Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2024-2025

Όρια Συναρτήσεων

Απειροστικός λογισμός (calculus)

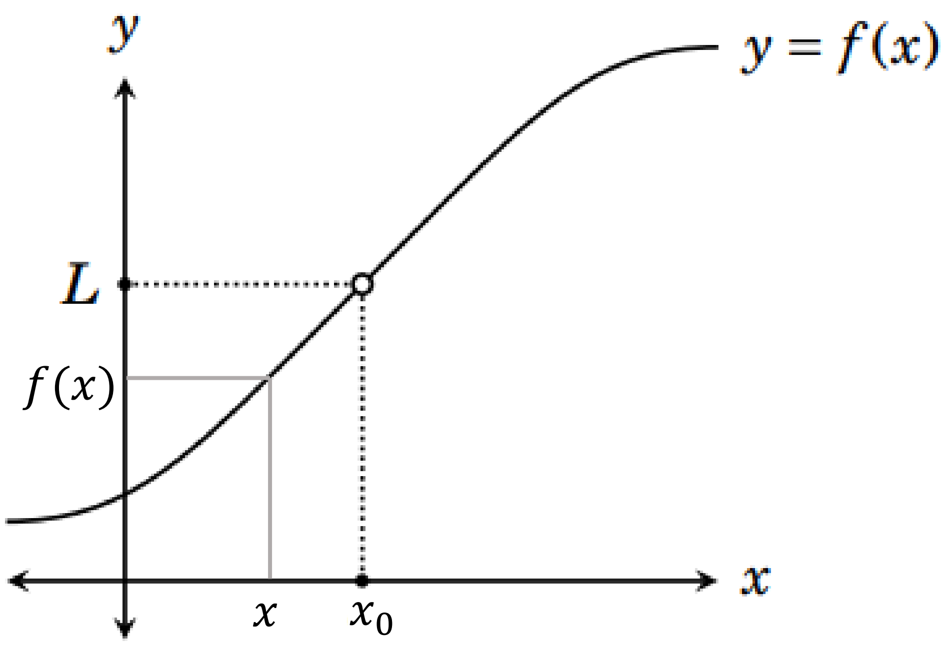
- Ο απειροστικός λογισμός εμπεριέχει το διαφορικό λογισμό και τον ολοκληρωτικό λογισμό
- Επιτρέπει τη διερεύνηση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων
- Σημαντικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού είναι τα όρια, οι παράγωγοι και τα ολοκληρώματα

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

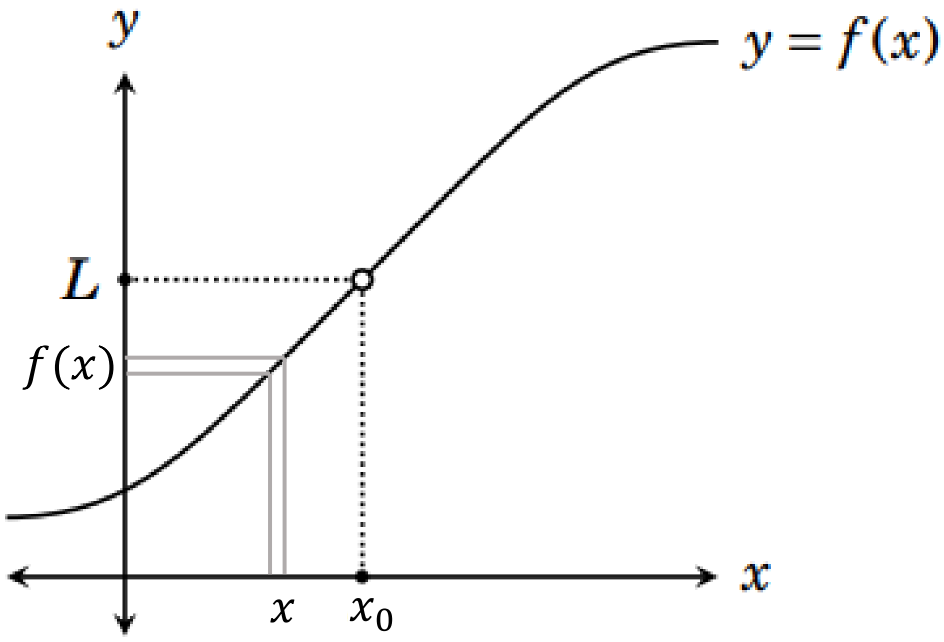


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

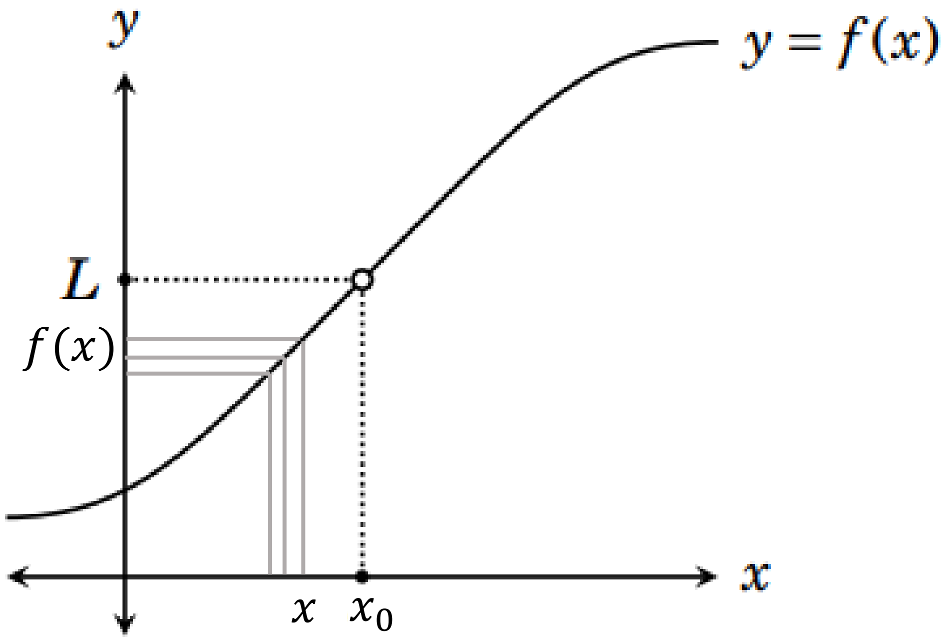


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

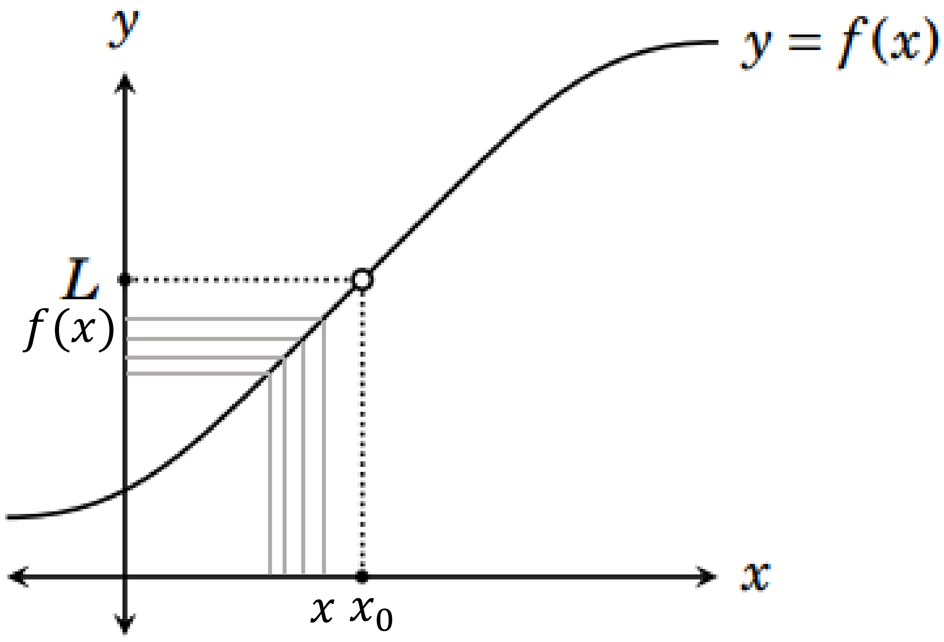


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

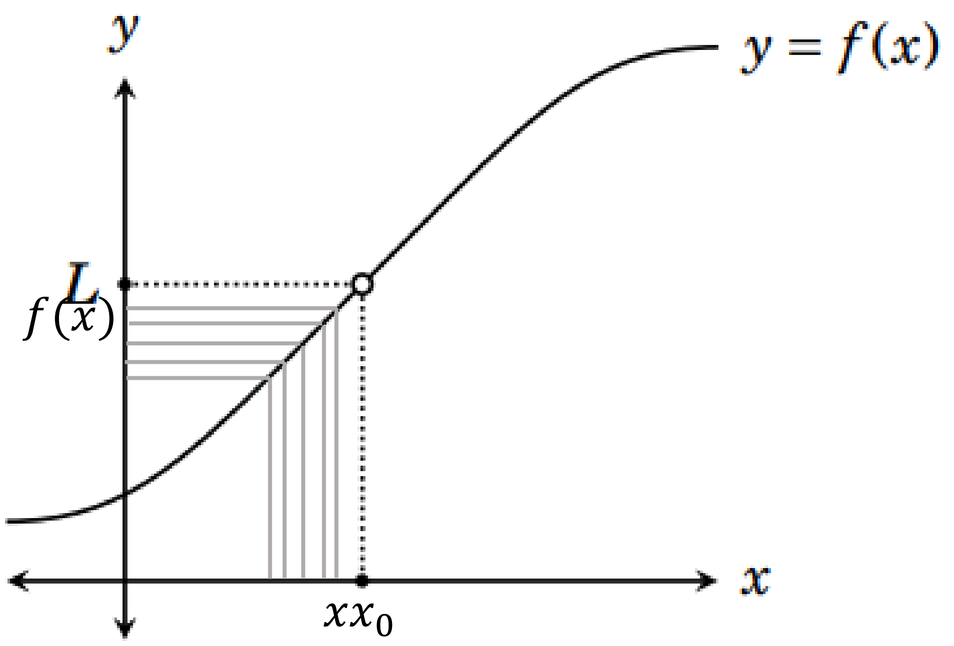


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

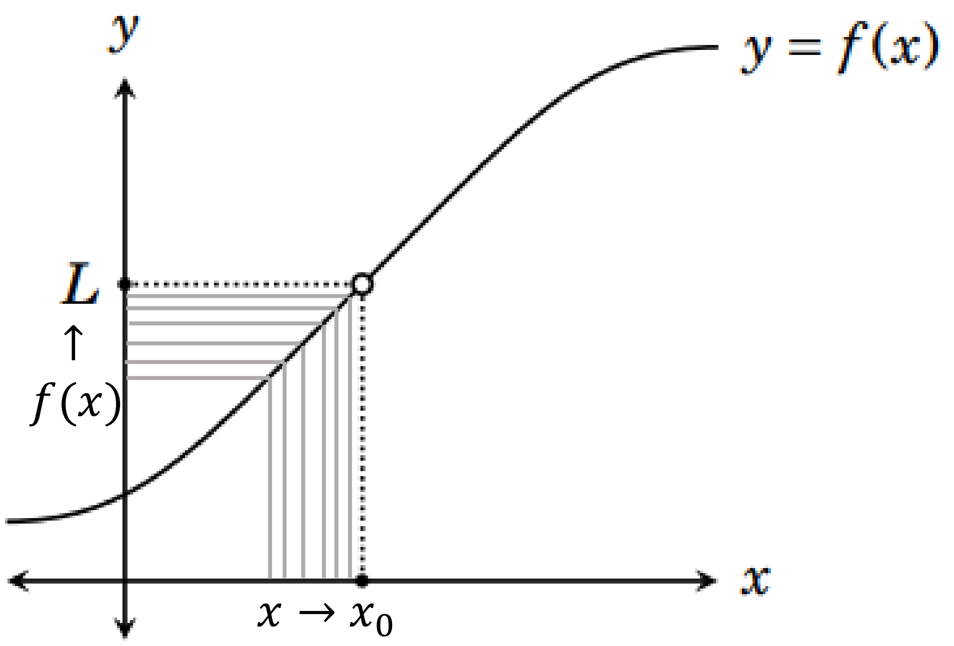


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

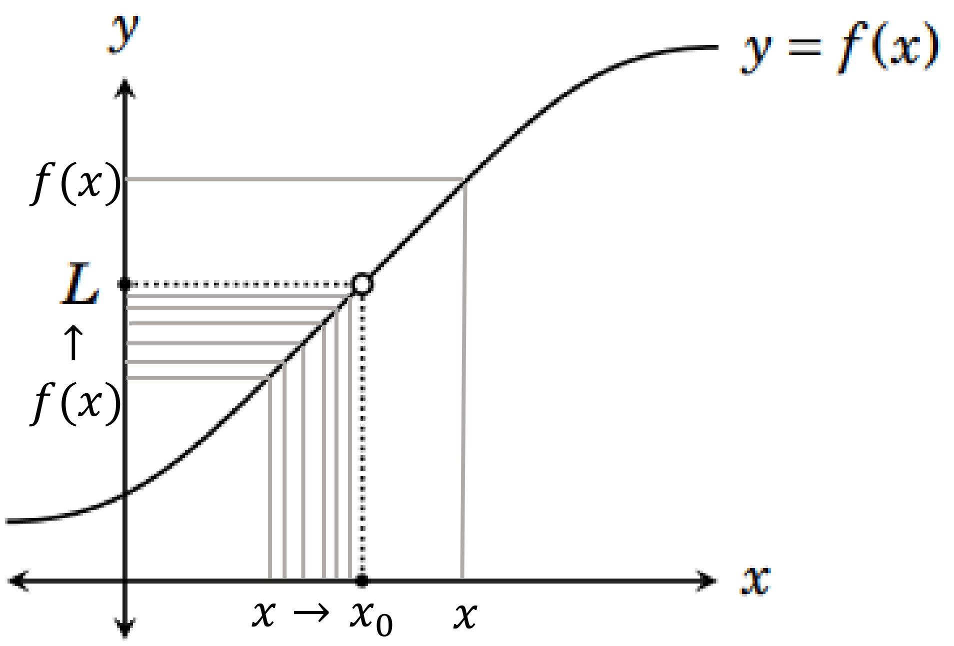


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

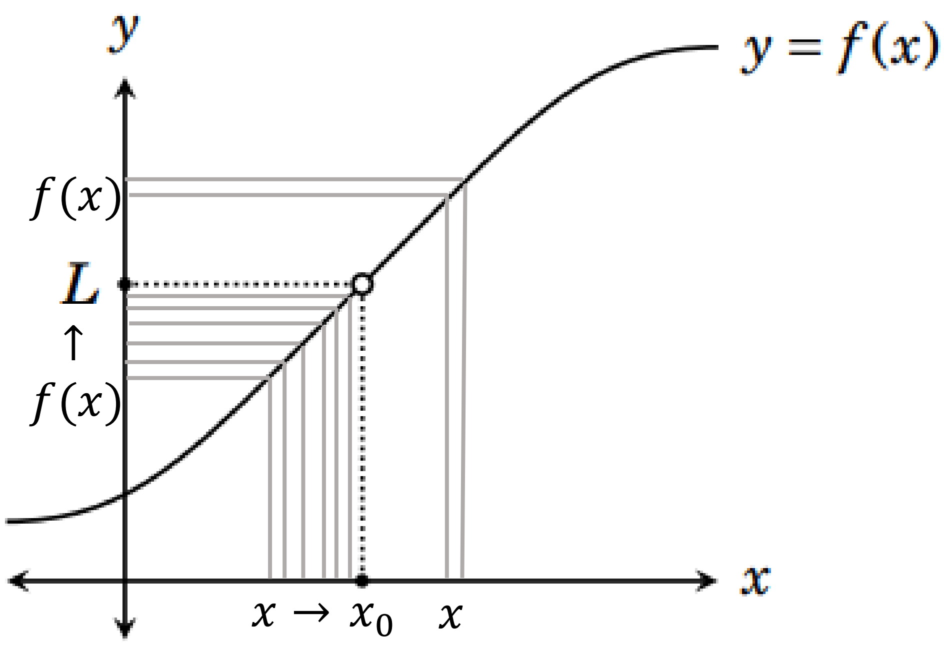


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

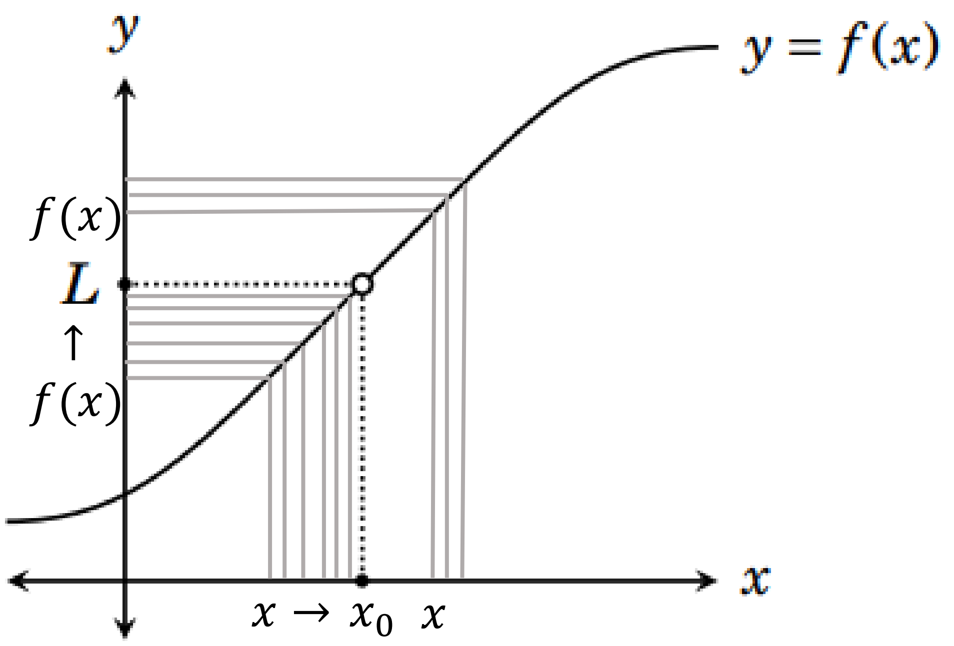


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

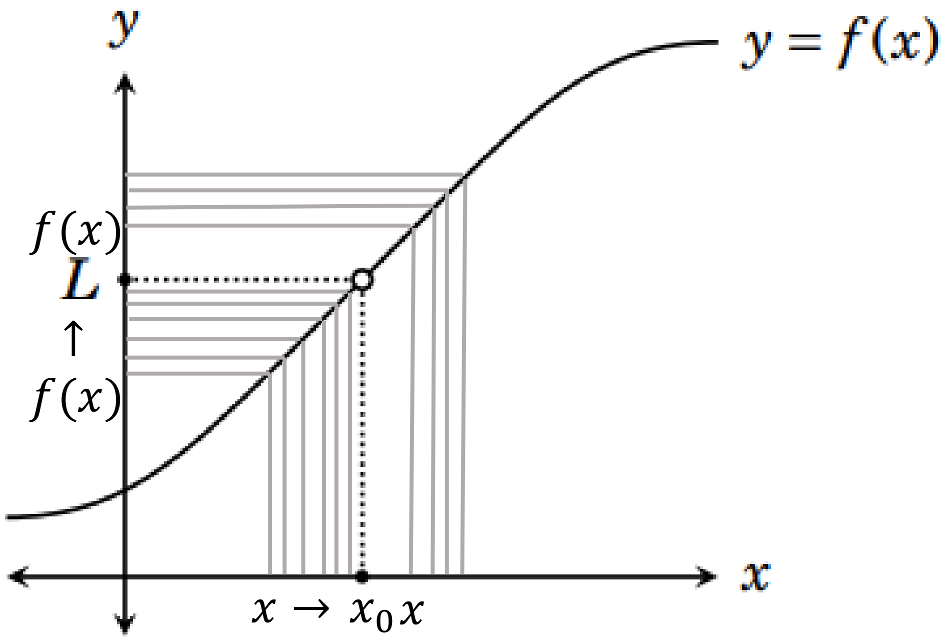


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

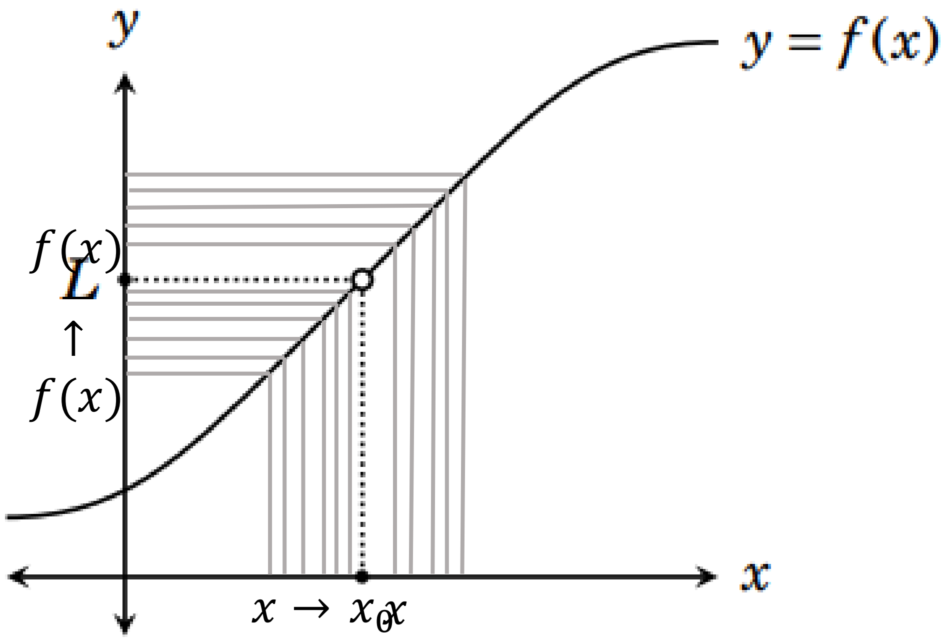


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

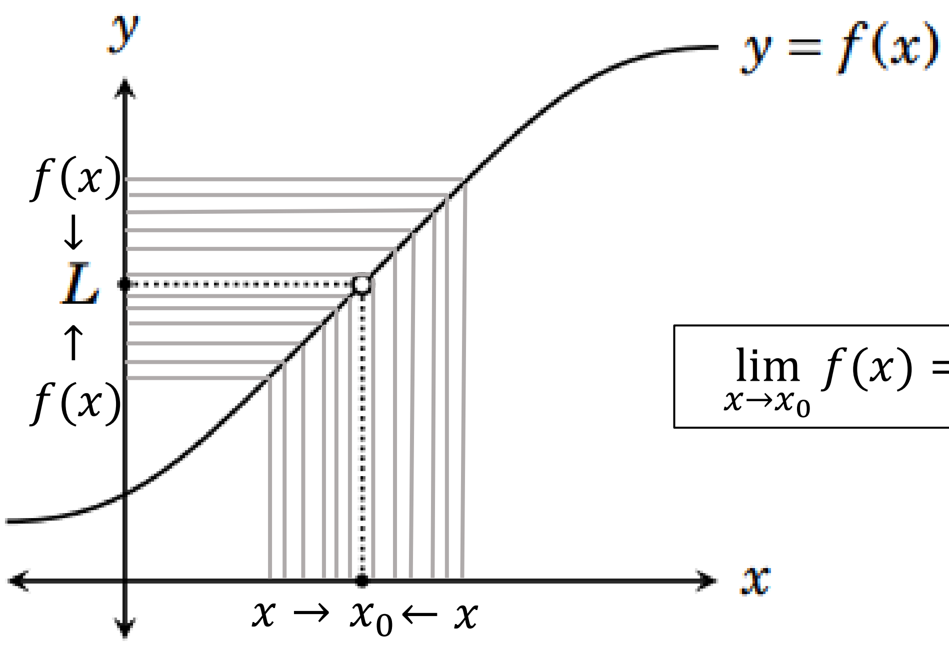


Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

- Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

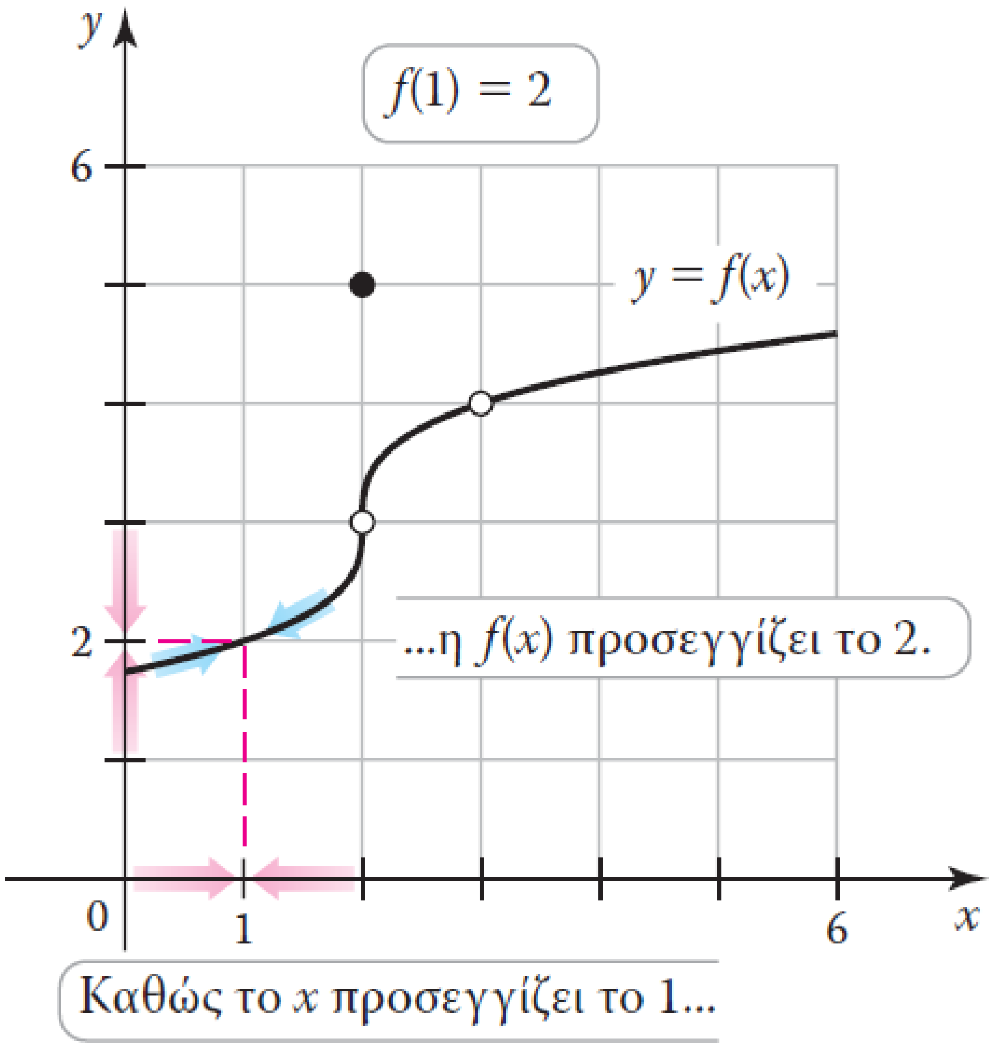
- Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο x_0 είναι το $L \in \mathbb{R}$ όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν τον αριθμό L, καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0. Τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



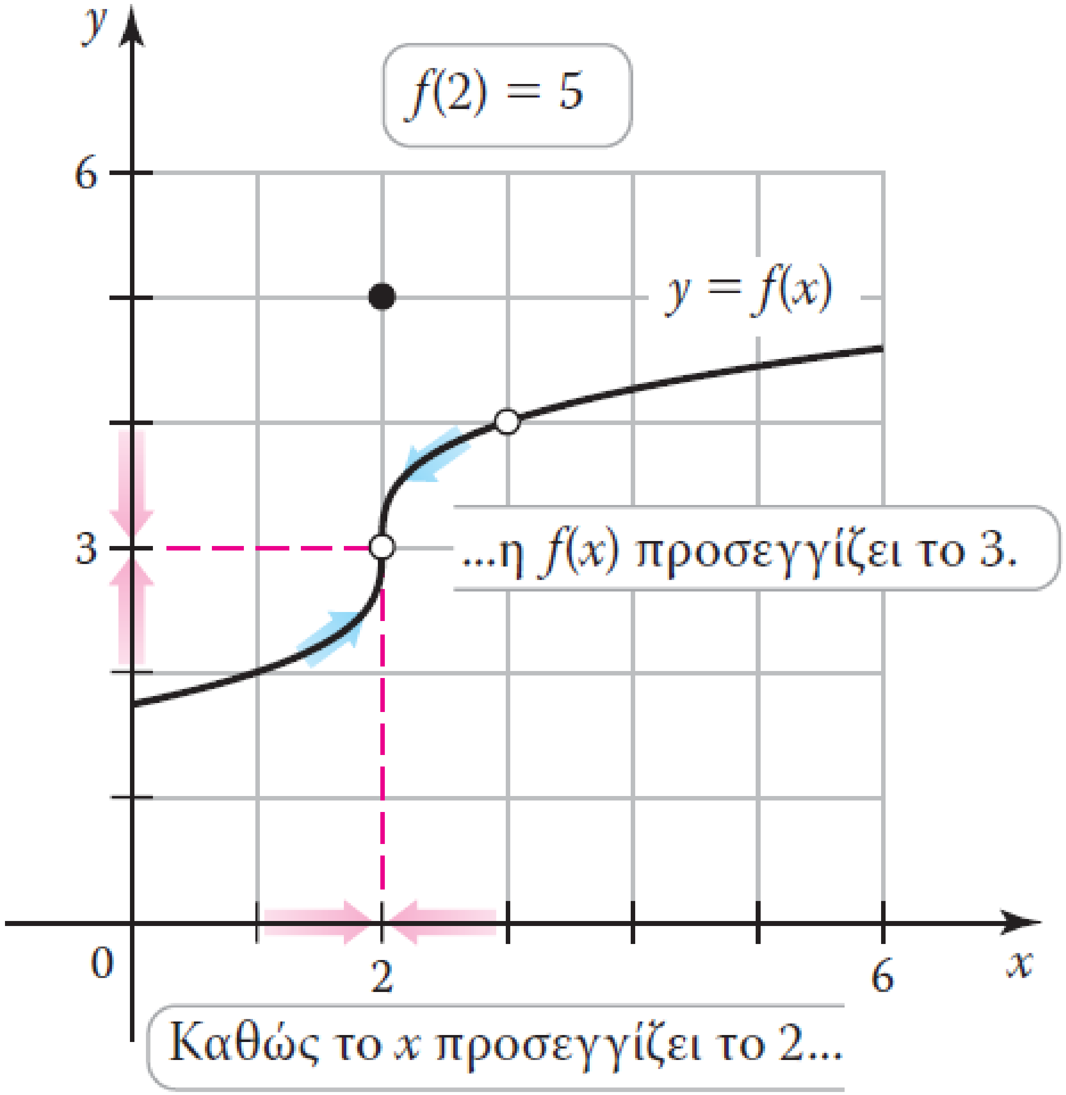
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο 1



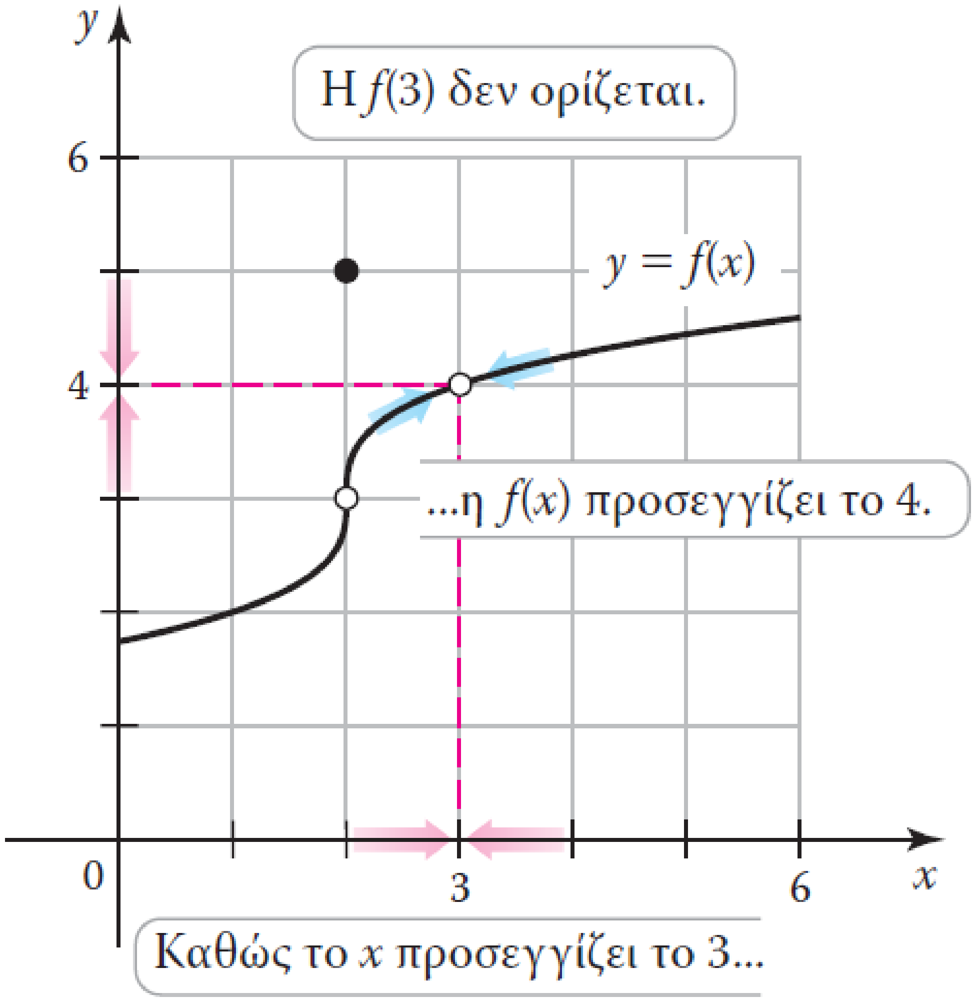
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο 2



$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

το όριο της $f(x)$ όταν το x τείνει στο 3



$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

Παράδειγμα

$a^2 - \beta^2 = (a+\beta)(a-\beta)$

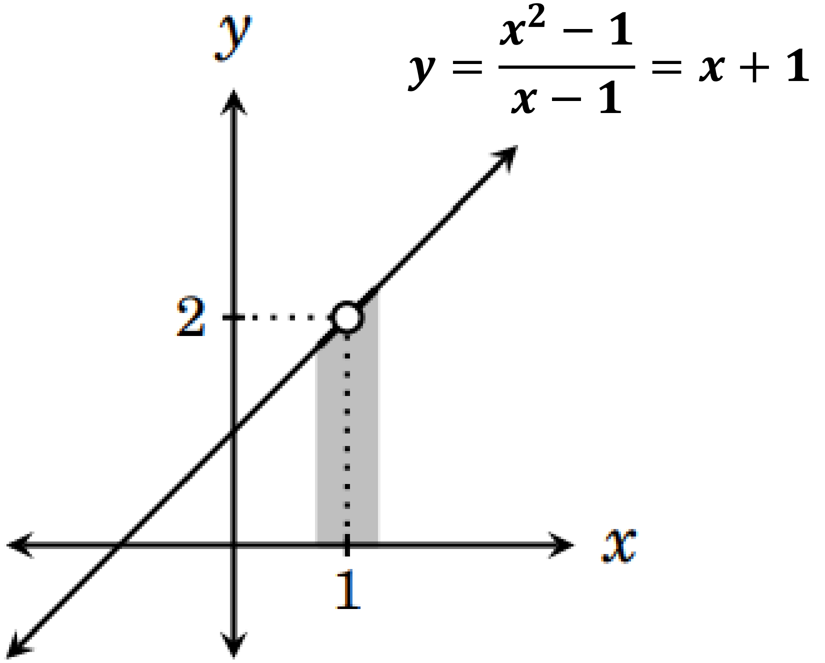
Βρείτε το όριο $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

Παρατηρούμε ότι $\frac{1^1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

απροσδιόριστη μορφή

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x+1$$

Προϋπόθεση: $(x-1) \neq 0$



Απάντηση: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$

Όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία ορίζεται σε μια περιοχή γύρω από το x_0.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Η τιμή της f μπορεί να είναι όσο κοντά επιθυμούμε στον αριθμό L, για x αρκετά κοντά στο x_0 , αλλά όχι ίσο με x_0.

Ορισμός (όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$)

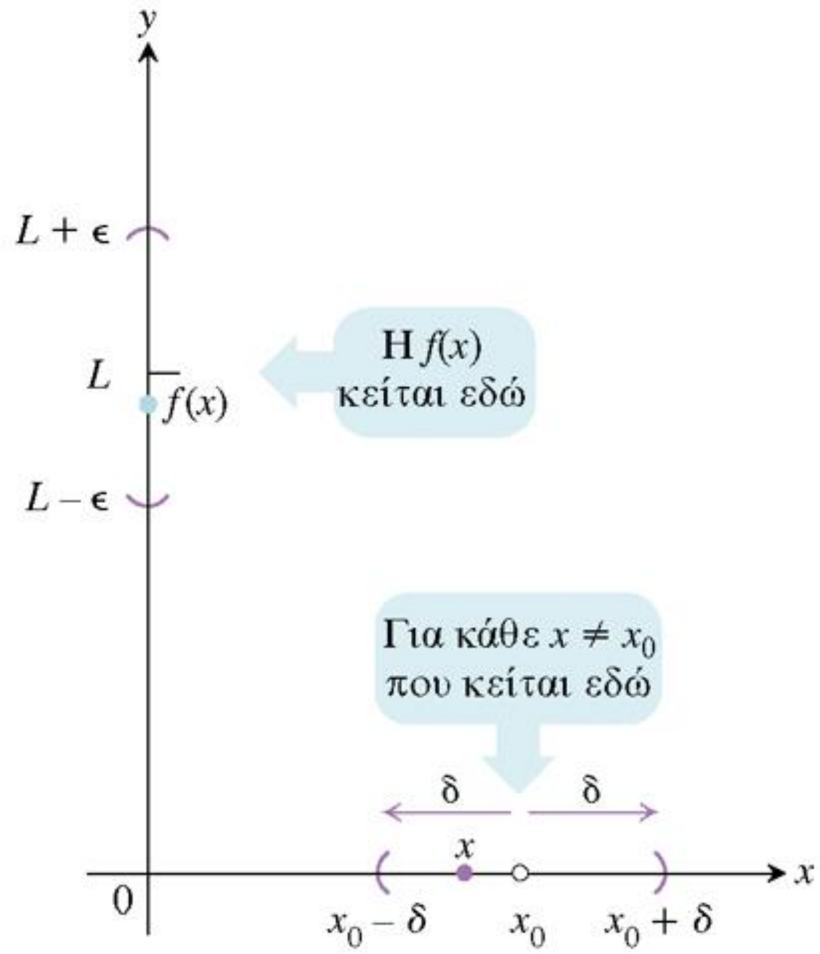
Όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0, είναι ο αριθμός $L \in \mathbb{R}$ εάν:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ (που εξαρτάται από το ε) τέτοιο ώστε, για κάθε x, η ανισότητα

$$\mathbf{0} < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\mathbf{0}| < \boldsymbol{\delta} \;\; \Rightarrow \;\; |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{L}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Τα όρια αφορούν τη μελέτη του άπειρου και του απειροελάχιστου

Η σχέση μεταξύ του δ και του ε στον ορισμό του ορίου



Παράδειγμα

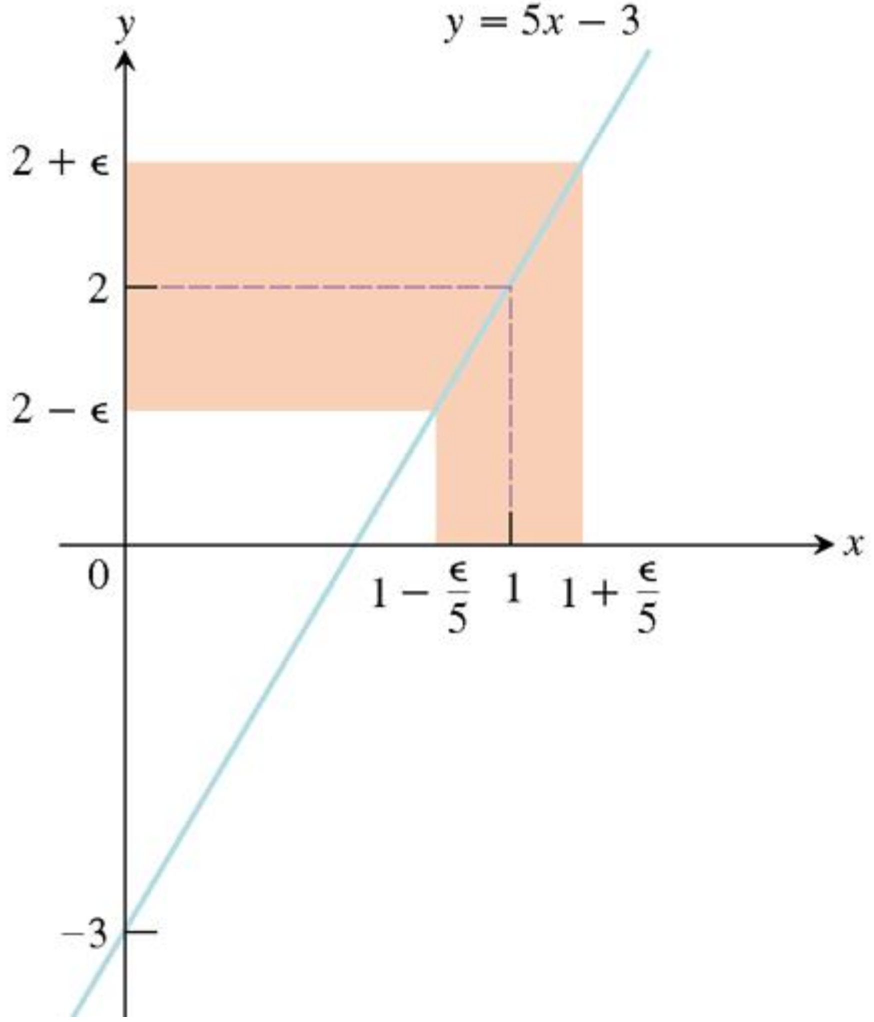
Αν $\boldsymbol{f(x) = 5x - 3}$, τότε ο περιορισμός $\boldsymbol{0 < |x - 1| < \varepsilon/5}$

εγγυάται ότι

$$\boldsymbol{|f(x) - 2| < \varepsilon}$$

- Επομένως

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$



Ασκήσεις

1. Επαληθεύσετε ότι το $\lim_{x \to x_0} x = x_0$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου
2. Επαληθεύσετε ότι το $\lim_{x \to x_0} c = c$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου

Λύση: 1. Νδο $\boxed{\lim_{x \to x_0} (x) = x_0}$

$f(x) = x$

$L = x_0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \quad \underline{0 < |x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$|f(x) - L| = \underline{|x - x_0| < \varepsilon}$

Αρκεί να επιλέξω $\delta = \varepsilon$

αν $0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

Πλευρικά όρια

Δεξιό όριο $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση που ορίζεται σε μια δεξιά περιοχή του x_0, για παράδειγμα στο (x_0, β)

Όριο της $f(x)$ καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από δεξιά, είναι ο αριθμός $l \in \mathbb{R}$ εάν:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με

$$x_0 < x < x_0 + \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

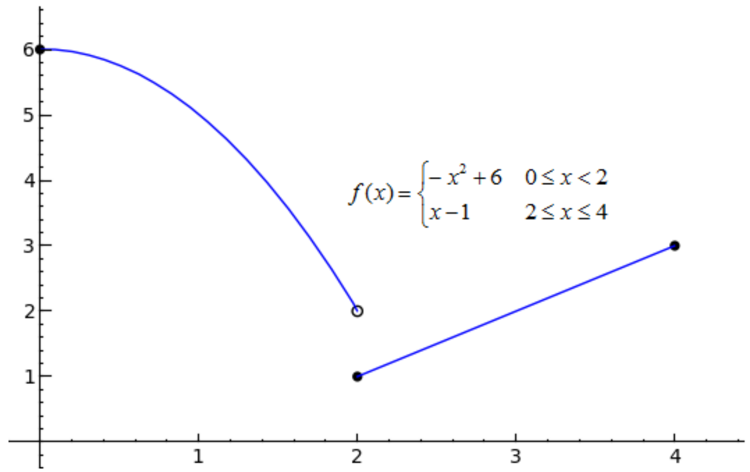
Αριστερό όριο $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση που ορίζεται σε μια αριστερή περιοχή του x_0, για παράδειγμα στο (α, x_0)

Όριο της $f(x)$ καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από αριστερά, είναι ο αριθμός $l \in \mathbb{R}$ εάν:

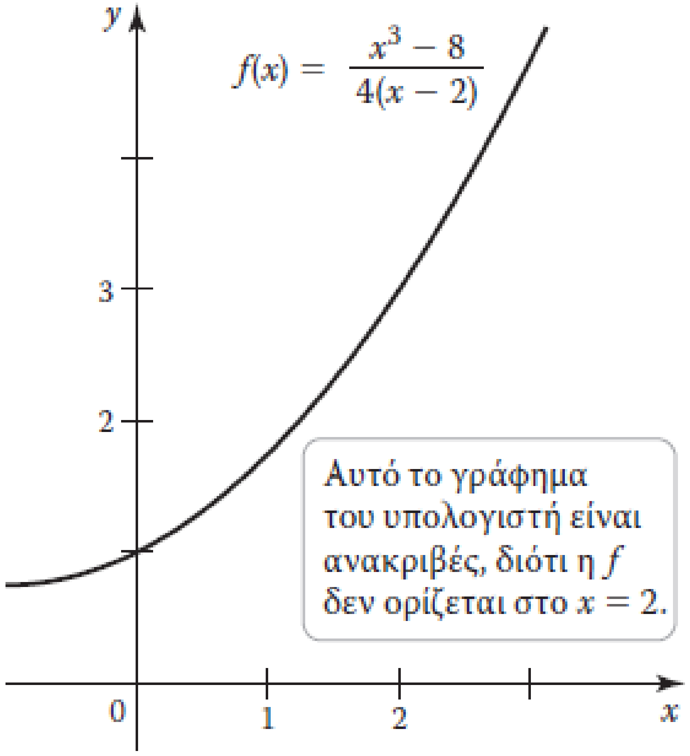
Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x με

$$x_0 - \delta < x < x_0 \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon$$

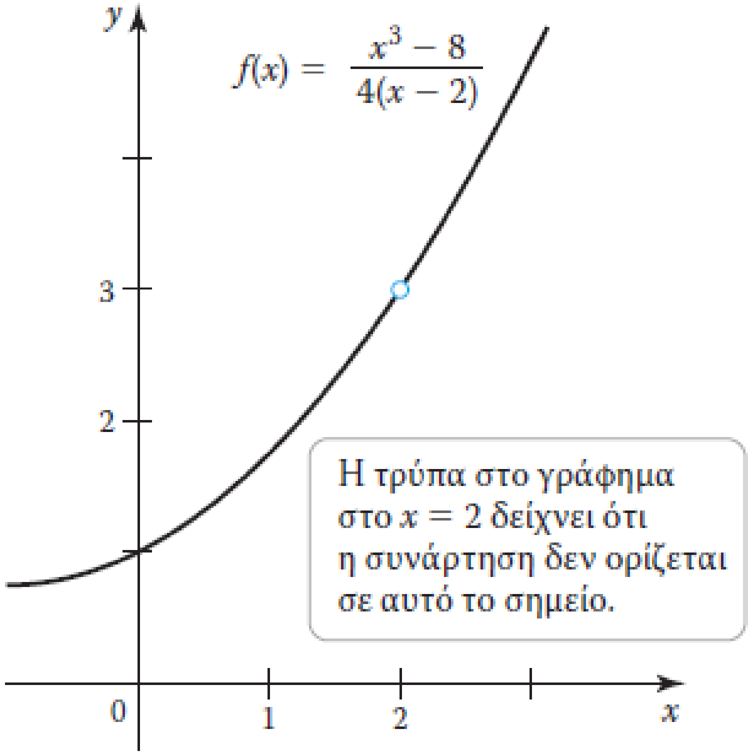


http://www.sagemath.org/calctut/onesided.html

Παράδειγμα: Πλευρικά όρια (1/3)

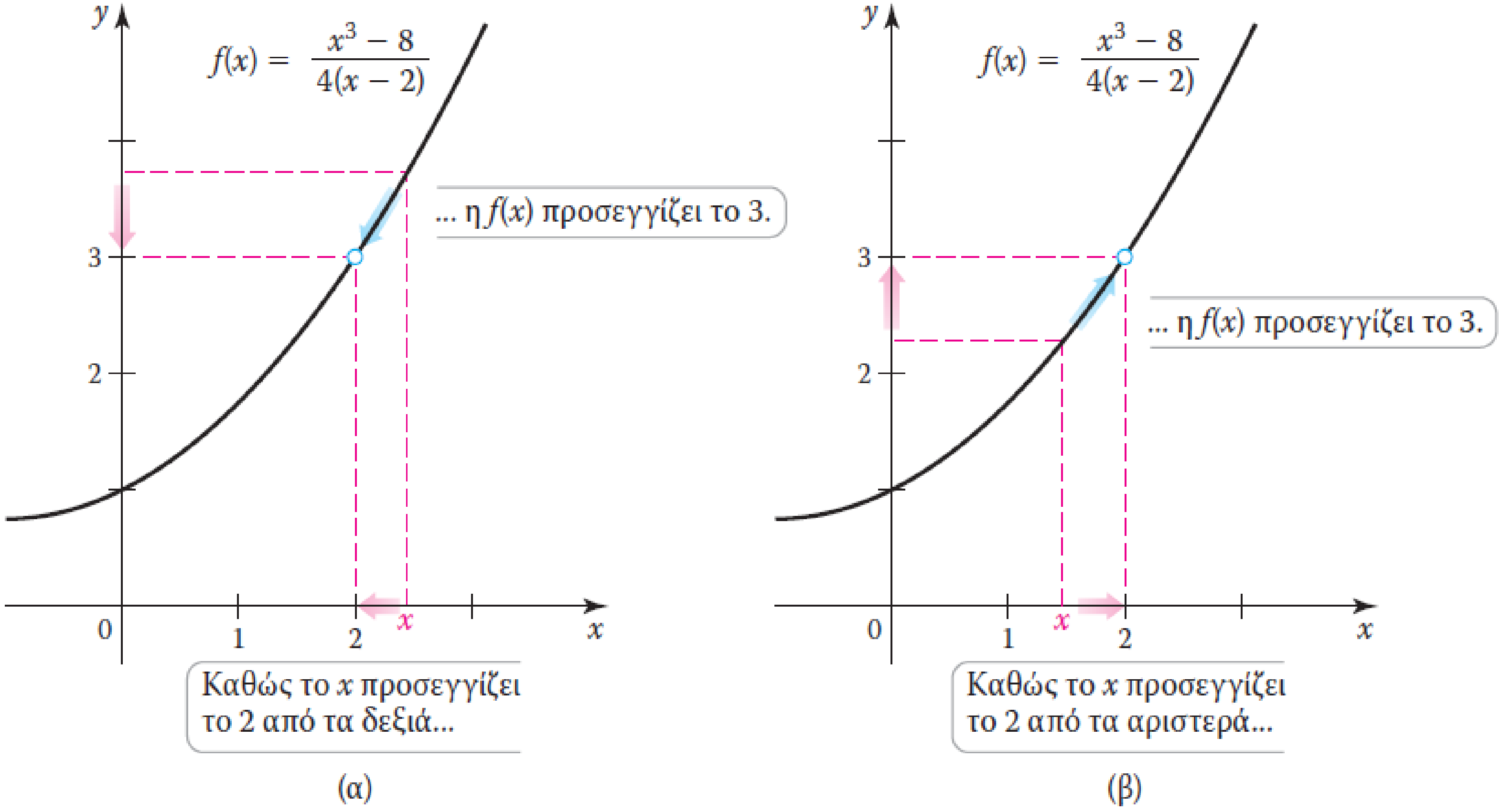


(α)



(β)

Παράδειγμα: Πλευρικά όρια (2/3)



Παράδειγμα: Πλευρικά όρια (3/3)

Πίνακας 2.3

				$\longrightarrow$ 2 $\longleftarrow$				
x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{4(x - 2)}$	2.8525	2.985025	2.99850025	2.99985000	3.00015000	3.00150025	3.015025	3.1525

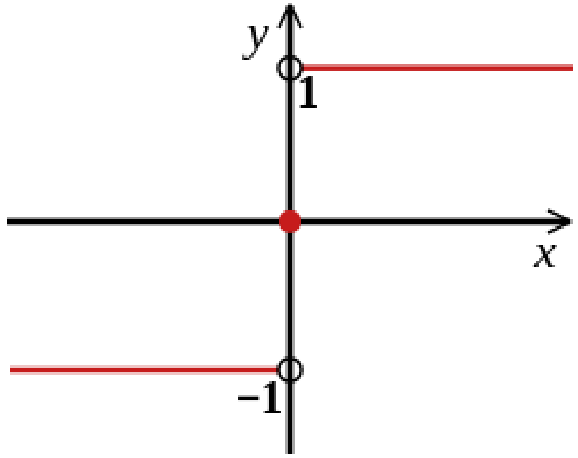
Πλευρικά όρια στο x_0 και όριο στο x_0

Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη σε μια περιοχή του σημείου x_0, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Συνάρτηση πρόσημου (sgn)

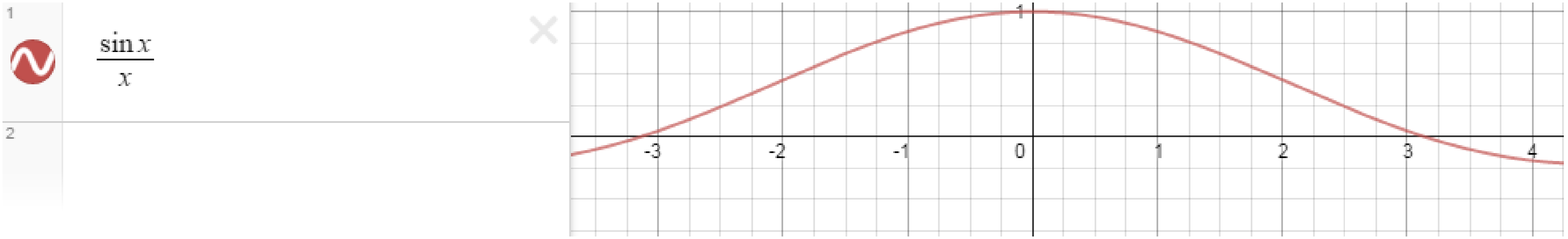
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



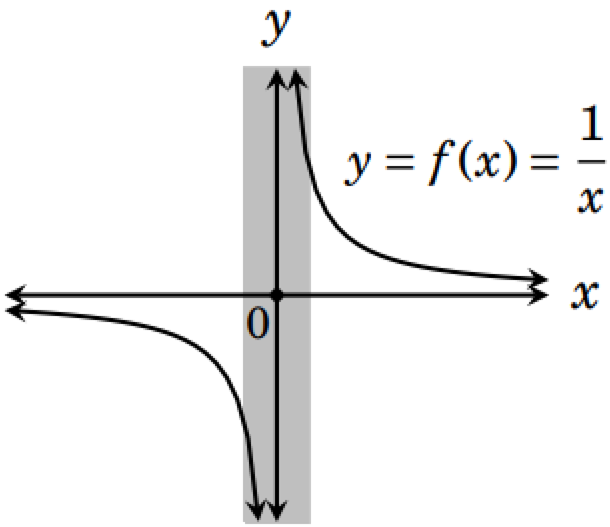
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Εύρεση ορίου με γράφημα

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$



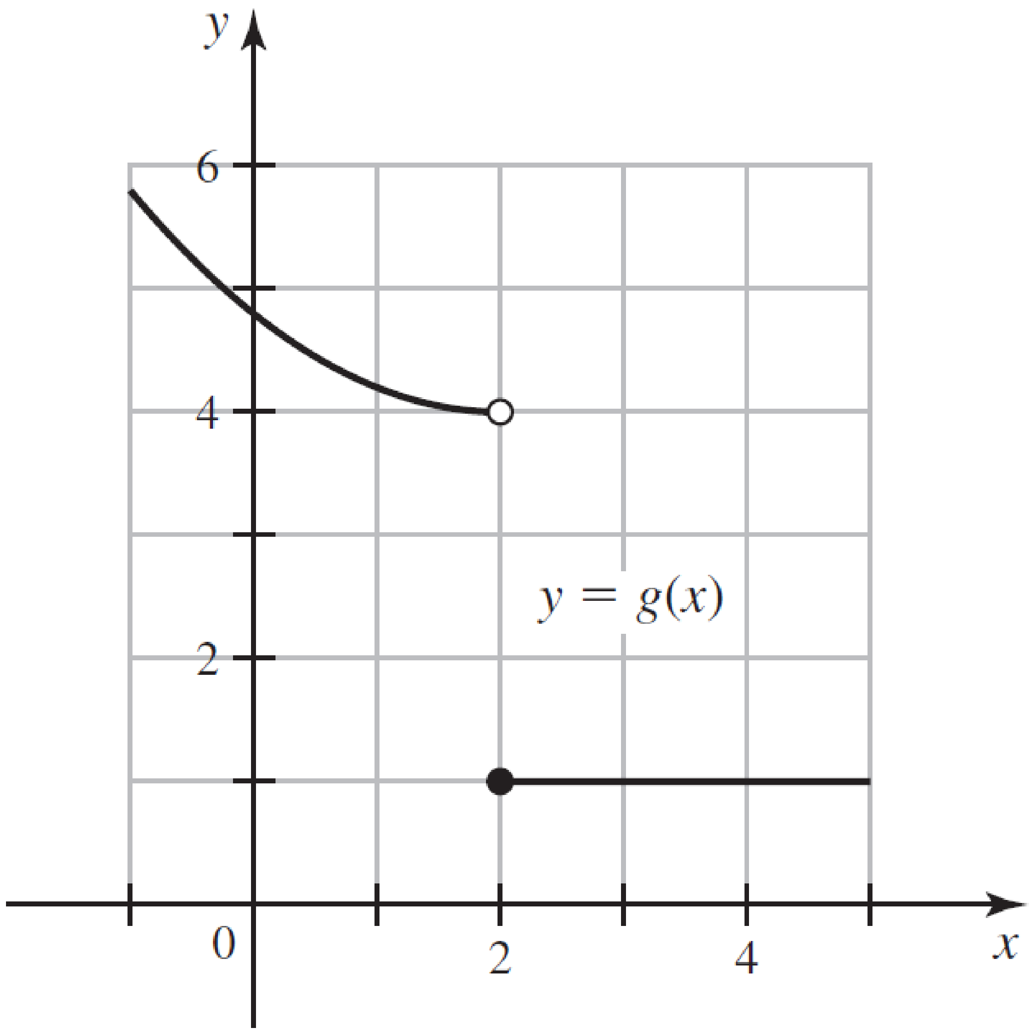
- $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$, δεν υπάρχει



Παράδειγμα: Μια συνάρτηση με άλμα

Από το γράφημα της g βρείτε τα όρια

$\lim_{x \to 2^-} g(x)$, $\lim_{x \to 2^+} g(x)$, $\lim_{x \to 2} g(x)$



Παράδειγμα: Μια συνάρτηση με άλμα

Από το γράφημα της g βρείτε τα όρια

$\lim_{x \to 2^-} g(x)$, $\lim_{x \to 2^+} g(x)$, $\lim_{x \to 2} g(x)$

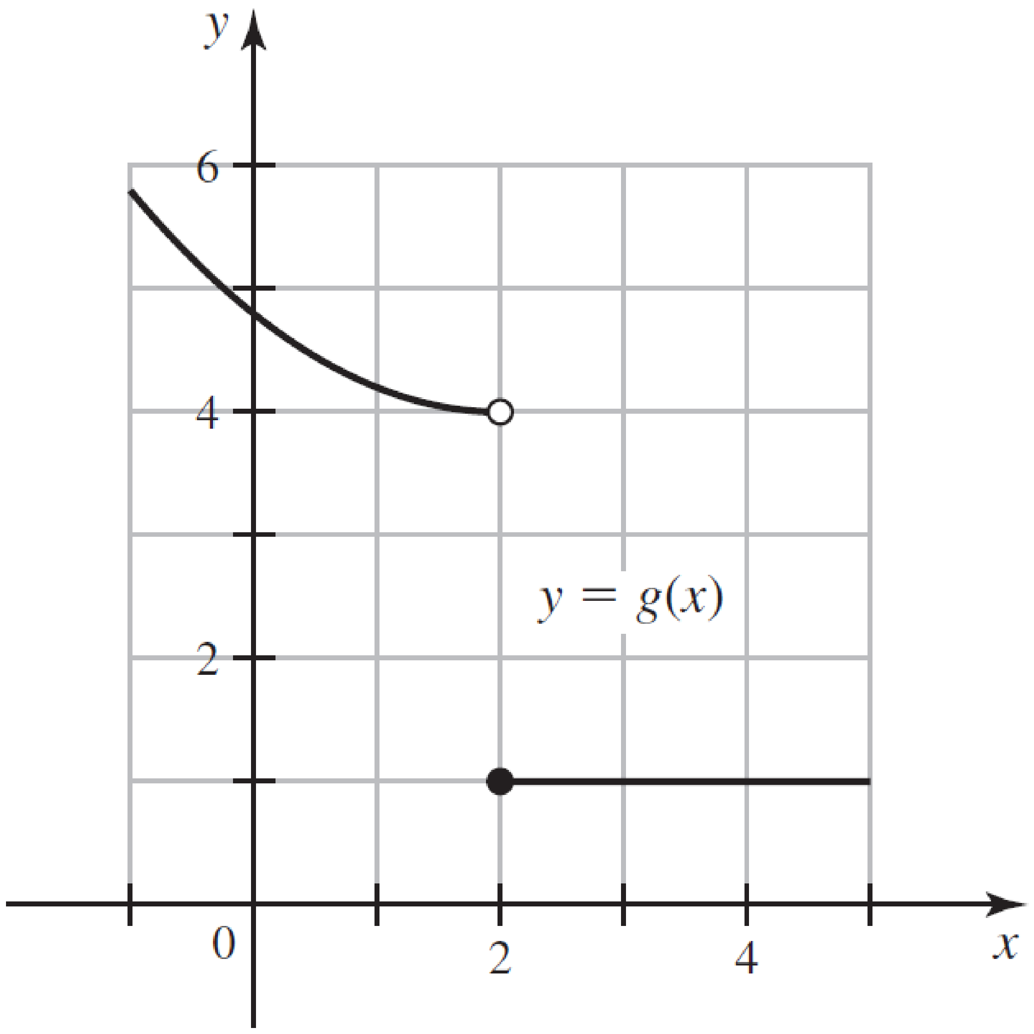
<u>Λύση</u>:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 4,$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

Αφού $\lim_{x \to 2^-} g(x) \neq \lim_{x \to 2^+} g(x)$, το

$\lim_{x \to 2} g(x)$ δεν υπάρχει



Παράδειγμα: Μια παράξενη συμπεριφορά (1/2)

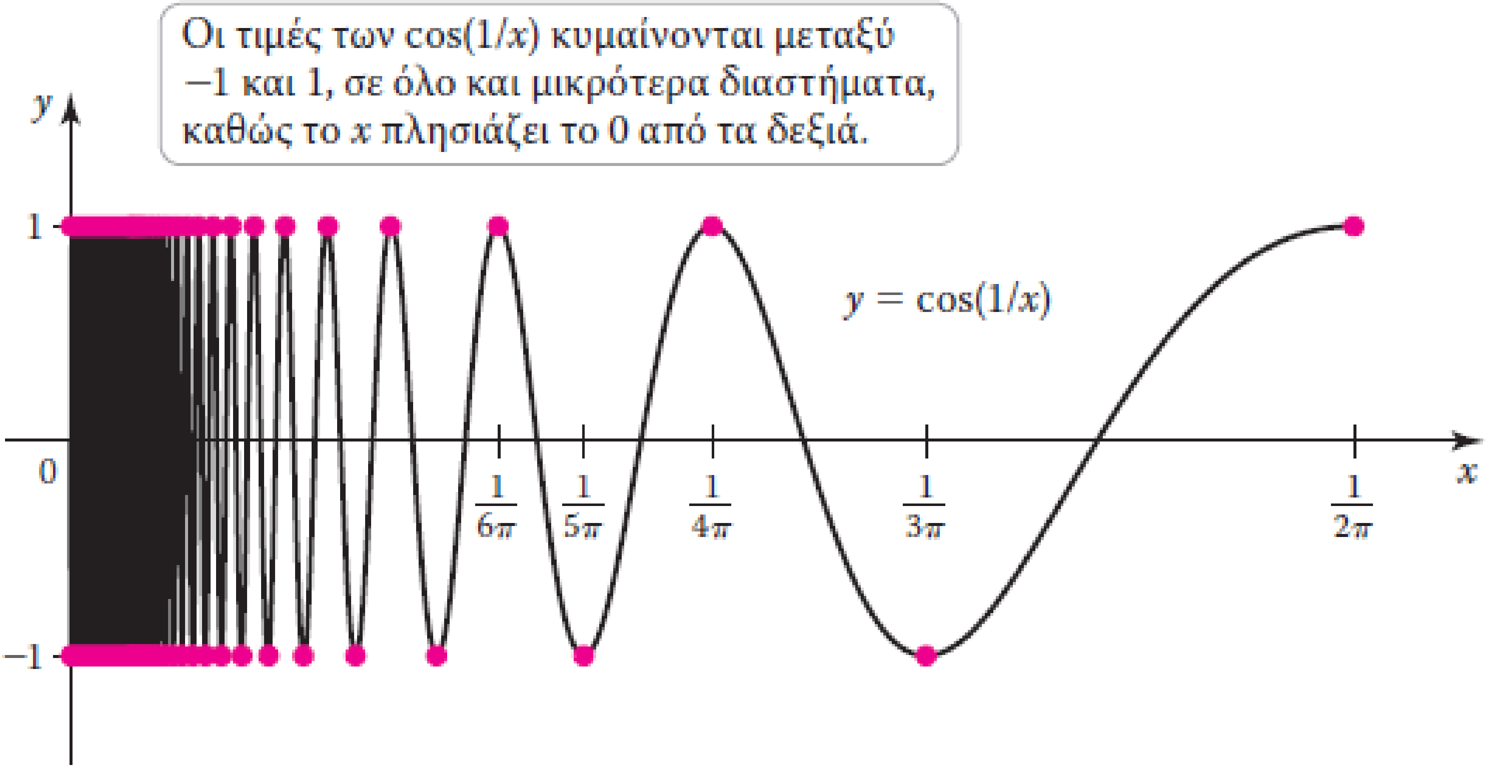
Βρείτε το $\lim_{x \to 0} cos(1/x)$

Πίνακας 2.4

x	$\cos(1/x)$
0.001	0.56238
0.0001	−0.95216
0.00001	−0.99936
0.000001	0.93675
0.0000001	−0.90727
0.00000001	−0.36338

Θα μπορούσαμε *λανθασμένα* να συμπεράνουμε ότι το $\cos(1/x)$ προσεγγίζει το -1 καθώς το x προσεγγίζει το 0 από τα δεξιά.

Παράδειγμα: Μια παράξενη συμπεριφορά (2/2)



Τεχνικές υπολογισμού ορίων

Όρια και πράξεις

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 τότε:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} \big(kf(x)\big) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) * g(x)\big) = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right) * \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x)\right)$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ εφόσον $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^n$

ΘΕΩΡΗΜΑ **Όρια γραμμικών συναρτήσεων**

Εάν a, b και m είναι πραγματικοί αριθμοί, για τις γραμμικές συναρτήσεις $f(x) = mx + b$, τότε

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = ma + b.$$

Παράδειγμα:

$$\lim_{x \to -1} (2x + 5) = 2(-1) + 5 = -2 + 5 = 3$$

ΘΕΩΡΗΜΑ **Όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων**

Υποθέτουμε ότι p και q είναι πολυώνυμα και a είναι μια σταθερά.

α. Πολυωνυμικές συναρτήσεις: $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$

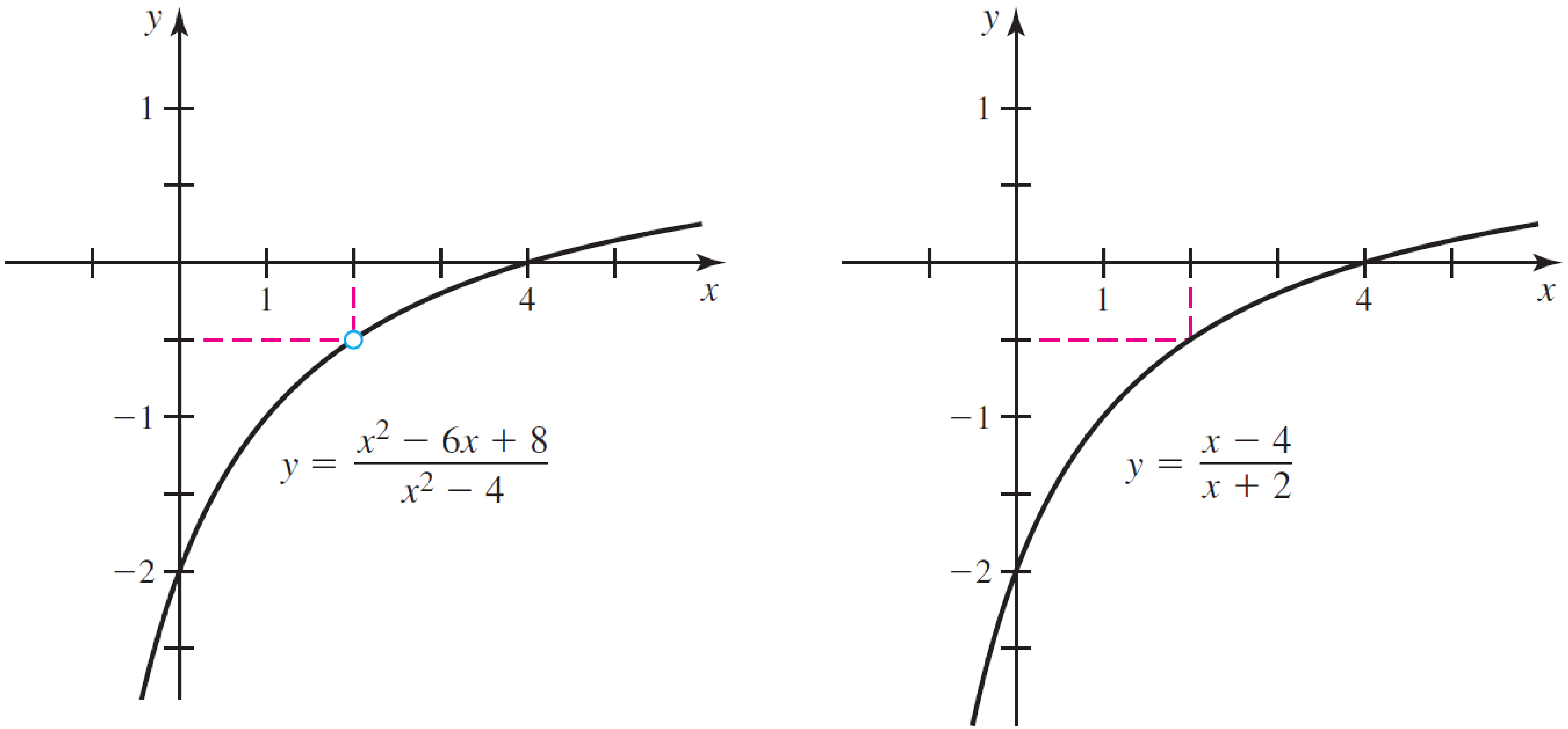
β. Ρητές συναρτήσεις: $\lim_{x \to a} \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$, υπό την προϋπόθεση ότι $q(a) \neq 0$

Παραδείγματα

- $\lim_{x \to 3}(4x^2 - 9x + 1) = 4 * 3^2 - 9 * 3 + 1$=10

- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$=$\frac{2^2+2*2+4}{2+2}$=$\frac{12}{4} = 3$

Άλλες τεχνικές: Παραγοντοποίηση και απλοποίηση



$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)}{(x+2)}=\frac{2-4}{2+2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Άλλες τεχνικές: Χρήση συζυγών παραστάσεων

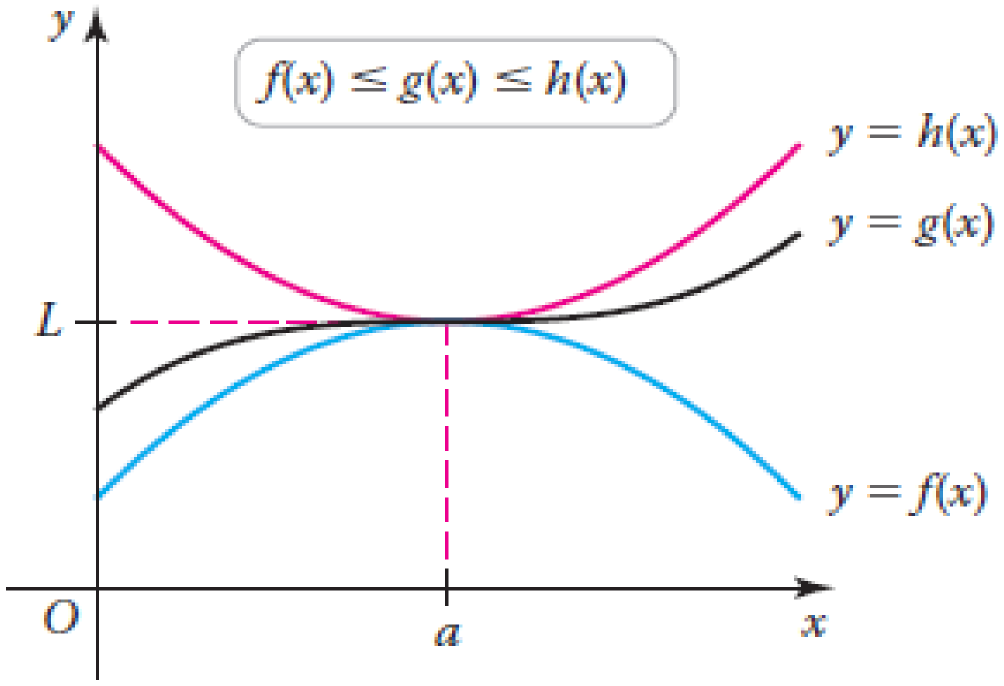
- Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x+\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{(\sqrt{x}+1)} \text{ για } x \neq 1$$

- Άρα

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x \to 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$$

Θεώρημα Παρεμβολής



Θεώρημα της παρεμβολής:
Καθώς $x \to a$, $h(x) \to L$ και $f(x) \to L$.
Συνεπώς, $g(x) \to L$.

ΘΕΩΡΗΜΑ **Θεώρημα της παρεμβολής**

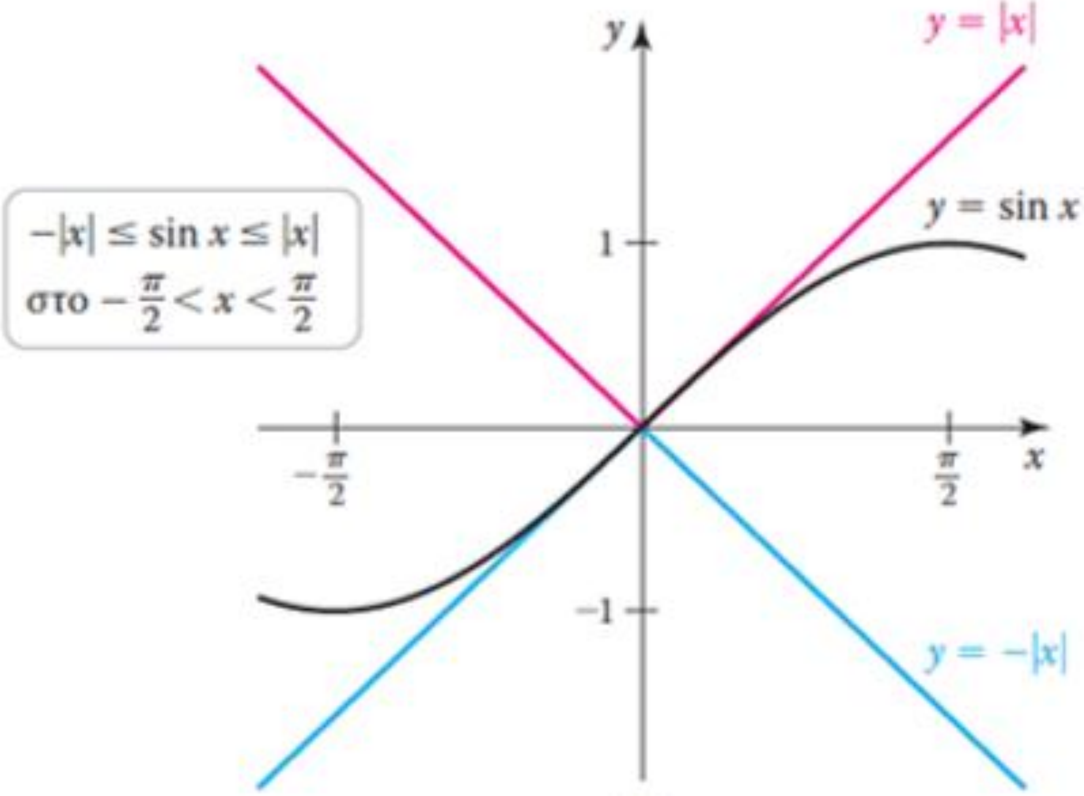
Υποθέτουμε οτι οι συναρτήσεις f, g και h ικανοποιούν τη σχέση

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, για όλες τις τιμές του x κοντά στο a, εκτός ίσως από το a.

Εάν $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, τότε $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Όριο ημιτόνου

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$



(α)

Όριο ημιτόνου

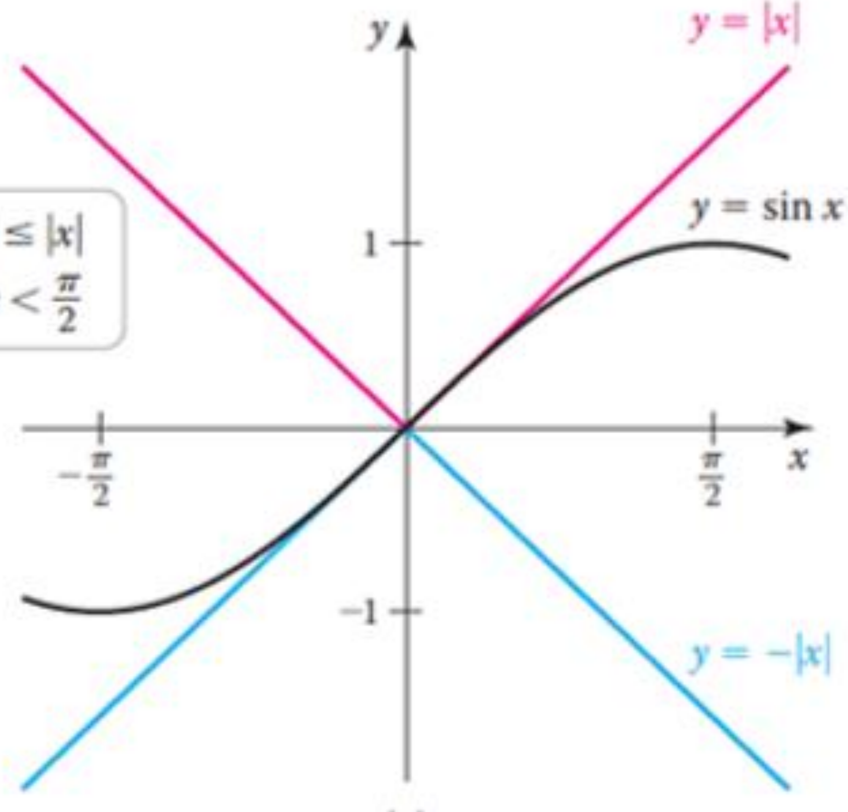
Να αποδείξετε ότι $\boxed{\lim_{x \to 0} \sin x = 0}$

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} |x| = 0 \\ &\lim_{x \to 0} (-|x|) = 0 \end{aligned}\right\} \text{θ. παρ}$$

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

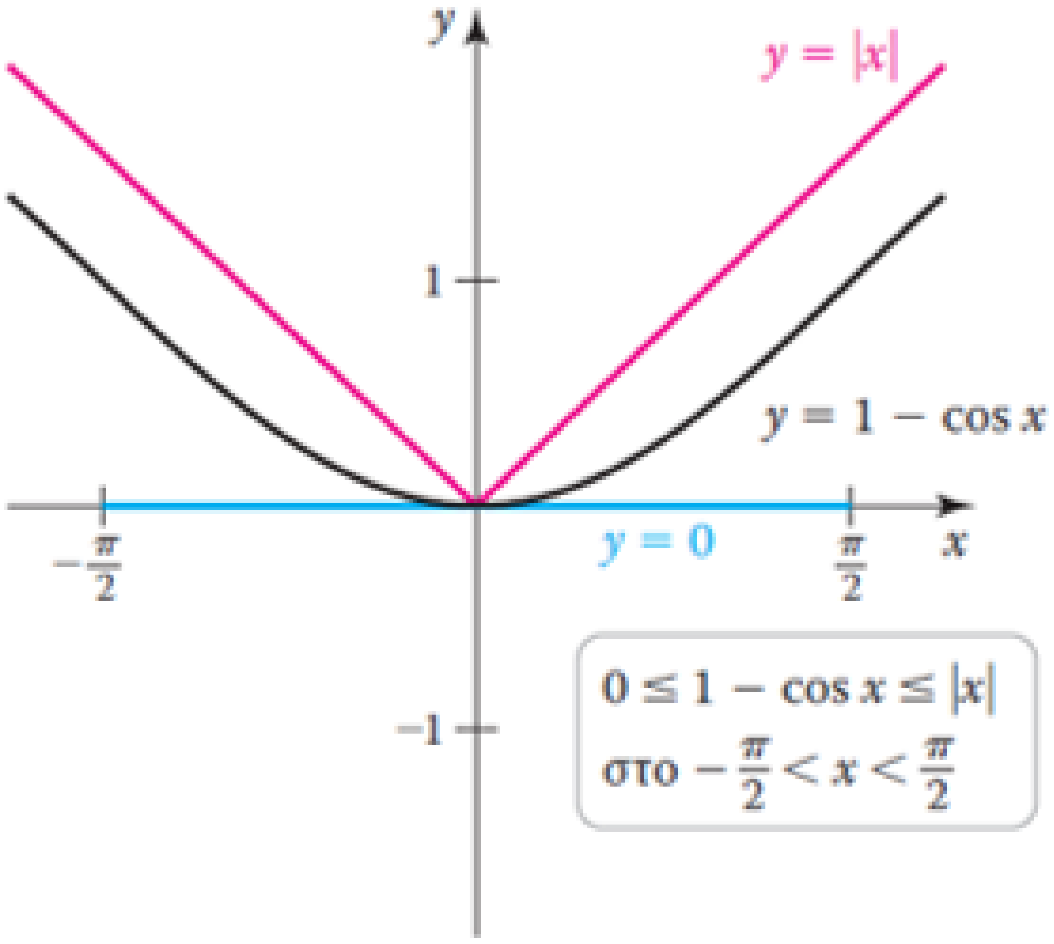
$-|x| \leq \sin x \leq |x|$
στο $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



(α)

Όριο συνημιτόνου

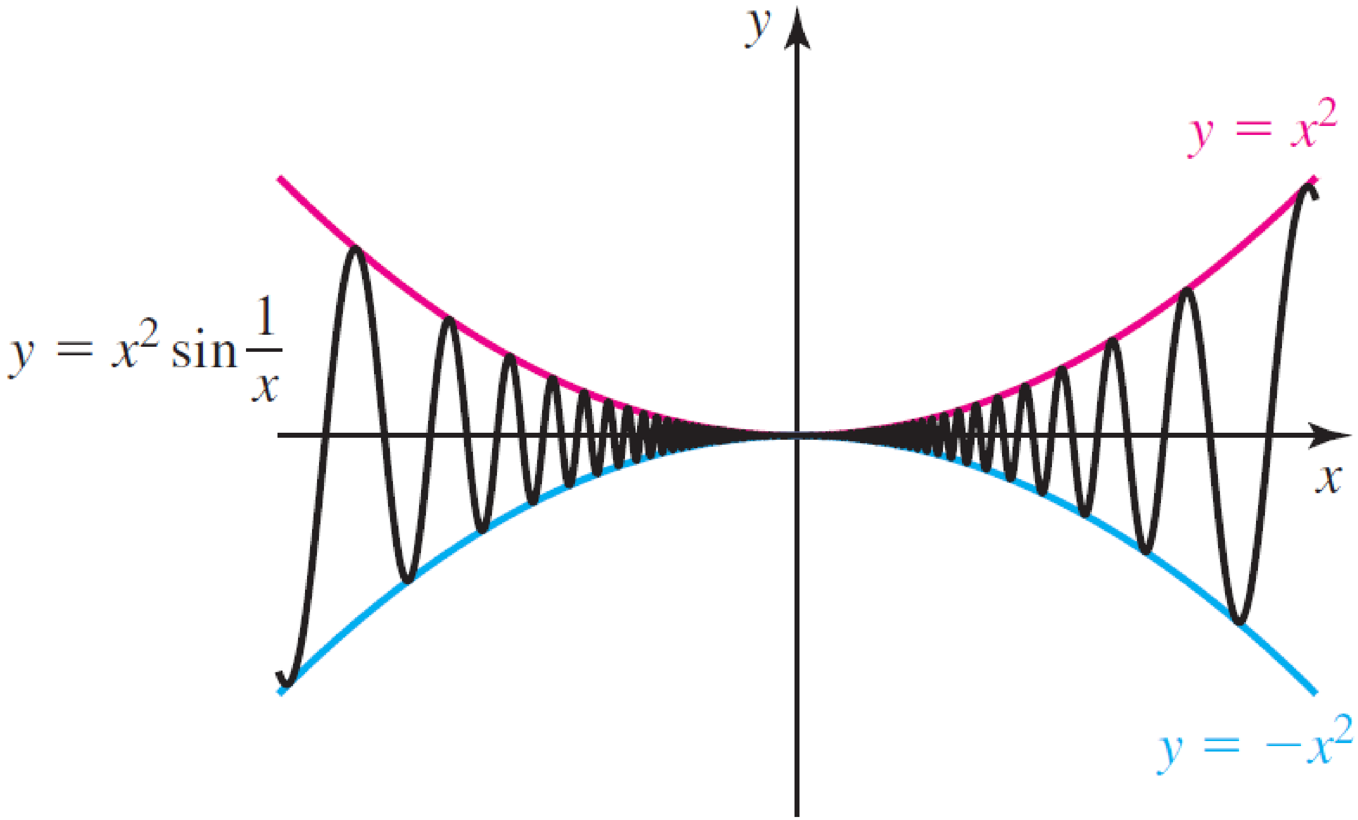
Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$



Εφαρμογή του θεωρήματος παρεμβολής

Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



Εφαρμογή του θεωρήματος παρεμβολής

<u>Απόδειξη</u>:

Γνωρίζουμε ότι $-1 \leq \sin x \leq 1, \;\; \forall x$

Άρα

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Από το θεώρημα παρεμβολής, αφού $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0}(-x^2) = 0$ τότε

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Άσκηση

- Ποιες από τις επόμενες σχέσεις ισχύουν για τη συνάρτηση *f*;

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

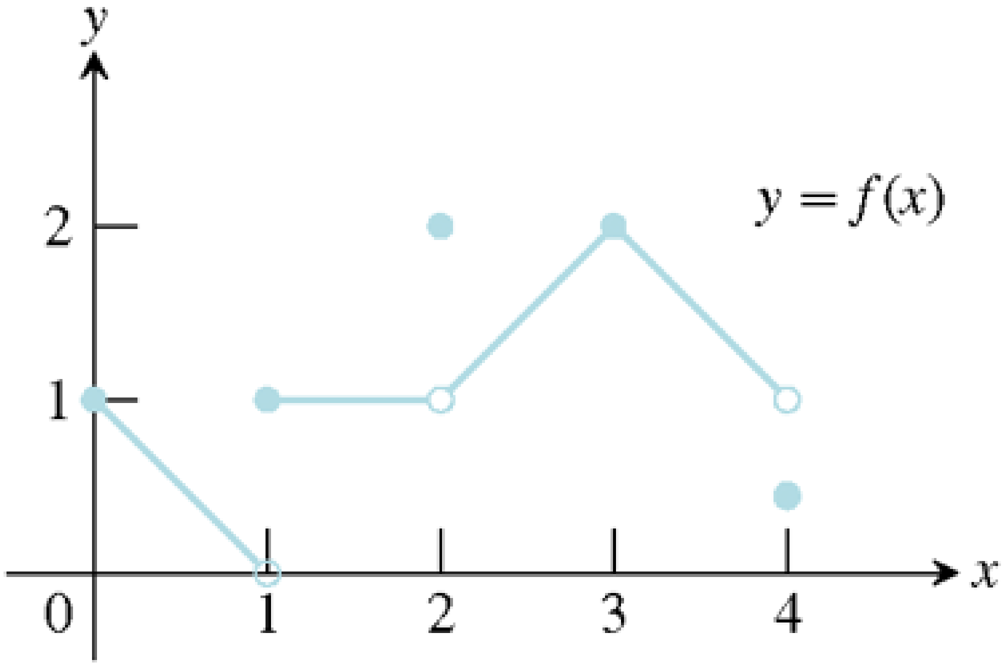
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) \text{ δεν υπάρχει}$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 0.5$$



Άσκηση

- Ποιες από τις επόμενες σχέσεις ισχύουν για τη συνάρτηση *f*;

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$ αληθής

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$ λάθος

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$ λάθος

=1

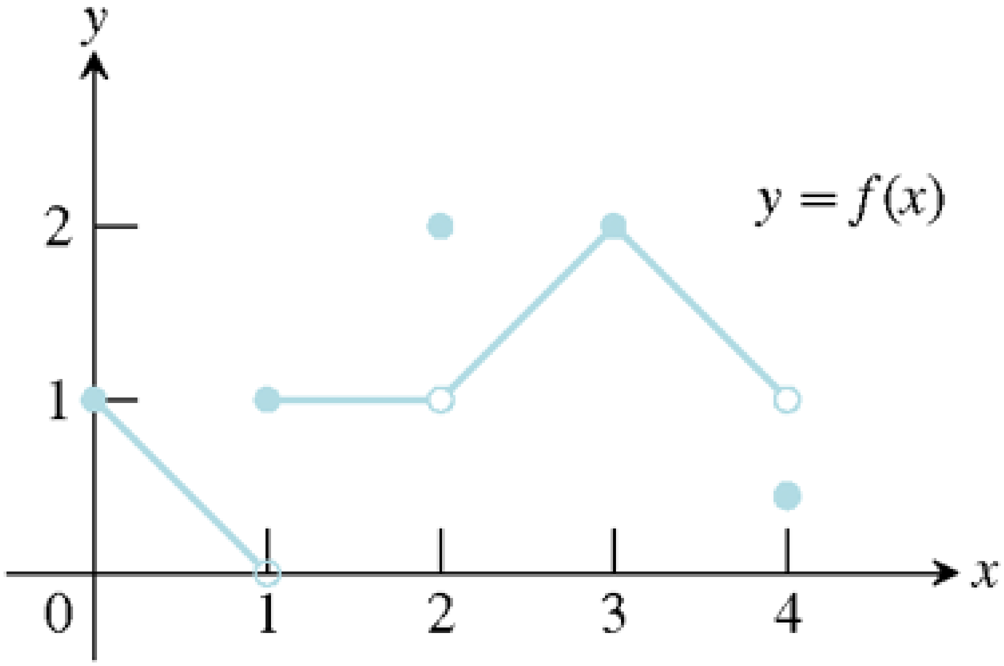
$$\lim_{x\to 2} f(x)$$ δεν υπάρχει λάθος

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$$ =2 σωστό

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 0.5$$ λάθος

||

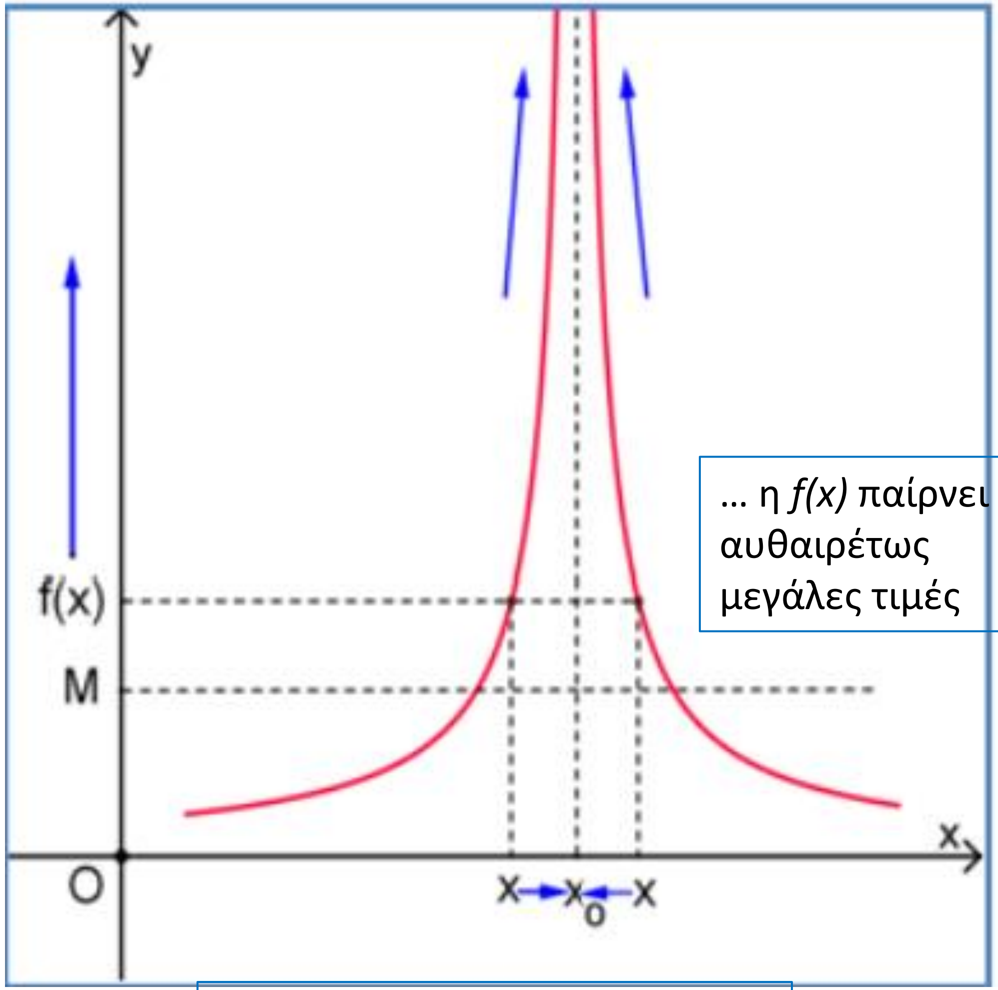
1



Άπειρα Όρια

Μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

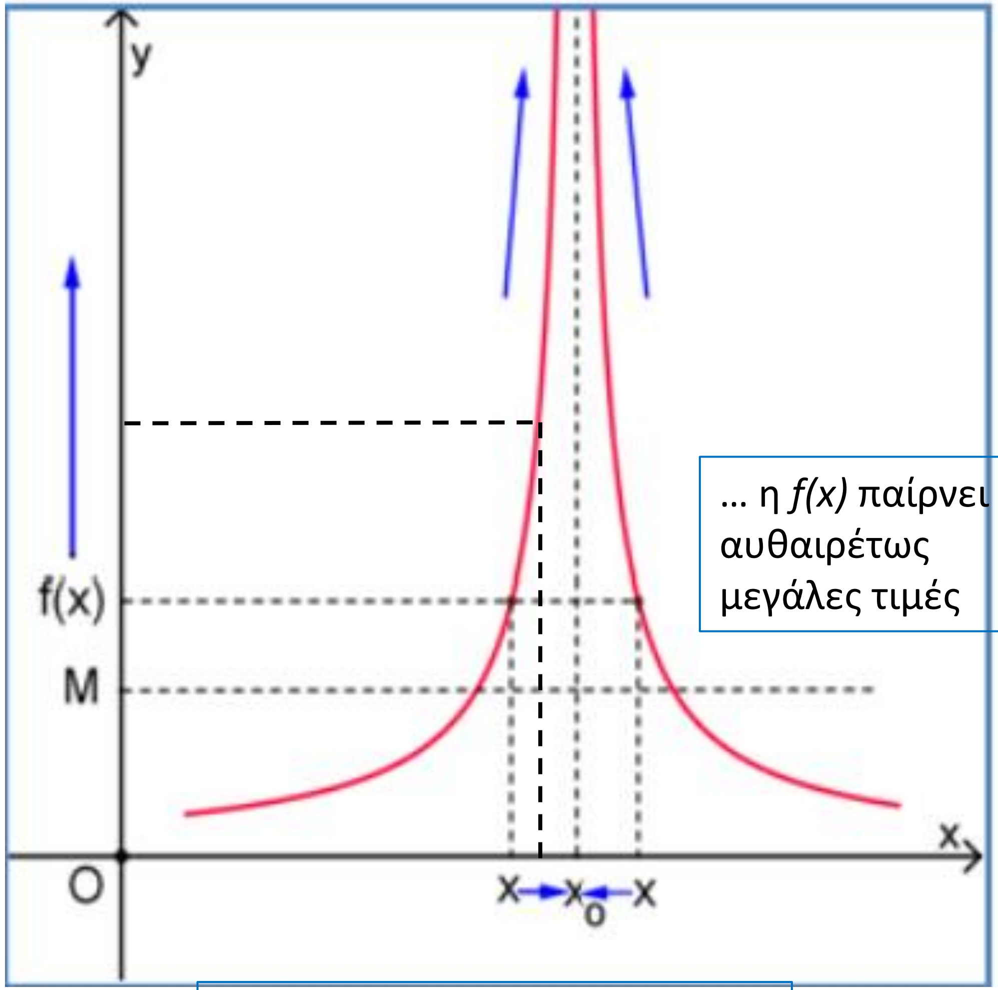


… η *f(x)* παίρνει αυθαιρέτως μεγάλες τιμές

Καθώς το x προσεγγίζει το x_0…..

Μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

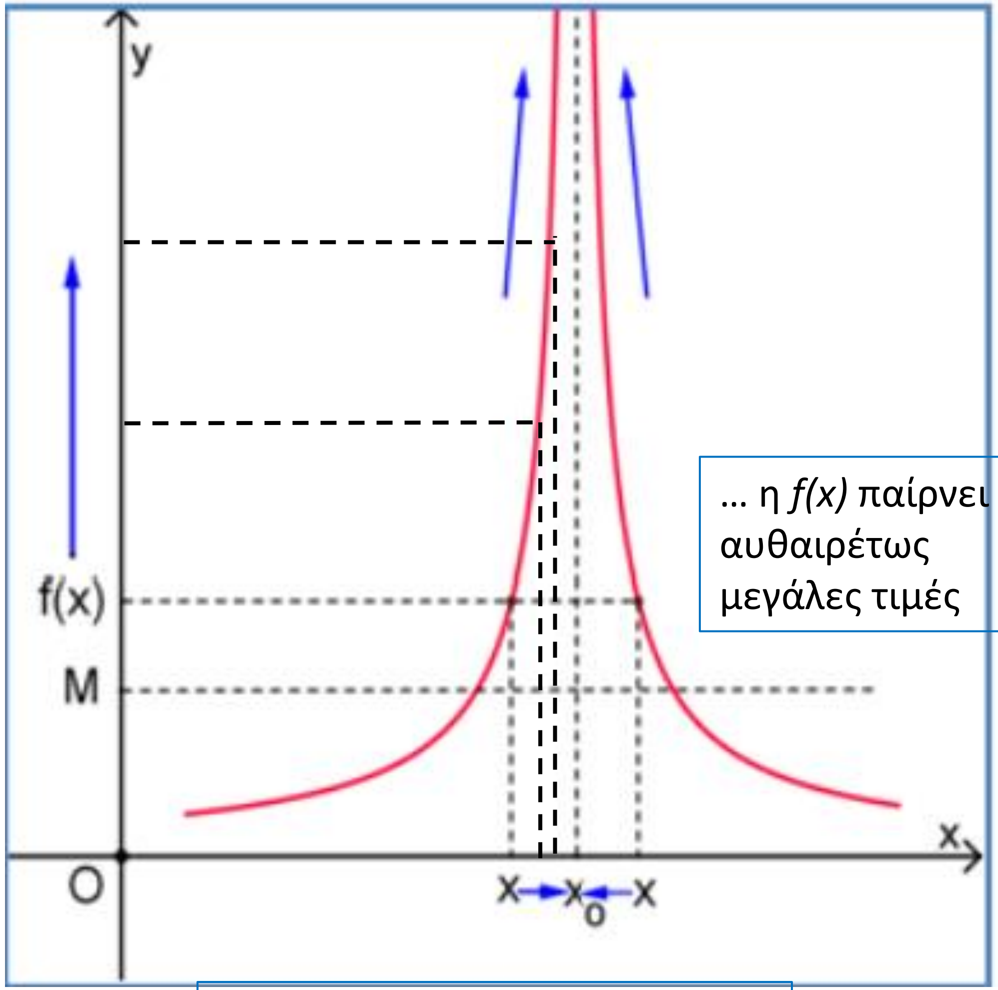


… η *f(x)* παίρνει αυθαιρέτως μεγάλες τιμές

Καθώς το x προσεγγίζει το x_0.....

Μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

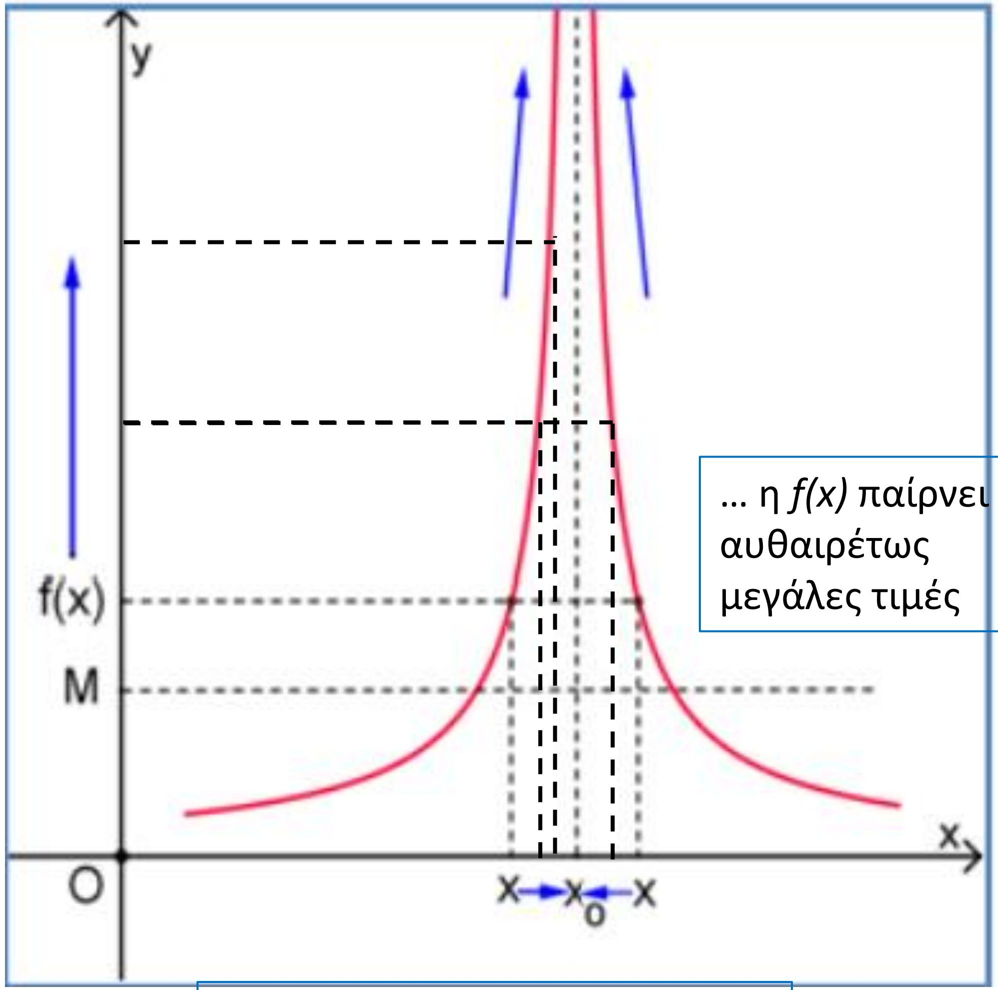


… η *f(x)* παίρνει αυθαιρέτως μεγάλες τιμές

Καθώς το x προσεγγίζει το x_0…..

Μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

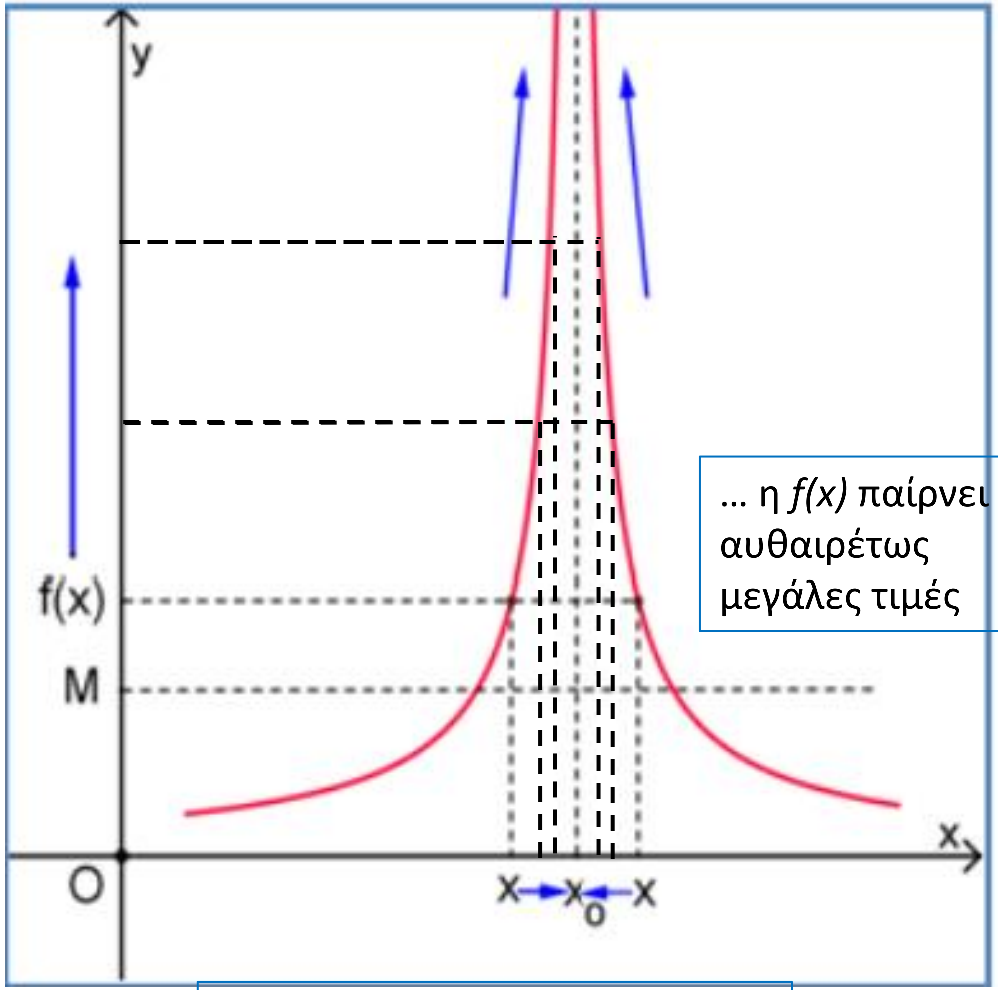


… η *f(x)* παίρνει αυθαιρέτως μεγάλες τιμές

Καθώς το x προσεγγίζει το x_0…..

Μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$



… η *f(x)* παίρνει αυθαιρέτως μεγάλες τιμές

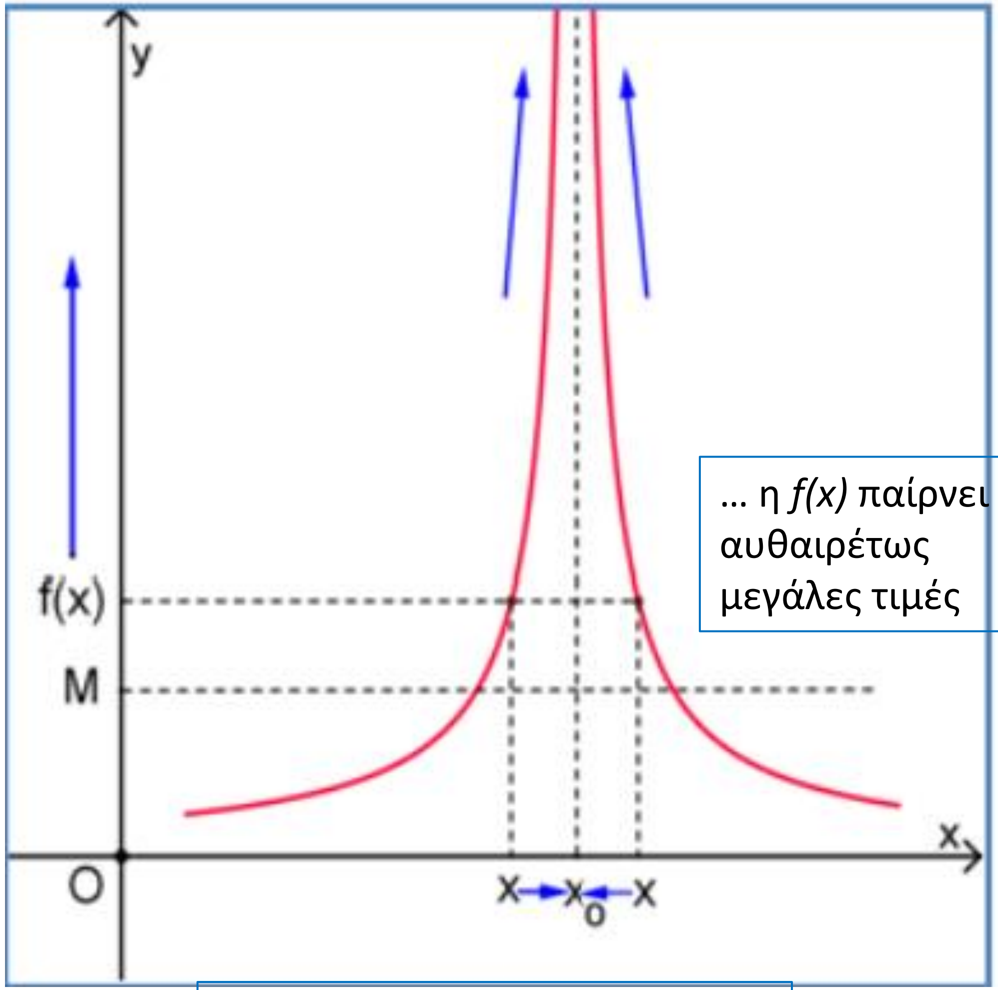
Καθώς το x προσεγγίζει το x_0.....

Μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση, η οποία ορίζεται σε μια περιοχή του x_0.

Όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0, είναι το $+\infty$ εάν για κάθε $\mathrm{M} > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall\, x$ με
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \mathrm{M}$



… η *f(x)* παίρνει αυθαιρέτως μεγάλες τιμές

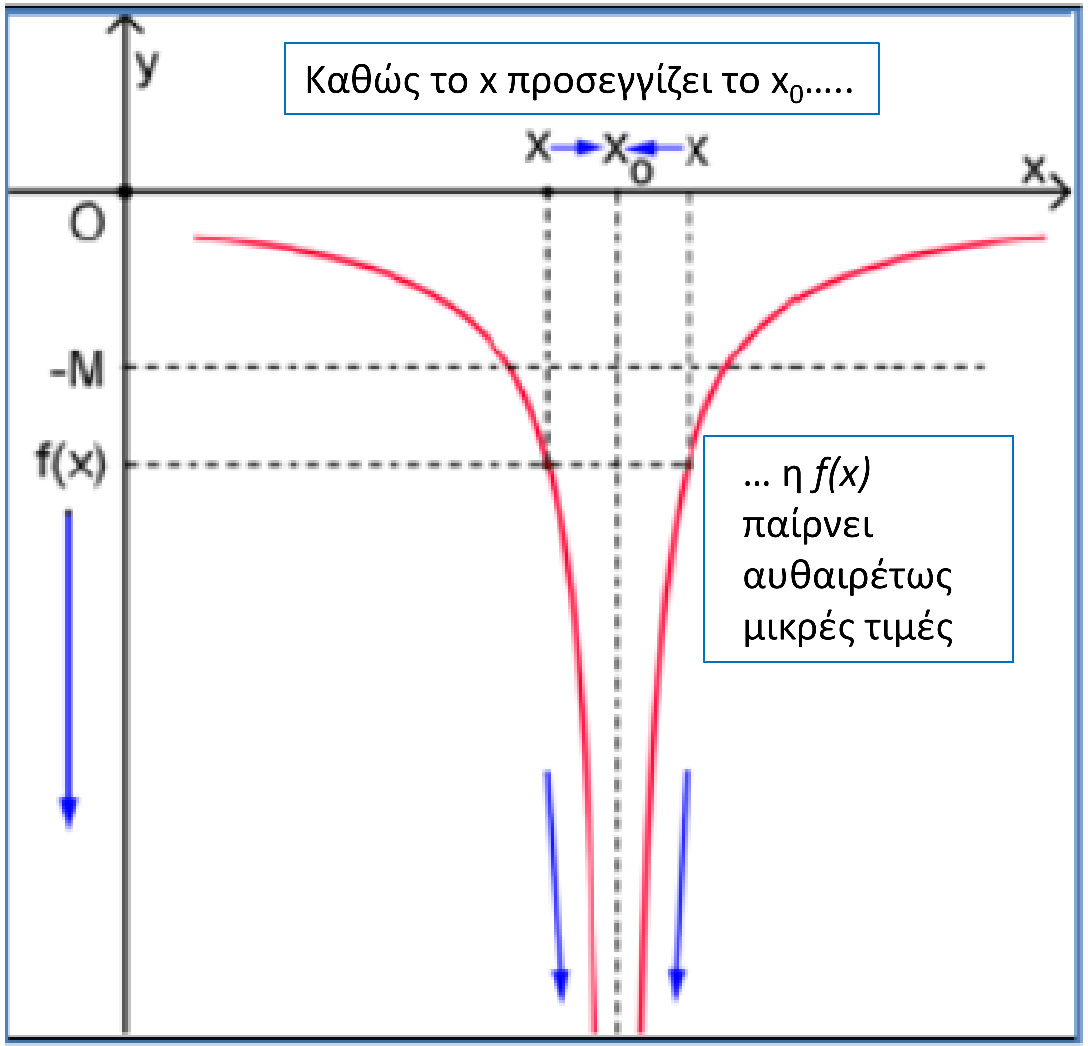
Καθώς το x προσεγγίζει το x_0.....

Μη πεπερασμένα όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$

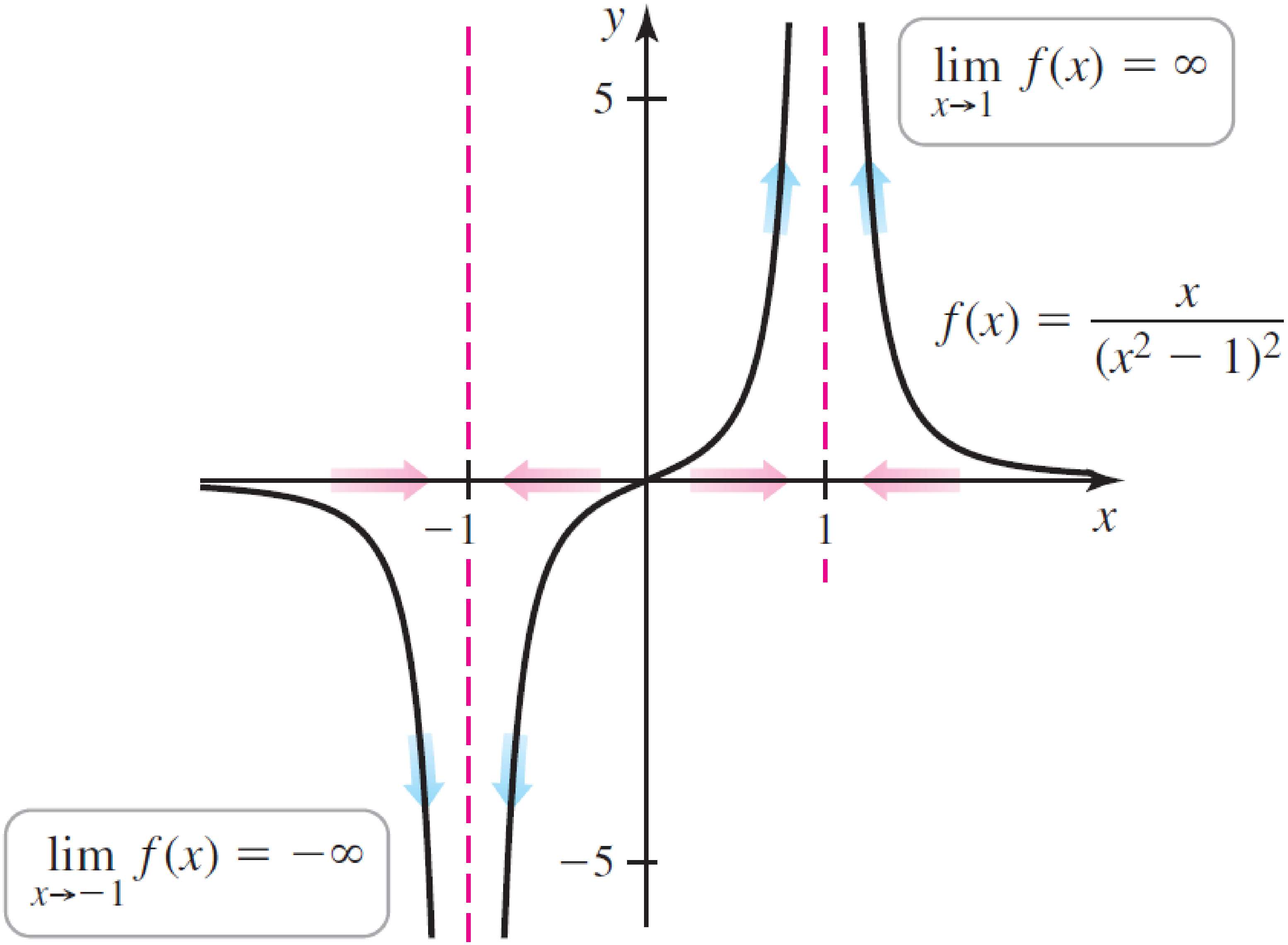
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση, η οποία ορίζεται σε μια περιοχή του x_0.

Όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0, είναι το $-\infty$ εάν για κάθε $\mathrm{M} > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x με
$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -\mathrm{M}$



Παράδειγμα



ΟΡΙΣΜΟΣ Κατακόρυφη ασύμπτωτη

Εάν $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, τότε η ευθεία $x = a$ ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της f.

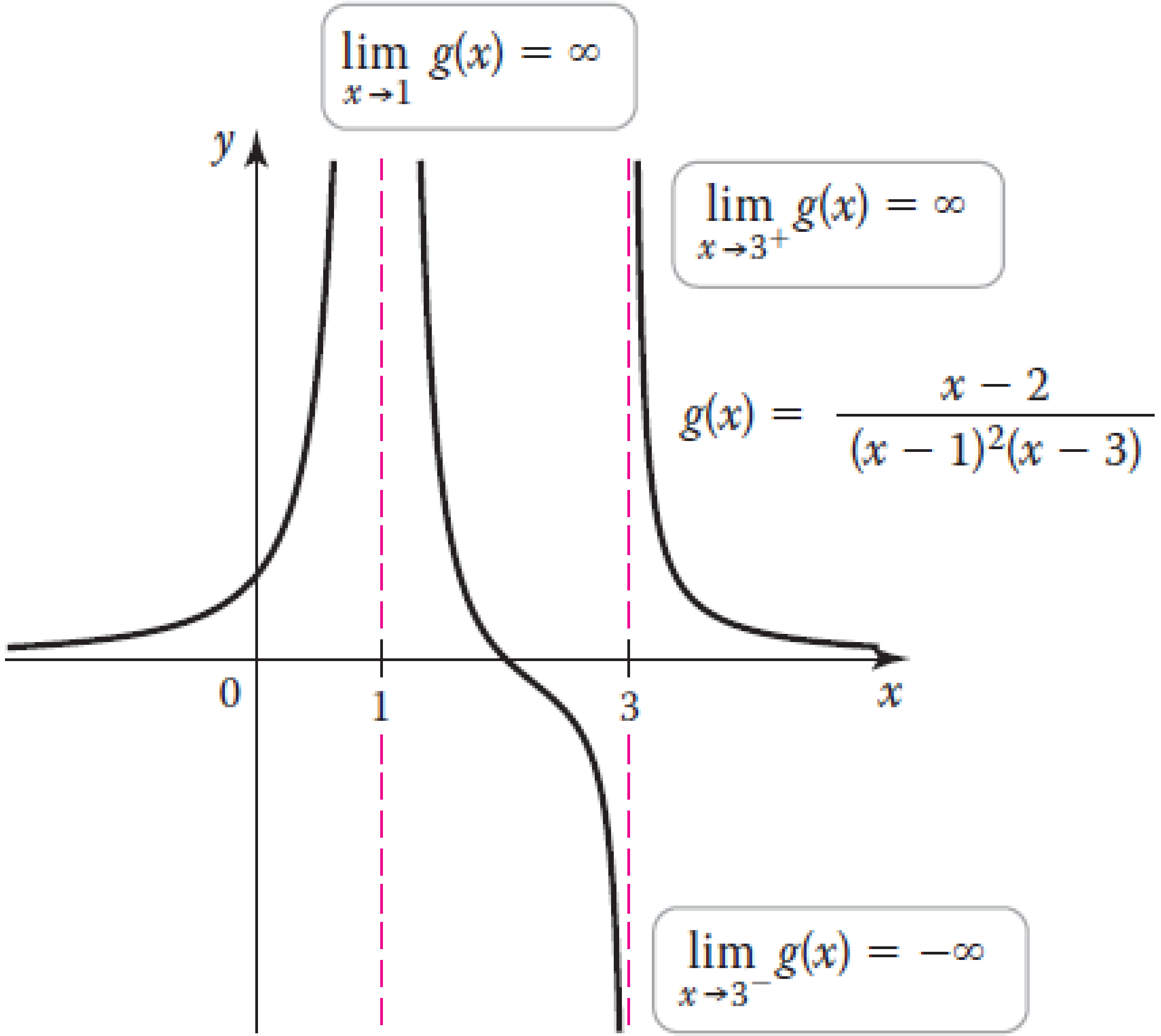
Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τις αναζητούμε:

- Στα άκρα του πεδίου ορισμού της f, στα οποία δεν ορίζεται η f.
- Στα σημεία του πεδίου ορισμού της f, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

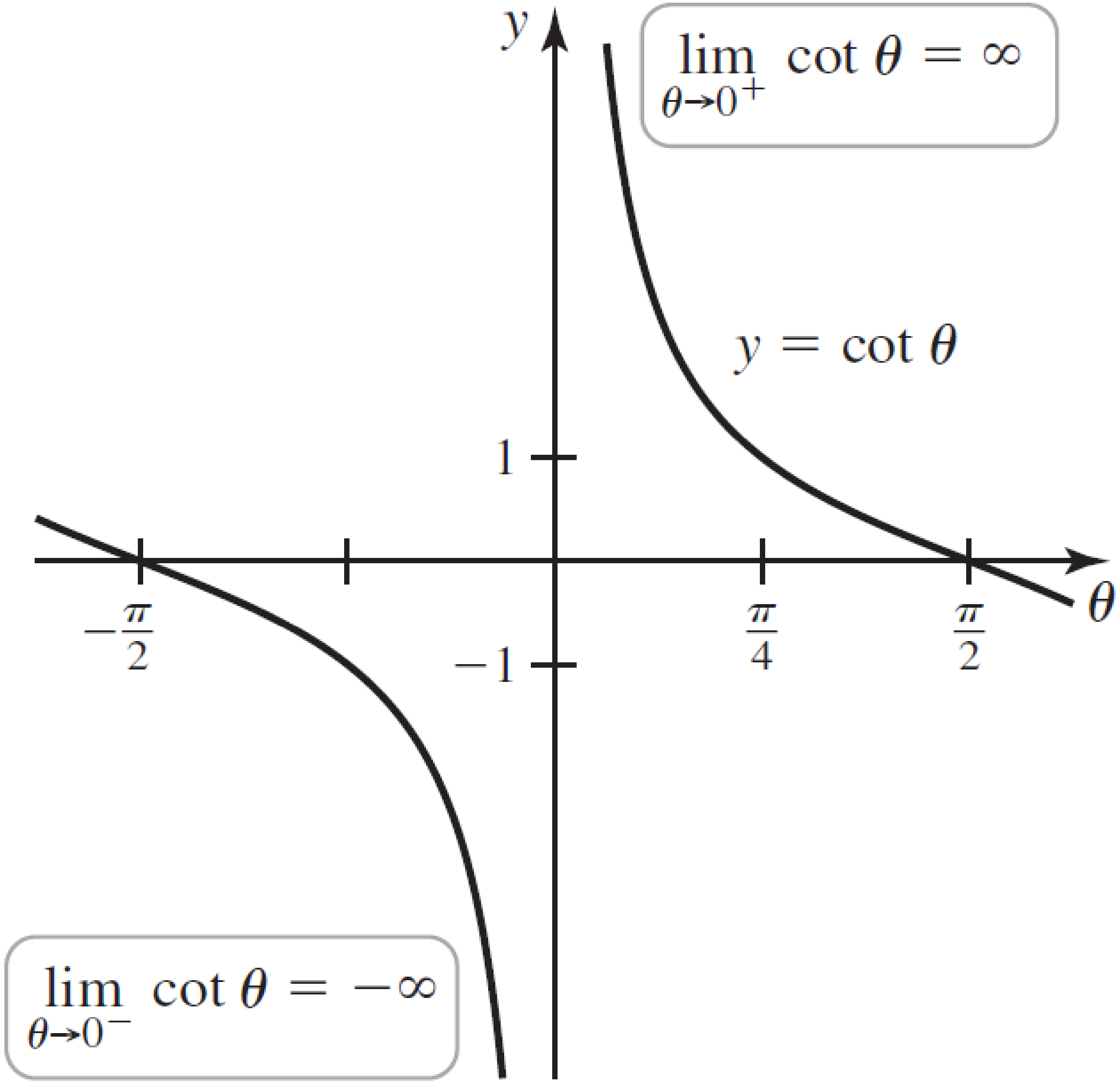
Παράδειγμα

Οι κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = 3$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της συνάρτηση g.

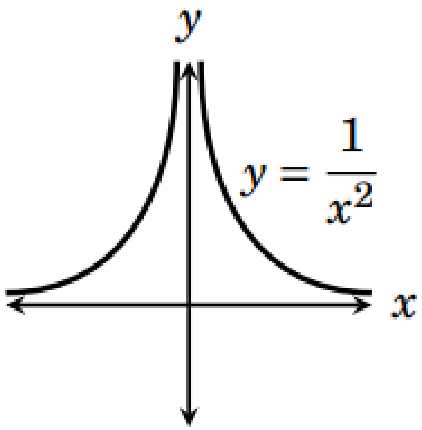


Παράδειγμα 2

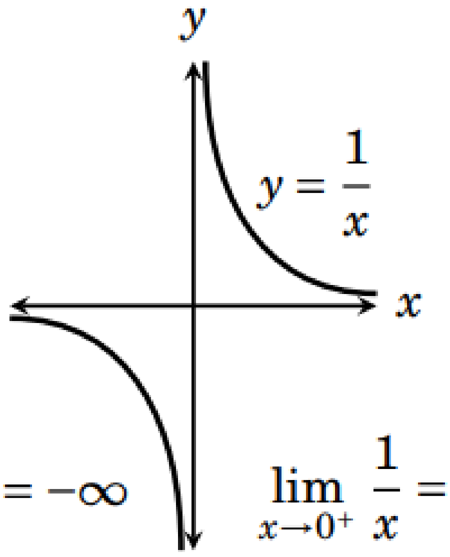
Ο άξονας των y (θ = 0) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτηση $\cot(\theta)$.



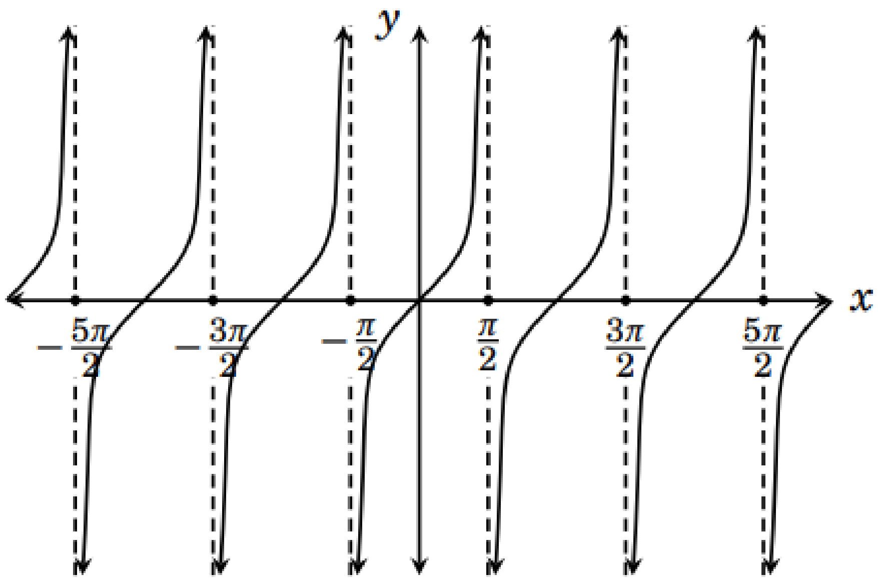
Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



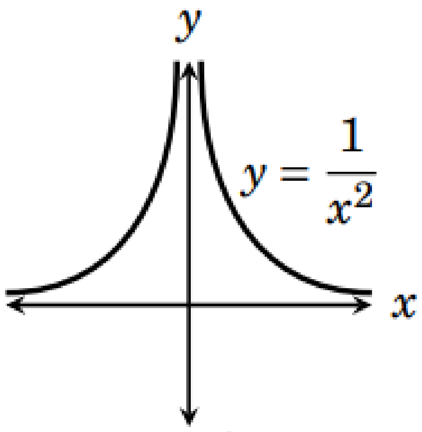
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} tan(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$$

προσεγγίζει μια πεπερασμένη μη-μηδενική τιμή

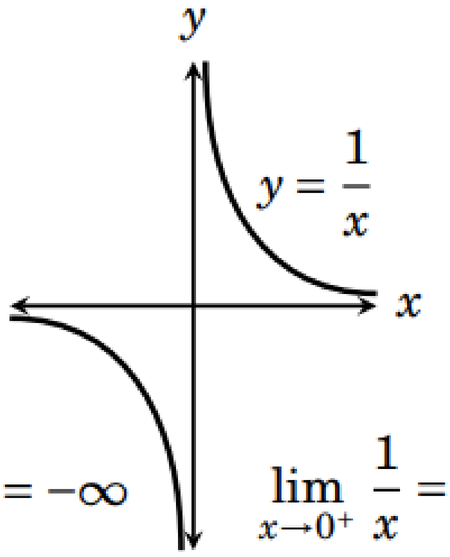
Τυπική κατάσταση: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} =$

προσεγγίζει το 0

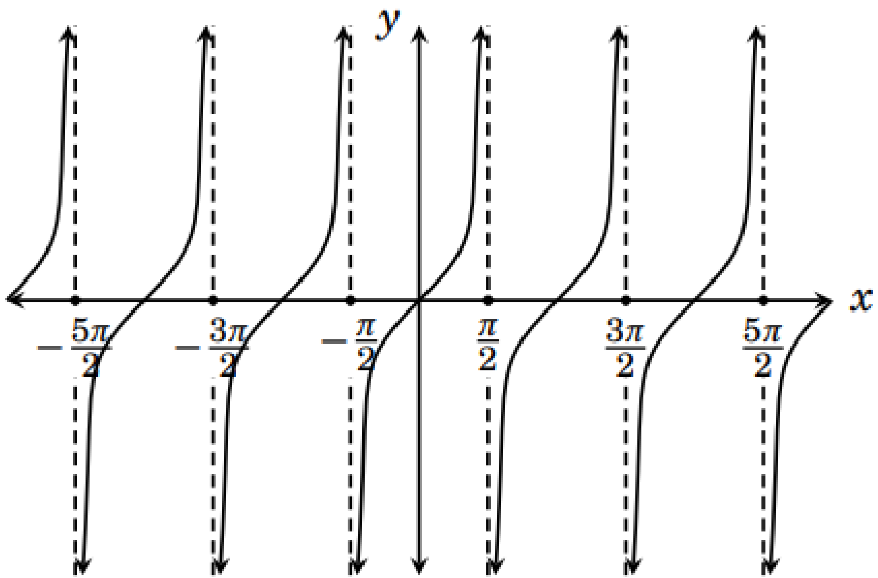
Κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα



$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tan(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{sin(x)}{\cos(x)} = +\infty$$

προσεγγίζει μια πεπερασμένη μη-μηδενική τιμή

Τυπική κατάσταση: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

προσεγγίζει το 0

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 3} \frac{7-x}{x-3}$

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 3} \frac{7-x}{x-3}$. Αντικαθιστούμε $\frac{7-3}{3-3} = \frac{4}{0}$

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{7-x}{x-3}$. Αντικαθιστούμε $\frac{7-3}{3-3}=\frac{4}{0}$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{7-x}{x-3}=$$

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 3} \frac{7-x}{x-3}$. Αντικαθιστούμε $\frac{7-3}{3-3} = \frac{4}{0}$

προσεγγίζει το 4 (θετικό)

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{7-x}{x-3} =$$

προσεγγίζει το 0, αρνητικό

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{7-x}{x-3}$. Αντικαθιστούμε $\frac{7-3}{3-3}=\frac{4}{0}$

προσεγγίζει το 4 (θετικό)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{7-x}{x-3}=-\infty$$

προσεγγίζει το 0, αρνητικό

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{7-x}{x-3}$. Αντικαθιστούμε $\frac{7-3}{3-3}=\frac{4}{0}$

προσεγγίζει το 4 (θετικό)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{7-x}{x-3}=-\infty$$

προσεγγίζει το 0 , αρνητικό

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{7-x}{x-3}=$$

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{7-x}{x-3}$. Αντικαθιστούμε $\frac{7-3}{3-3}=\frac{4}{0}$

προσεγγίζει το 4 (θετικό)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{7-x}{x-3}=-\infty$$

προσεγγίζει το 0 , από αρνητικές τιμές

προσεγγίζει το 4 (θετικό)

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{7-x}{x-3}=$$

προσεγγίζει το 0, θετικό

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \frac{7-x}{x-3}$.   Αντικαθιστούμε $\frac{7-3}{3-3} = \frac{4}{0}$

προσεγγίζει το 4 (θετικό)

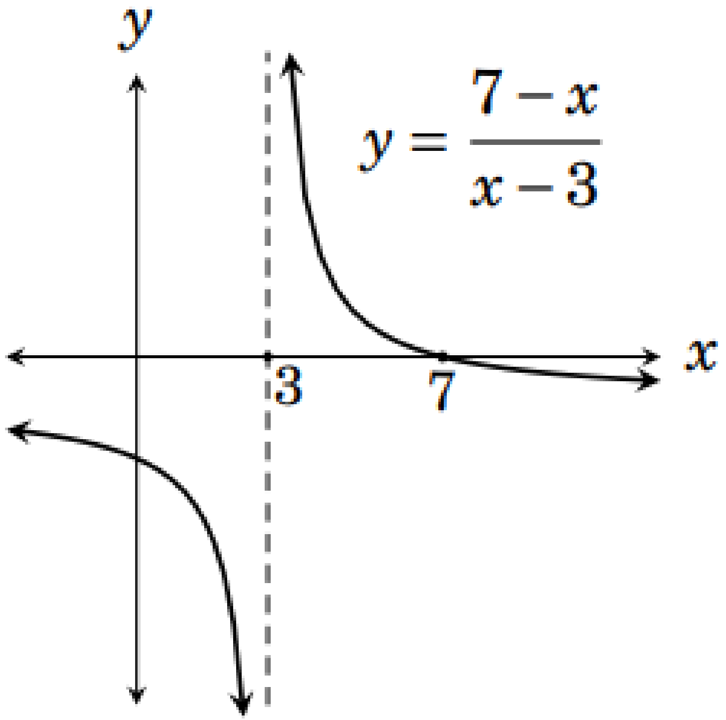
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{7-x}{x-3} = -\infty$$

προσεγγίζει το 0 , από αρνητικές τιμές

προσεγγίζει το 4 (θετικό)

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{7-x}{x-3} = +\infty$$

προσεγγίζει το 0 , θετικό



το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \frac{7-x}{x-3}$ δεν υπάρχει

Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$

Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - \cos(x)}$ Αντικαθιστούμε $\frac{1}{1-0} = \frac{1}{0}$

Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$ Αντικαθιστούμε $\frac{1}{1-0} = \frac{1}{0}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-\cos(x)} =$$

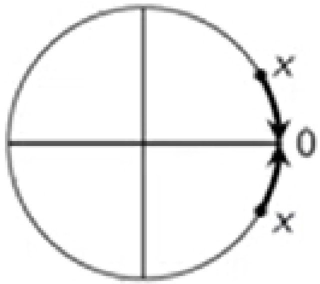
Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$ Αντικαθιστούμε $\frac{1}{1-0} = \frac{1}{0}$

θετικό

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-\cos(x)} =$$

προσεγγίζει το 0, θετικό



από αριστερά

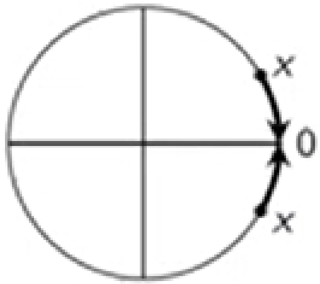
Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$ Αντικαθιστούμε $\frac{1}{1-0} = \frac{1}{0}$

θετικό

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-\cos(x)} = +\infty$$

προσεγγίζει το 0, θετικό



από αριστερά

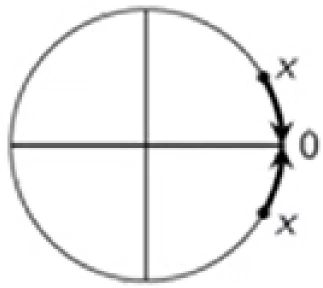
Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$ Αντικαθιστούμε $\frac{1}{1-0} = \frac{1}{0}$

θετικό

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-\cos(x)} = +\infty$$

προσεγγίζει το 0, θετικό



από αριστερά

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1-\cos(x)} =$$

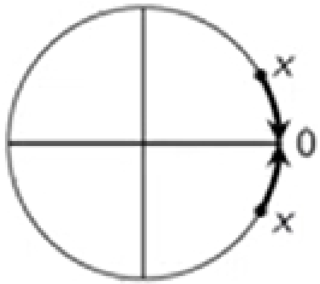
Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos(x)}$ Αντικαθιστούμε $\frac{1}{1-0} = \frac{1}{0}$

θετικό

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1-\cos(x)} = +\infty$$

προσεγγίζει το 0, θετικό



από δεξιά

από αριστερά

θετικό

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\cos(x)} =$$

προσεγγίζει το 0, θετικό

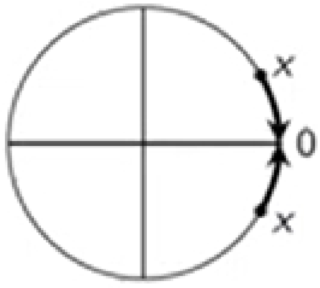
Παράδειγμα 2

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}$ Αντικαθιστούμε $\frac{1}{1-0}=\frac{1}{0}$

θετικό

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-\cos(x)}=+\infty$$

προσεγγίζει το 0, θετικό



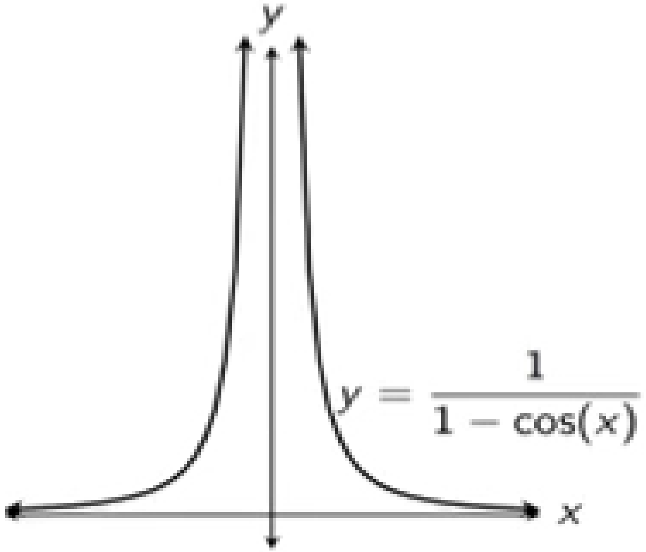
από δεξιά

από αριστερά

θετικό

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-\cos(x)}=+\infty$$

προσεγγίζει το 0, θετικό



$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos(x)}=+\infty}$$

Άσκηση

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-15}{2x^4-50x^2}$. Υπολογίζουμε

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ c) $\lim_{x \to 5} f(x)$

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$,

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

b. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$,

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

b. Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, τότε το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να μην υπάρχει.

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

b. Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, τότε το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να μην υπάρχει. Αλλά μπορεί να είναι το $\pm\infty$ (εφαρμόστε την τεχνική των παραπάνω παραδειγμάτων)

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

b. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, τότε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να μην υπάρχει. Αλλά μπορεί να είναι το $\pm\infty$ (εφαρμόστε την τεχνική των παραπάνω παραδειγμάτων)

c. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$,

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

b. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$, τότε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να μην υπάρχει. Αλλά μπορεί να είναι το $\pm\infty$ (εφαρμόστε την τεχνική των παραπάνω παραδειγμάτων)

c. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, τότε προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Αν $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

b. Αν $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, τότε το $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ μπορεί να μην υπάρχει. Αλλά μπορεί να είναι το $\pm\infty$ (εφαρμόστε την τεχνική των παραπάνω παραδειγμάτων)

c. Αν $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Προσπαθήστε αλγεβρικά να απλοποιήσετε και να καταλήξετε σε μια από τις περιπτώσεις (a) ή (b)

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε τις <u>κατακόρυφες ασύμπτωτες</u> της $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

a. Επιλύστε την εξίσωση $g(x) = 0$

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε τις <u>κατακόρυφες ασύμπτωτες</u> της $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Επιλύστε την εξίσωση $g(x) = 0$. Όλες οι λύσεις x_0 είναι υποψήφιες κατακόρυφες ασύμπτωτες

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

a. Επιλύστε την εξίσωση $g(x) = 0$. Όλες οι λύσεις x_0 είναι υποψήφιες κατακόρυφες ασύμπτωτες

b. Για κάθε x_0 ελέγξτε αν $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$.

Μεθοδολογία

Πώς υπολογίζουμε τις <u>κατακόρυφες ασύμπτωτες</u> της $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

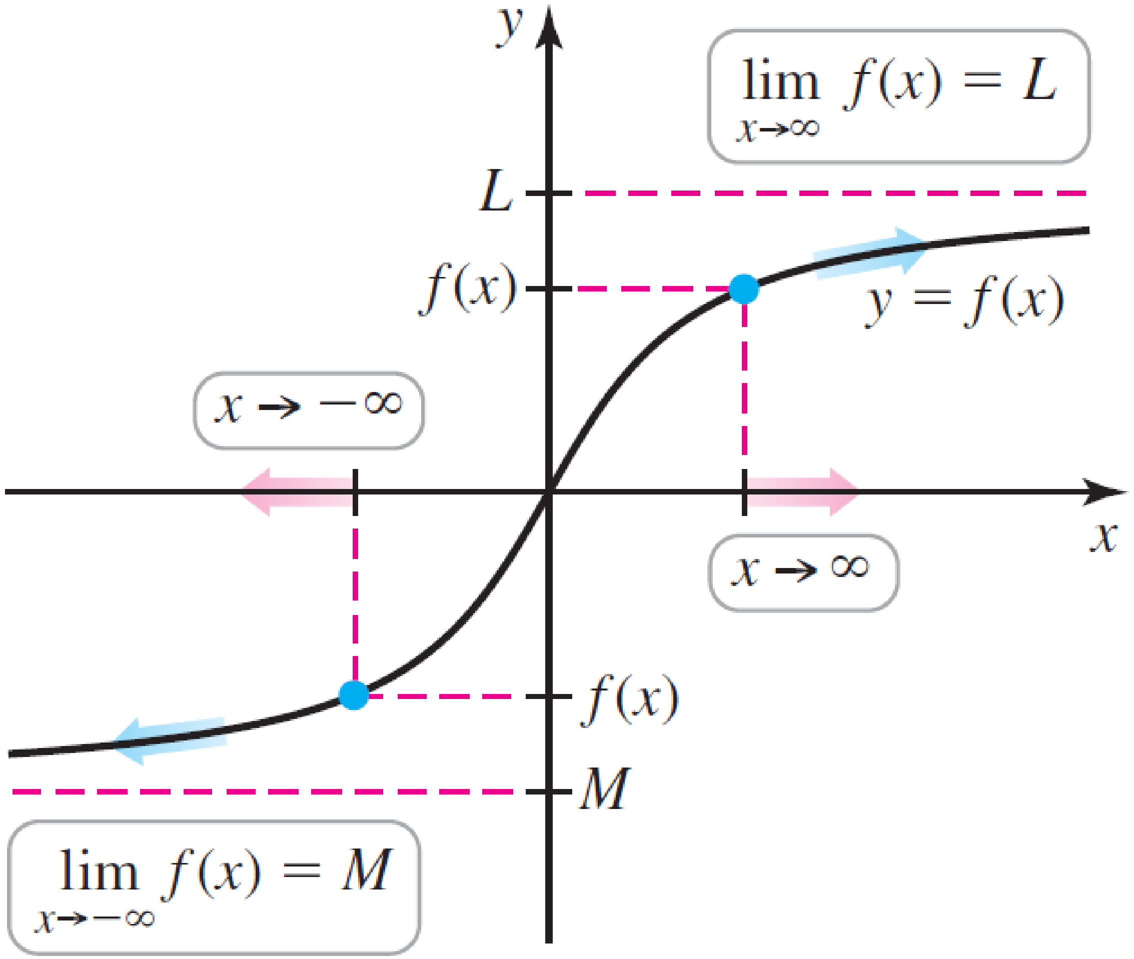
a. Επιλύστε την εξίσωση $g(x) = 0$. Όλες οι λύσεις x_0 είναι υποψήφιες κατακόρυφες ασύμπτωτες

b. Για κάθε x_0 ελέγξτε αν $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$. Αν ισχύει, τότε η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της y

Άσκηση

Βρείτε όλες τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της $g(x) = \frac{-8}{(x+5)(x-9)}$

Όρια στο Άπειρο



y
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$
L
$f(x)$
$y = f(x)$
$x \to -\infty$
x
$x \to \infty$
$f(x)$
M
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$

ΟΡΙΣΜΟΣ Όρια στο άπειρο και οριζόντιες ασύμπτωτες

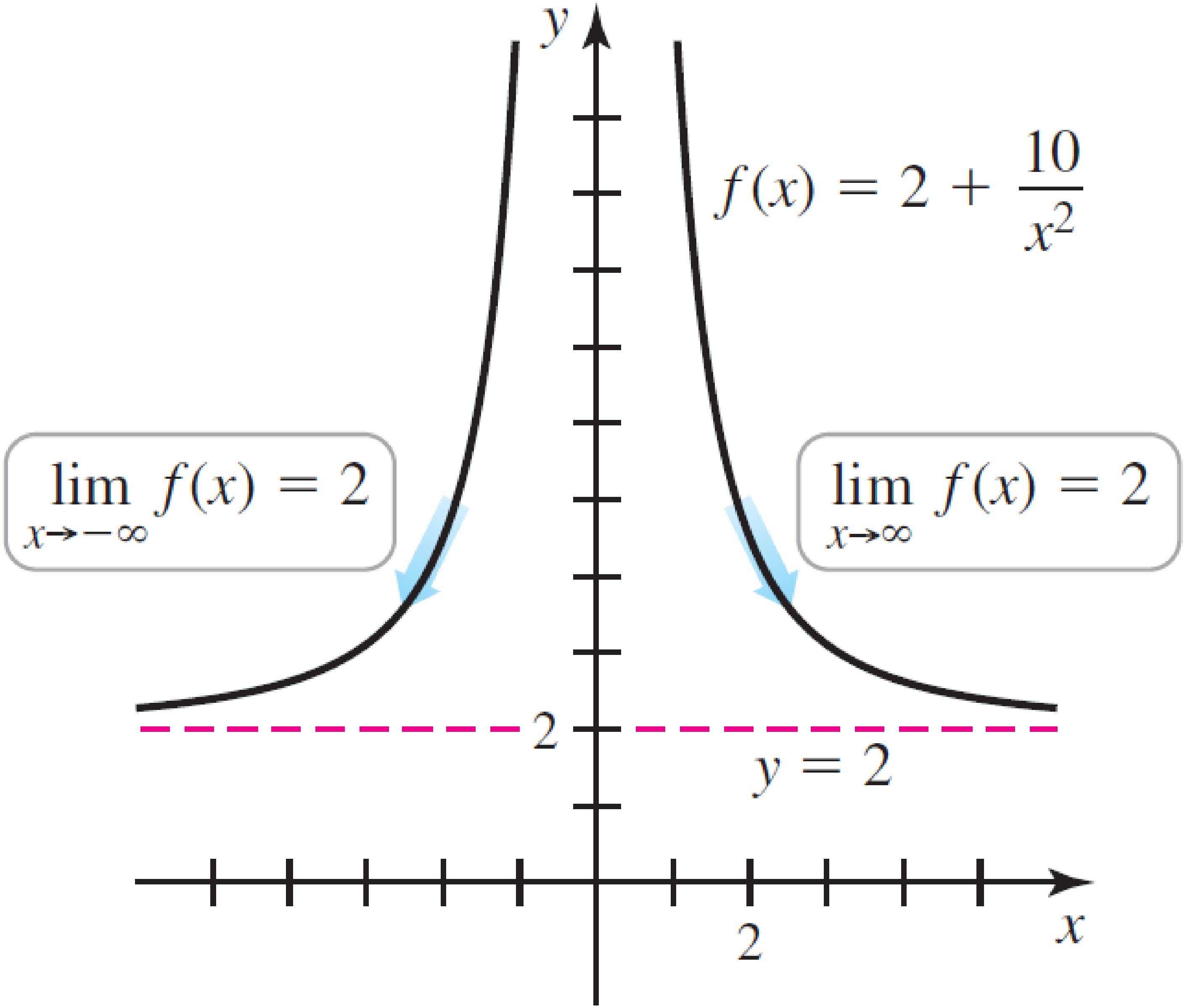
Εάν η $f(x)$ προσεγγίζει αυθαιρέτως έναν πεπερασμένο αριθμό L για όλα τα αρκετά μεγάλα και θετικά x, τότε γράφουμε

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Λέμε ότι το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο άπειρο είναι L. Σε αυτήν την περίπτωση, η ευθεία $y = L$ είναι μια **οριζόντια ασύμπτωτη** της f

Το όριο στο αρνητικό άπειρο $\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$ ορίζεται αναλόγως. Όταν υπάρχει αυτό το όριο, η $y = M$ είναι μια οριζόντια ασύμπτωτη.

Παράδειγμα



Μαθηματικός ορισμός

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση, η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$

Όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $+\infty$, είναι ο αριθμός $L \in \mathbb{R}$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ τέτοιο ώστε $\forall\ x$ με

$$x > M \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

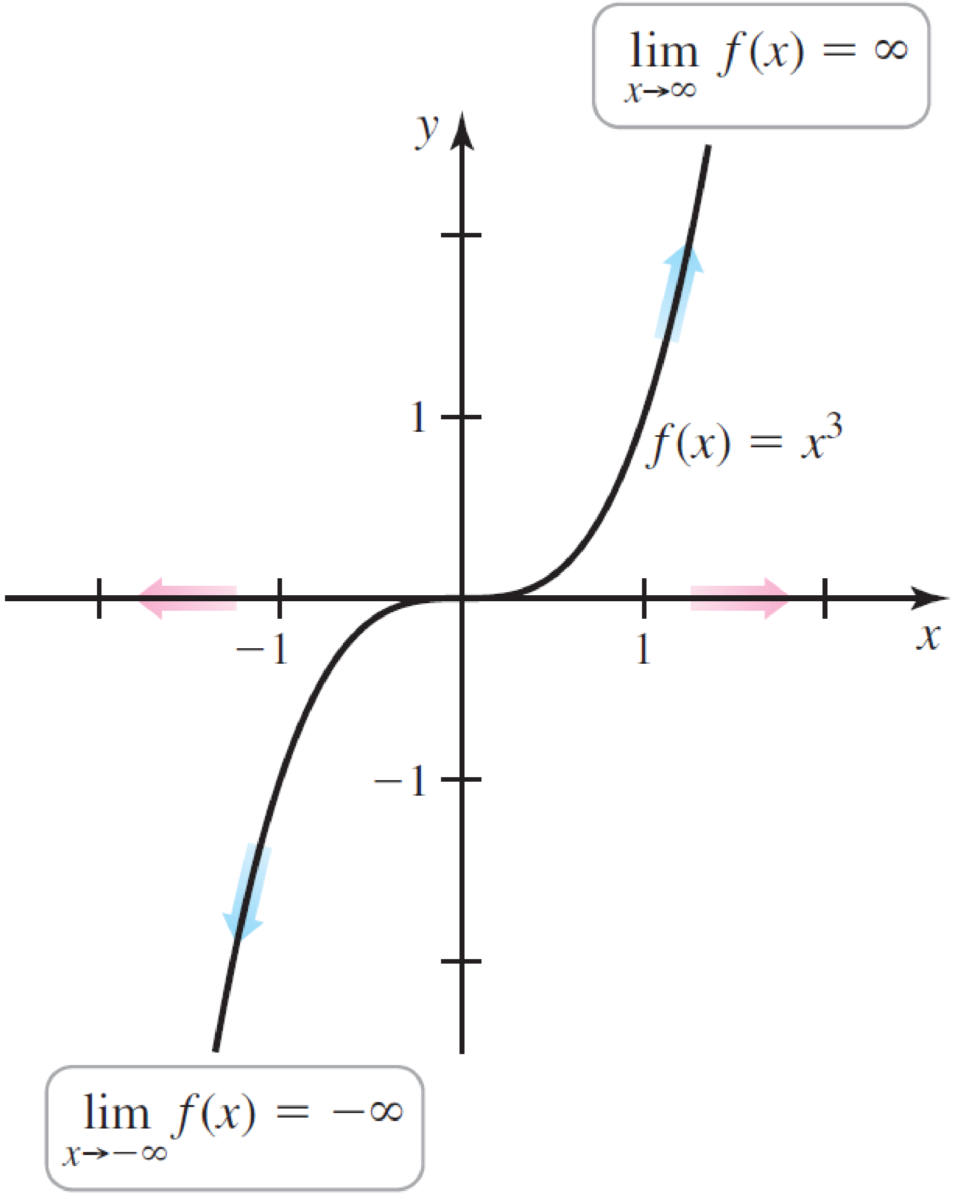
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Έστω $y = f(x)$ μια συνάρτηση, η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$

Όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $-\infty$, είναι ο αριθμός $L \in \mathbb{R}$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\mathrm{M} > 0$ τέτοιο ώστε $\forall\ x$ με

$$x < -M \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Άπειρα όρια στο άπειρο



ΟΡΙΣΜΟΣ Άπειρα όρια στο άπειρο

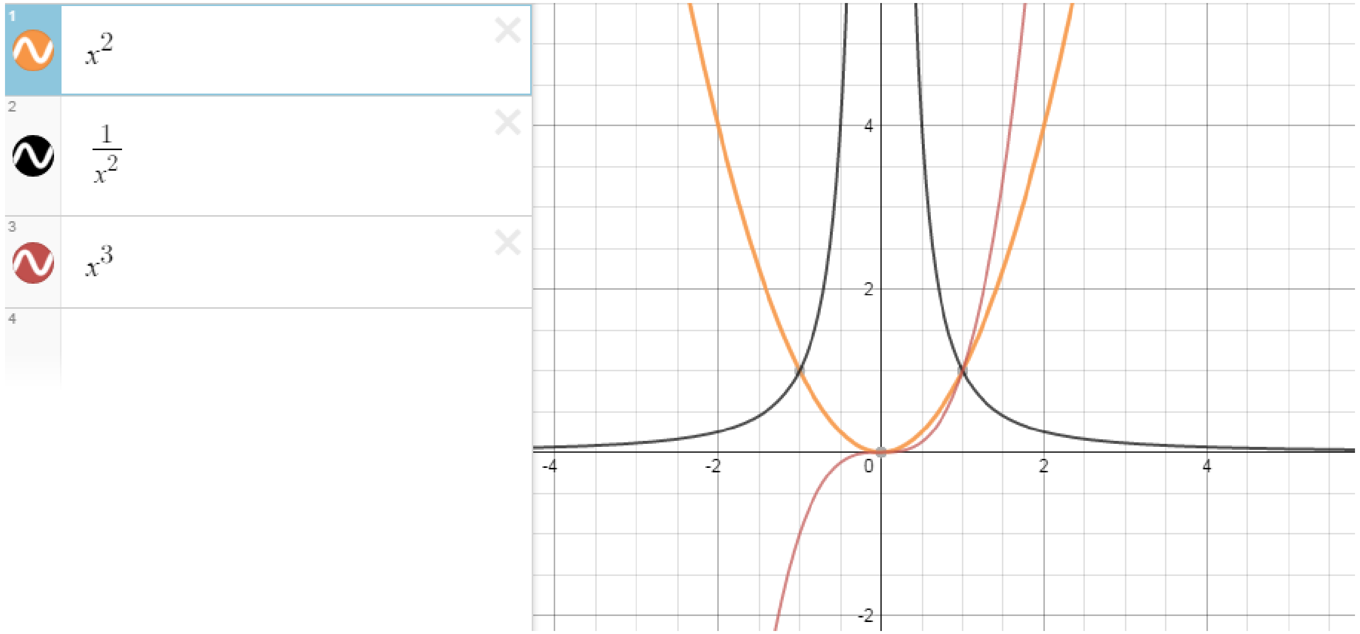
Εάν η $f(x)$ παίρνει αυθαιρέτως μεγάλες τιμές καθώς το x γίνεται επίσης αυθαιρέτως μεγάλο, γράφουμε

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Τα όρια $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ και $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ορίζονται ομοίως.

Βασικά όρια στο +∞ και στο -∞

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & αν\ n\ Άρτιος \\ -\infty & αν\ n\ Περιττός \end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$



Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης

Για την πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

με $a_n \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

Παράδειγμα: $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 2x^2 + 5x - 110) = \lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4) = 3(+\infty) = +\infty$

Όριο ρητής συνάρτησης

Για τη ρητή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_0}$$

με $a_n \neq 0$ και $b_\kappa \neq 0$ ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

Παράδειγμα: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^6+17x^3-12}{3x^6+2x^2-5}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^6}{3x^6}\right) = \frac{5}{3}$

Παραδείγματα

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+x}{2x^3+7}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3}{2x^3}\right)=\frac{5}{2}$$

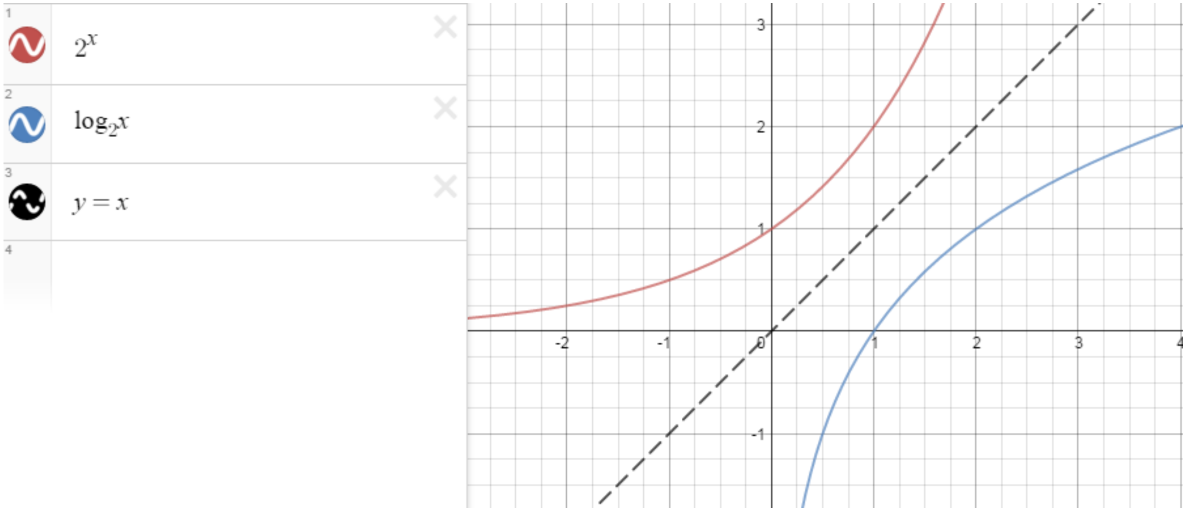
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+x}{2x^3+7}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{2x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{2x}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+x}{2x^2+7}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3}{2x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{2}\right)=+\infty$$

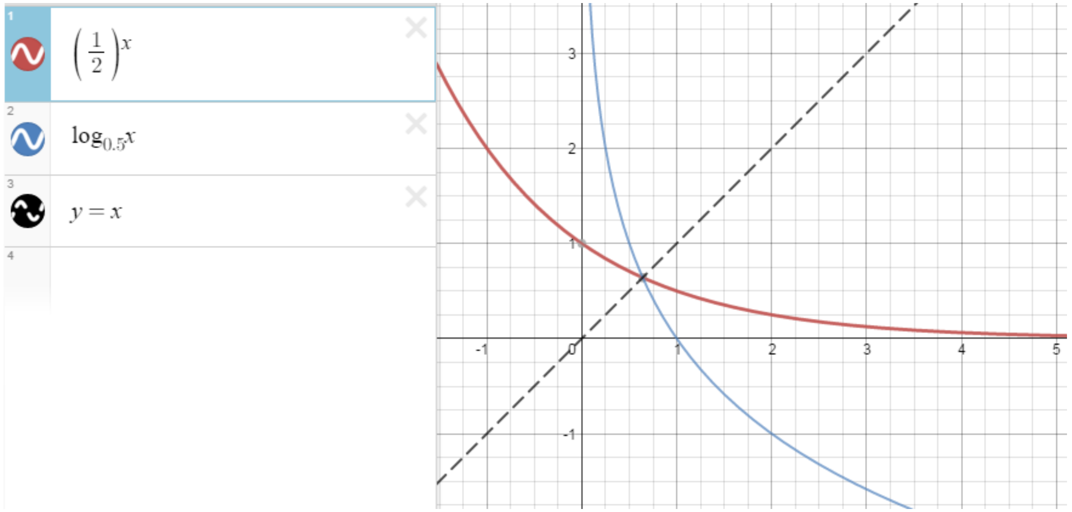
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^3+x}{2x^2+7}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^3}{2x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x}{2}\right)=-\infty$$

Όρια εκθετικής - λογαριθμικής συνάρτησης

$\alpha > 1$



$0 < \alpha < 1$



$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \log_a x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

Εύρεση ορίων με το Octave

- Για συμβολικούς υπολογισμούς απαιτείται το πακέτο symbolic

>> pkg install-forge symbolic

- Εντολή **limit**
- Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \to 3} \frac{4x^2-9x+1}{x+7}$, πληκτρολογούμε

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
Symbolic pkg v2.8.0: Python communication link active, SymPy v1.4.
>> y=(4*x^2-9*x+1)/(x+7);
>> limit(y,3)
ans = (sym) 1
```

Εύρεση ορίων με το Octave

- Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5}{x^3+8}\right)$ πληκτρολογούμε

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> y1=5/(x^3+8);
>> limit(y1,inf)
ans = (sym) 0
```

Εύρεση ορίων με το Octave

- Για να υπολογίσουμε το **δεξί** όριο $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)$ πληκτρολογούμε

\>> pkg load symbolic

```
>> syms x
>> f=1/x;
>> limit(f,x,0,'right')

ans =

Inf
```

Εύρεση ορίων με το Octave

- Για να υπολογίσουμε το **αριστερό** όριο $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right)$ πληκτρολογούμε

>> pkg load symbolic

```
>> syms x
>> f=1/x;
>> limit(f,x,0,'left')

ans =

-Inf
```