Εισαγωγή

- **Ερώτημα**: Δεδομένης μιας γωνίας θ, ποιο είναι το $\sin(\theta)$;
- **Αντίστροφο ερώτημα:** Δεδομένου ενός αριθμού x, ποια είναι η γωνία θ τέτοια ώστε $\sin(\theta) = x$;

Περιεχόμενα

- Η αντίστροφη συνάρτηση του ημιτόνου $\sin^{-1}$ (ή $arcsin$)
- Η αντίστροφη συνάρτηση του συνημιτόνου $\cos^{-1}$ (ή $arccos$)
- Η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης $\tan^{-1}$ (ή $arctan$)

Υπενθύμιση

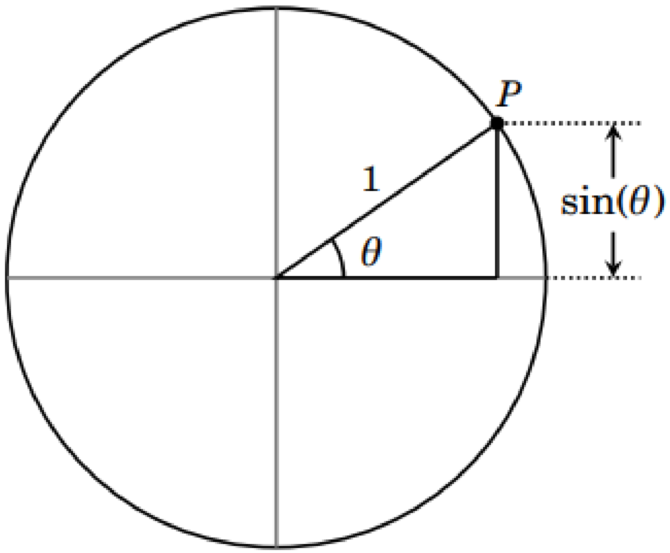
Ιδιότητες μιας 1-1 συνάρτησης $\boldsymbol{f}$ και της αντίστροφή της $\boldsymbol{f^{-1}}$

- $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f
- $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f^{-1}
- Πεδίο ορισμού της f= Σύνολο τιμών της f^{-1}
- Σύνολο τιμών της f = Πεδίο ορισμού της f^{-1}
- Η γραφική παράσταση της f και η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρικές η μία της άλλης ως προς την ευθεία $y = x$.

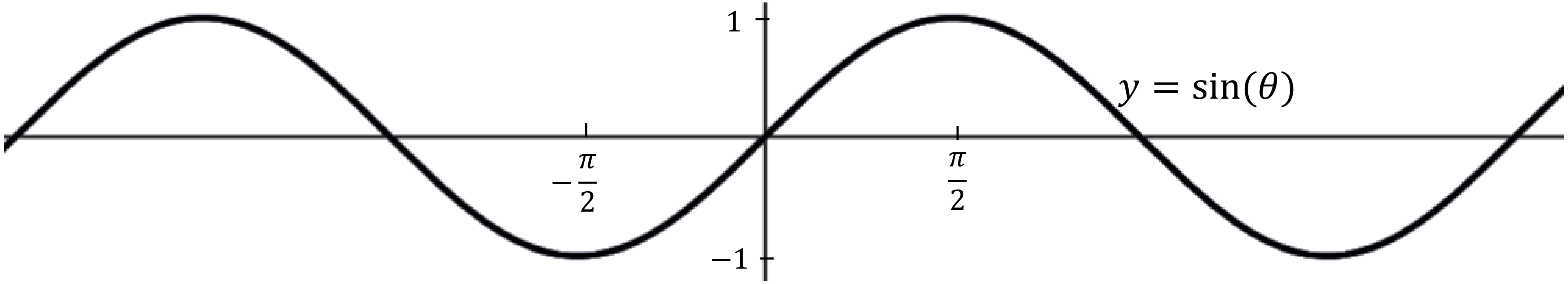
Οι συναρτήσεις sin και $\sin^{-1}$

Οι συναρτήσεις sin και $\sin^{-1}$

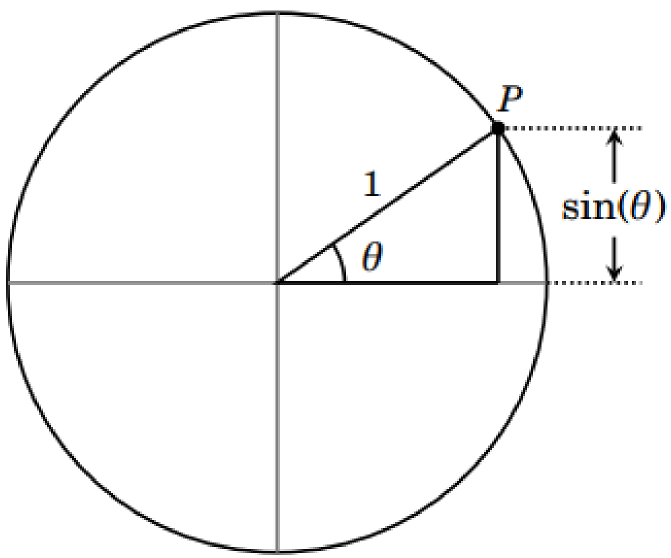
$\sin(\theta) =$ η τεταγμένη του σημείου P



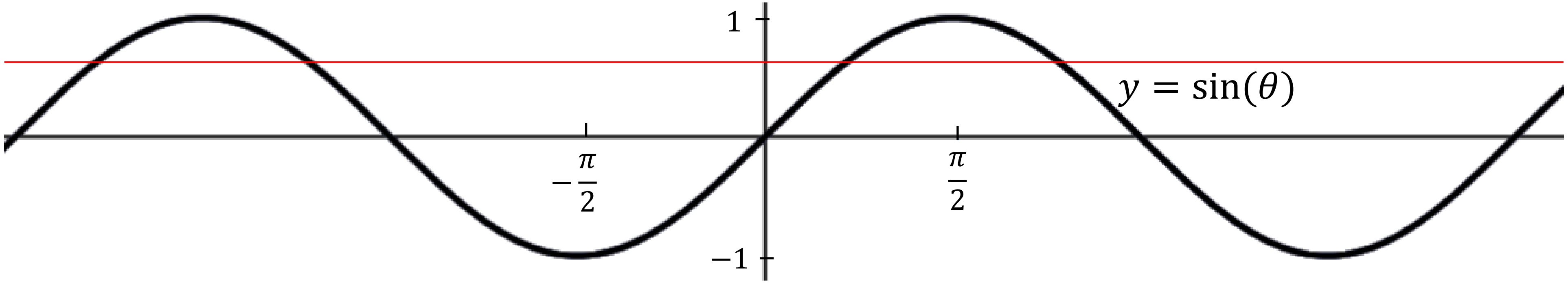
Οι συναρτήσεις sin και $\sin^{-1}$



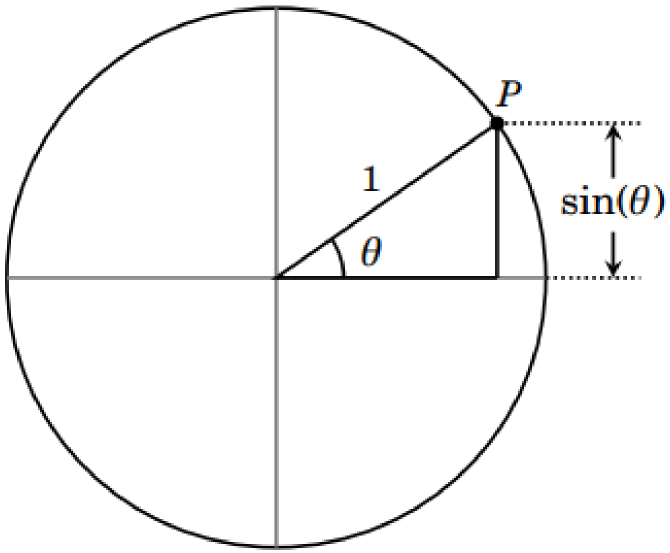
$\sin(\theta) =$ η τεταγμένη του σημείου P



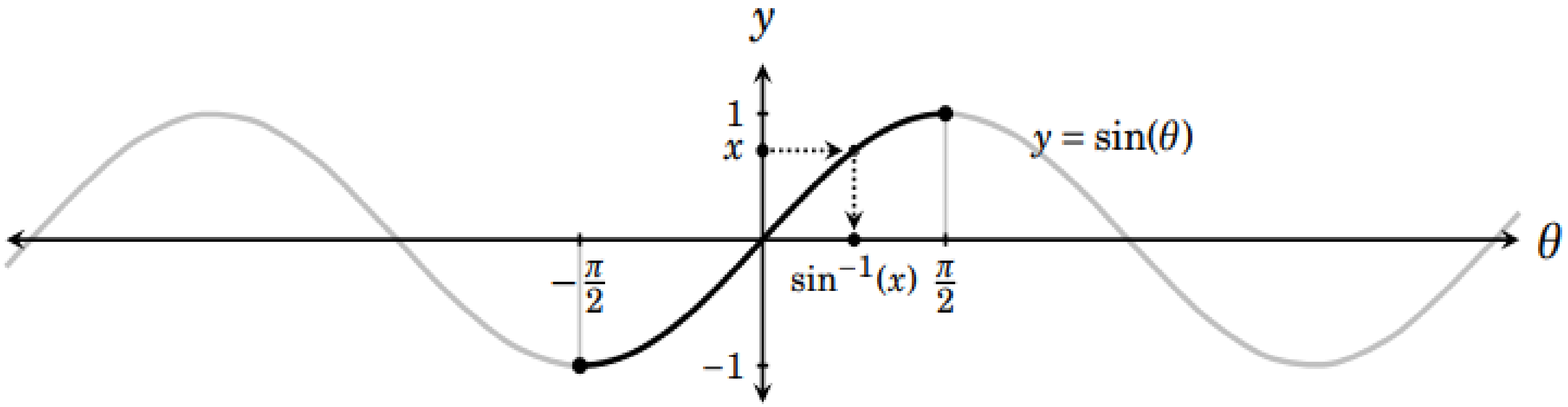
Οι συναρτήσεις sin και $\sin^{-1}$



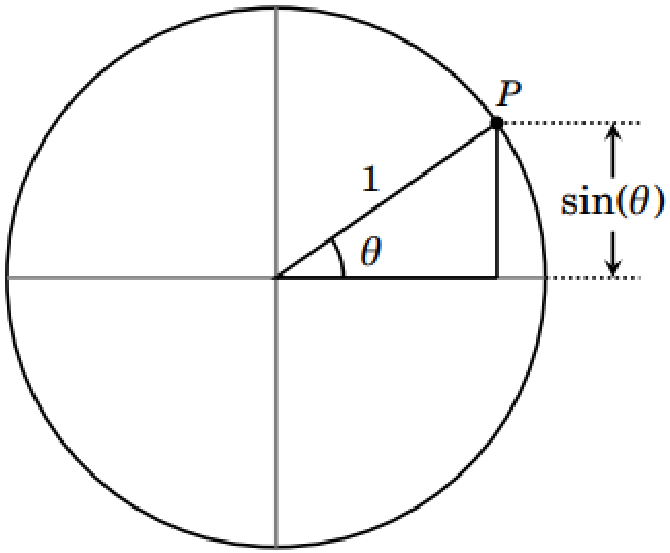
$\sin(\theta) =$ η τεταγμένη του σημείου P



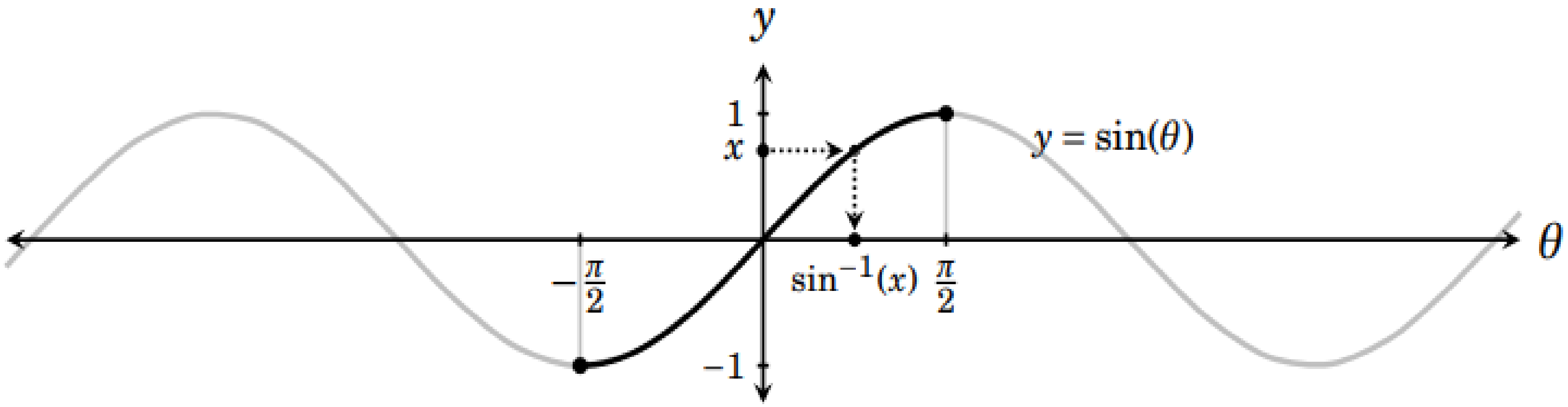
Οι συναρτήσεις sin και $\sin^{-1}$



$\sin(\theta) =$ η τεταγμένη του σημείου P

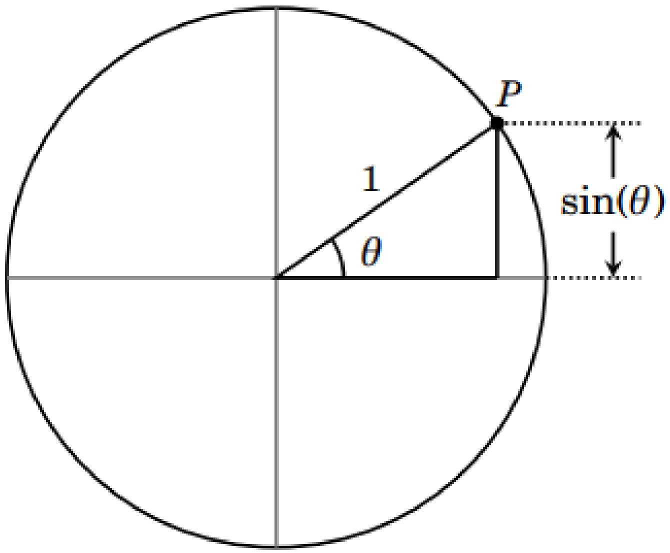


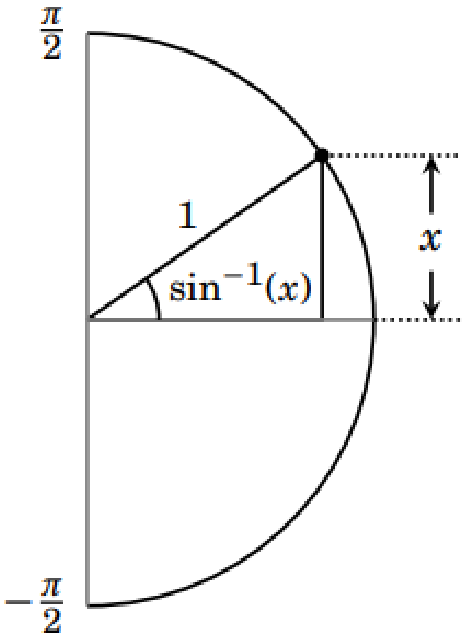
Οι συναρτήσεις sin και $\sin^{-1}$



$\sin(\theta) =$ η τεταγμένη του σημείου P

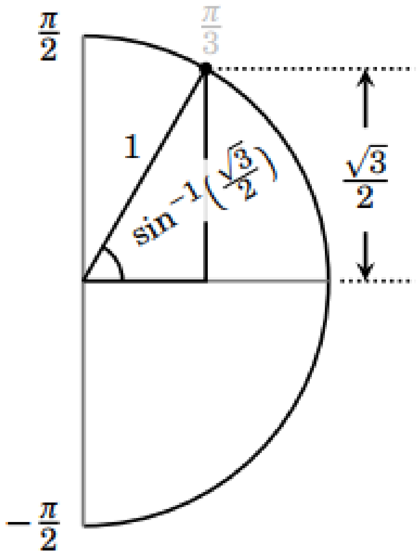
$$\sin^{-1}(x) = \left(\begin{matrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \sin(\theta) = x \end{matrix} \right)$$



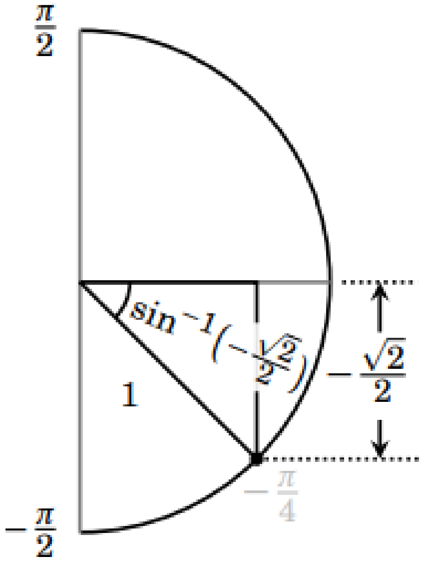


Παραδείγματα

$$\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\pi}{3}$$

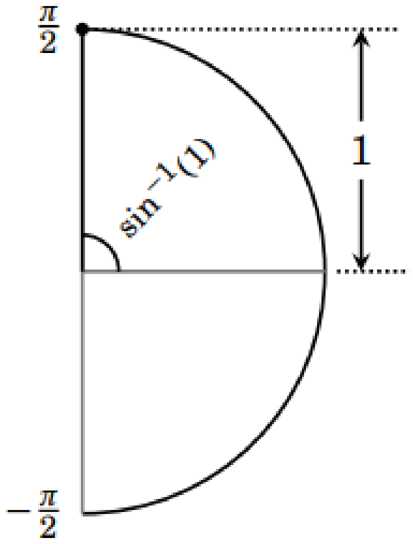


$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\pi}{4}$$

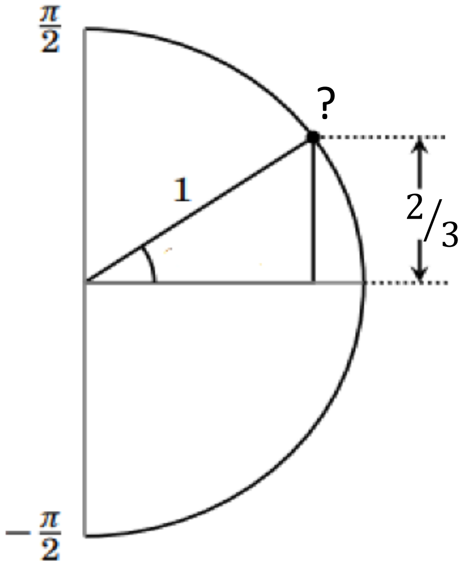


Παραδείγματα

$$\sin^{-1}(1) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \sin(\theta) = 1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}$$

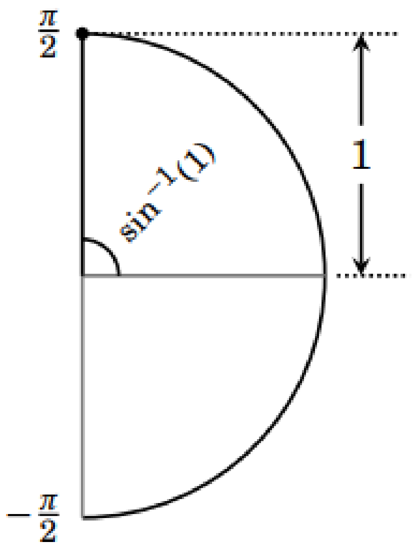


$$\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \sin(\theta) = \dfrac{2}{3} \end{pmatrix} = \ ?$$



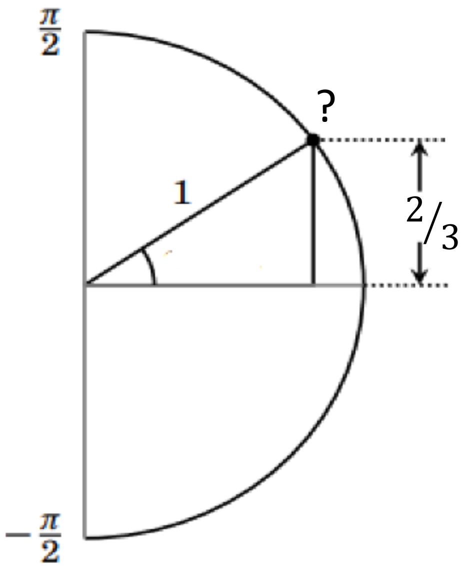
Παραδείγματα

$$\sin^{-1}(1) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \sin(\theta) = 1 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{2}$$



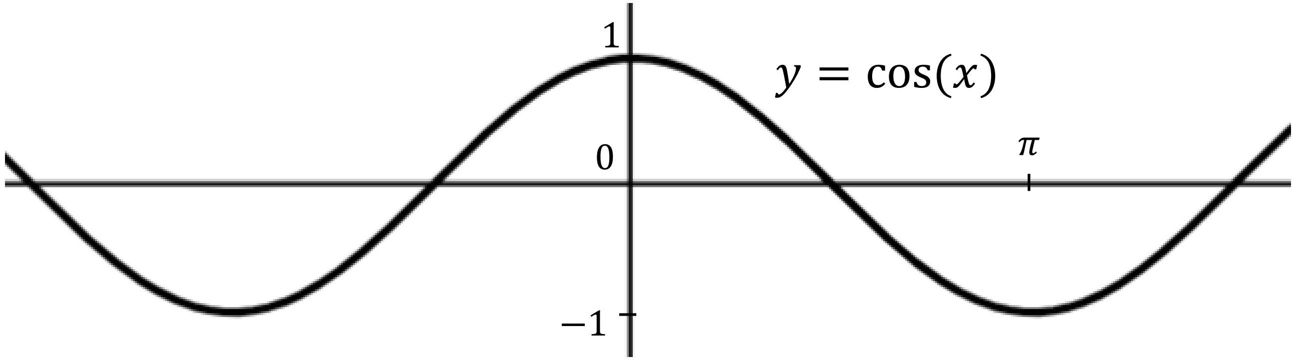
$$\sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \sin(\theta) = \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\approx 0.7277276$$

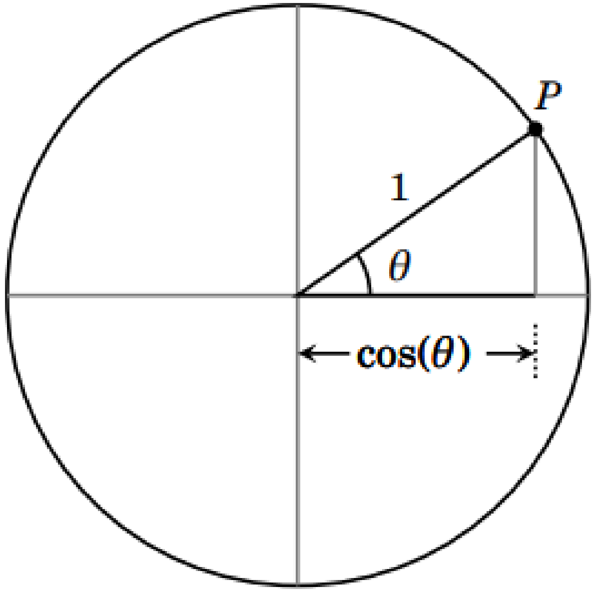


Οι συναρτήσεις cos και cos^{-1}

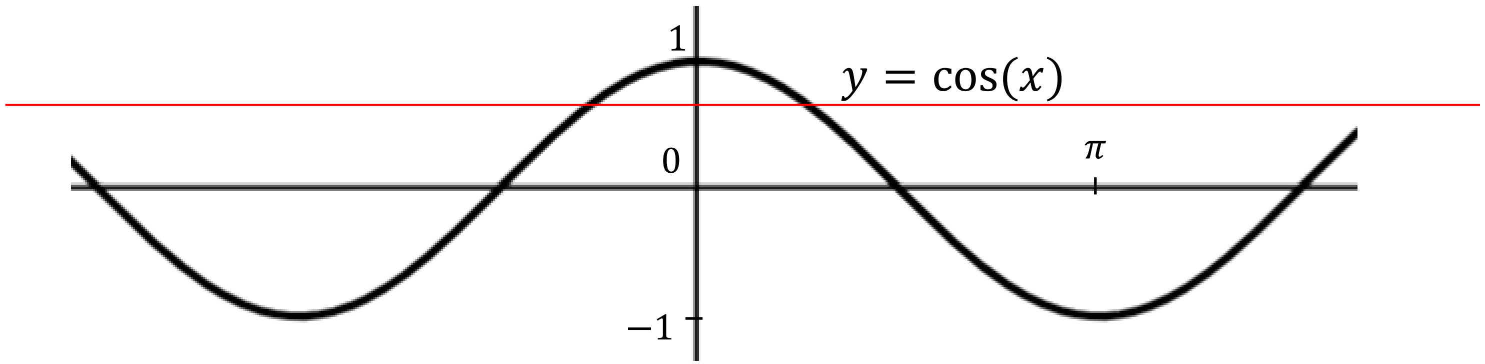
Οι συναρτήσεις cos και cos^{-1}



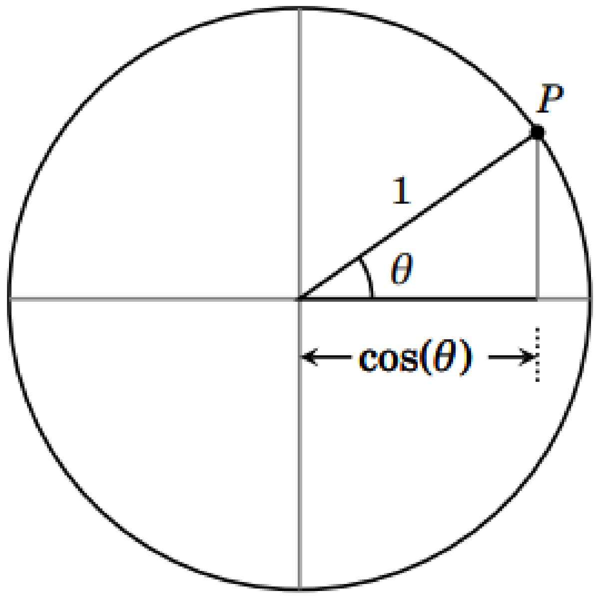
$\cos(\theta) =$ η τετμημένη του σημείου P



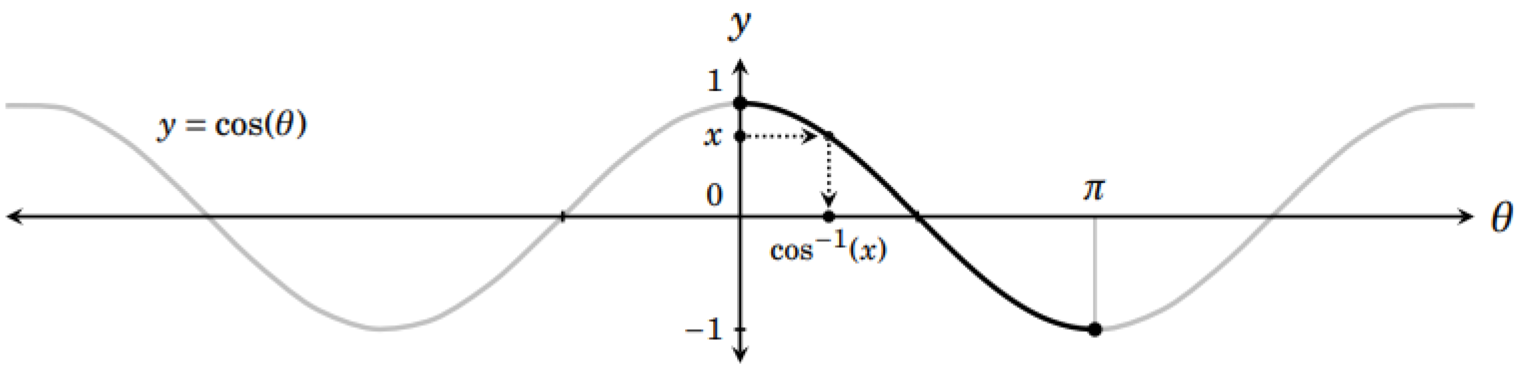
Οι συναρτήσεις cos και cos^{-1}



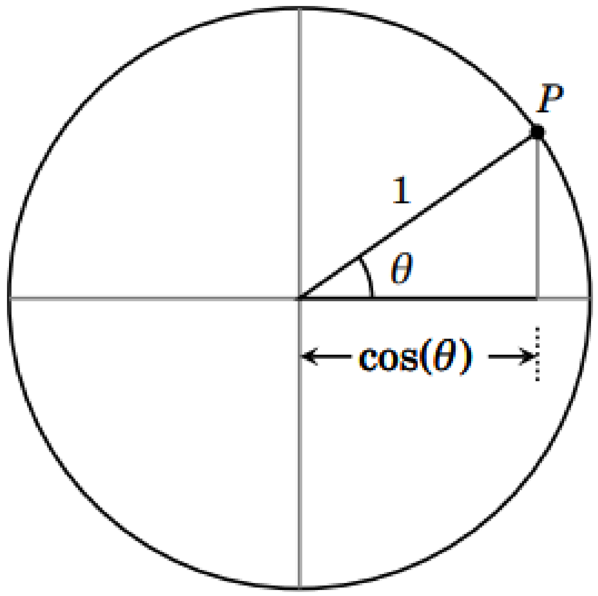
$\cos(\theta) =$ η τετμημένη του σημείου P



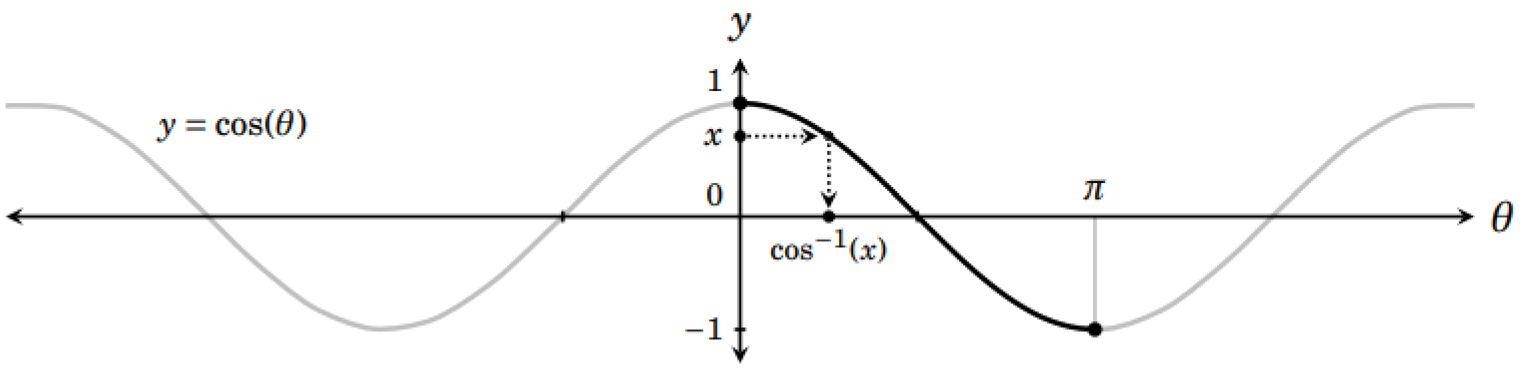
Οι συναρτήσεις cos και cos^{-1}



$\cos(\theta) =$ η τετμημένη του σημείου P

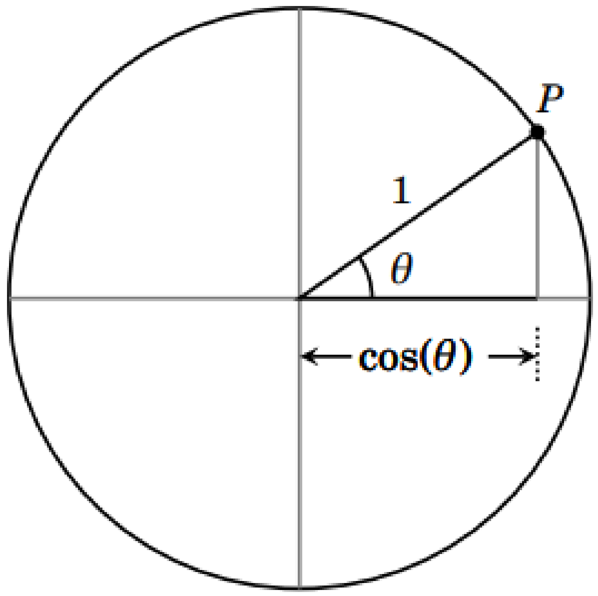


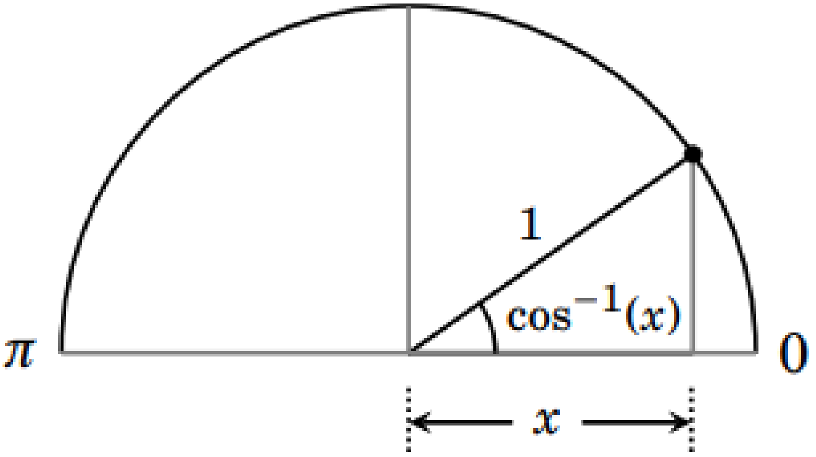
Οι συναρτήσεις cos και cos^{-1}



$\cos(\theta)$ = η τετμημένη του σημείου P

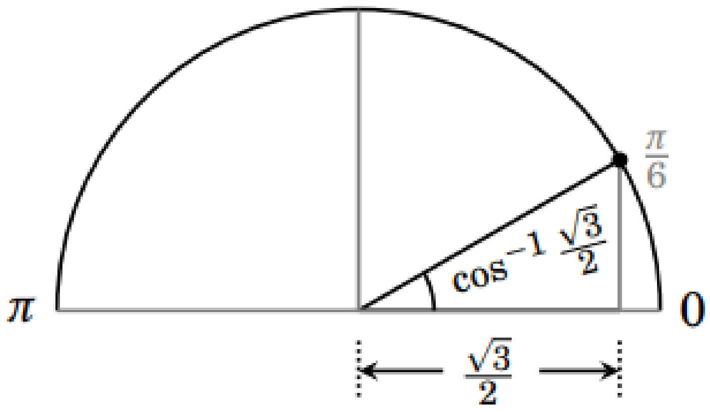
$cos^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ \kappa\alpha\iota\ \ \cos(\theta) = x \end{pmatrix}$



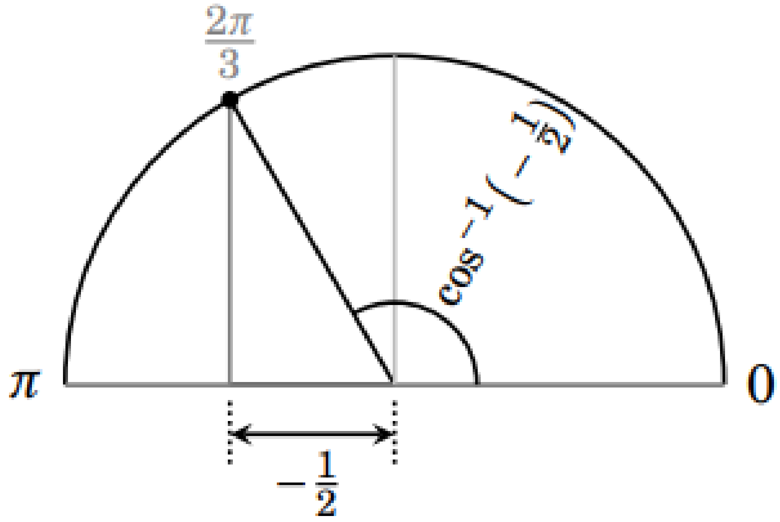


Παραδείγματα

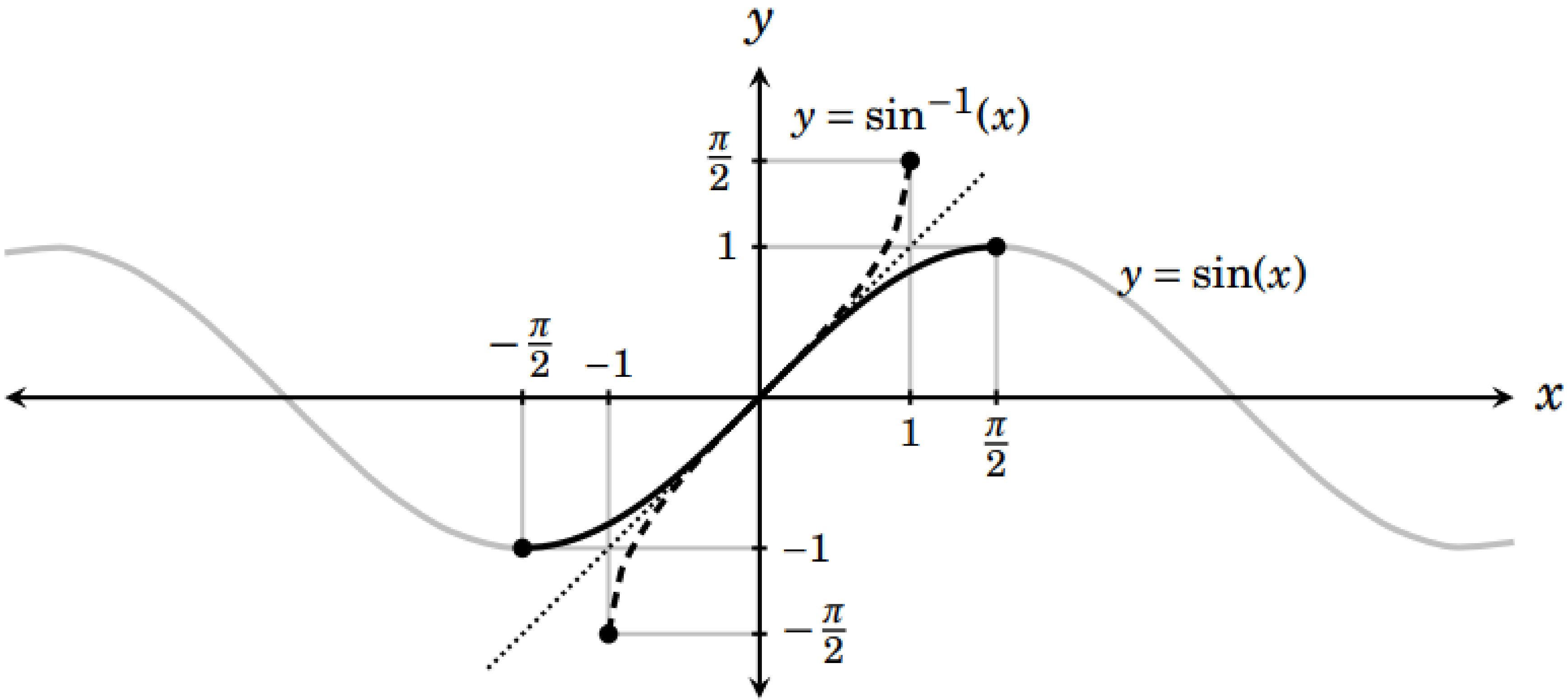
$$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ 0 \le \theta \le \pi \\ \kappa\alpha\iota\ \ \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\pi}{6}$$



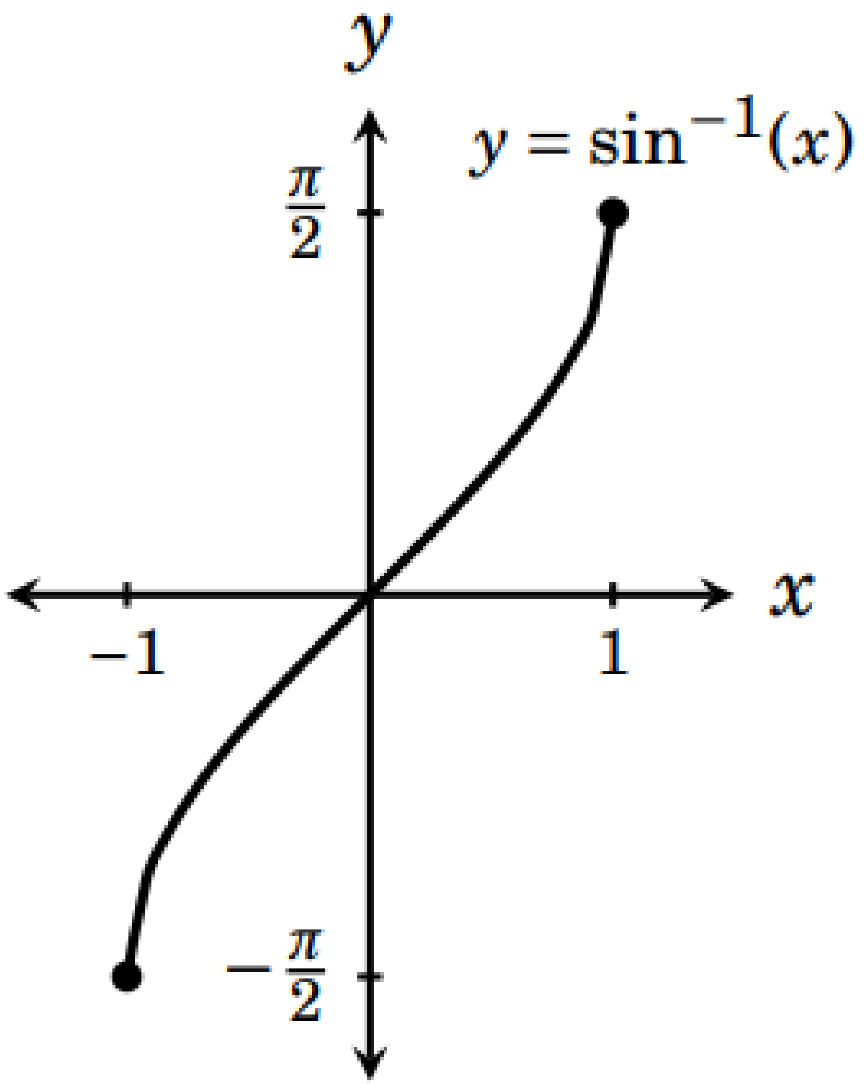
$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ \ 0 \le \theta \le \pi \\ \kappa\alpha\iota\ \ \cos(\theta) = -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{3}$$



Γραφική Παράσταση της $\sin^{-1}$

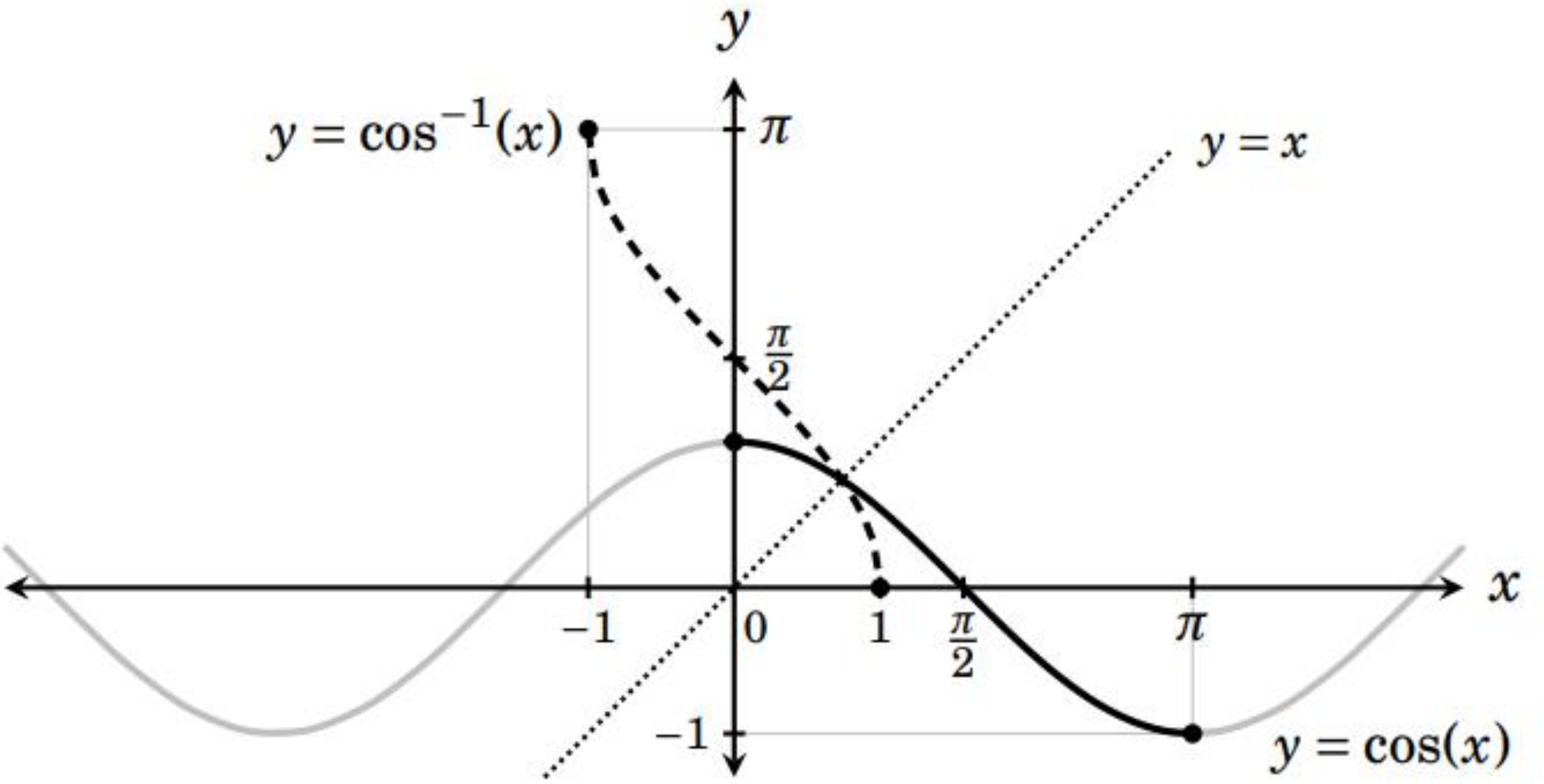


Γραφική Παράσταση της $\sin^{-1}$

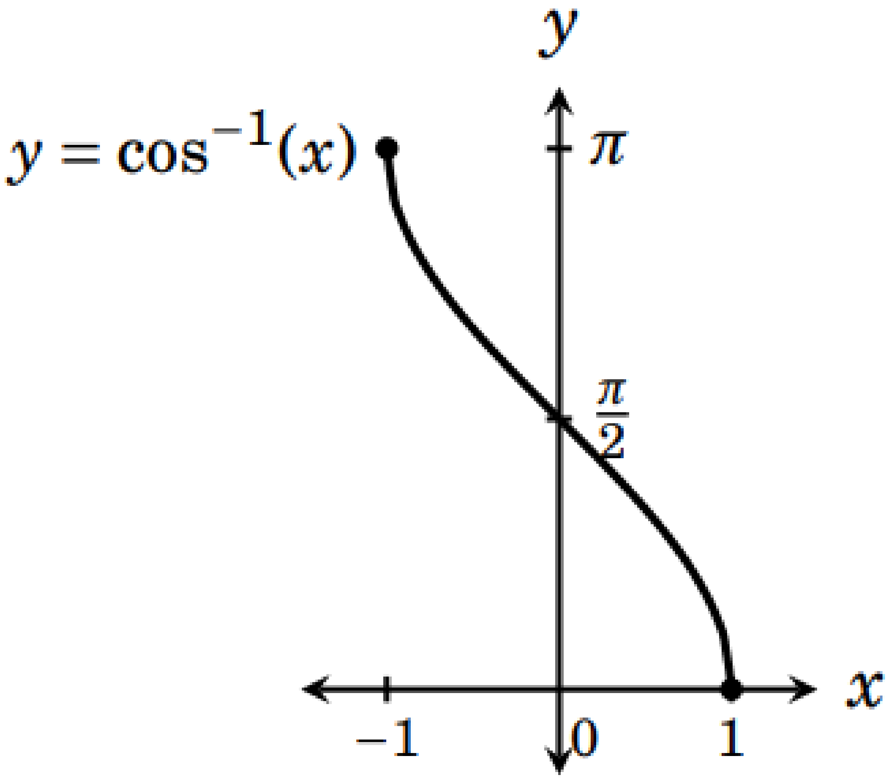


Πεδίο Ορισμού: $[-1,1]$
Σύνολο τιμών: $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Γραφική Παράσταση της $\cos^{-1}$



Γραφική Παράσταση της $\cos^{-1}$



Πεδίο Ορισμού: $[-1,1]$
Σύνολο τιμών: $[0,\pi]$

Απλοποιήσεις

Ισχύει

$$\boxed{\sin^{-1}(\sin x) = x \quad \alpha\nu \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$\boxed{\sin(\sin^{-1} x) = x \quad \alpha\nu \quad x \in [-1,1\,]}$$

Παράδειγμα

Βρείτε την ακριβή τιμή των

a) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$ b) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{8}\right)$

Παράδειγμα

Βρείτε την ακριβή τιμή των

a) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$ b) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{8}\right)$

Λύση:

a) $\frac{\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$

b)

$\frac{5\pi}{8} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) =$

$= \sin\left(\frac{8\pi}{8} - \frac{3\pi}{8}\right)$

$= \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right)$

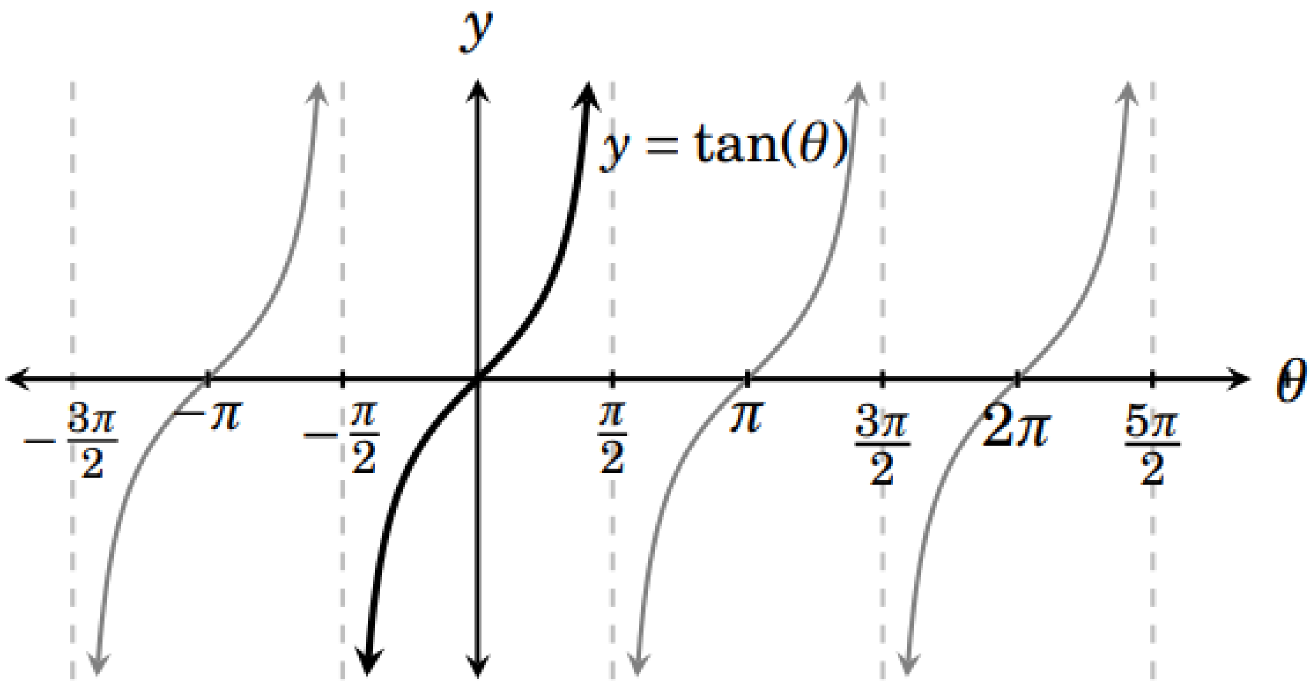
$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

$$\frac{3\pi}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = \frac{3\pi}{8}$$

Η συνάρτηση αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1}$

- Η συνάρτηση $y = \tan x$ δεν είναι 1-1.
- Περιορίζουμε το πεδίο ορισμού της εφαπτομένης στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

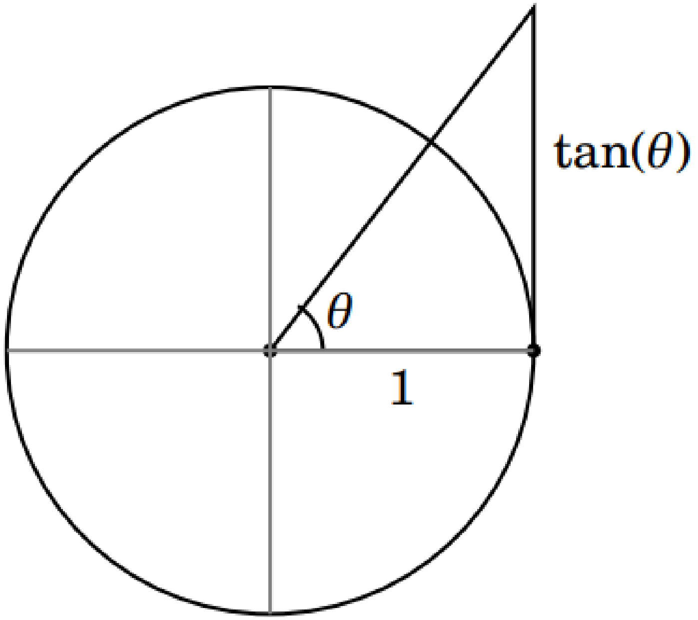


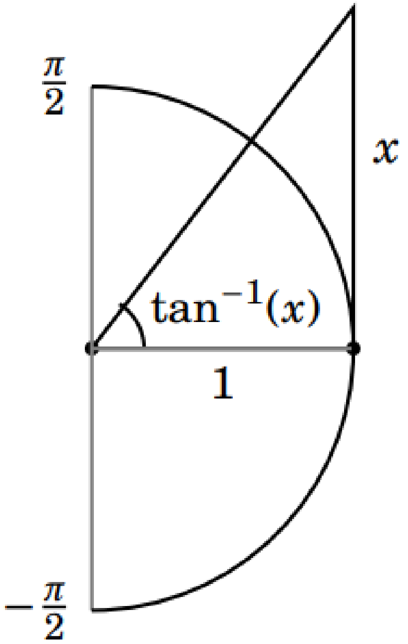
Η συνάρτηση αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1}$

$\tan(\theta) =$ απέναντι κάθετη πλευρά

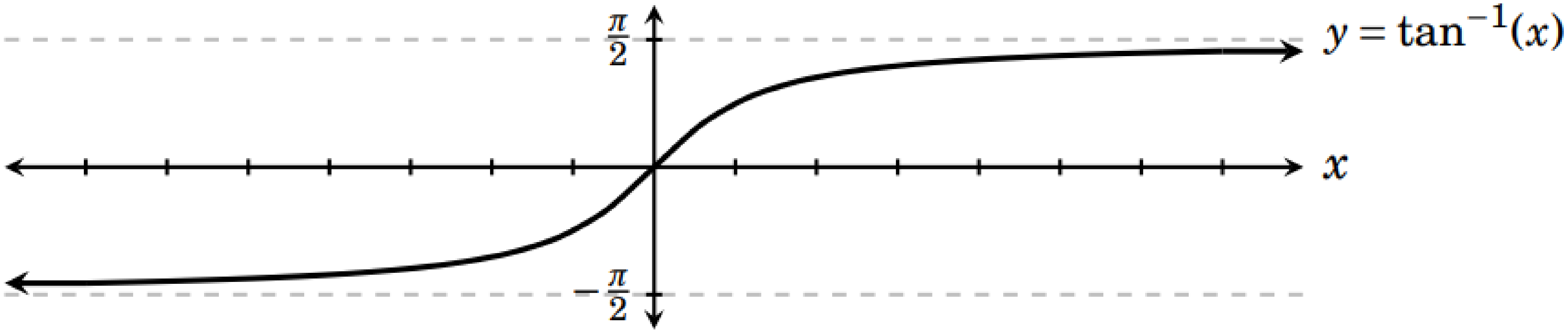
του τριγώνου

$$tan^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \eta\ \gamma\omega\nu\iota\alpha\ \theta\ \mu\varepsilon\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ \kappa\alpha\iota\ \ \tan(\theta) = x \end{pmatrix}$$



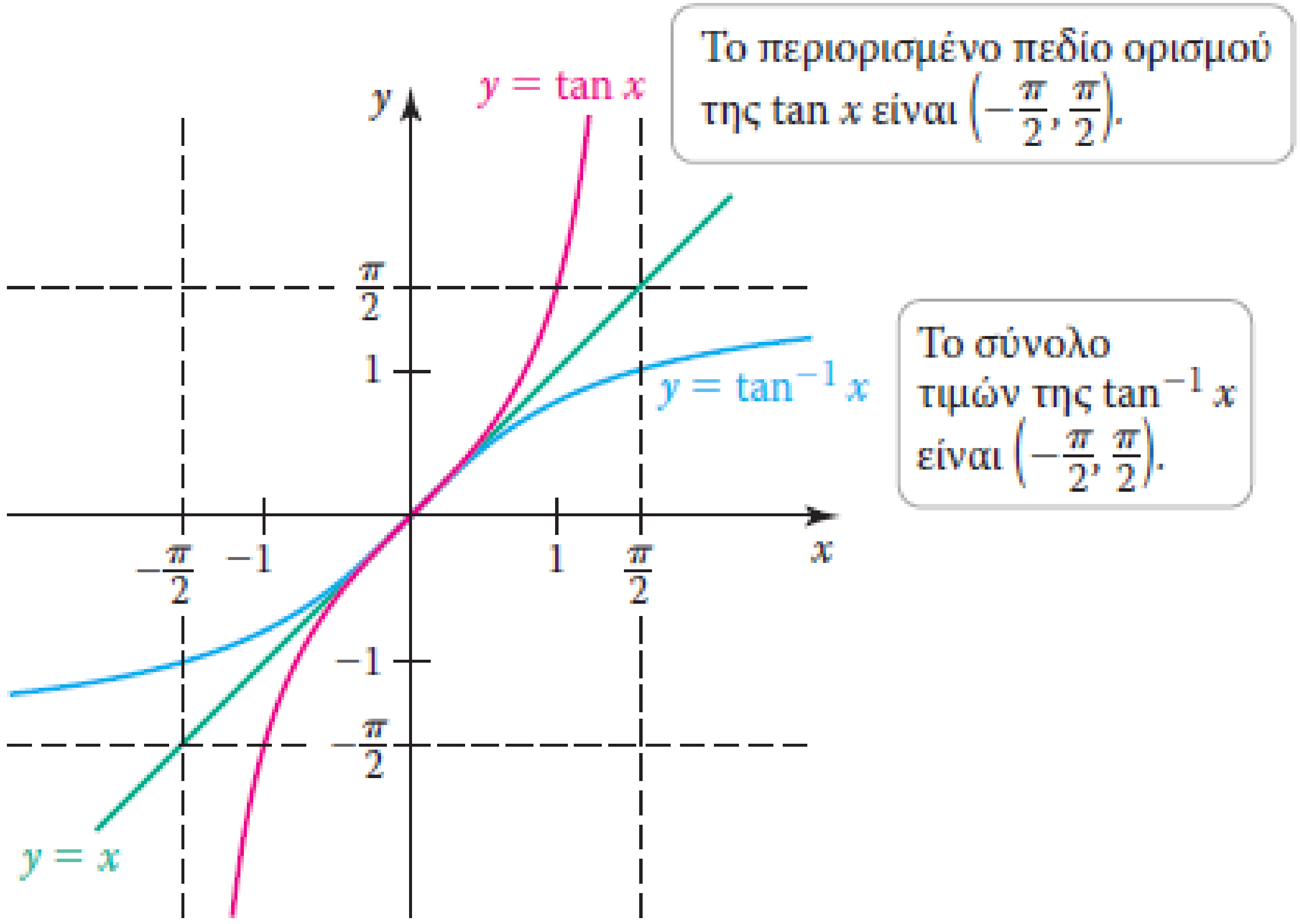


Γραφική παράσταση της $\tan^{-1} x$

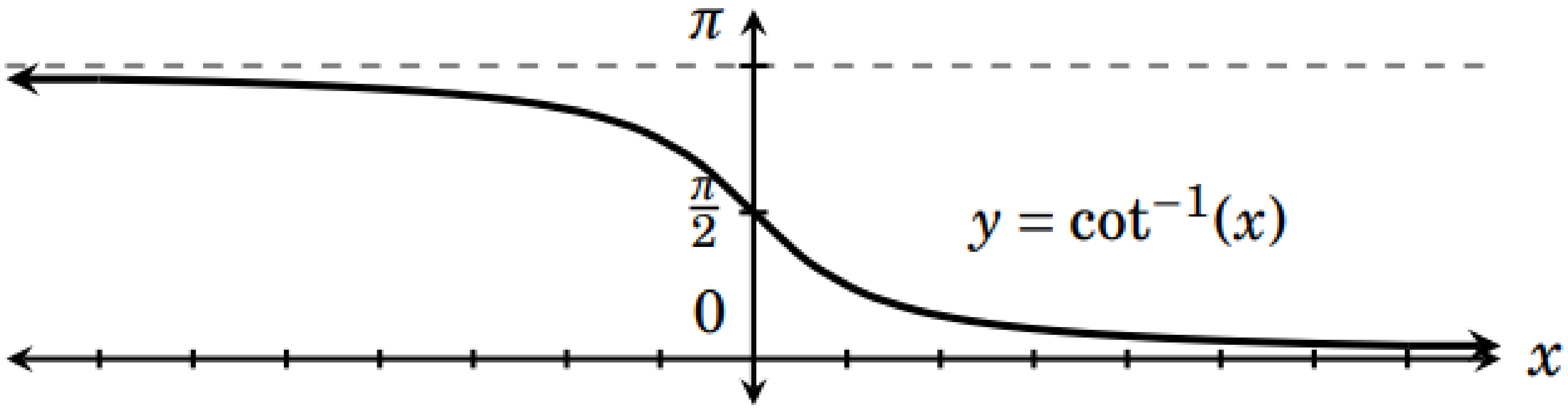


Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, \infty)$
Σύνολο τιμών: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Γραφική παράσταση της $\tan^{-1} x$



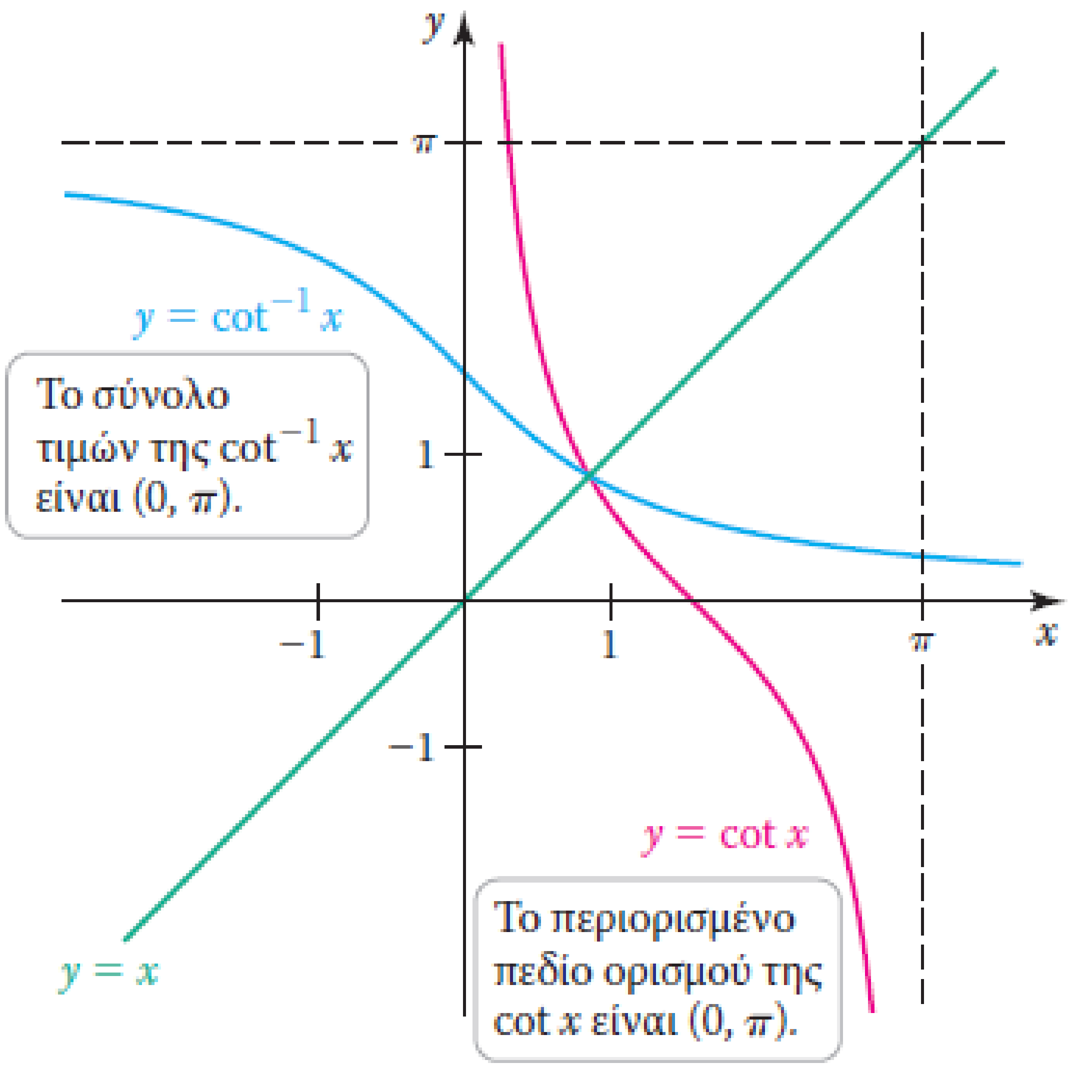
Η συνάρτηση $y = \cot^{-1} x$



Πεδίο Ορισμού: $(-\infty, \infty)$
Σύνολο τιμών: $(0, \pi)$

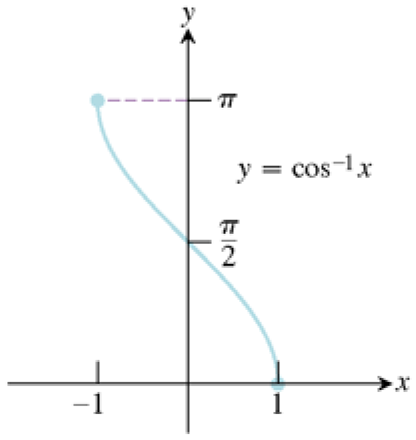
$$\cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x).$$

Η συνάρτηση $y = \cot^{-1} x$



Πεδίο ορισμού: $-1 \le x \le 1$

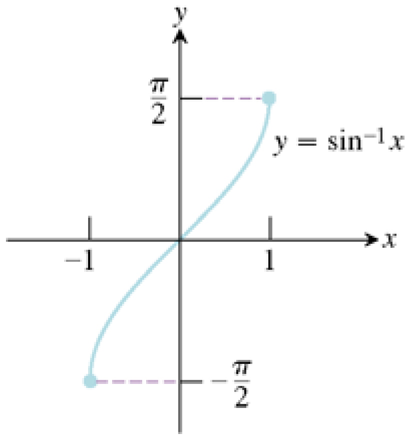
Πεδίο τιμών: $0 \le y \le \pi$



(α)

Πεδίο ορισμού: $-1 \le x \le 1$

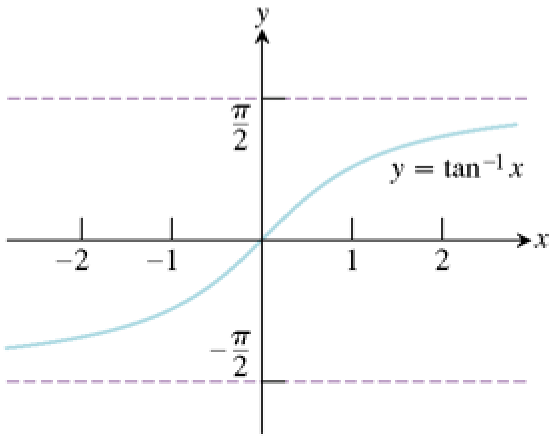
Πεδίο τιμών: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$



(β)

Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$

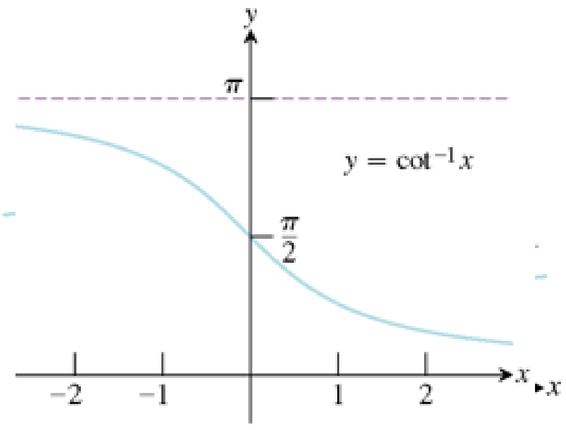
Πεδίο τιμών: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



(γ)

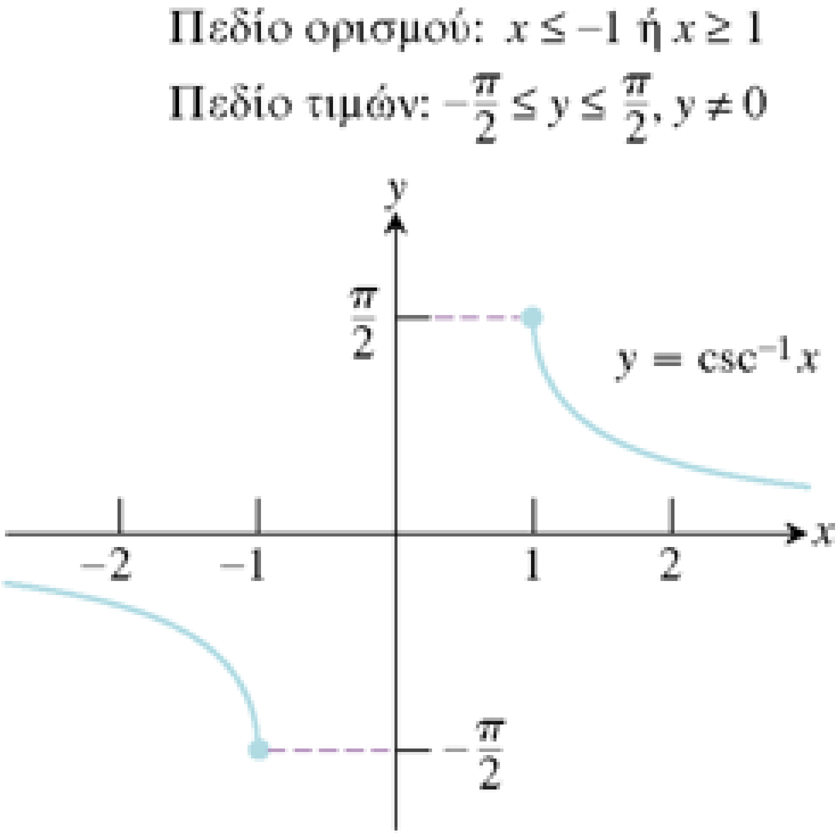
Πεδίο ορισμού: $-\infty < x < \infty$

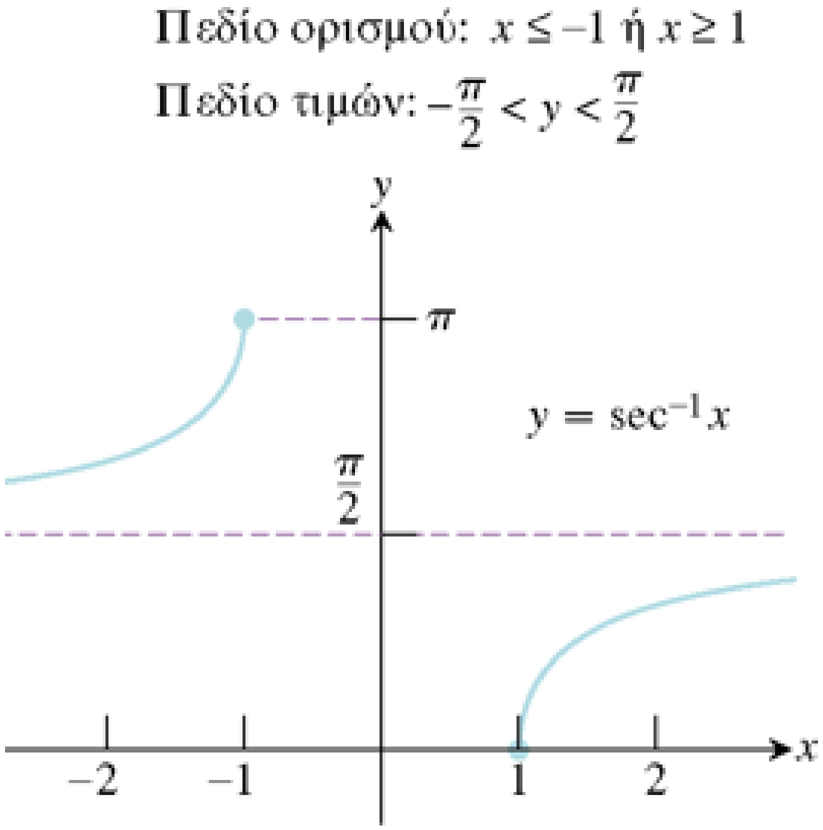
Πεδίο τιμών: $0 < y < \pi$



(δ)

Οι συναρτήσεις $y = csc^{-1} x$ και $y = sec^{-1} x$





Μετατροπή τριγωνομετρικής έκφρασης σε αλγεβρική- Το χρήσιμο τρίγωνο

Γωνία $\sin^{-1}(x) = \theta$

$$\sin(\sin^{-1} x) = ?$$
$$\cos(\sin^{-1} x) = ?$$
$$\tan(\sin^{-1} x) = ?$$
$$cot(\sin^{-1} x) = ?$$

Μετατροπή τριγωνομετρικής έκφρασης σε αλγεβρική- Το χρήσιμο τρίγωνο

Γωνία $\sin^{-1}(x) = \theta$

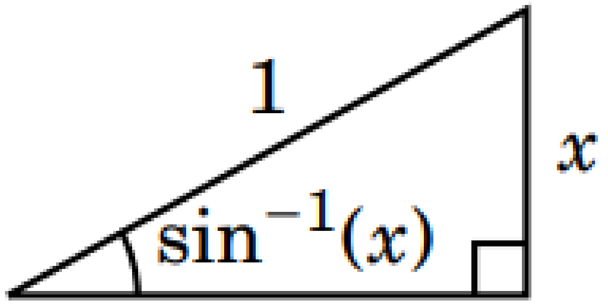
$\sin(\sin^{-1} x) = x$ για $x \in [-1,1\,]$
$\cos(\sin^{-1} x) = ?$
$\tan(\sin^{-1} x) = ?$
$cot(\sin^{-1} x) = ?$

Το χρήσιμο τρίγωνο

Γνωρίζοντας

$$\sin(\sin^{-1} x) = x$$

κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο η μια οξεία γωνία είναι $\sin^{-1} x$. Για να είναι το sin αυτής της γωνίας ίσο με x θα πρέπει η απέναντι πλευρά να τεθεί ίση με x και η υποτείνουσα ίση με 1. Η τρίτη πλευρά προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα.



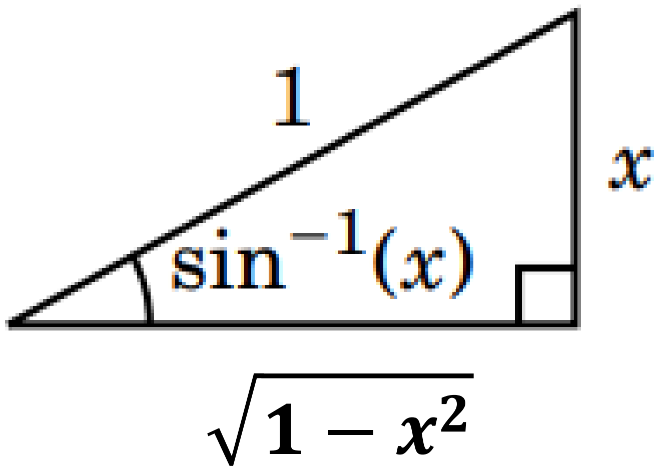
Το χρήσιμο τρίγωνο

$$\sin(\sin^{-1} x) = x$$

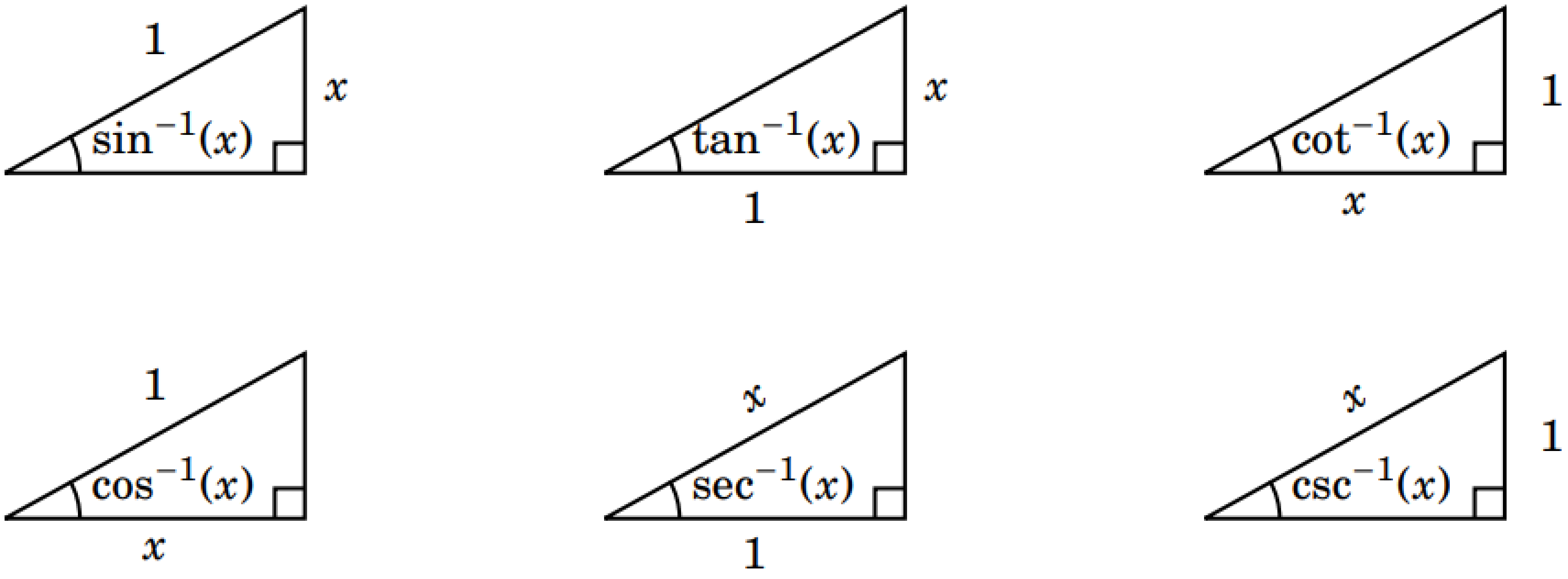
$$\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\tan(\sin^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\cot(\sin^{-1} x) \;= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{x}}$$



Χρήσιμα τρίγωνα



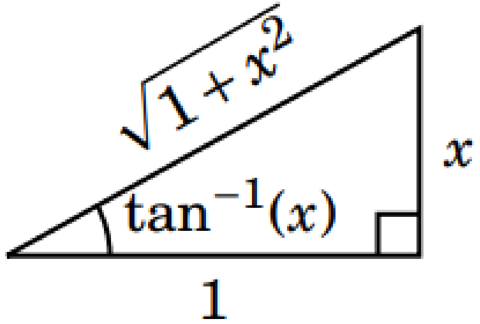
Επιλέγοντας το κατάλληλο τρίγωνο, μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς όλων των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\sin(\tan^{-1}(x))$

Παράδειγμα

Υπολογίστε το $\sin(\tan^{-1}(x))$



Λύση: $\tan^{-1}(x) = \theta \iff$

$\tan(\theta) = x$

$$\tan(\theta) = \frac{\text{απεν. κα } \theta}{\text{προσκ. κα } \theta} = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin(\tan^{-1}(x)) = \sin(\theta) = \frac{\text{απεν. κα } \theta}{\text{υποτ}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων ΙΙ

Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή για να λύσετε την εξίσωση $4\cos x - 3 = 0$

Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων ΙΙ

Χρησιμοποιήστε αριθμομηχανή για να λύσετε την εξίσωση $4\cos x - 3 = 0$

Λύση: Η εξίσωση γράφεται

$$\cos x = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \cos^{-1}(\frac{3}{4})$$

Χρησιμοποιώντας τη αριθμομηχανή βρίσκουμε

$$\cos^{-1}(\frac{3}{4}) = 0.7227\ (rad)$$

Άρα όλες οι λύσεις της εξίσωσης είναι

$$x = 2k\pi + 0.7227 \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - 0.7227 \qquad k \in \mathbb{Z}$$