή του συστήματος S .

Ορισμός συστήματος - Παραδείγματα

- 'Ένα σύστημα ψηφιακής καταγραφής ήχου μετατρέπει ένα ακουστικό σήμα σε μια σειρά από αριθμούς (bits) τους οποίους καταγράφει, π.χ., σε οπτικό δίσκο.
- Ηχητικό φίλτρο για μουσική. Παίρνει το ηχητικό σήμα, το τροποποιεί αφαιρώντας πχ τις ψηλές συχνότητες
- 'Ένα σύστημα επικοινωνίας μεταφέρει πληροφορία, π.χ. το σήμα φωνής, από ένα σημείο του χώρου, που λέγεται πηγή, σε ένα άλλο σημείο, που είναι ο προορισμός χρήσης της.

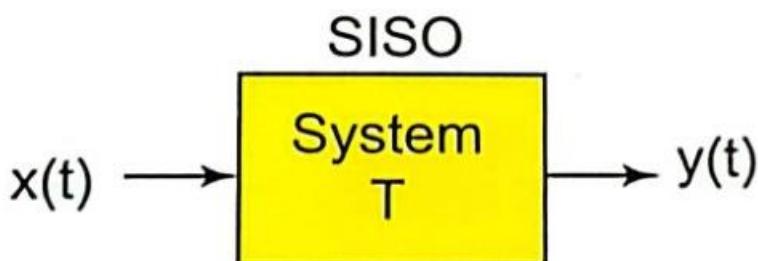
Ορισμός συστήματος - Παραδείγματα



Κατηγορίες συστημάτων (1/6)

(A) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

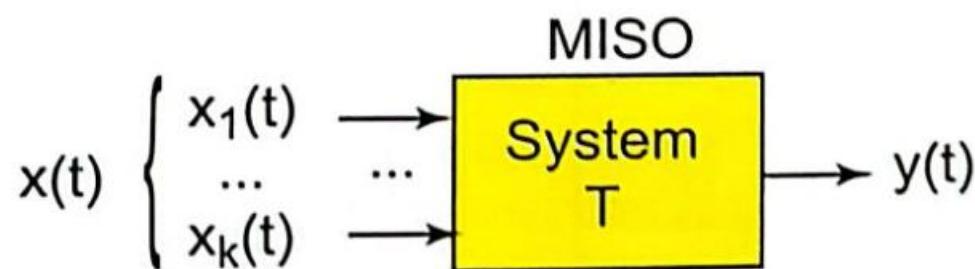
- Συστήματα **μιας εισόδου - μιας εξόδου** (SISO – Single Input, Single Output).
- Παραδείγματα απλών συστημάτων μιας εισόδου-μιας εξόδου είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιαστής $y(t) = \alpha \cdot x(t)$ και το σύστημα καθυστέρησης $y(t) = x(t - t_0)$.



Κατηγορίες συστημάτων (2/6)

(A) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα με **πολλές εισόδους και μία έξοδο** (MISO – Multiple Input, Single Output).
- Παράδειγμα τέτοιων συστημάτων είναι ο αθροιστής δύο ή περισσότερων σημάτων $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ και ο πολλαπλασιαστής $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

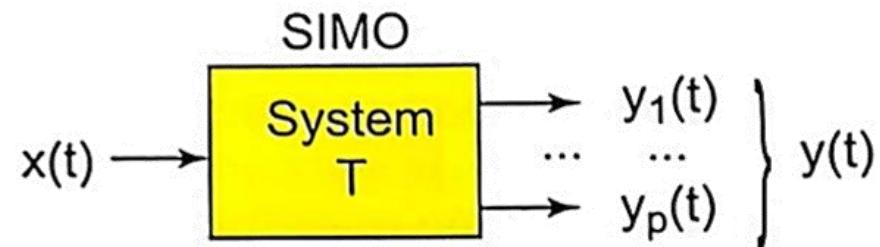


Κατηγορίες συστημάτων (3/6)

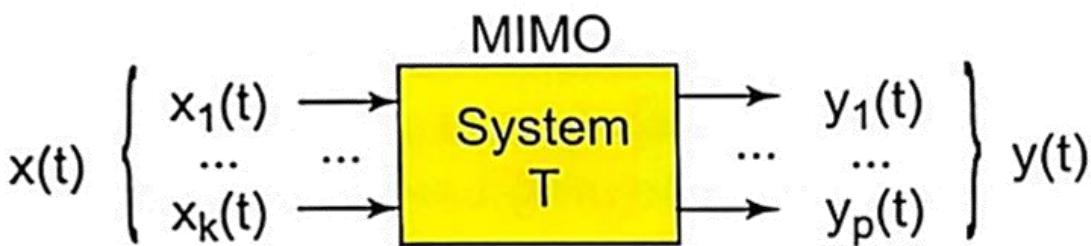
(A) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα με **μία είσοδο και πολλές εξόδους**

(SIMO – Single Input, Multiple Output).



- Συστήματα με **πολλές εισόδους και πολλές εξόδους** (MIMO – Multiple Input, Multiple Output).



Κατηγορίες συστημάτων (4/6)

(B) Ανάλογα με τη **φύση των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **συνεχούς χρόνου** ή **αναλογικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αναλογικά σήματα.
- 'Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως συστήματα **διακριτού χρόνου**.
- **Αιτιοκρατικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι απλά αιτιοκρατικά σήματα.
- 'Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι στοχαστικά σήματα, τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως **στοχαστικά συστήματα**.

Κατηγορίες συστημάτων (5/6)

- **Σύστημα συνεχούς χρόνου** (ΣΣΧ) (continuous time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου **συνεχούς χρόνου** $x(t)$ και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου **συνεχούς χρόνου**:

$$y(t) = S[x(t)]$$

- **Σύστημα διακριτού χρόνου** (ΣΔΧ) (discrete time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου $\{x(n)\}$ **διακριτού χρόνου** και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου $\{y(n)\}$ **διακριτού χρόνου**:

$$\{y(n)\} = T[\{x(n)\}]$$

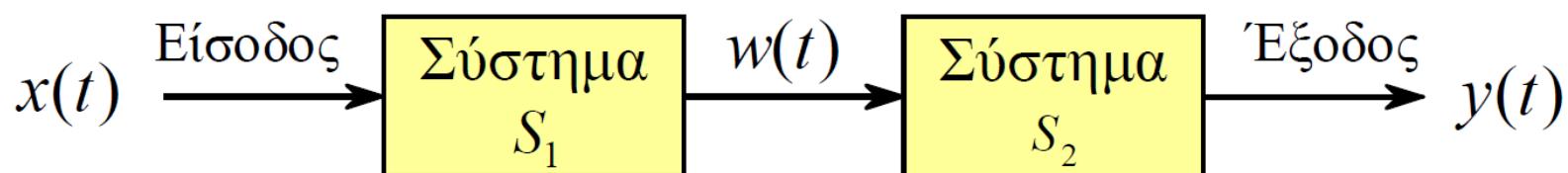
Κατηγορίες συστημάτων (6/6)

- Υπάρχουν επίσης συστήματα τα οποία μετασχηματίζουν αναλογικές εισόδους σε διακριτές εξόδους και το αντίθετο. Τέτοια συστήματα είναι γνωστά ως υβριδικά συστήματα.
- Ένα σύστημα περιγράφεται δομικά καθορίζοντας
 - ✓ Την τοπολογία του συστήματος.
 - ✓ Τον τρόπο διασύνδεσης των στοιχείων του.
 - ✓ Τη συναρτησιακή περιγραφή των σχέσεων των στοιχείων (μαθηματικό μοντέλο).

Συνδέσεις συστημάτων (1/4)

- Ένα σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερα συστήματα τα οποία διασυνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους.
- Οι βασικότερες συνδέσεις μεταξύ συστημάτων είναι η **σειριακή**, η **παράλληλη**, η **μεικτή** και η σύνδεση με **ανατροφοδότηση** ή **ανάδραση**.

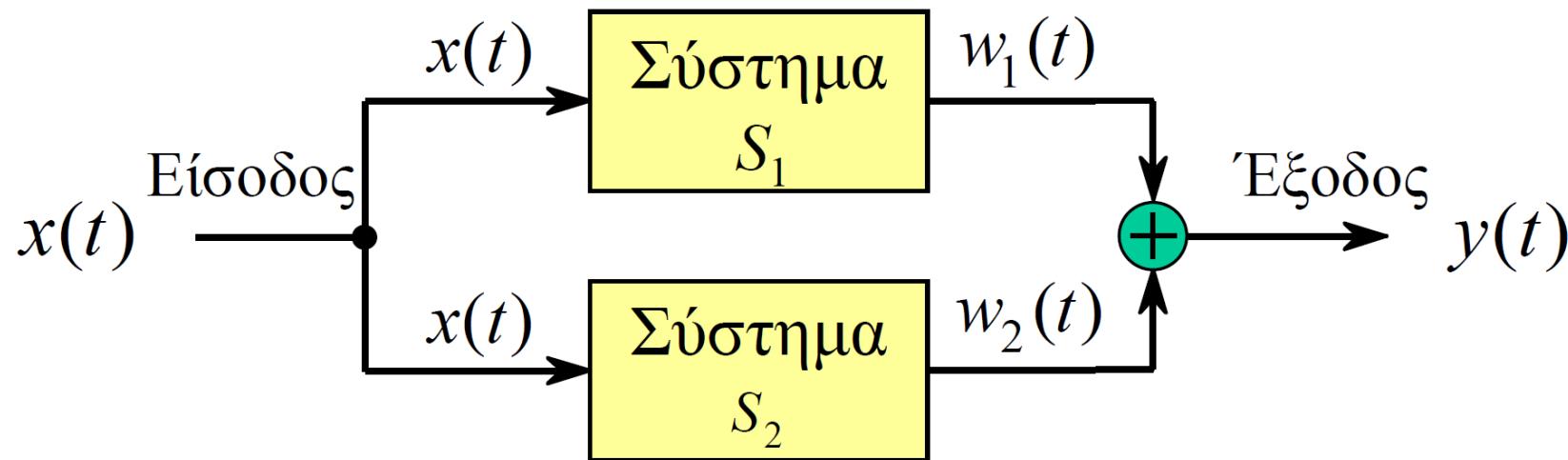
1. Σειριακή σύνδεση συστημάτων



$$\text{Η έξοδος είναι : } y(t) = S_2[S_1[x(t)]]$$

Συνδέσεις συστημάτων (2/4)

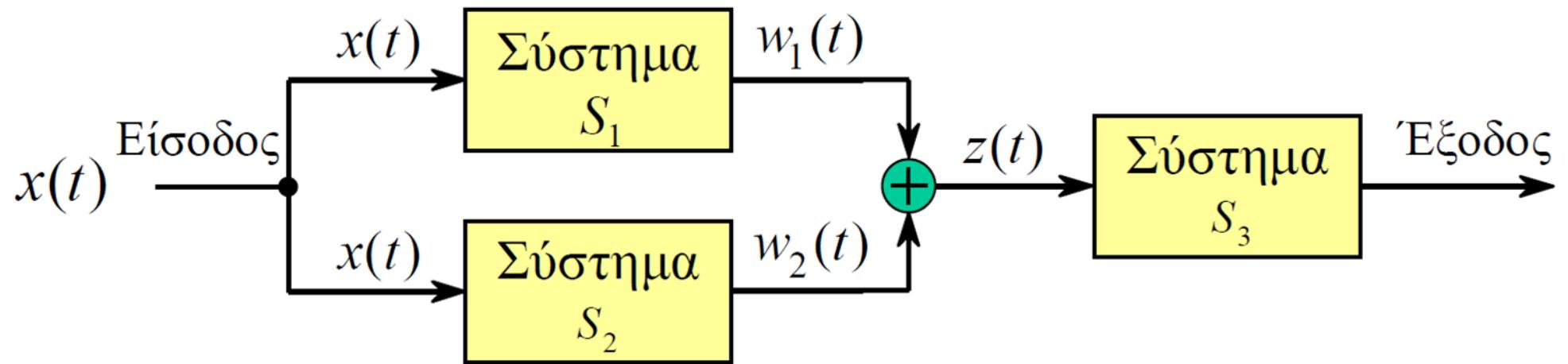
2. Παράλληλη σύνδεση συστημάτων



$$\text{Η έξοδος είναι : } y(t) = S1[x(t)] + S2[x(t)]$$

Συνδέσεις συστημάτων (3/4)

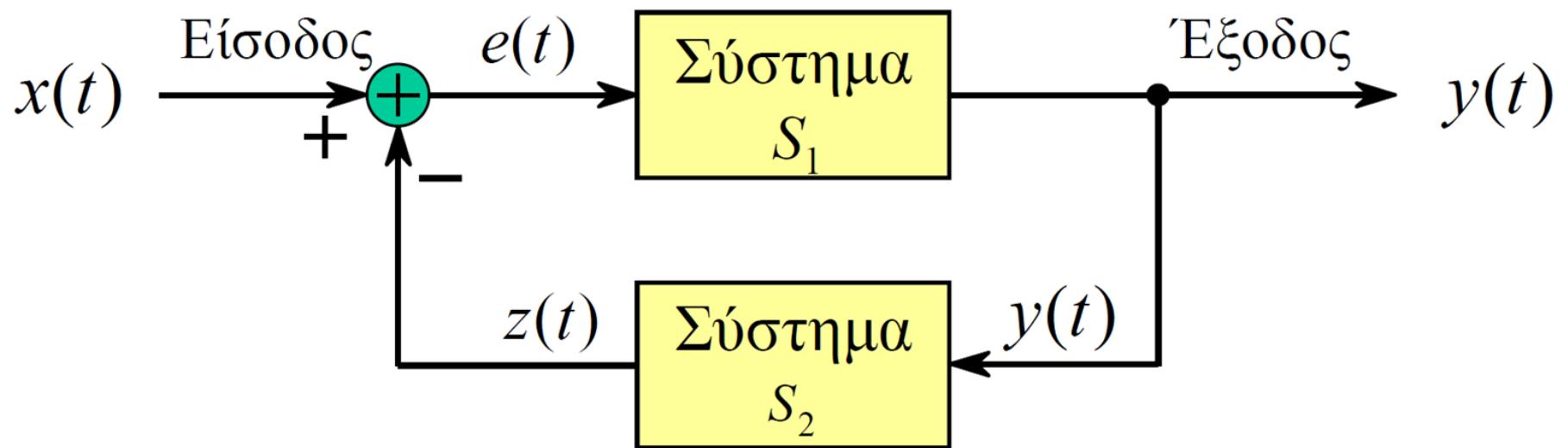
3. Μεικτή σύνδεση συστημάτων



$$\text{Η έξοδος είναι : } y(t) = S3[S1[x(t)] + S2[x(t)]]$$

Συνδέσεις συστημάτων (4/4)

4. Σύνδεση συστημάτων με ανατροφοδότηση-ανάδραση



$$\text{Η έξοδος είναι : } y(t) = S1[x(t)] \pm S2[x(t)]$$

Είδη συστημάτων

- Ένα σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση ηρεμίας** τη χρονική στιγμή t_0 , εάν δεν έχει υποστεί διέγερση από κάποιο σήμα για $t < t_0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια κατά τη χρονική στιγμή $t = t_0$.
- Είδη συστημάτων που βρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας:
 - Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
 - Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
 - Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
 - Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
 - Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (1/10)

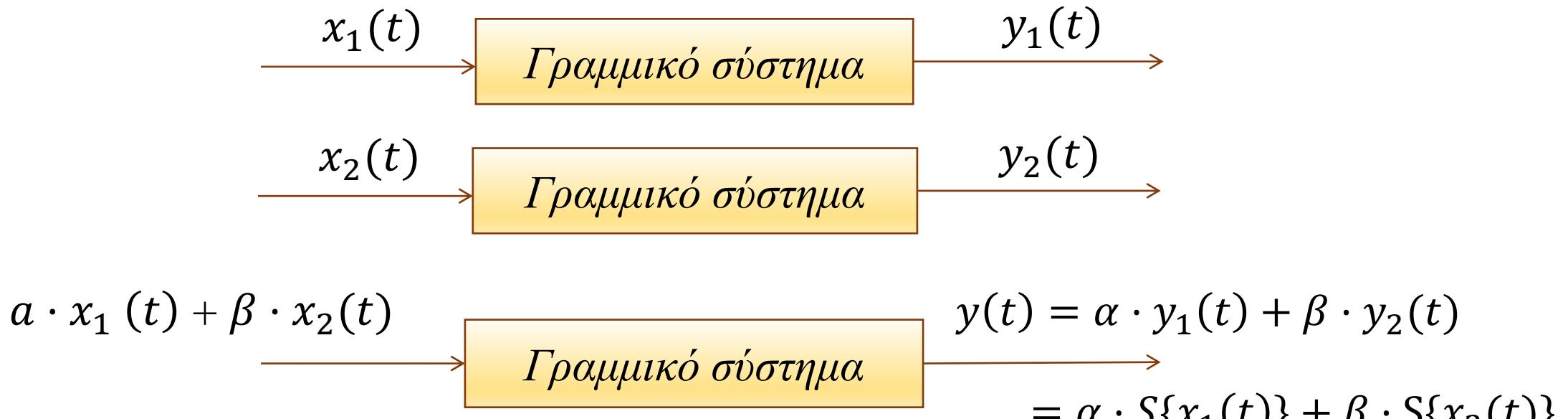
- Ένα σύστημα που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία ονομάζεται **γραμμικό**, όταν και μόνον όταν δοθέντων δύο σημάτων εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$, ισχύει η σχέση:

$$S[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1S[x_1(t)] + a_2S[x_2(t)]$$

- Δηλαδή, η απόκριση του συστήματος σε είσοδο που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο **γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων** του συστήματος σε καθένα από τα σήματα αυτά.
- Αυτή είναι η **αρχή της υπέρθεσης** (επαλληλίας - superposition) και επεκτείνεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό σημάτων.

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (2/10)

□ Γραμμικό σύστημα



$$y(t) = S\{\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)\} = \alpha \cdot S\{x_1(t)\} + \beta \cdot S\{x_2(t)\} = \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)$$

Αρχή νπέρθεσης

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (3/10)

Γραμμικά είναι τα συστήματα εκείνα τα οποία έχουν τις ιδιότητες της ομογένειας και της προσθετικότητας.

- **Ομογένεια:** Εάν η είσοδος $x(t)$ προκαλεί την έξοδο $y(t)$, τότε η είσοδος $\alpha x(t)$ θα προκαλεί την έξοδο $\alpha y(t)$. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως ο πολλαπλασιασμός της εισόδου επί μια σταθερά α προκαλεί έναν αντίστοιχο πολλαπλασιασμό της εξόδου.
- Τέτοια συστήματα είναι οι ενισχυτές (όταν λειτουργούν στη γραμμική περιοχή) και η αντίσταση θεωρώντας σαν είσοδο το ρεύμα και σαν έξοδο την τάση στα άκρα της

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$\alpha x(t) \rightarrow \alpha y(t)$$

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (4/10)

Γραμμικά είναι τα συστήματα εκείνα τα οποία έχουν τις ιδιότητες της ομογένειας και της προσθετικότητας.

- **Προσθετικότητα:** Εάν η είσοδος $x_1(t)$ δίνει στην έξοδο το σήμα $y_1(t)$ και η είσοδος $x_2(t)$ δίνει αντίστοιχα το $y_2(t)$, τότε εάν στην είσοδο εφαρμοστεί το $x_1(t) + x_2(t)$ θα προκύψει στην έξοδο το σήμα $y_1(t) + y_2(t)$

Η ιδιότητα της **προσθετικότητας** μας λέει ότι αν

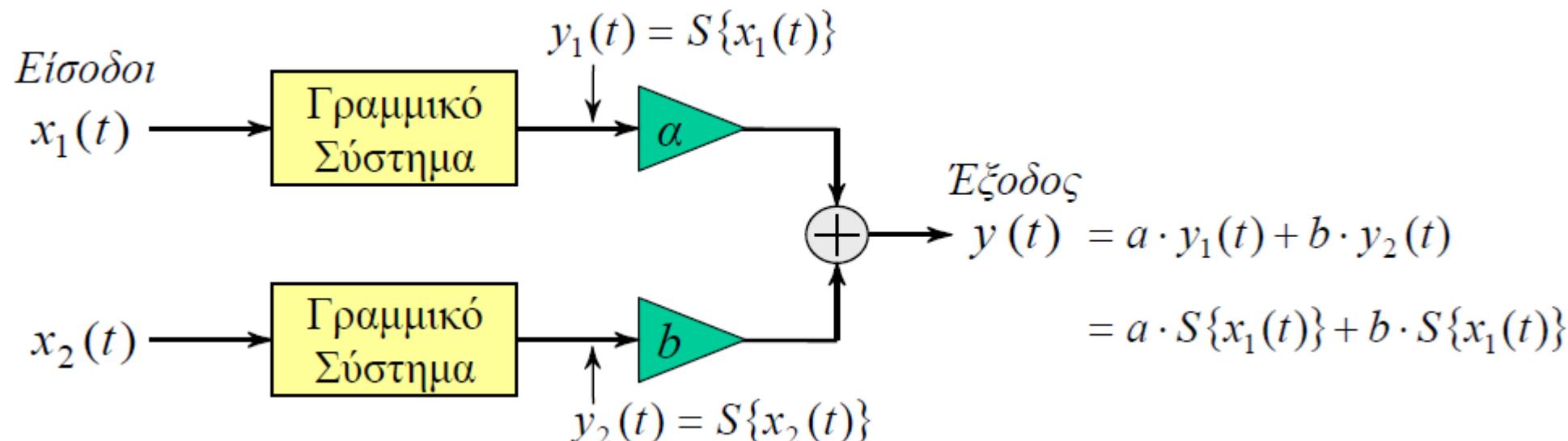
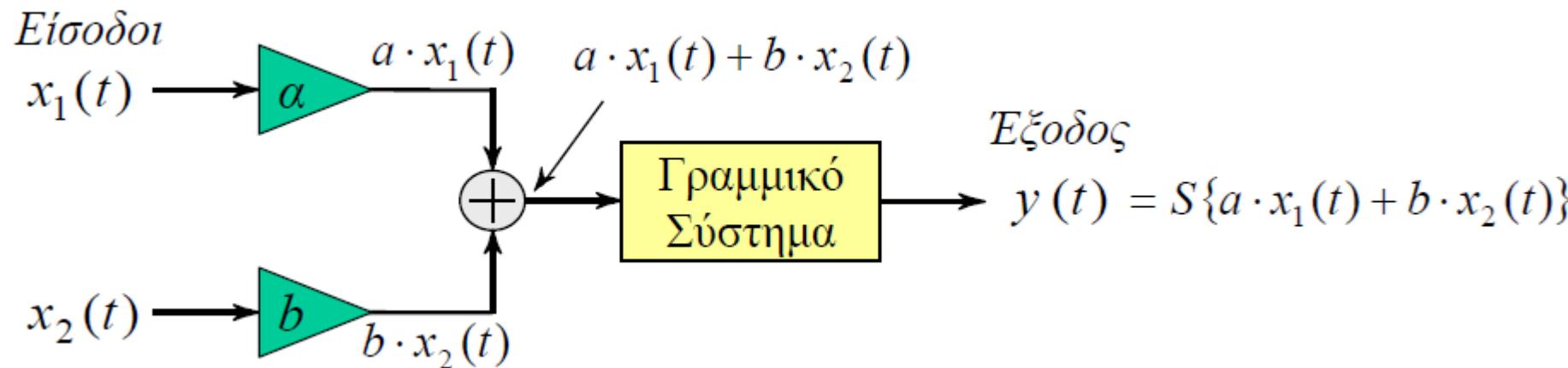
$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

τότε

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (5/10)

Σχηματική περιγραφή της γραμμικότητας ενός συστήματος



Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (6/10)

□ Γραμμικό σύστημα

Παραδείγματα

- Ηλεκτρικά κυκλώματα τα οποία περιλαμβάνουν αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία.
- Ενισχυτές και φίλτρα.
- Συστήματα διάδοσης ηχητικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.
- Μηχανικά συστήματα που περιλαμβάνουν μάζες, ελατήρια και απόσβεση.

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (7/10)

□ Γραμμικό σύστημα

Παραδείγματα

- Συστήματα συνεχούς χρόνου στα οποία η έξοδος προκύπτει από την παραγώγιση ή την ολοκλήρωση της εισόδου.
- Συστήματα διακριτού χρόνου όπου η έξοδος προκύπτει από την διαφορά ή την άθροιση διαδοχικών τιμών της εισόδου.
- Τα ταυτοτικά συστήματα, δηλαδή συστήματα στα οποία η έξοδος είναι ίση με την είσοδο.
- Το μηδενικά συστήματα, όπου η έξοδος είναι μηδενική ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη τιμή της εισόδου.

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (8/10)

□ Μη – Γραμμικό σύστημα

Παραδείγματα

- Συστήματα στα οποία η έξοδος ισούται με κάποια **δύναμη της τιμής της εισόδου**, για παράδειγμα η ισχύς που ξοδεύεται σε μια αντίσταση συναρτήσει της τάσης που εφαρμόζεται στα άκρα της.
- Συστήματα ανίχνευσης του μέγιστου ενός σήματος, μετατροπείς του ημιτόνου σε τετραγωνικό σήμα, συστήματα διπλασιασμού της συχνότητας κλπ.
- Συστήματα τα οποία επιδεικνύουν τις συνηθισμένες παραμορφώσεις των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων όπως ψαλιδισμό, crossover distortion και slowing.

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (9/10)

- Σε ένα γραμμικό σύστημα ενδέχεται:
 - Να εξαρτάται η έξοδος άμεσα από το χρόνο
 - Να μην εξαρτάται η έξοδος άμεσα από το χρόνο
 - Η έξοδος να προκύπτει από τη χρονική μετατόπιση της εισόδου
 - Η έξοδος να προκύπτει από τη χρονική κλιμάκωση της εισόδου (συμπίεση ή αποσυμπίεση)
- Παραδείγματα γραμμικών συστημάτων

$$y(t) = 5x(t)$$

$$y(t) = 5t \cdot x(t)$$

$$y(t) = 5t^3 \cdot x(t - 6)$$

$$y(t) = x(2t)$$

$$y(t) = 5t^3 \cdot x(t)$$

Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (10/10)

- Συστήματα στα οποία η σχέση εισόδου-εξόδου περιλαμβάνει την είσοδο υψωμένη σε δύναμη **δεν** είναι γραμμικά.

Γραμμικά

a) $y(t) = 5x(t)$

β) $y(t) = 5t^3x(t - 2)$

γ) $y(t) = 5t^2 \cdot x(t + 6)$

Μη Γραμμικά

a) $y(t) = 5x^2(t)$

β) $y(t) = 5t^3x^2(t + 6)$

γ) $y(t) = 5t^2 \cdot x^3(t)$

Παράδειγμα 1

α. $y(t) = 3x(t) - 2x(t - 1)$ Γραμμικό?

Αν σε είσοδο $x_1(t)$ έχει απόκριση $y_1(t)$ και σε είσοδο $x_2(t)$ έχει απόκριση $y_2(t)$ τότε σε είσοδο $ax_1(t) + bx_2(t)$ έχει απόκριση $ay_1(t) + by_2(t)$

Αποδείξτε!

Εφαρμόζω ως είσοδο το σήμα $ax_1(t) + bx_2(t)$ για να ελέγξω αν έχει απόκριση $ay_1(t) + by_2(t)$

$$y(t) = 3[ax_1(t) + bx_2(t)] - 2[ax_1(t - 1) + bx_2(t - 1)]$$

$$y(t) = 3ax_1(t) + 3bx_2(t) - 2ax_1(t - 1) - 2bx_2(t - 1)$$

$$y(t) = a[3x_1(t) - 2x_1(t - 1)] + b[3x_2(t) - 2x_2(t - 1)]$$



$$y_1(t)$$

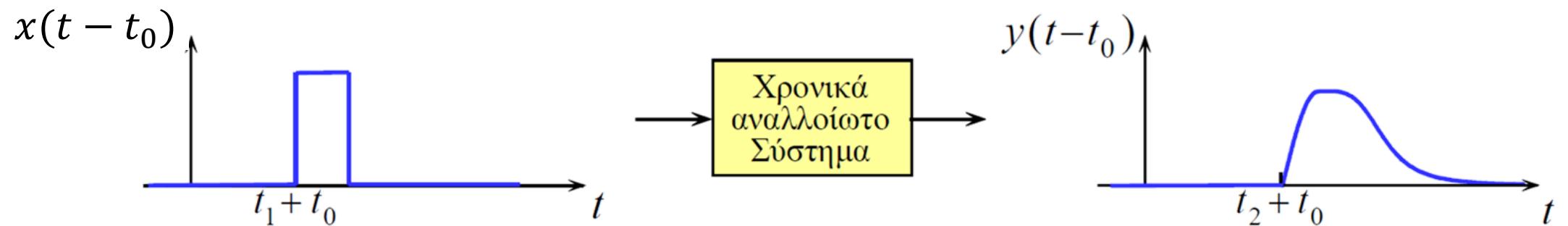
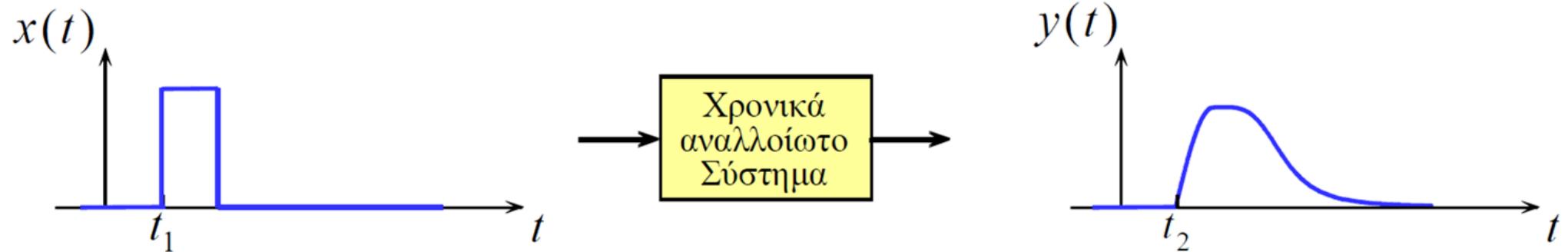
$$y_2(t)$$

$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ Γραμμικό!

Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (1/5)

- **Χρονικά αμετάβλητο** καλούμε ένα σύστημα για το οποίο ισχύει
 - Χρονική ολίσθηση της εισόδου προκαλεί χρονική ολίσθηση της εξόδου
 - Αν σε είσοδο $x(t)$ έχει απόκριση $y(t)$ τότε σε **είσοδο $x(t - t_0)$** έχει **απόκριση $y(t - t_0)$** για κάποια χρονική ολίσθηση t_0
- Διαφορετικά καλείται **χρονικά μεταβαλλόμενο**
- Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, υπολογίζουμε την έξοδο $y(t)$ για είσοδο $x(t)$. Αν ισχύει $y(t) = y(t - t_0)$ για κάθε είσοδο $x(t)$ και κάθε ολίσθηση t_0 τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

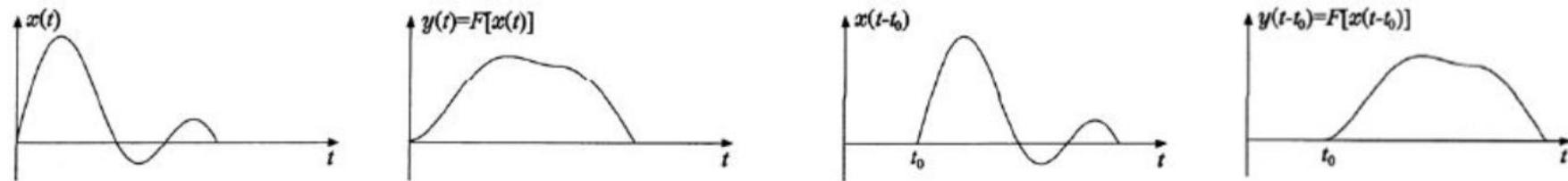
Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (2/5)



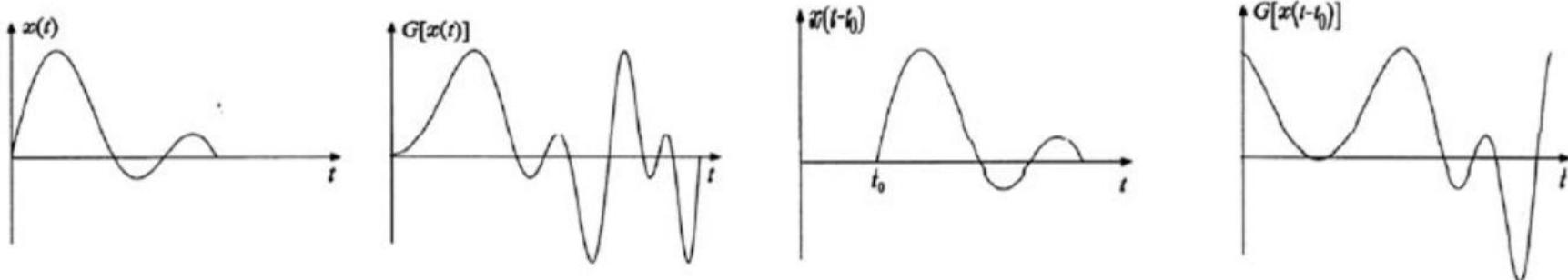
Η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος χρονικά αμετάβλητου.

Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (3/5)

(α)



(β)



Παραδείγματα εισόδου και εξόδου γραμμικού (α) χρονικά αμετάβλητου και
(β) χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος

Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (4/5)

- Συστήματα στα οποία η έξοδος δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο είναι **χρονικά αμετάβλητα** (ή αναλλοίωτα)

Χρονικά αμετάβλητα

$$\alpha) y(t) = 5x(t)$$

$$\beta) y(t) = 5x(t + 6)$$

$$\gamma) y(t) = 5x^2(t - 2)$$

$$\delta) y(t) = 2x^3(t - 1)$$

Χρονικά μεταβαλλόμενα

$$\alpha) y(t) = 5t \cdot x^2(t + 6)$$

$$\beta) y(t) = 5t^3 \cdot x(t - 6)$$

$$\gamma) y(t) = 5t \cdot x(t)$$

$$\delta) y(t) = 5t^2 \cdot x(t - 2)$$

Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (5/5)

- Συστήματα τα οποία **μετατοπίζουν** την είσοδο ως προς το χρόνο είναι **χρονικά αμετάβλητα**.
- Συστήματα στα οποία η είσοδος έχει υποστεί **κλιμάκωση** ως προς το χρόνο (συμπίεση ή αποσυμπίεση) είναι **χρονικά μεταβαλλόμενα**

Χρονικά αμετάβλητα

$$\text{a)} \quad y(t) = 3x(t)$$

$$\beta) \quad y(t) = 3x(t - 2)$$

$$\gamma) \quad y(t) = 2x^3(t - 2)$$

$$\delta) \quad y(t) = x^4 \left(t + \frac{2}{5} \right)$$

Χρονικά μεταβαλλόμενα

$$\text{a)} \quad y(t) = 5x(2t)$$

$$\beta) \quad y(t) = 5x(2t + 3)$$

$$\gamma) \quad y(t) = 5x \left(\frac{2}{3}t \right)$$

$$\delta) \quad y(t) = 5x^{-2}(2t)$$

Παράδειγμα 2

a. $y(t) = 3x(t) - 2x(t - 1)$

Χρονικά αμετάβλητο?

Αν **σε είσοδο $x(t)$ έχει απόκριση $y(t)$ τότε σε είσοδο $x(t - t_0)$ έχει απόκριση $y(t - t_0)$ για κάποια χρονική ολίσθηση t_0**

Αποδείξτε!

Εφαρμόζω χρονική ολίσθηση στην είσοδο $x(t - t_0)$ για να ελέγξω αν έχει απόκριση $y(t - t_0)$

$$y(t) = 3x(t - t_0) - 2x(t - t_0 - 1)$$



$$y(t - t_0)$$

Χρονικά αμετάβλητο!

Why are LTI systems important?

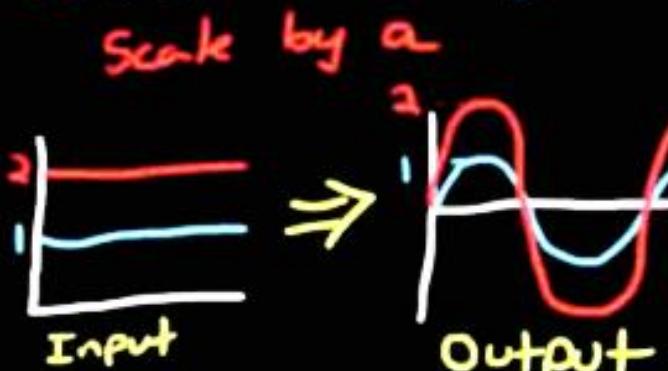
"Linear systems are important because we can solve them" - Richard Feynman

Smart Dude

Linear and Time Invariance (LTI) Systems

All LTI systems have

Homogeneity $\xleftarrow{\text{Linearity}}$ Superposition
(Additivity)



Summed

Time Invariance



Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (1/7)

- Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** (causal) όταν η παρούσα τιμή της εξόδου του **δεν εξαρτάται** από μελλοντικές τιμές της εισόδου.
- Δηλαδή, για κάθε σήμα εισόδου $x(t)$ η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ εξαρτάται μόνο από την παρούσα ή/και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.
- Αντίστροφα, αν η έξοδος $y(t_0)$ τη χρονική στιγμή t_0 **εξαρτάται** από μεταγενέστερες τιμές του σήματος εισόδου $x(t)$, δηλ. για $t \geq t_0$, τότε το σύστημα είναι **μη-αιτιατό**.

Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (2/7)

- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι αιτιατό αν οι μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) του συστήματος, ποτέ **δεν προηγούνται** των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο του συστήματος (αιτία).
- Όλα τα φυσικά παθητικά συστήματα έχουν την ιδιότητα της **αιτιότητας**.

Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (3/7)

- Τα συστήματα τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$y(t) = \alpha \cdot x(t),$$

$$y(t) = \beta \cdot x(t - 1) \text{ και}$$

$$y(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot x(t - 1)$$

είναι **αιτιατά**, ενώ το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot x(t + 1)$$

δεν είναι αιτιατό.

Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (4/7)

- **Αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της τρέχουσας τιμής της εξόδου απαιτεί προηγούμενες (χρονικά) τιμές της εισόδου.
 - Συμπεριλαμβάνεται και η τρέχουσα χρονική στιγμή εισόδου
- Για παράδειγμα

$$y(t) = x(t)$$

$$y(t) = x(t - 2)$$

$$y(t) = x(t) + x(t - 10)$$

$$y(t) = \frac{1}{x(t - 10^5)}$$

Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (5/7)

- Μη αιτιατά ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τρέχουσα τιμή της εξόδου
- Για παράδειγμα

$$y(t) = x(t + 2)$$

$$y(t) = \sqrt{x(t + 1)}$$

$$y(t) = y(t - 1) + 2x(t) - x(t + 4)$$

Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (6/7)

- Όλα τα φυσικά συστήματα που δουλεύουν σε πραγματικό χρόνο είναι αιτιατά, γιατί ο χρόνος κινείται προς μία μόνο κατεύθυνση.
- Αντίθετα, εάν η ανεξάρτητη μεταβλητή ενός συστήματος δεν είναι ο χρόνος αλλά κάποια απόσταση, τότε το σύστημα είναι δυνατόν να είναι μη αιτιατό. Στην περίπτωση αυτή μπορεί κανείς να μετακινηθεί σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και με την έννοια αυτή η έξοδός είναι δυνατόν να εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (7/7)

- Μια άλλη κατηγορία μη αιτιατών συστημάτων είναι τα συστήματα επεξεργασίας ηχογραφημένων ή μαγνητοσκοπημένων σημάτων, δηλαδή τα συστήματα που δουλεύουν σε μη πραγματικό χρόνο.
- Στα συστήματα αυτά τα δεδομένα αποθηκεύονται σε μια μνήμη και κάποια από αυτά μπορούν να θεωρηθούν σαν «μελλοντικά» σε σχέση με μια επιλεγμένη χρονική στιγμή.

Βιβλιογραφία

- 1. Σήματα και Συστήματα, Σεραφείμ Καραμπόγιας, Κεφάλαιο 2, Ενότητες 2.1, 2.2, 2.3 (σελ.31-41)**
- 2. Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου, Αθανάσιος Μάργαρης, Κεφ. 2, Ενότητες 2.1, 2.2, 2.3 (σελ. 44-54)**
- 3. Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων, Σέργιος Θεοδωρίδης και συνεργάτες, Κεφ.1 Ενότητα 1.3 (σελ. 15-19)**

Τέλος Ενότητας