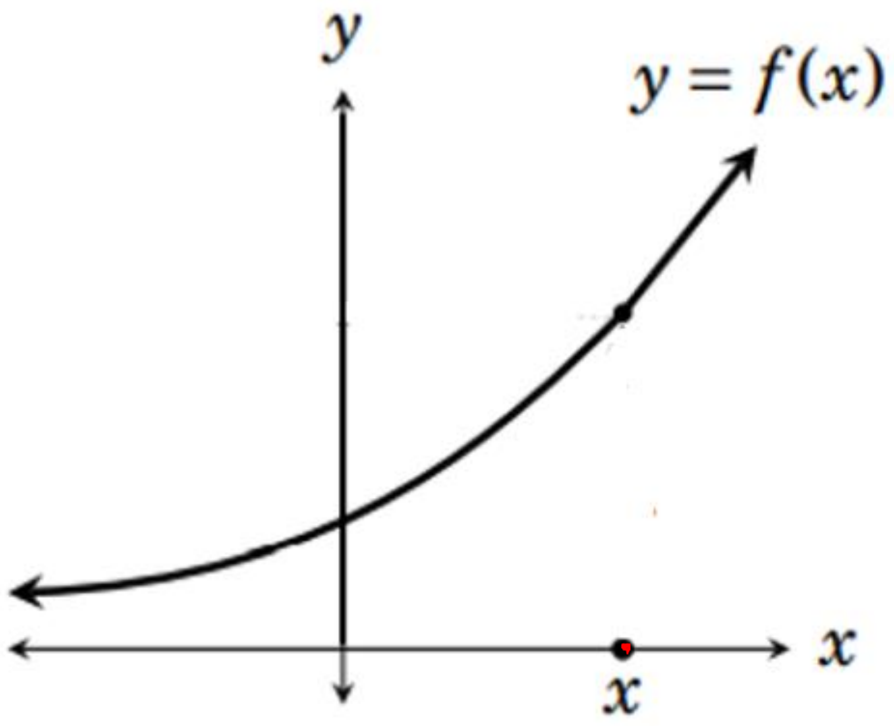
Περιεχόμενα

1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$

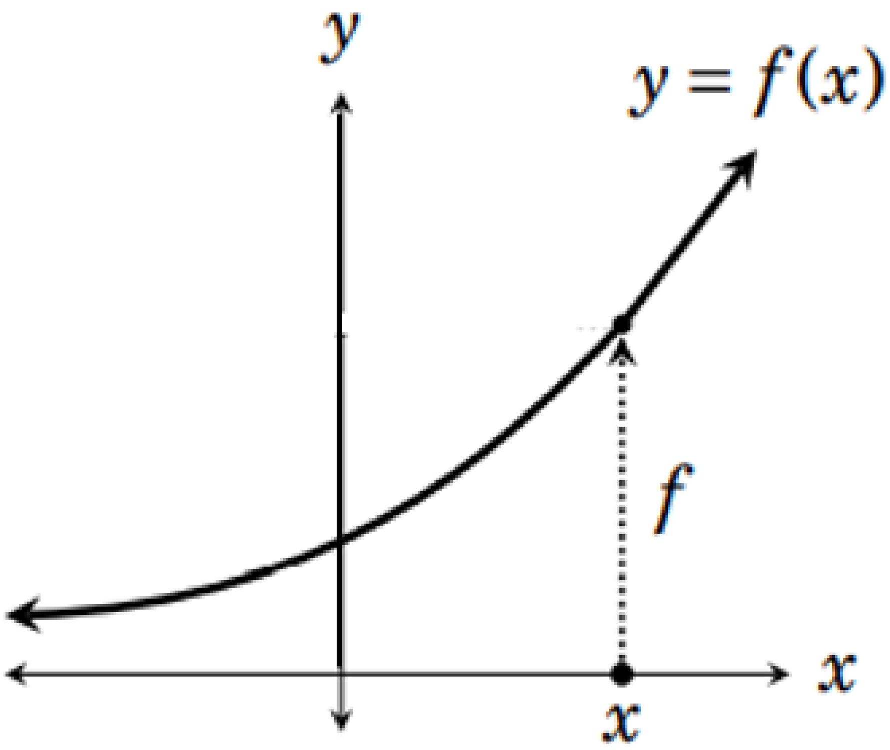
1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$



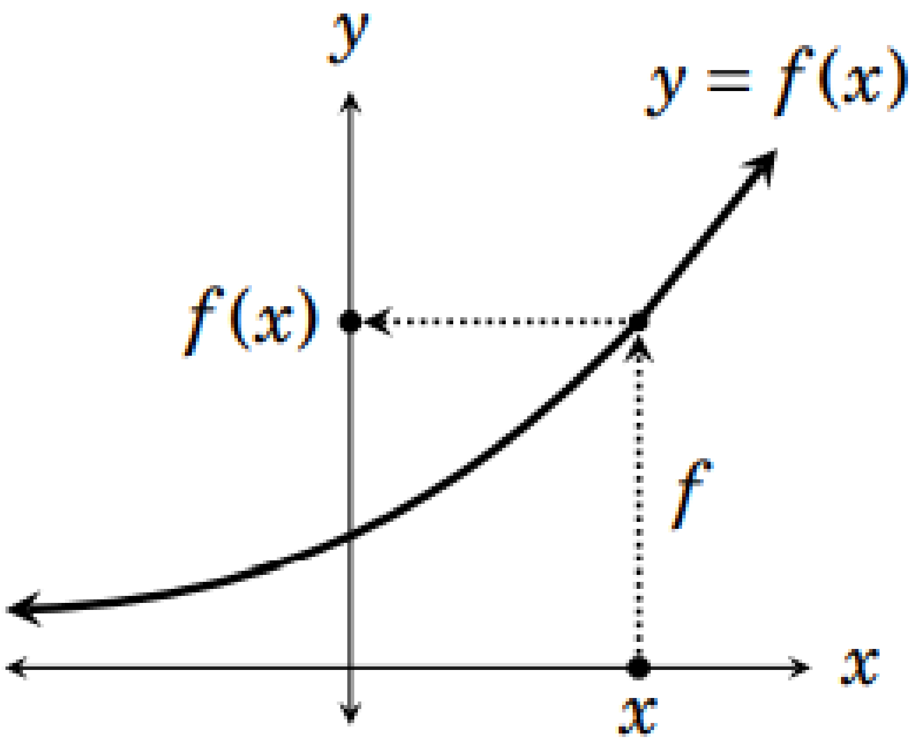
1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$



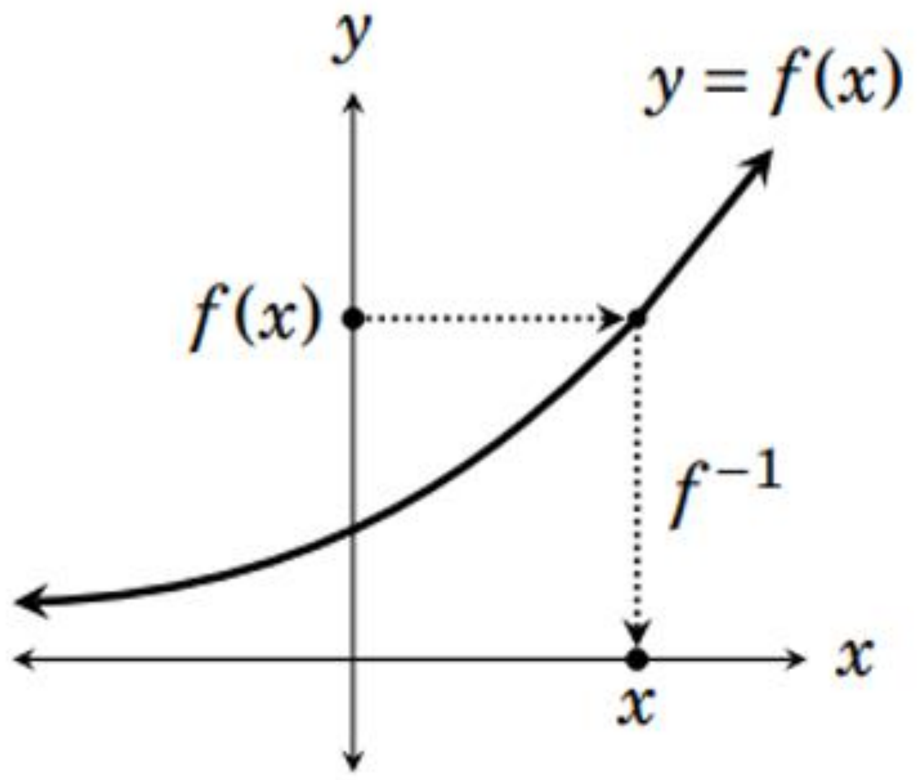
1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$



1. Βασική Ιδέα

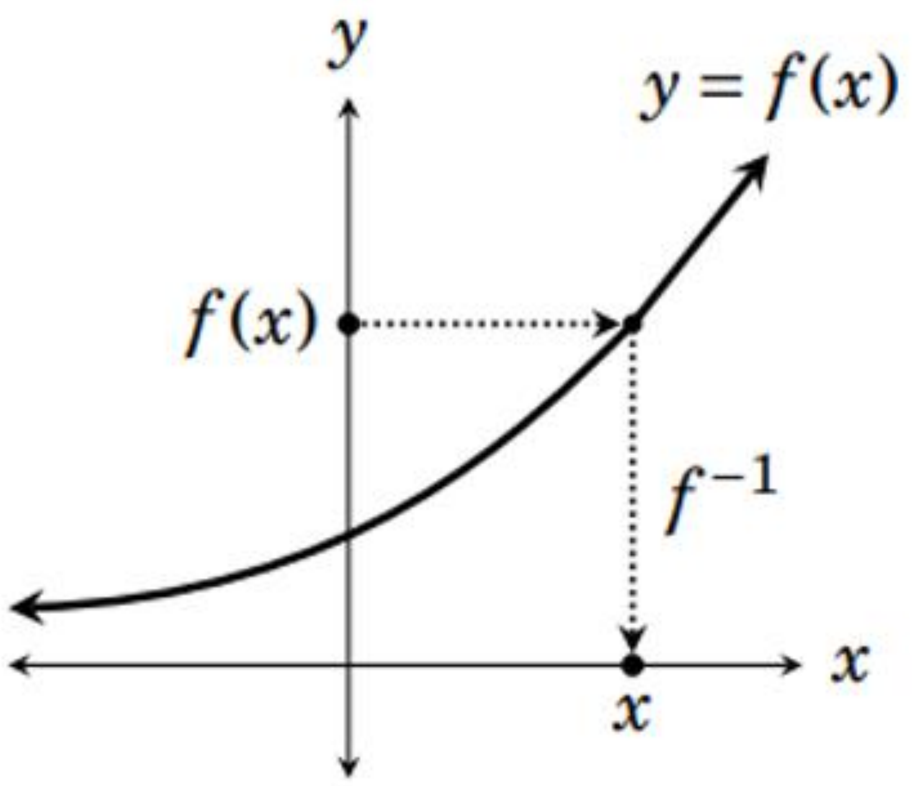
Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$



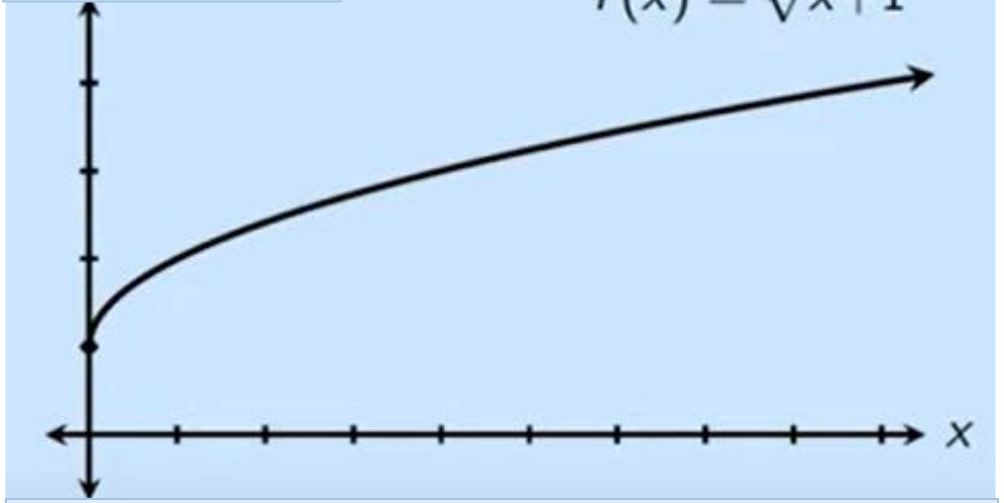
Η f^{-1} “ακυρώνει” την επίδραση της f

1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$



Παράδειγμα



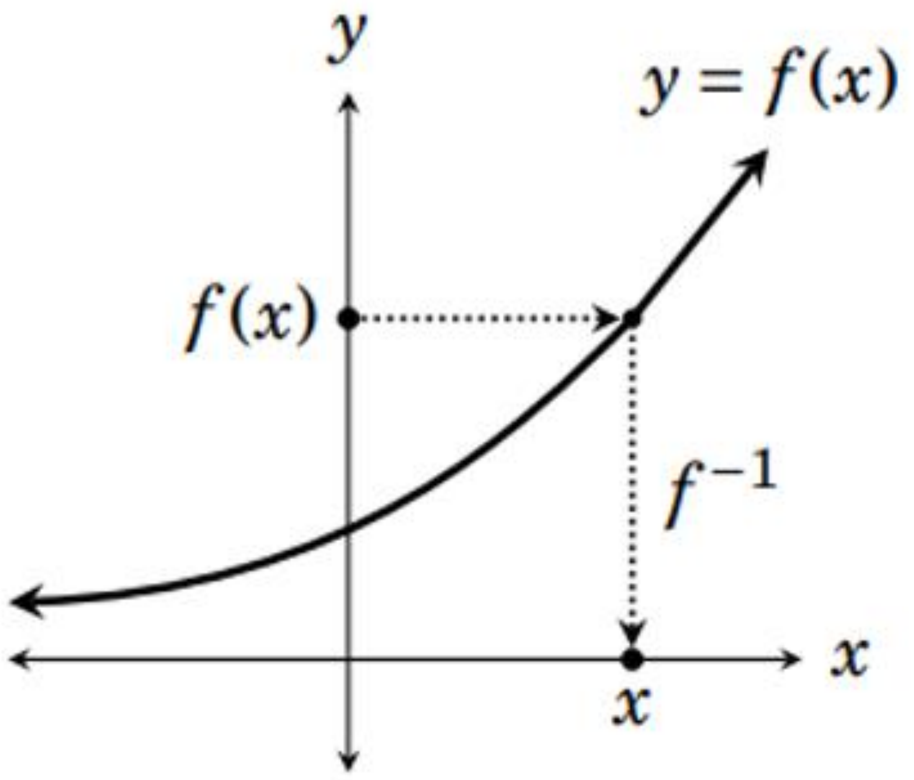
$\boldsymbol{f^{-1}(2) =}$

$\boldsymbol{f^{-1}(3) =}$

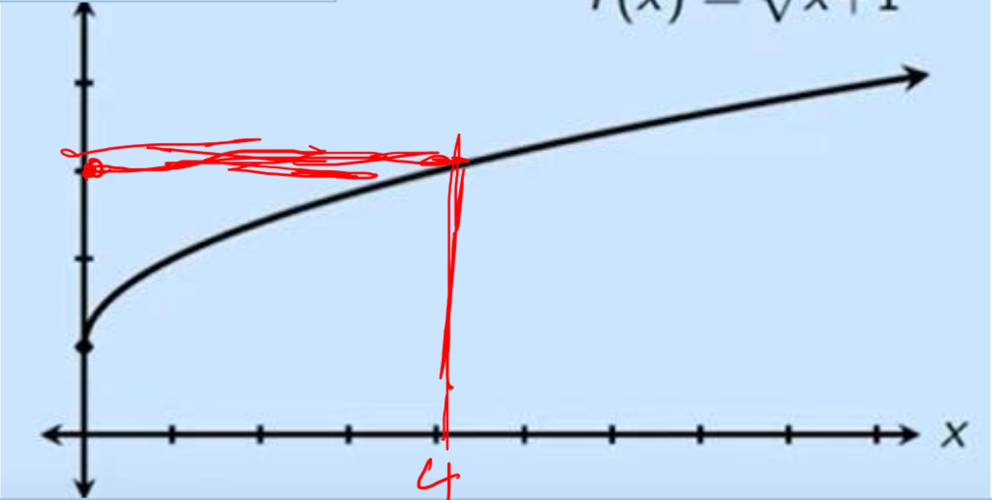
$\boldsymbol{f^{-1}(4) =}$

1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$



Παράδειγμα



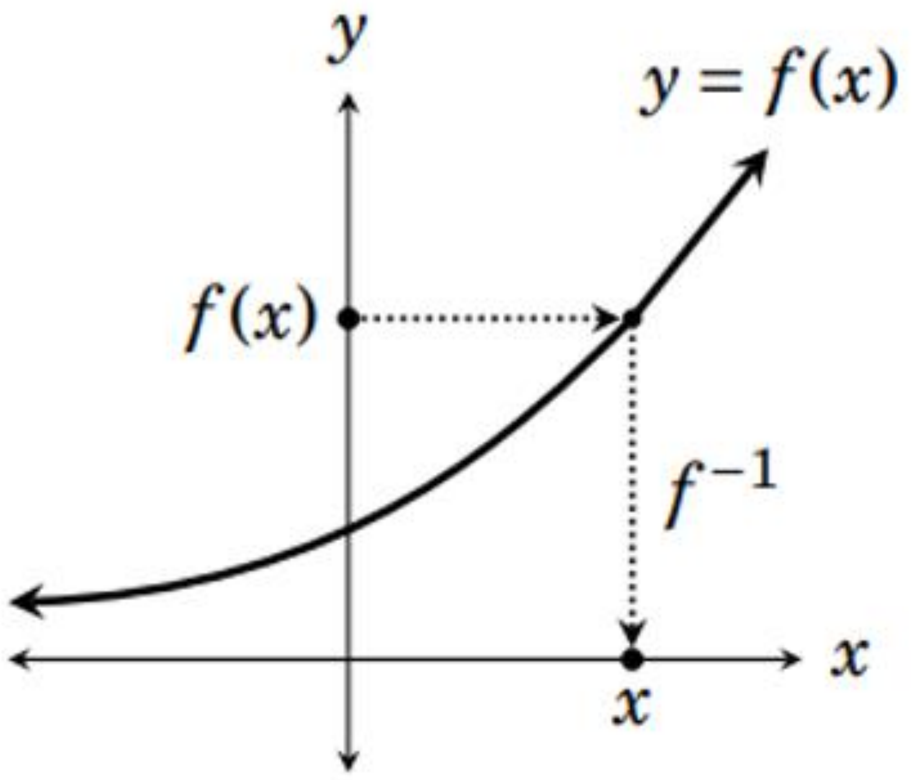
$\boldsymbol{f^{-1}(2) = 1}$

$\boldsymbol{f^{-1}(3) =}$

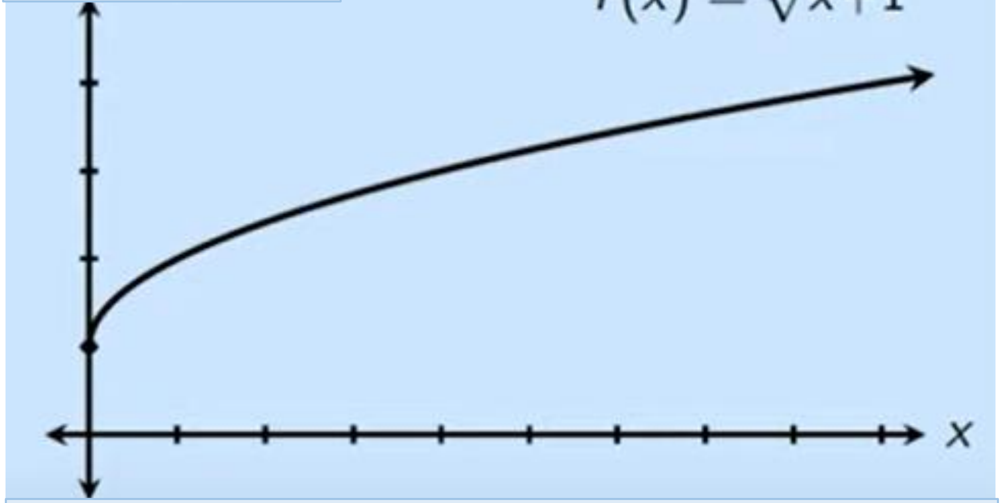
$\boldsymbol{f^{-1}(4) =}$

1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$



Παράδειγμα



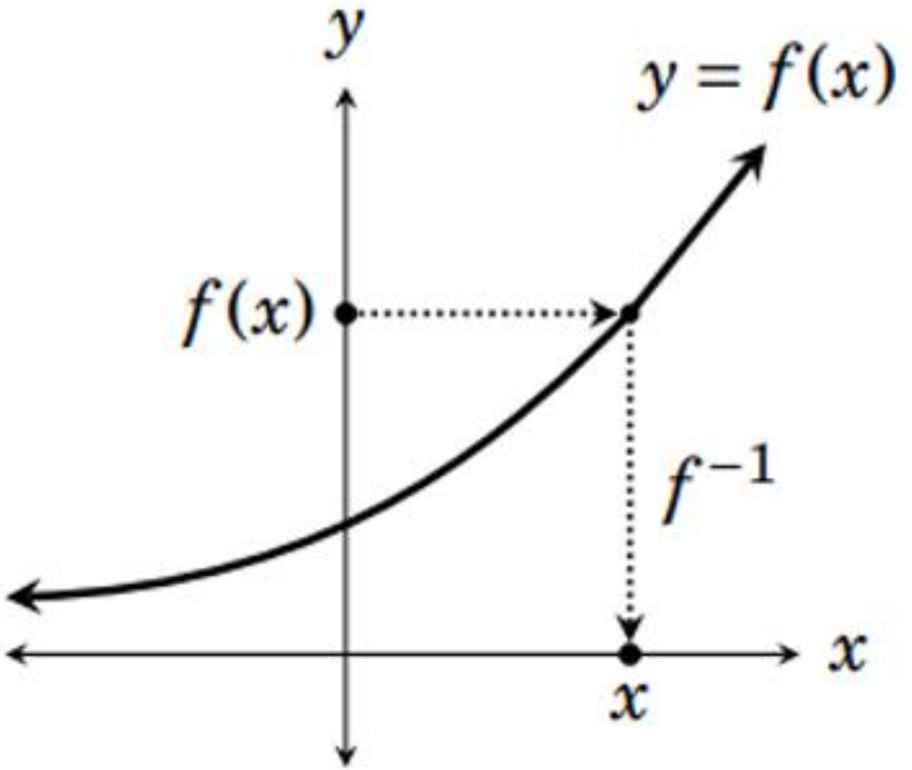
$$\boldsymbol{f^{-1}(2) = 1}$$

$$\boldsymbol{f^{-1}(3) = 4}$$

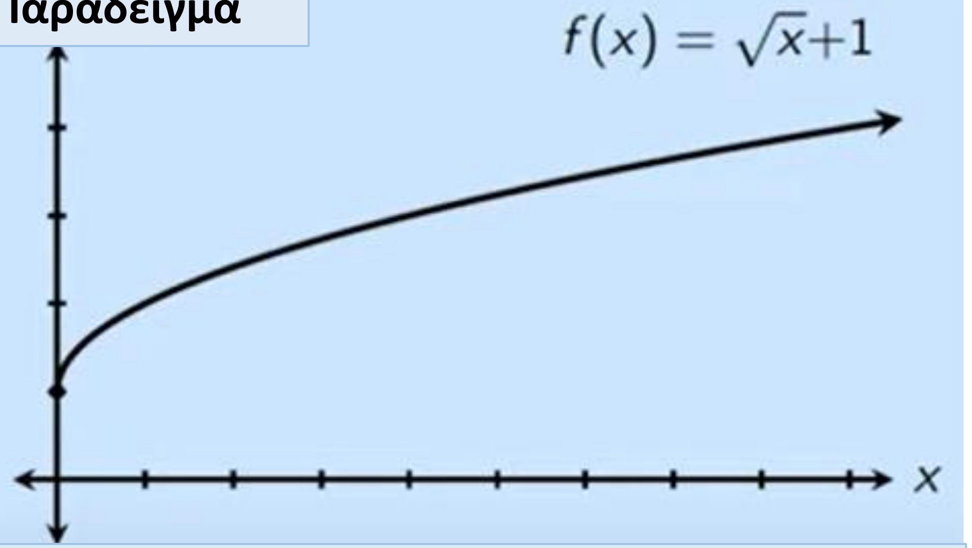
$$\boldsymbol{f^{-1}(4) =}$$

1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$



Παράδειγμα



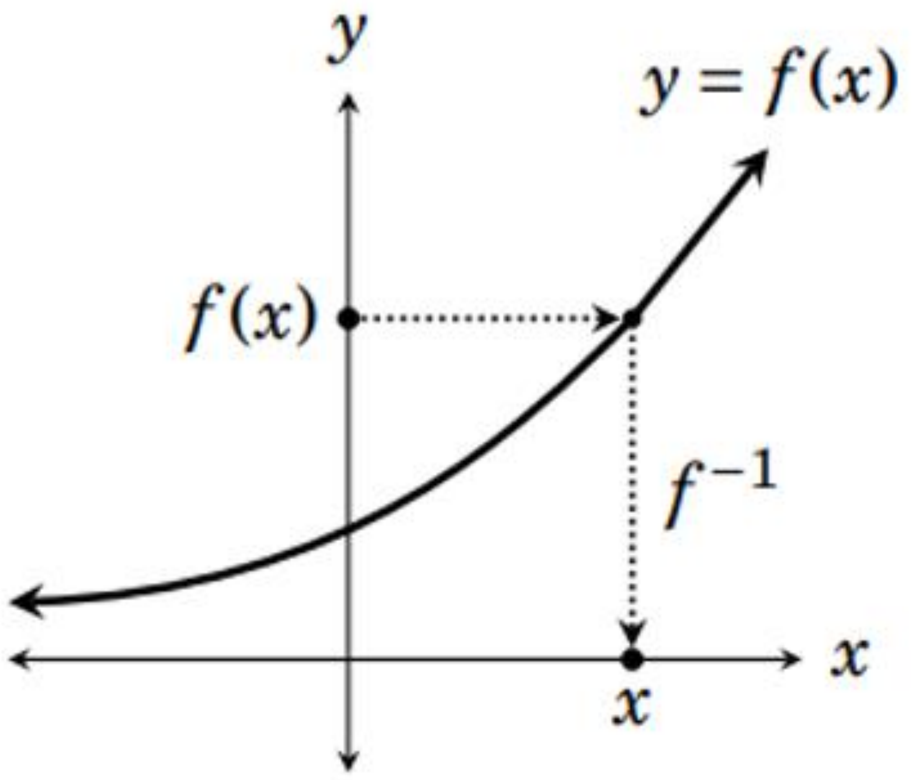
$\boldsymbol{f^{-1}(2) = 1}$

$\boldsymbol{f^{-1}(3) = 4}$

$\boldsymbol{f^{-1}(4) = 9}$

1. Βασική Ιδέα

Η **αντίστροφη** μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση f^{-1} τέτοια ώστε $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$

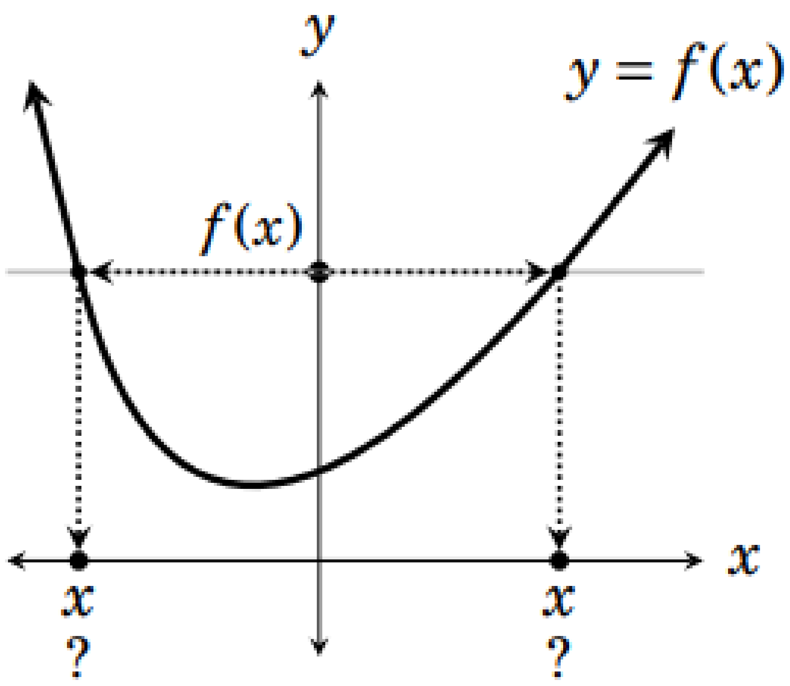


Μπορούμε να θεωρήσουμε την αντίστροφη συνάρτηση με τον ακόλουθο τρόπο:

$$f^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \textit{ο αριθμός που πρεπει} \\ \textit{να εισαγουμε στην } f \textit{ για να} \\ \textit{λαβουμε το } x \end{pmatrix}$$

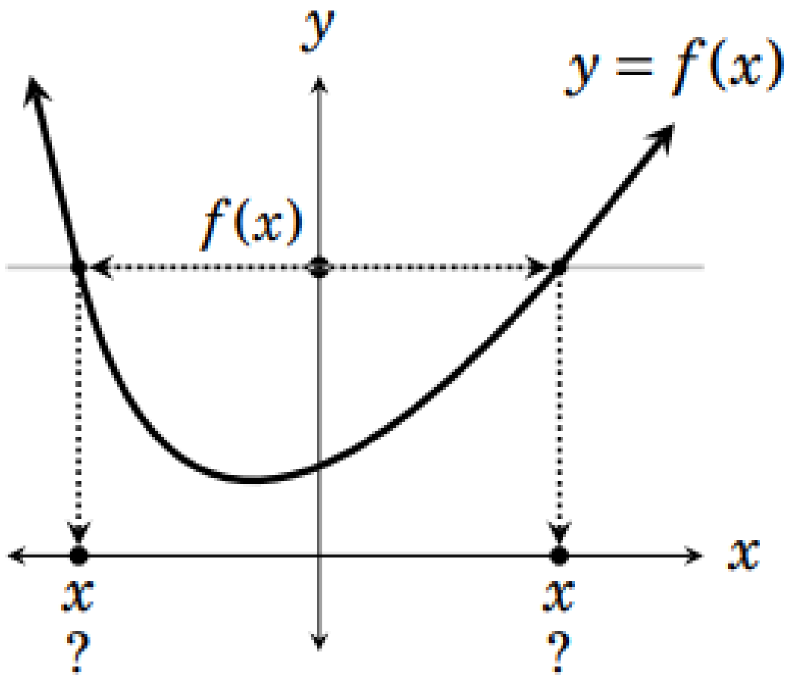
2. Συναρτήσεις ένα προς ένα

- Αλλά αυτή η διαδικασία δεν εφαρμόζεται στην διπλανή συνάρτηση



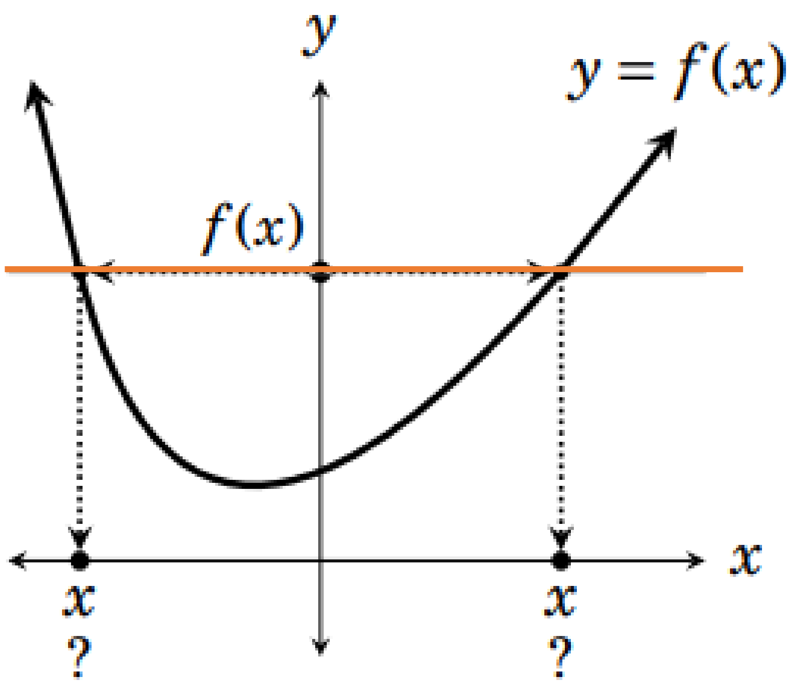
2. Συναρτήσεις ένα προς ένα

- Αλλά αυτή η διαδικασία δεν εφαρμόζεται στην διπλανή συνάρτηση
- Ποιο x είναι η σωστή έξοδος για την είσοδο $f\ (x)$;



2. Συναρτήσεις ένα προς ένα

- Αλλά αυτή η διαδικασία δεν εφαρμόζεται στην διπλανή συνάρτηση
- Ποιο x είναι η σωστή έξοδος για την είσοδο $f\ (x)$;
- **Προϋπόθεση:** Μια συνάρτηση f θα έχει αντίστροφο όταν καμία οριζόντια γραμμή δεν συναντά τη γραφική παράσταση της σε περισσότερα από ένα σημεία.



2. Συναρτήσεις ένα προς ένα

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι **ένα προς ένα (1-1)** όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{Αν } x_1 \neq x_2 \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. Συναρτήσεις ένα προς ένα

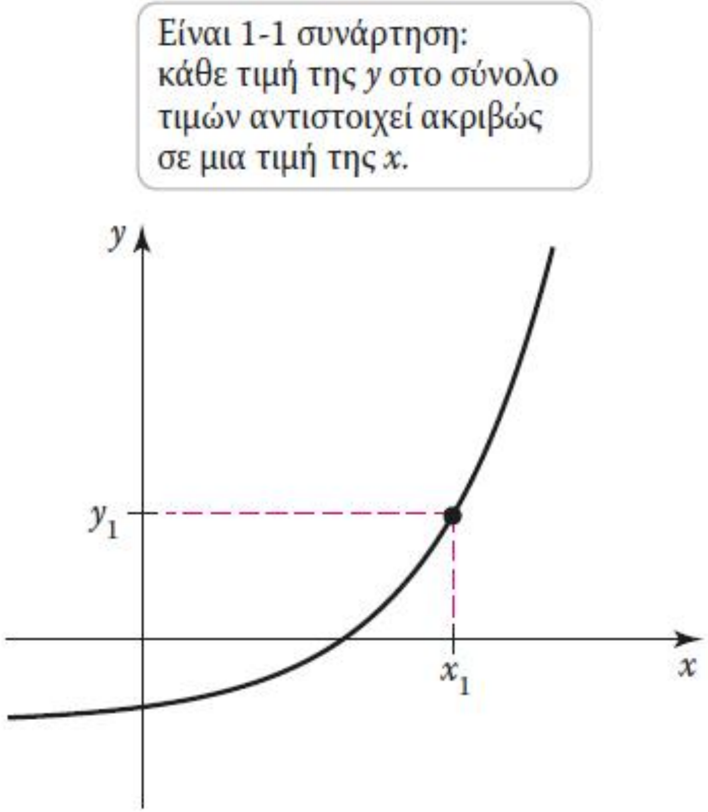
Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **ένα προς ένα (1-1)** όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

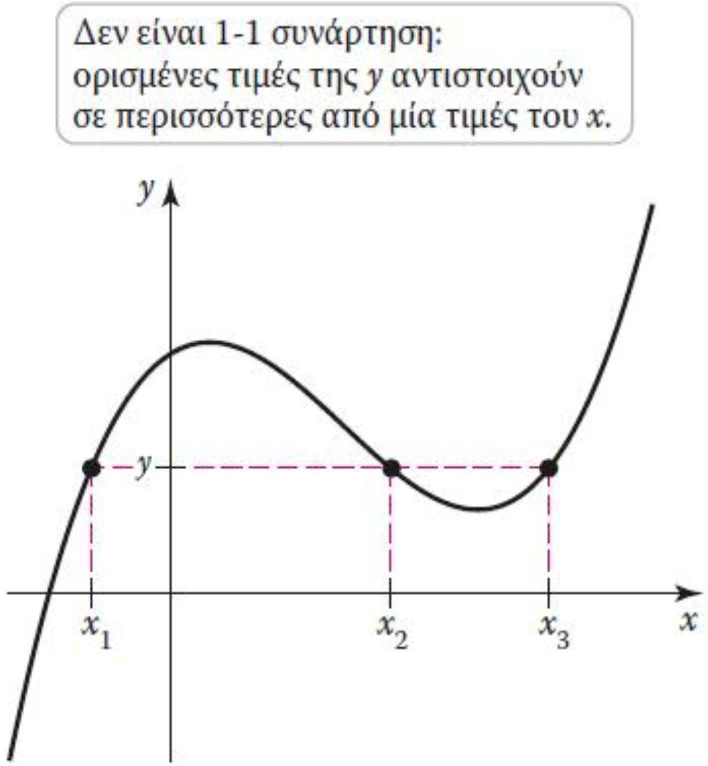
Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

- Για να είναι μια συνάρτηση 1-1 θα πρέπει κάθε <u>οριζόντια ευθεία </u>να τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο (έλεγχος οριζόντιας γραμμής)

Έλεγχος οριζόντιας ευθείας

Κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει το γράφημα μιας 1-1 συνάρτησης μόνο μία φορά





2. Συναρτήσεις ένα προς ένα

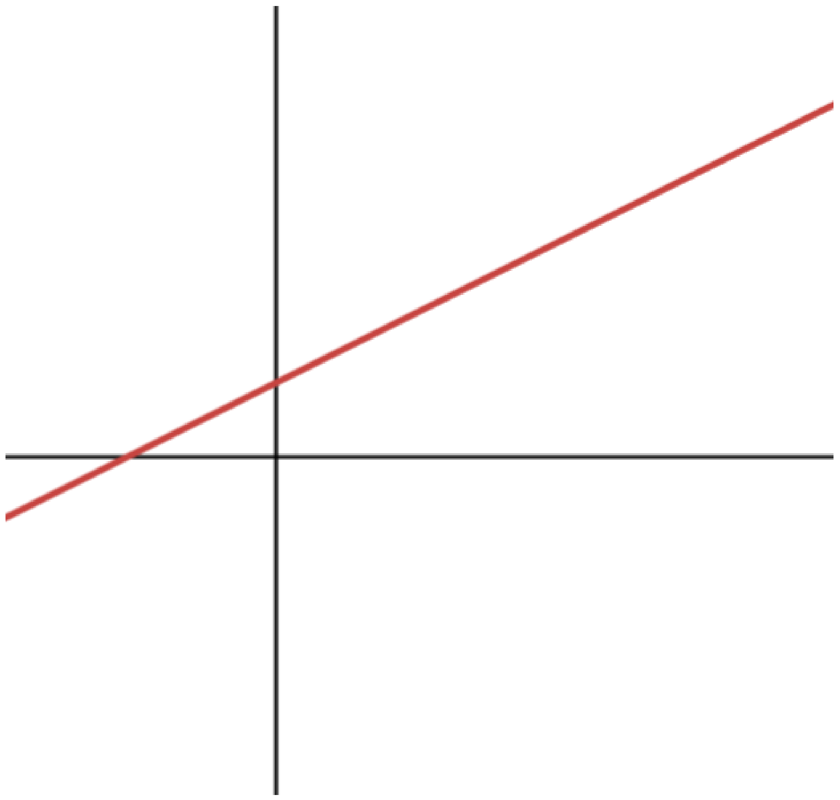
Συνέπεια του ορισμού

Μια συνάρτηση $f\colon A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι **ένα προς ένα (1-1)** αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

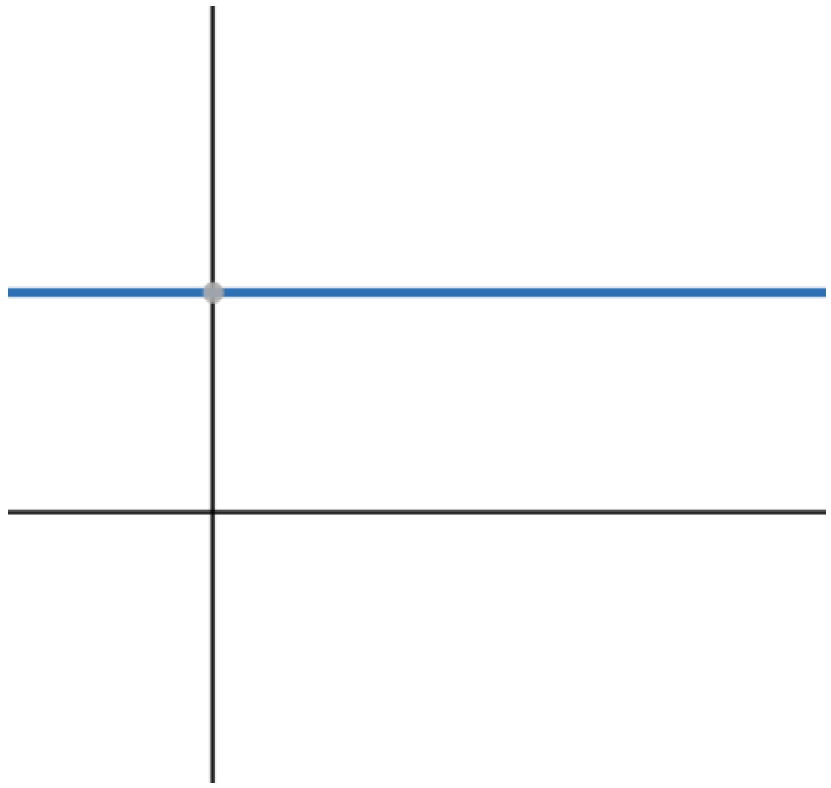
$$\text{Αν } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } x_1 = x_2$$

2. Συναρτήσεις ένα προς ένα

- Η συνάρτηση $f(x) = ax + b$ είναι 1-1



- Η συνάρτηση $f(x) = k$ δεν είναι 1-1

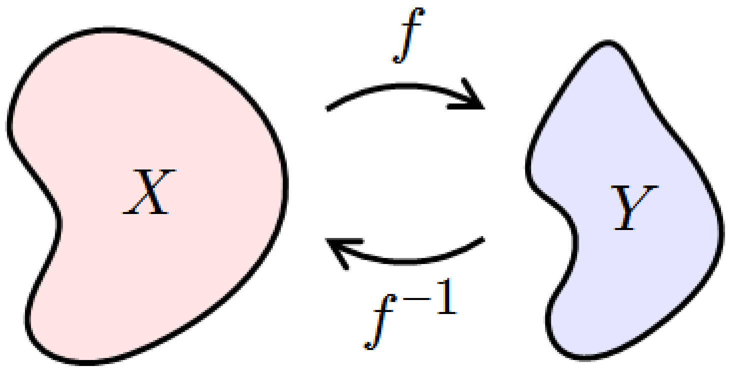


3. Αντίστροφες Συναρτήσεις

Ορισμός: Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε ορίζεται η **αντίστροφη** συνάρτηση της f και συμβολίζεται με f^{-1}.

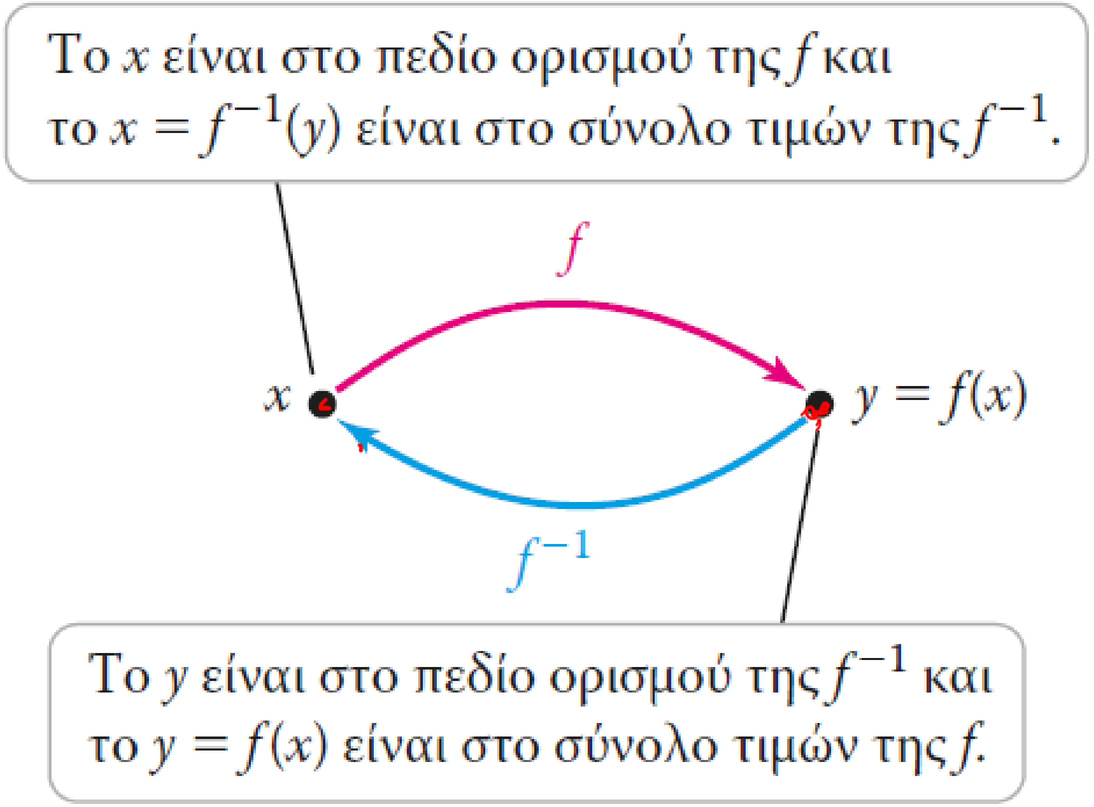
Για την f^{-1} ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{f(x) = y \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(y) = x}$$



3. Αντίστροφες Συναρτήσεις

- Το πεδίο ορισμού της f είναι σύνολο τιμών της f^{-1}.
- Το σύνολο τιμών της f είναι πεδίο ορισμού της f^{-1}



3. Υπολογισμός Αντίστροφης Συνάρτησης

Βήματα εύρεσης της αντίστροφης συνάρτησης μιας 1-1 συνάρτησης f

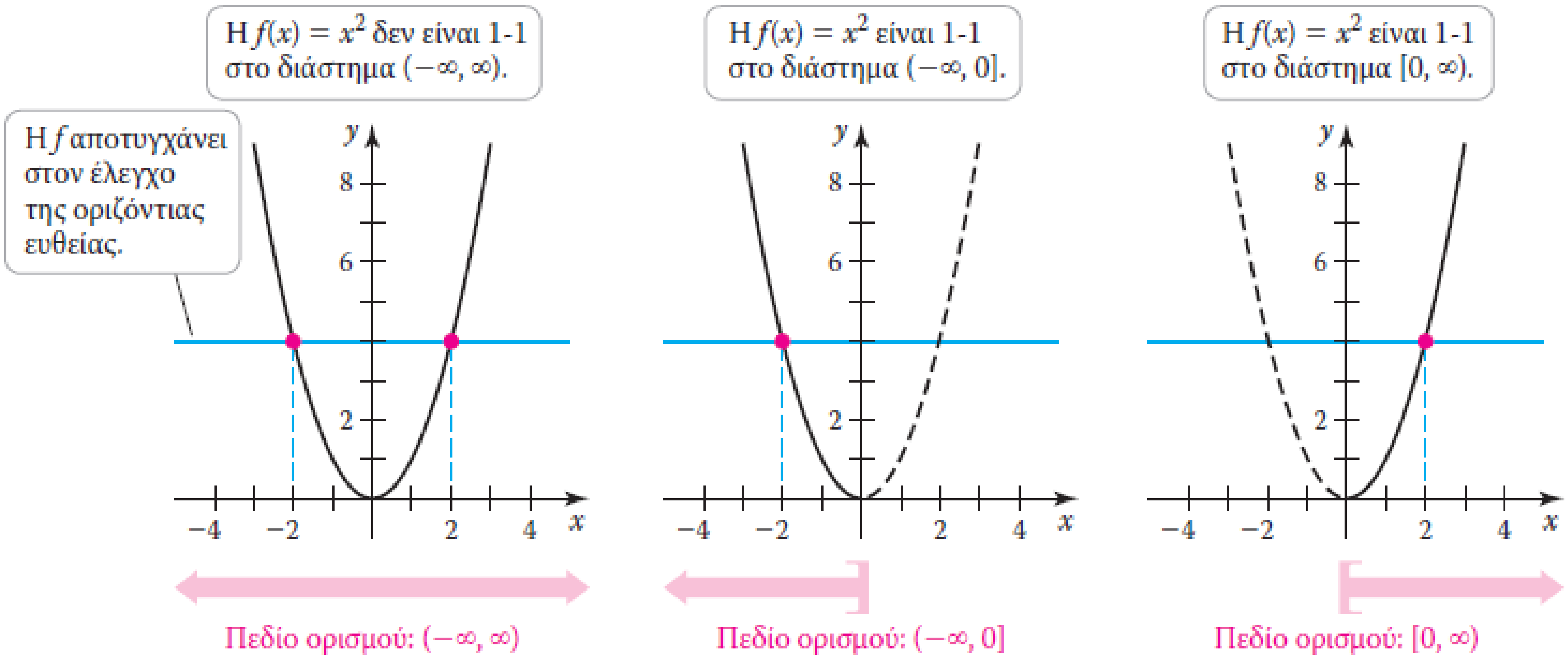
1. Αντικατάσταση $f(x)$ με y
2. Επίλυση για το x
3. Εναλλαγή των μεταβλητών x και y
4. Αντικατάσταση του y με $f^{-1}(x)$

$$
\begin{gathered}
f(x) = x^3 + 1 \\
y = x^3 + 1 \\
x^3 = y - 1 \leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-1} \\
\leftrightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \\
f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}
\end{gathered}
$$

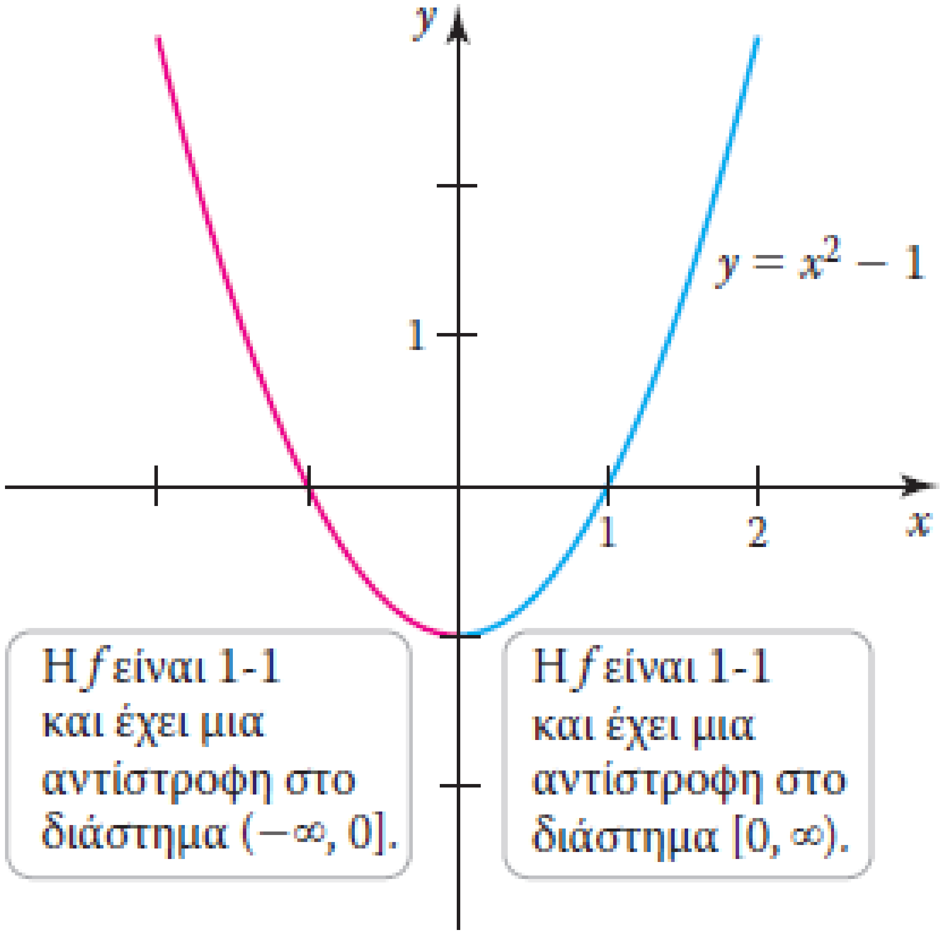
Έλεγχος

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\big(f(x)\big) &= \sqrt[3]{f(x)-1} \\
&= \sqrt[3]{x^3+1-1} \\
&= \sqrt[3]{x^3} \\
&= x
\end{aligned}
$$

4. Περιορίζοντας το πεδίο ορισμού

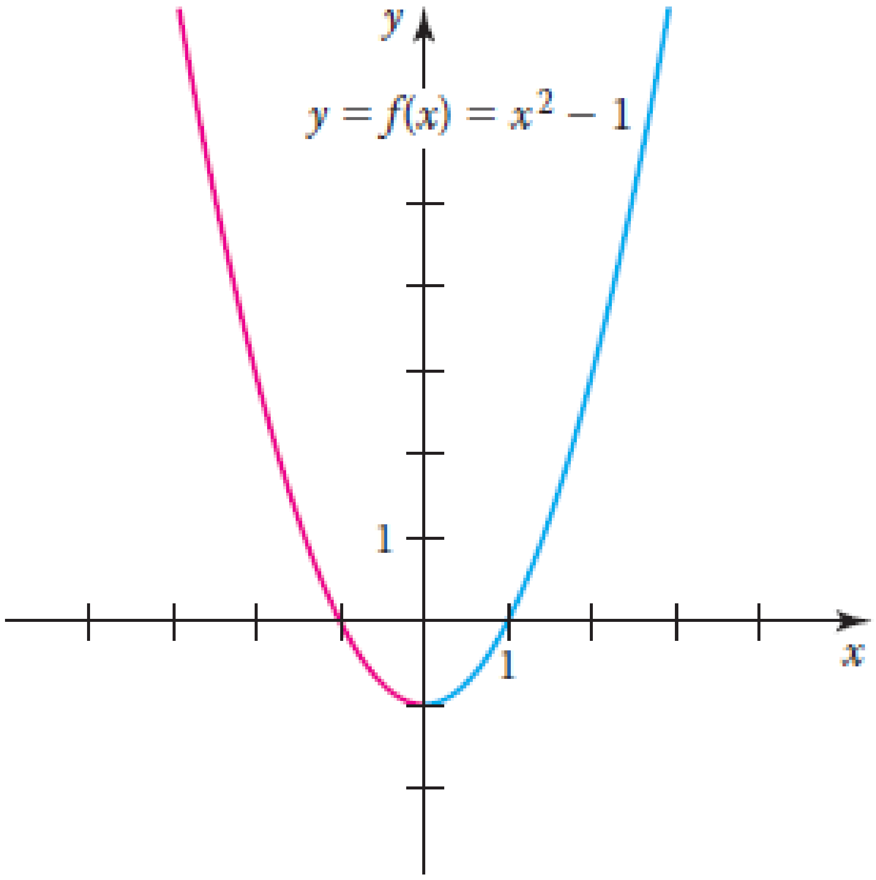


Παράδειγμα

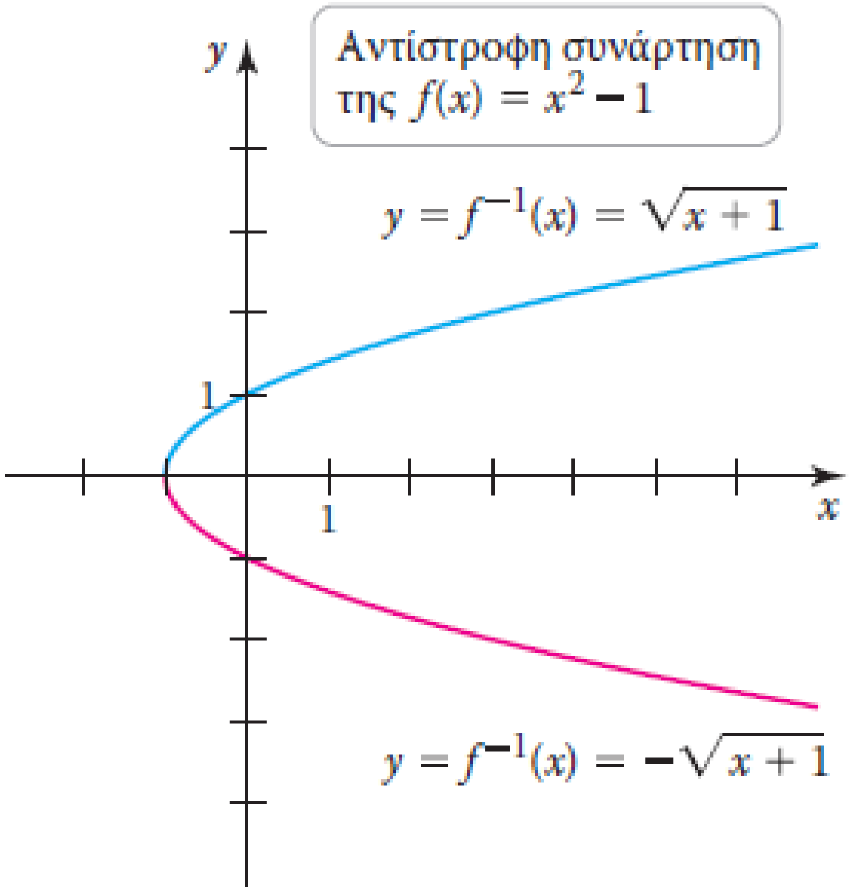


y
x
1
1
2
y = x² − 1
Η f είναι 1-1 και έχει μια αντίστροφη στο διάστημα (−∞, 0].
Η f είναι 1-1 και έχει μια αντίστροφη στο διάστημα [0, ∞).

Παράδειγμα (συνέχεια)

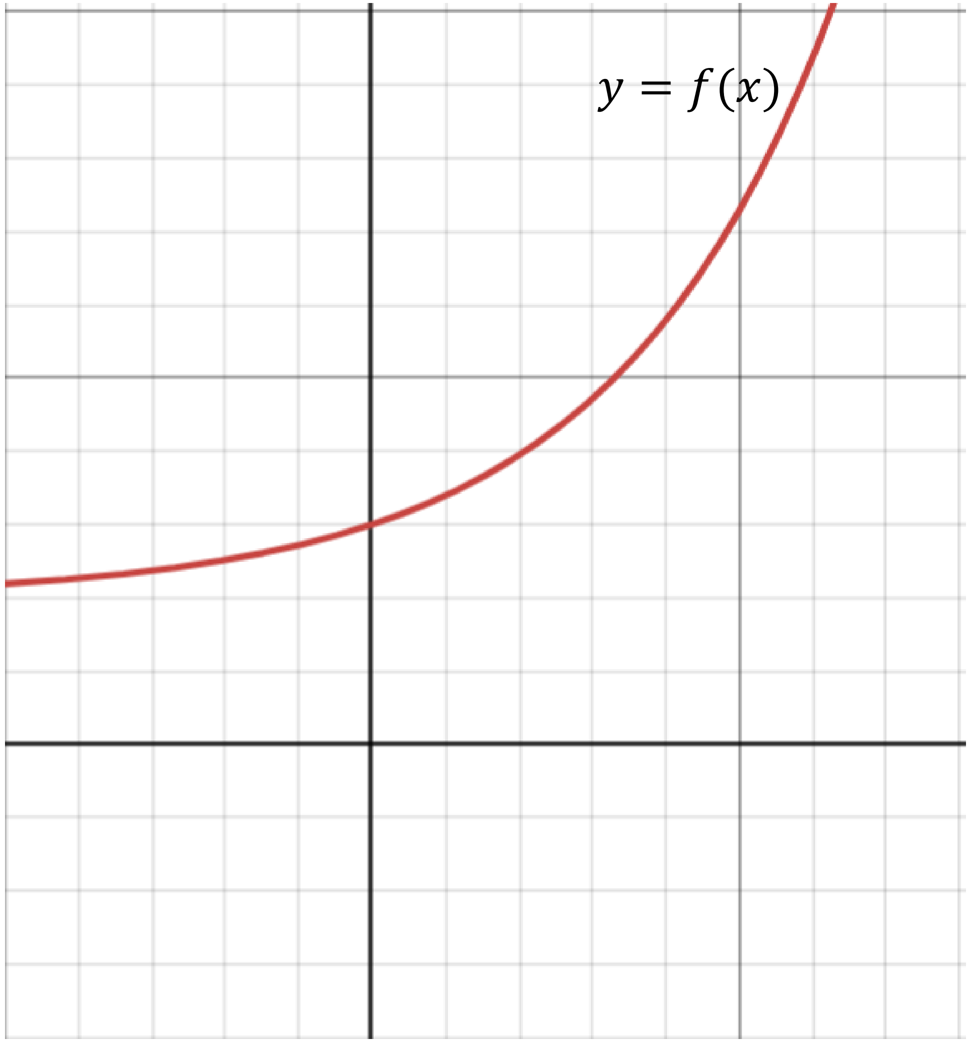


(α)



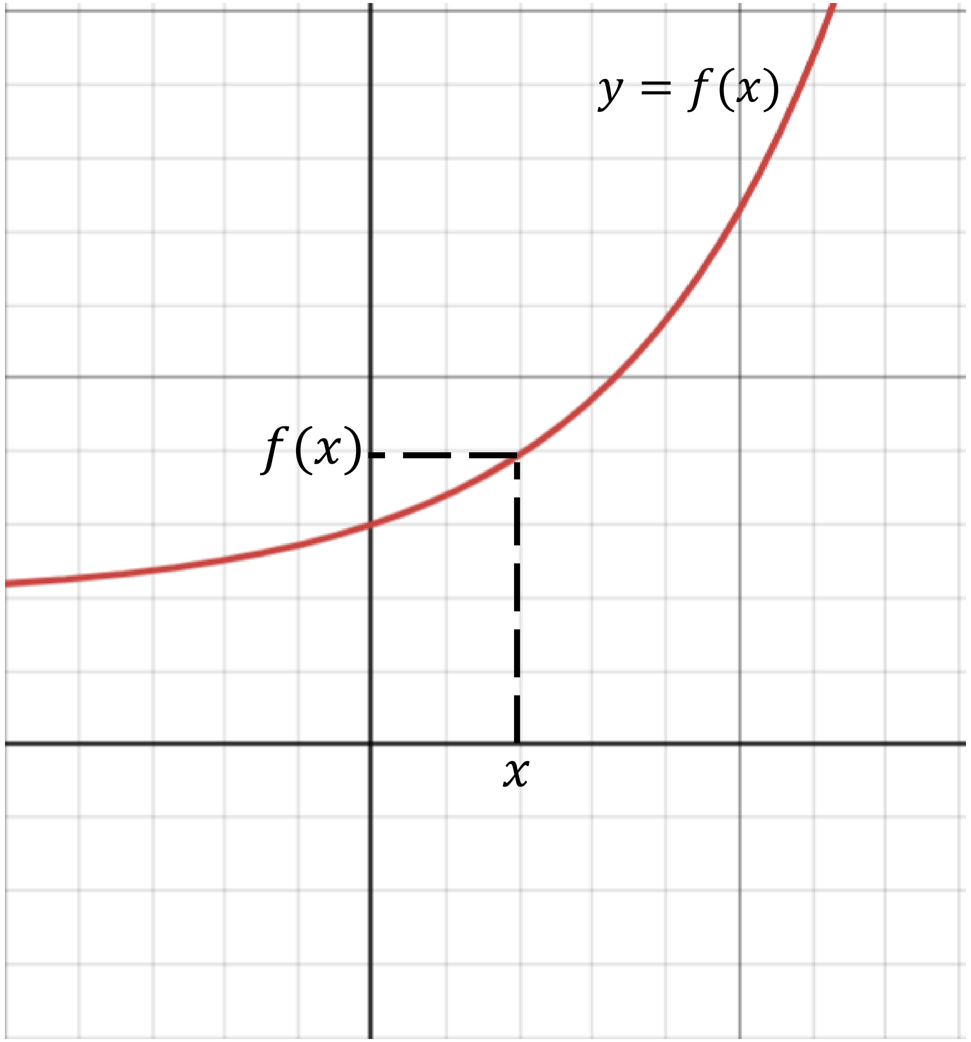
(β)

5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων



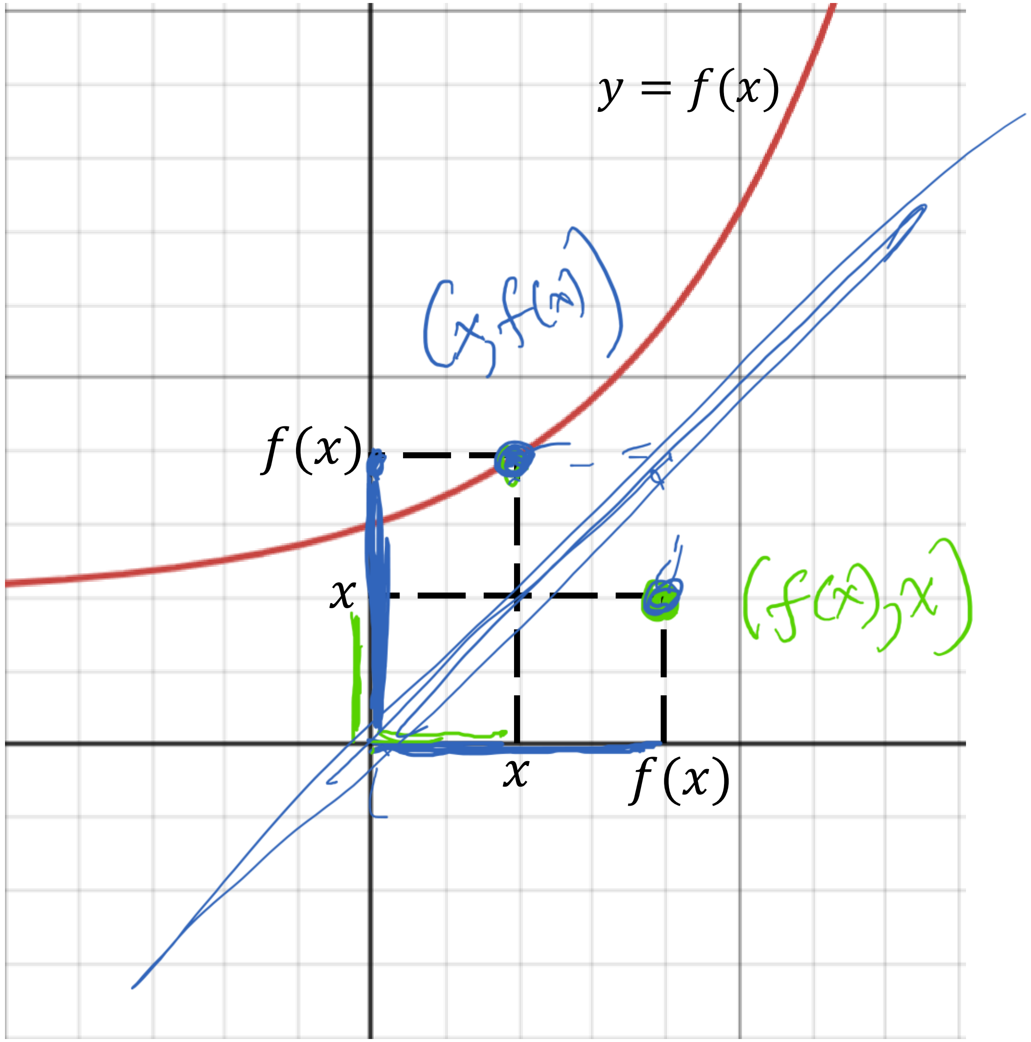
- Το γράφημα της f αποτελείται από όλα τα σημεία $\left(x, f(x)\right)$
- Το γράφημα της f^{-1} αποτελείται από όλα τα σημεία $(f(x), x)$

5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων



- Το γράφημα της f αποτελείται από όλα τα σημεία $\big(x, f(x)\big)$
- Το γράφημα της f^{-1} αποτελείται από όλα τα σημεία $(f(x), x)$

5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων

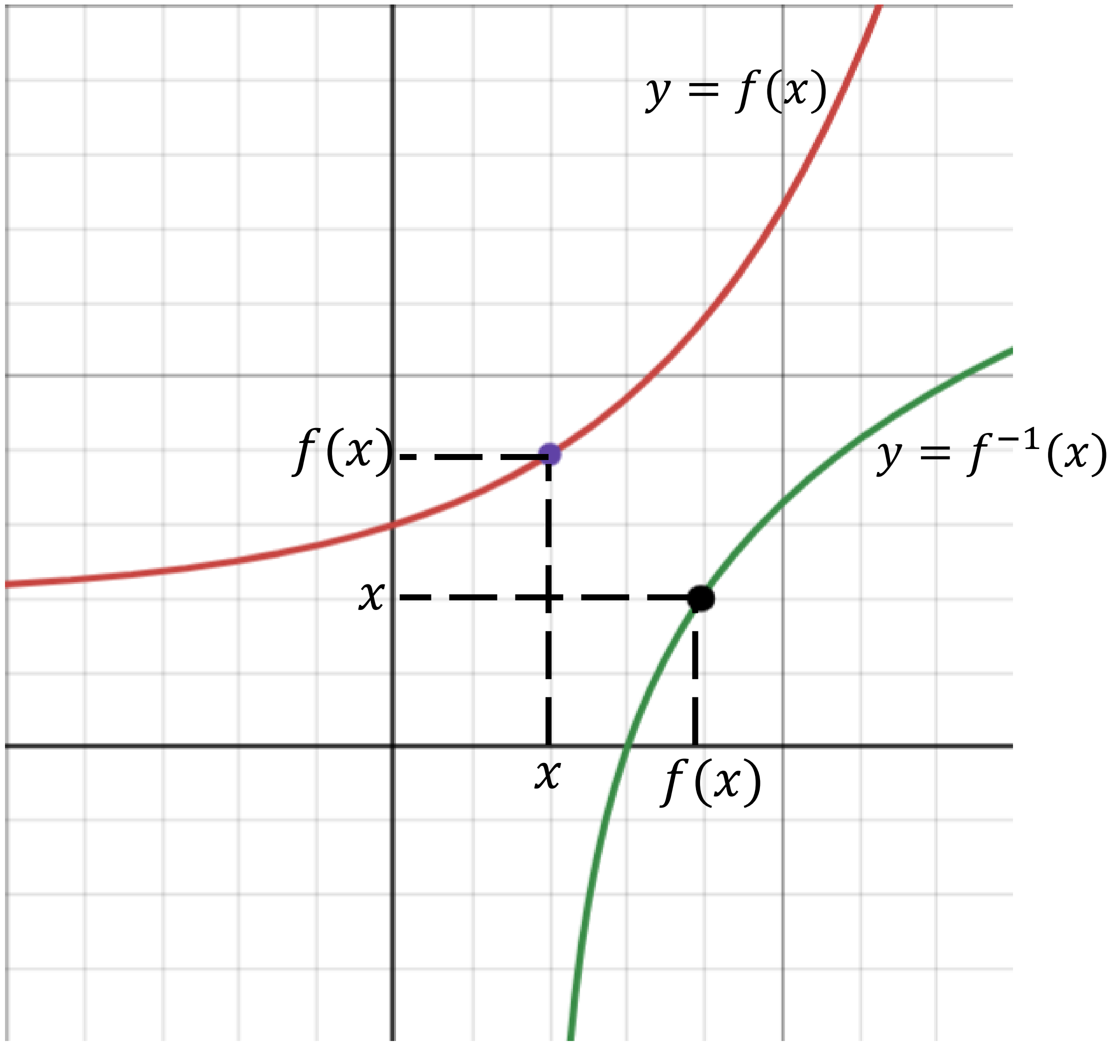


- Το γράφημα της f αποτελείται από όλα τα σημεία $\left(x, f(x)\right)$
- Το γράφημα της f^{-1} αποτελείται από όλα τα σημεία $(f(x), x)$

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

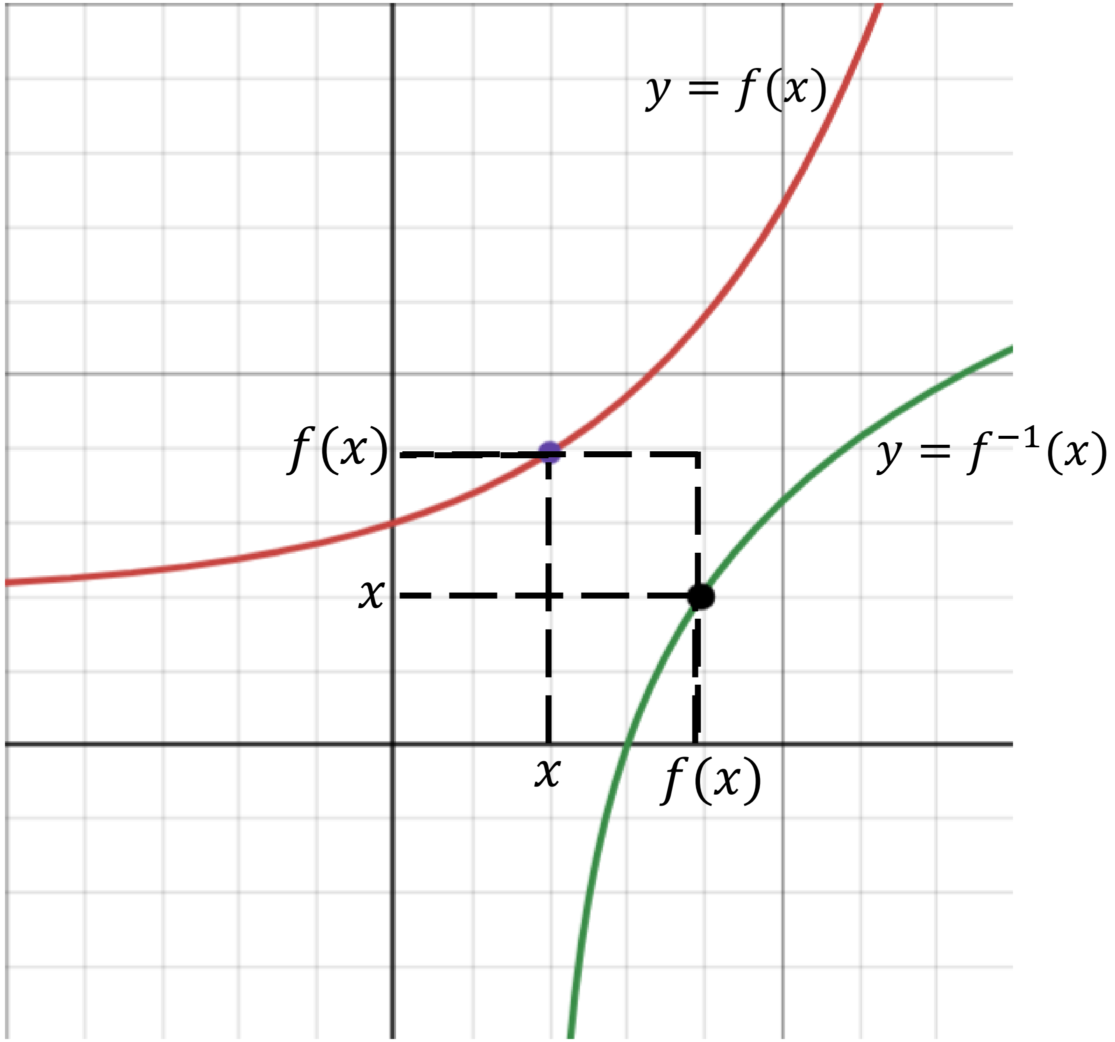
$y = f^{-1}(x)$

5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων



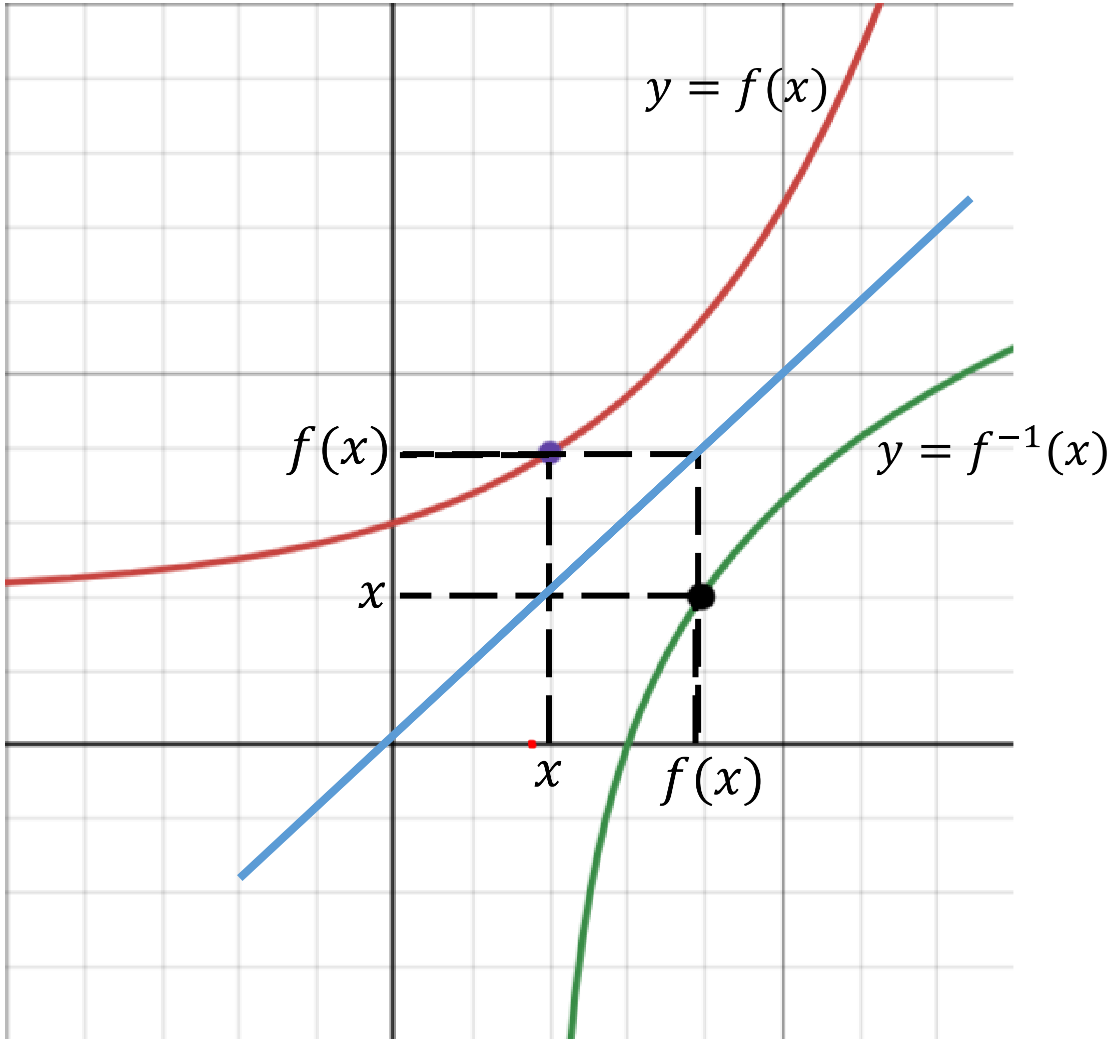
- Το γράφημα της f αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, f(x))$
- Το γράφημα της f^{-1} αποτελείται από όλα τα σημεία $(f(x), x)$

5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων



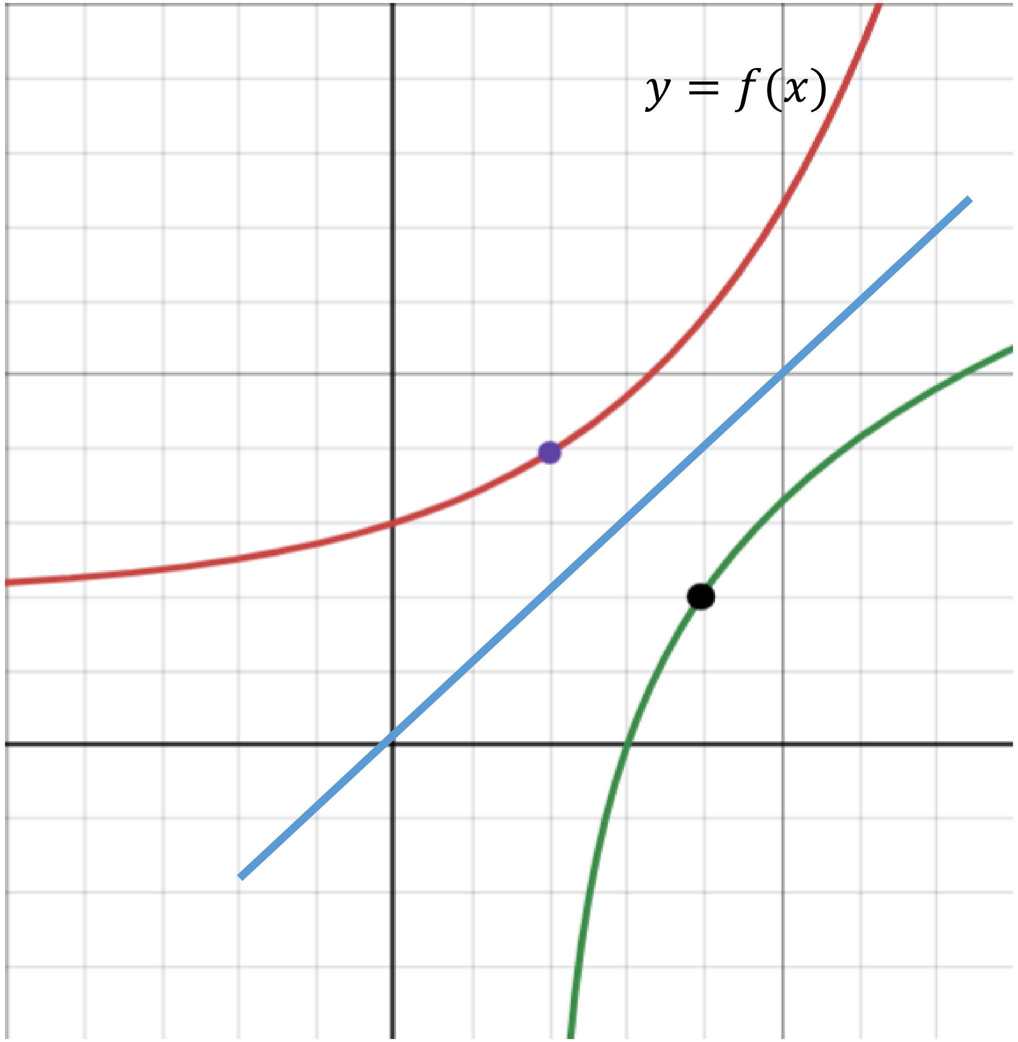
- Το γράφημα της f αποτελείται από όλα τα σημεία $\left(x, f(x)\right)$
- Το γράφημα της f^{-1} αποτελείται από όλα τα σημεία $\left(f(x), x\right)$

5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων



- Το γράφημα της f αποτελείται από όλα τα σημεία $(x, f(x))$
- Το γράφημα της f^{-1} αποτελείται από όλα τα σημεία $(f(x), x)$

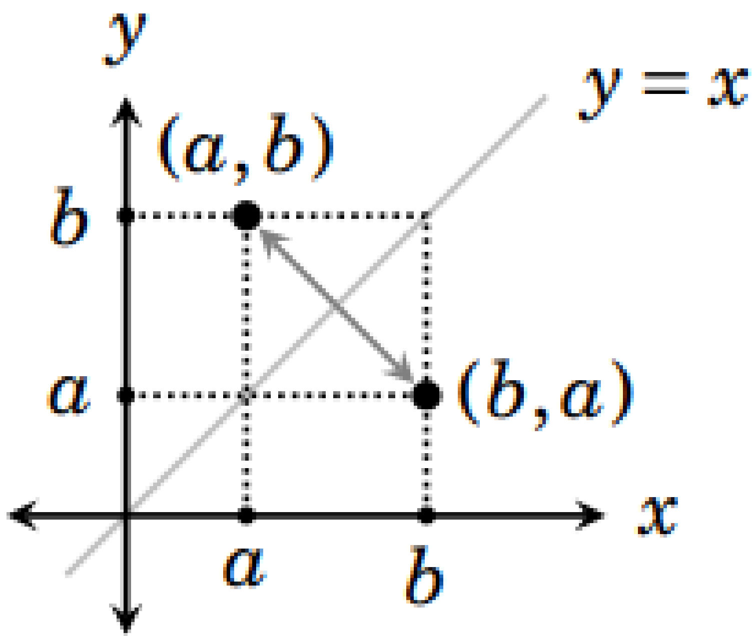
5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων



Συμπέρασμα:

Οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία $y = x$

5. Σχεδίαση Αντίστροφων συναρτήσεων



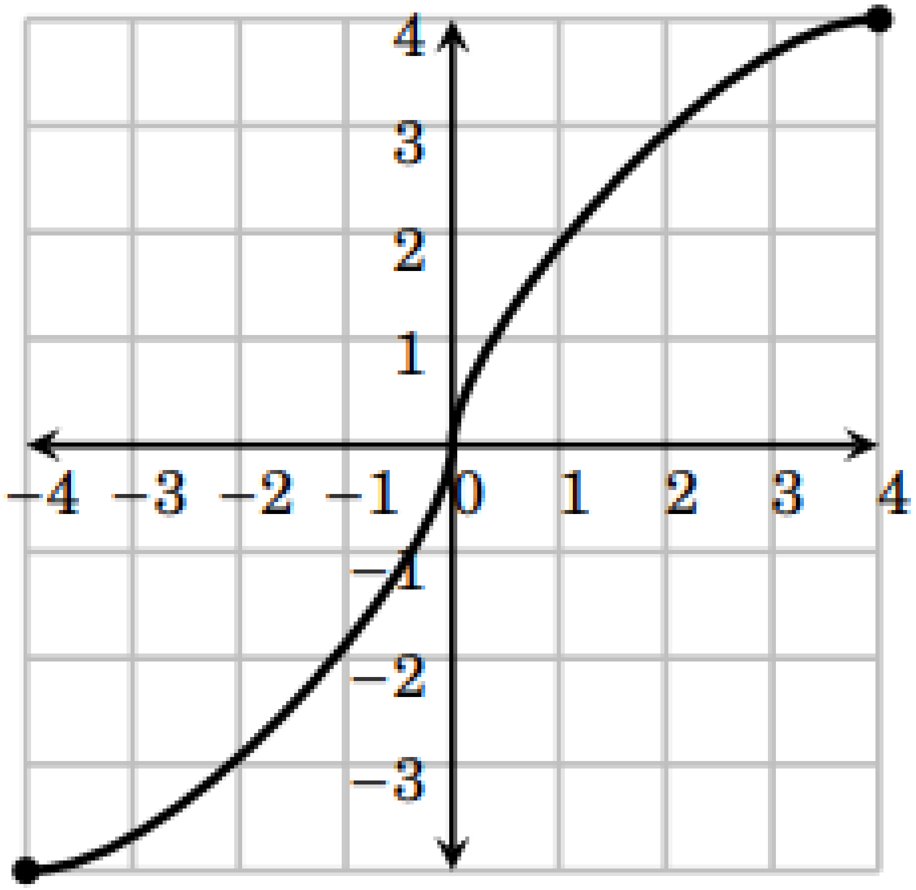
Εξήγηση:

Για οποιοδήποτε σημείο (a, b) στη γραφική παράσταση της f "**αντανακλάται**" στην ευθεία $y = x$ στο σημείο (b, a) το οποίο βρίσκεται στη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f του σχήματος.

- Βρείτε τις τιμές $f^{-1}(-4), f^{-1}(-3),$ $f^{-1}(-2)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(4)$
- Σχεδιάστε την f^{-1}



Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση f του σχήματος.

- Βρείτε τις τιμές $f^{-1}(-4), f^{-1}(-3),$ $f^{-1}(-2), f^{-1}(0), f^{-1}(2),$ $f^{-1}(3), f^{-1}(4)$
- Σχεδιάστε την f^{-1}

$f^{-1}(-4) = -4$

$f^{-1}(-3) = -2$

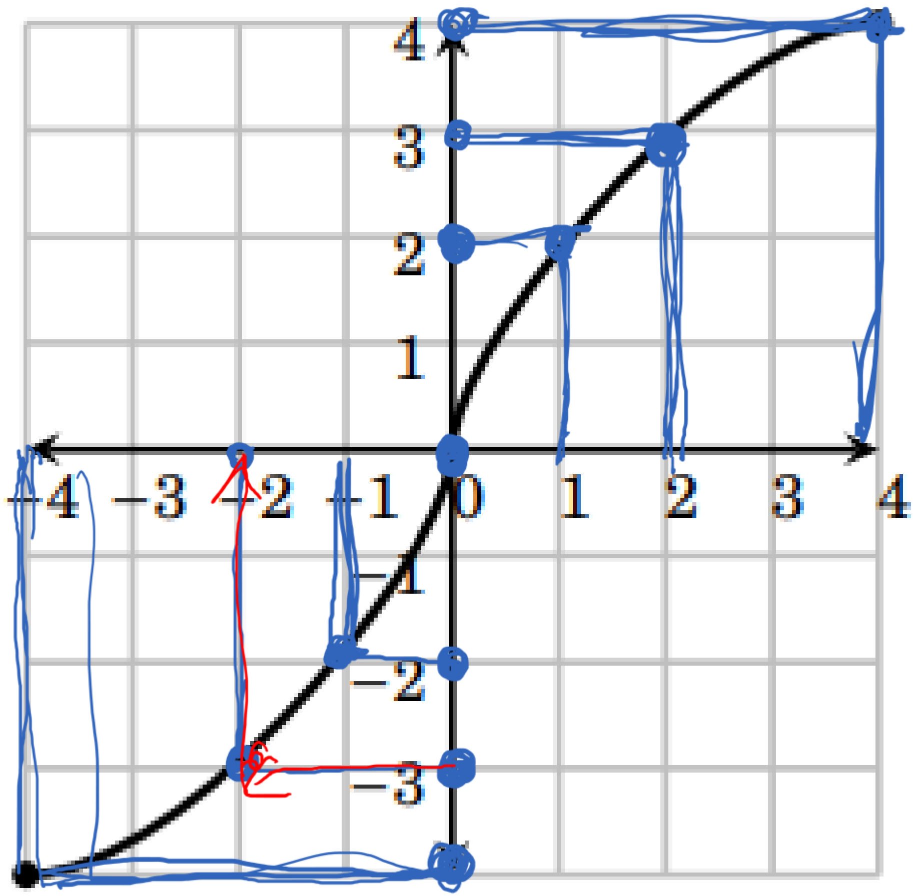
$f^{-1}(-2) = -1$

$f^{-1}(0) = 0$

$f^{-1}(2) = 1$

$f^{-1}(3) = 2$

$f^{-1}(4) = 4$



Παράδειγμα

Λύση:

- Έχουμε

$f(-4) = -4$ άρα $f^{-1}(-4) = -4$,

$f(-2) = -3$ άρα $f^{-1}(-3) = -2$,

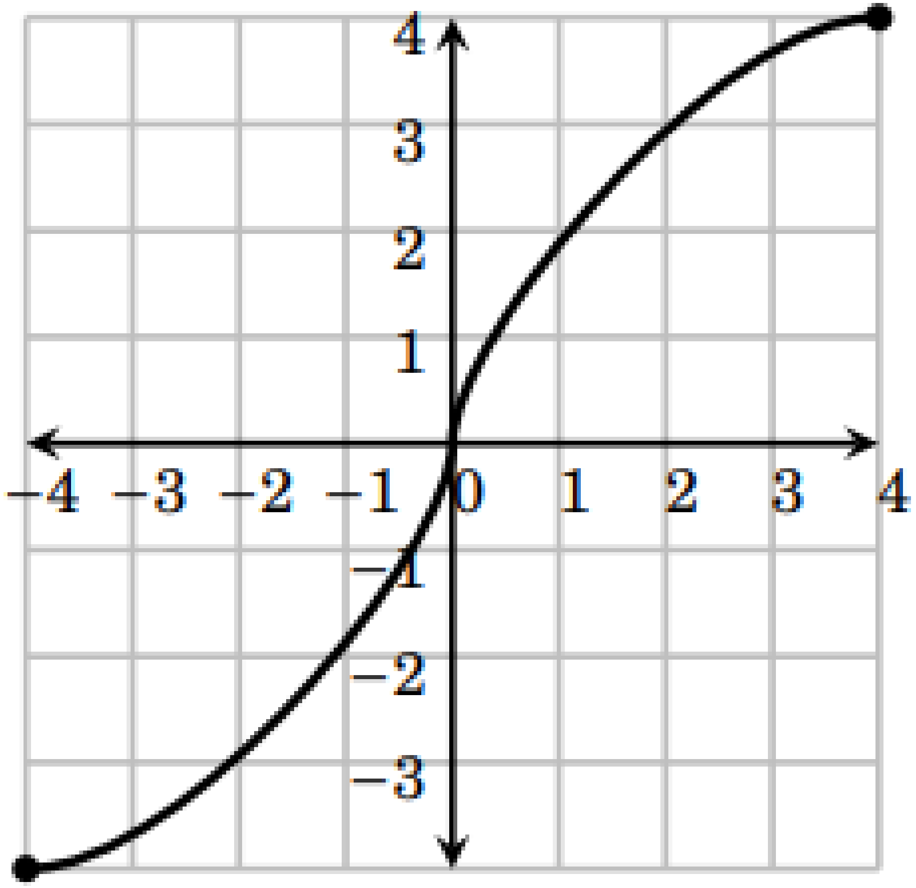
$f(-1) = -2$ άρα $f^{-1}(-2) = -1$,

$f(0) = 0$ άρα $f^{-1}(0) = 0$,

$f(1) = 2$ άρα $f^{-1}(2) = 1$,

$f(2) = 3$ άρα $f^{-1}(3) = 2$,

$f(4) = 4$ άρα $f^{-1}(4) = 4$



Παράδειγμα

Λύση:

- Έχουμε

$f(-4) = -4$ άρα $f^{-1}(-4) = -4,$

$f(-2) = -3$ άρα $f^{-1}(-3) = -2,$

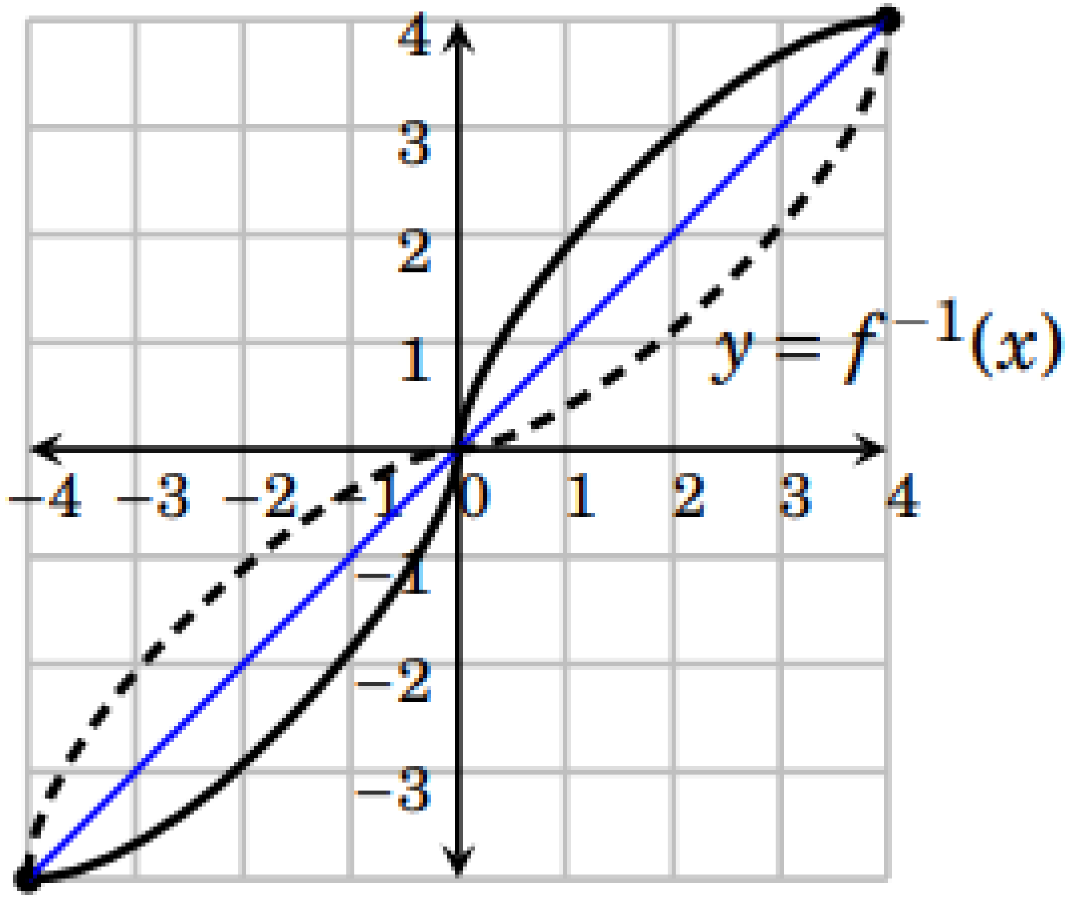
$f(-1) = -2$ άρα $f^{-1}(-2) = -1,$

$f(0) = 0$ άρα $f^{-1}(0) = 0,$

$f(1) = 2$ άρα $f^{-1}(2) = 1,$

$f(2) = 3$ άρα $f^{-1}(3) = 2,$

$f(4) = 4$ άρα $f^{-1}(4) = 4$



Παράδειγμα 2

Εξετάστε αν η συνάρτηση $g(x) = \frac{x}{x-1}$ είναι 1-1. Αν είναι, βρείτε την αντίστροφή της. Τι παρατηρείτε;

Παράδειγμα 2

Ας βρούμε το γράφημα της $g(x) = \frac{x}{x-1}$

Σημειώστε ότι

$$g(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$$

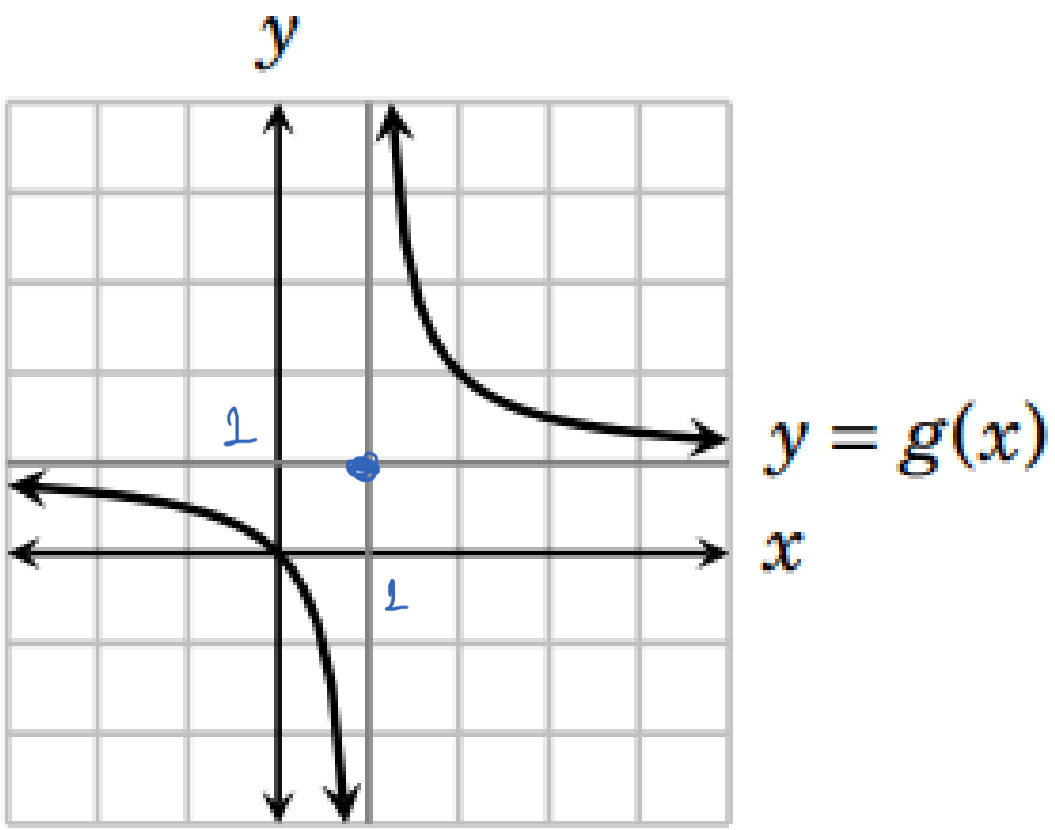
$$g(x) = \frac{1}{x-1} + 1$$

Παράδειγμα 2

Άρα

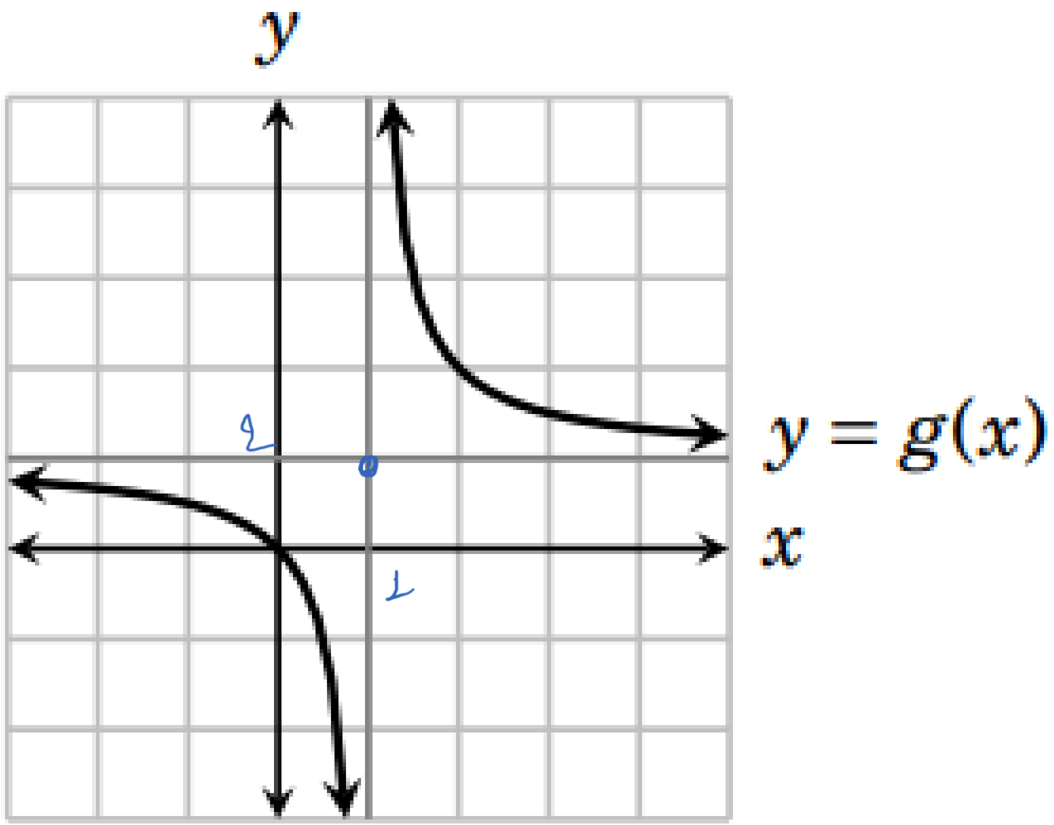
$$g(x) = \frac{1}{x-1} + 1$$

οπότε το γράφημα της g προέρχεται από οριζόντια μετατόπιση της $y = \frac{1}{x}$ κατά 1 μονάδα δεξιά και μετά κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1 μονάδα επάνω



Παράδειγμα 2

Αφού καμιά οριζόντια ευθεία δε τέμνει το γράφημα της g σε παραπάνω από 1 σημείο, η g είναι 1-1.



Παράδειγμα 2

Ας υπολογίσουμε την αντίστροφη της $g(x) = \frac{x}{x-1}$

Έχουμε

$$y = \frac{x}{x-1} \to y(x-1) = x$$

$$\to yx - y = x$$

$$yx - x = y$$

$$x(y-1) = y$$

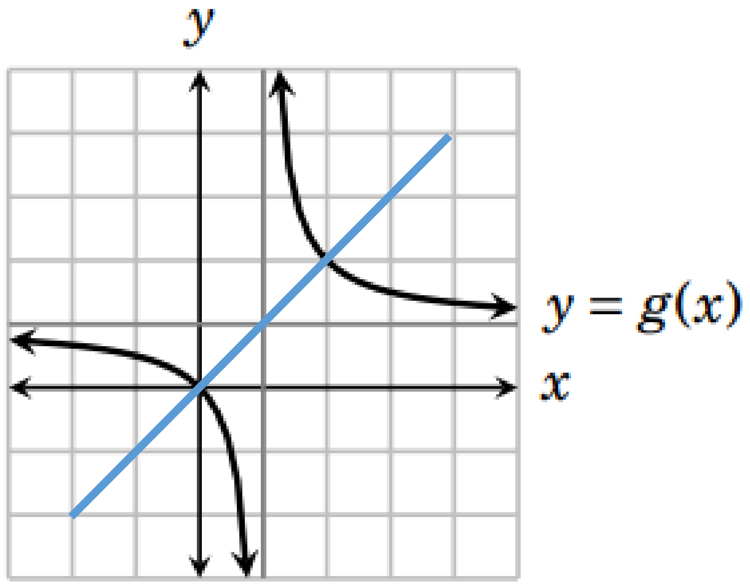
$$x = \frac{y}{y-1}, y \neq 1$$

Εναλλαγή

$$g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$$

Παράδειγμα 2

Δηλαδή η αντίστροφη της g είναι η ίδια η g. Αυτό φαίνεται και από το γράφημα της g, αν προσπαθήσουμε να βρούμε το συμμετρικό της ως προς την ευθεία $y = x$ προκύπτει το ίδιο γράφημα



Αυτό είναι μια σύμπτωση ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ πάντα