203: Διακριτά Μαθηματικά

Εξέταση Προόδου: Ομάδα Α

Η βαθμολογική αξία της εξέτασης είναι 5 μονάδες. Η χρονική διάρκεια της εξέτασης είναι μιάμιση ώρα. Επιτρέπεται στυλό μόνο μπλε και μαύρου χρώματος. Επιτρέπεται μολύβι μόνο για γραφή στο πρόχειρο.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1. (2.5 μονάδες) Δίνεται ο ακόλουθος προτασιακός τύπος:

$$p \land (p \to q) \land (q \to r) \to r$$

α΄. (1 μονάδα) Κατασκευάστε τον πίνακα αληθείας του και αναφέρετε αν είναι ταυτολογία ή αντίφαση.

β΄. (1.5 μονάδα) Βρείτε τον απλούστερο δυνατό ταυτολογικά ισοδύναμο προτασιακό τύπο κάνοντας χρήση των Κανόνων της Προτασιακής Λογικής.

Λύση: Για ευκολία, θέτουμε $P = p \land (p \to q) \land (q \to r)$ και $Q = p \land (p \to q) \land (q \to r) \to r$.

p	q	r	$p \to q$	$p \land (p \to q)$	$q \to r$	P	Q
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F	T

Παρατηρούμε ότι η Q είναι πάντα αληθής, συνεπώς είναι ταυτολογία.

$$\begin{aligned}
& p \land (p \to q) \land (q \to r) \to r && \\
&\equiv p \land (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor r) \to r && \text{Συνεπαγωγής} \\
&\equiv ((p \land \neg p)) \lor (p \land q)) \land (\neg q \lor r) \to r && \text{Επιμεριστικός} \\
&\equiv (\bot \lor (p \land q)) \land (\neg q \lor r) \to r && \text{Συμπληρώματος} \\
&\equiv (p \land q) \land (\neg q \lor r) \to r && \text{Απορροφητικός} \\
&\equiv p \land (q \land (\neg q \lor r)) \to r && \text{Προσεταιριστικός} \\
&\equiv p \land ((q \land \neg q) \lor (q \land r)) \to r && \text{Επιμεριστικός} \\
&\equiv p \land (\bot \lor (q \land r)) \to r && \text{Συμπληρώματος} \\
&\equiv p \land q \land r \to r && \text{Απορροφητικός} \\
&\equiv \neg(p \land q \land r) \lor r && \text{Συνεπαγωγής} \\
&\equiv (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \lor r && \text{De Morgan} \\
&\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor (\neg r \lor r) && \text{Προσεταιριστικός} \\
&\equiv (\neg p \lor \neg q) \lor \top && \text{Συμπληρώματος} \\
&\equiv \top && \text{Απορροφητικός}
\end{aligned}$$

Θέμα 2. (0.5 μονάδα) Σε μία δημοσκόπηση για το μέλλον της αυτοκίνησης συμμετείχαν 144 άτομα. Από αυτούς, οι 100 εξέφρασαν την άποψη ότι είναι οι κινητήρες εσωτερικής καύσης και οι 64 ότι είναι οι ηλεκτρικοί κινητήρες. Υπολογίστε πόσοι από τους συμμετέχοντες πιστεύουν πώς το μέλλον της αυτοκίνησης είναι οι υβριδικοί κινητήρες που αποτελούν συνδυασμό κινητήρα εσωτερικής καύσης και ηλεκτρικού κινητήρα.

Λύση: Θεωρούμε τα ακόλουθα σύνολα:

- U το σύνολο όλων των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα (σύμπαν)
- C το σύνολο όλων των ατόμων που πιστεύουν πως είναι οι συμβατικοί κινητήρες
- E το σύνολο όλων των ατόμων που πιστεύουν πως είναι οι ηλεκτροκινητήρες
- H το σύνολο όλων των ατόμων που πιστεύουν πως είναι οι υβριδικοί κινητήρες

Επίσης θεωρούμε πως $H = C \cap E$ και πως $U = C \cup E$ παρόλο που κάτι τέτοιο δεν αναφέρεται ρητά στην υπόθεση. Από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $|U| = 144$, $|C| = 100$ και $|E| = 64$. Κάνοντας χρήση της Αρχής Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, παίρνουμε:

$$|U| = |C \cup E| = |C| + |E| - |C \cap E| = |C| + |E| - |H| \Leftrightarrow |H| = |C| + |E| - |U| = 100 + 64 - 144 = 20$$

Θέμα 3. (1 μονάδα) Για την διεξαγωγή μίας εξέτασης του μαθήματος Διακριτά Μαθηματικά, επιθυμούμε να κατανείμουμε τους φοιτητές με δικαίωμα συμμετοχής σε 2 τμήματα. Απαριθμήστε όλες τις δυνατές επιλογές στις περιπτώσεις που ακολουθούν κάνοντας χρήση του μοντέλου σφαιρίδια-κουτιά.

α΄. (0.5 μονάδα) Αν πρέπει να τους διαχωρήσουμε σύμφωνα με τον αριθμό μητρώου τους σε άρτιους και περιττούς.

β΄. (0.5 μονάδα) Αν πρέπει να τους διαχωρήσουμε σύμφωνα με το πρώτο γράμμα του επωνύμου τους σε δύο διαστήματα. Σε αυτήν την περίπτωση, μία επιλογή είναι «από Α έως Μ» στο πρώτο τμήμα και «από Ν έως Ω» στο δεύτερο.

Λύση:

α΄. Σε αυτό το ερώτημα, διαμερίζουμε το σύνολο των φοιτητών σε δύο μέρη, τους άρτιους και τους περιττούς. Τα κουτιά είναι τα $n = 2$ διακεκριμένα τμήματα της εξέτασης και τα σφαιρίδια είναι τα $k = 2$ διακεκριμένα μέρη στα οποία διαμερίσαμε το σύνολο των φοιτητών. Επειδή μας ζητείται να διαχωρίσουμε τους φοιτητές σύμφωνα με αυτόν τον τρόπο, καθένα από τα τμήματα πρέπει να περιέχει το πολύ ένα από τα από τα δύο μέρη, άρα τα κουτιά έχουν χωρητικότητα το πολύ ένα. Συμπεραίνουμε πως το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$P(n,k) = P(2,2) = \frac{2!}{(2-2)!} = \frac{2!}{0!} = 2$$

β΄. Σε αυτό το ερώτημα, διαμερίζουμε το σύνολο των φοιτητών σε 24 μέρη σύμφωνα με το πρώτο γράμμα του επωνύμου τους. Το πείραμα αυτού του ερωτήματος περιλαμβάνει δύο βήματα: Το πρώτα βήμα είναι ο διαχωρισμός των 24 μερών στα οποία διαμερίσαμε το σύνολο των φοιτητών σε δύο διαστήματα και το δεύτερο είναι όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Η παρατήρηση κλειδί για το πρώτο βήμα είναι ότι αν ξέρουμε το πλήθος των γραμμάτων που περιέχει το κάθε διάστημα, τότε ξέρουμε και ποια είναι αυτά. Π.χ. αν κάθε διάστημα περιέχει 12 γράμματα, τότε τα διαστήματα είναι τα «από Α έως Μ» και «από Ν έως Ω». Άρα δεν χρειάζεται να διακρίνουμε ποια είναι τα γράμματα. Τα κουτιά είναι τα $n = 2$ διακεκριμένα διαστήματα και είναι άπειρης χωρητικότητας και τα σφαιρίδια είναι τα $k = 24$ όμοια γράμματα. Συμπεραίνουμε πως για το πρώτο βήμα το πλήθος είναι:

$$C(n+k-1,k) = C(2+24-1,24) = C(25,24) = \frac{25!}{24!(25-24)!} = \frac{25!}{24!1!} = 25$$

Για το δεύτερο βήμα, απο το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε πως το πλήθος είναι $P(2,2) = 2$. Επειδή το ποια γράμματα περιέχει το κάθε διάστημα δεν επηρεάζει το σε ποιο τμήμα θα τοποθετηθεί, τα δύο βήματα του πειράματος αυτού του ερωτήματος είναι ανεξάρτητα. Από τον Κανόνα του Γινομένου, το ζητούμενο πλήθος είναι $C(25,24)P(2,2) = 25 \times 2 = 50$.

Θέμα 4. (1 μονάδα) Μία αυτοκινητοβιομηχανία πουλά αυτοκίνητα του μοντέλου M που κατασκευάζει σε δύο εργοστάσια, έστω A και B. Το εργοστάσιο A έχει ρυθμό παραγωγής 4000 αυτοκίνητα το μήνα και το B έχει 1000 αυτοκίνητα το μήνα. Έχει εκτιμηθεί πως το ποσοστό των αυτοκίνητων που κατασκευάζονται ελαττωματικά στο εργοστάσιο A είναι 10% και στο B είναι 5%.

α΄. (0.5 μονάδα) Υπολογίστε την πιθανότητα να αγοράσουμε αυτοκίνητο του μοντέλου M το οποίο είναι ελαττωματικό εκ κατασκευής.

β΄. (0.5 μονάδα) Δεδομένου ότι το αυτοκίνητο του μοντέλου M που αγοράσαμε είναι ελαττωματικό εκ κατασκευής, υπολογίστε την πιθανότητα να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο A.

Λύση: Θεωρούμε τα ακόλουθα γεγονότα:

- U το αυτοκίνητο να είναι του μοντέλου M (σύμπαν)
- A το αυτοκίνητο να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο A
- B το αυτοκίνητο να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο B
- F το αυτοκίνητο να είναι ελαττωματικό εκ κατασκευής

Από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $|A| = 4000$, $|B| = 1000$, $P(F \mid A) = 10\%$ και $P(F \mid B) = 5\%$. Επειδή η συλλογή γεγονότων $\{A, B\}$ διαμερίζει το σύμπαν U, έχουμε και ότι $|U| = |A| + |B| = 4000 + 1000 = 5000$. Από τον ορισμό της κλασικής πιθανότητας, παίρνουμε:

$$P(A) = \frac{|A|}{|U|} = \frac{4000}{5000} = \frac{4}{5} = 0.8 = 80\% \qquad P(B) = \frac{|B|}{|U|} = \frac{1000}{5000} = \frac{1}{5} = 0.2 = 20\%$$

α΄. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(F)$. Επειδή η συλλογή γεγονότων $\{A, B\}$ διαμερίζει το σύμπαν U, από τον τύπο της ολικής πιθανότητας, παίρνουμε:

$$P(F) = P(F \mid A)P(A) + P(F \mid B)P(B) = 10\%80\% + 5\%20\% = 0.1 \times 0.8 + 0.05 \times 0.2 = 0.09 = 9\%$$

β΄. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(A \mid F)$. Από το Θεώρημα του Bayes, παίρνουμε:

$$P(A \mid F) = \frac{P(F \mid A)P(A)}{P(F)} = \frac{10\%80\%}{9\%} = \frac{0.1 \times 0.8}{0.09} = \frac{0.08}{0.09} = \frac{8}{9} = 0.\overline{8} = 88.\overline{8}\%$$

Κανόνες Προτασιακής Λογικής

Αντιμεταθετικός:	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Προσεταιριστικός:	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Επιμεριστικός:	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
De Morgan:	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Συμπληρώματος:	$P \wedge \neg P \equiv \bot$	$P \vee \neg P \equiv \top$
Απορροφητικός:	$\top \wedge P \equiv P$	$\top \vee P \equiv \top$
	$\bot \wedge P \equiv \bot$	$\bot \vee P \equiv P$
	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Διπλής Άρνησης:	$\neg\neg P \equiv P$	
Συνεπαγωγής:	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Ισοδυναμίας:	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

Μοντέλο Σφαιρίδια-Κουτιά

k **σφαιρίδια**	**σε** n **κουτιά**	**χωρ/τας**	**# δυνατών τοποθετήσεων**
διακεκριμένα	διακεκριμένα	το πολύ ένα	$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (διατάξεις)
διακεκριμένα	διακεκριμένα	άπειρης δεν μας ενδιαφέρει η σειρά μέσα στα κουτιά	n^k
διακεκριμένα	διακεκριμένα	άπειρης μας ενδιαφέρει η σειρά μέσα στα κουτιά	$P(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$
m διακεκριμένες ομάδες με $k_1, \ldots, k_m$ όμοια	διακεκριμένα	το πολύ ένα	$\frac{P(n,k)}{k_1! \cdots k_m!} = \frac{n!}{(n-k)! k_1! \cdots k_m!}$
όμοια	διακεκριμένα	το πολύ ένα	$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (συνδυασμοί)
όμοια	διακεκριμένα	άπειρης	$C(n+k-1,k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$