



# Σήματα και Συστήματα

Ενότητα 4: Συστήματα συνεχούς χρόνου

Εξάμηνο Διδασκαλίας: 3<sup>ο</sup>

Διδάσκων: Βασίλης Ασπιώτης

Email: [v.aspiotis@uoi.gr](mailto:v.aspiotis@uoi.gr)

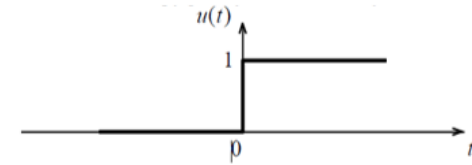
# Στο προηγούμενο μάθημα... Στοιχειώδη Σήματα

1. Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση
2. Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Δέλτα
3. Η Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης (Ράμπα)
4. Εκθετικά Σήματα
5. Ημιτονοειδή Σήματα
6. Τετραγωνικός Παλμός
7. Τριγωνικός Παλμός
8. Συνάρτηση Δειγματοληψίας
9. Τραίνο κρουστικών συναρτήσεων (σήμα Comb)

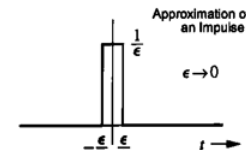
# Στο προηγούμενο μάθημα... Στοιχειώδη Σήματα

1. Μοναδιαία Βηματική Συνάρτηση
2. Κρουστική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Δέλτα
3. Η Συνάρτηση Μοναδιαίας Κλίσης (Ράμπα)
4. Εκθετικά Σήματα
5. Ημιτονοειδή Σήματα
6. Τετραγωνικός Παλμός
7. Τριγωνικός Παλμός
8. Συνάρτηση Δειγματοληψίας
9. Τραίνο κρουστικών συναρτήσεων (σήμα Comb)

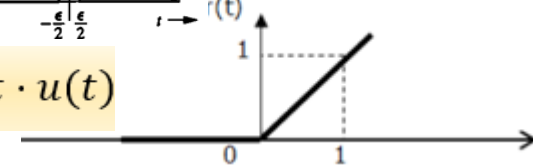
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{αν } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

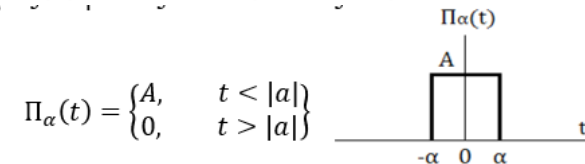


$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases} \text{ ή } r(t) = t \cdot u(t)$$

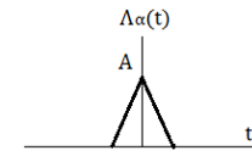


$$x(t) = A\beta^{st}$$

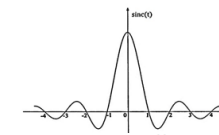
$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$



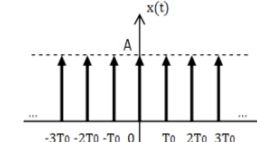
$$\Lambda_\alpha(t) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t|}{\alpha}\right), & t < \alpha \\ 0, & t > \alpha \end{cases}$$



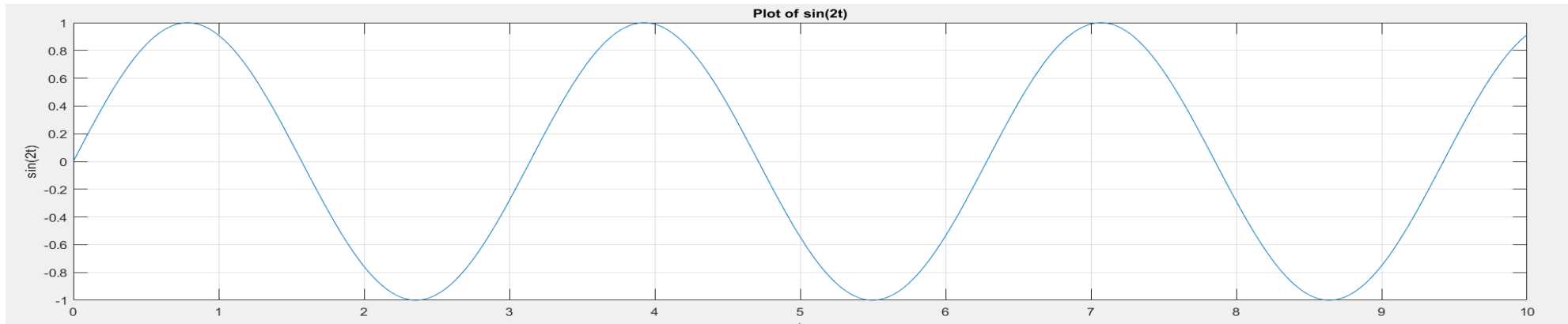
$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$



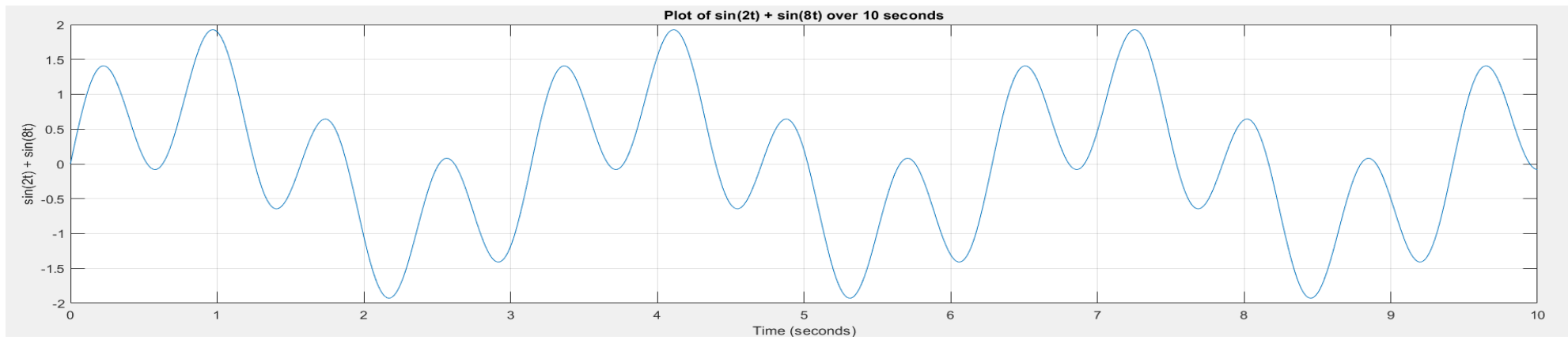
$$\text{comb}(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0)$$



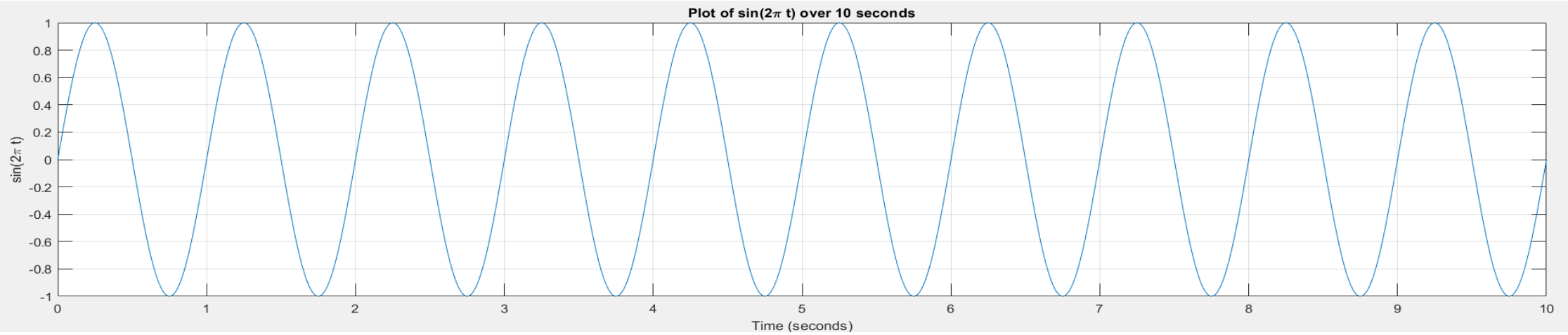
$$\sin(2t)$$



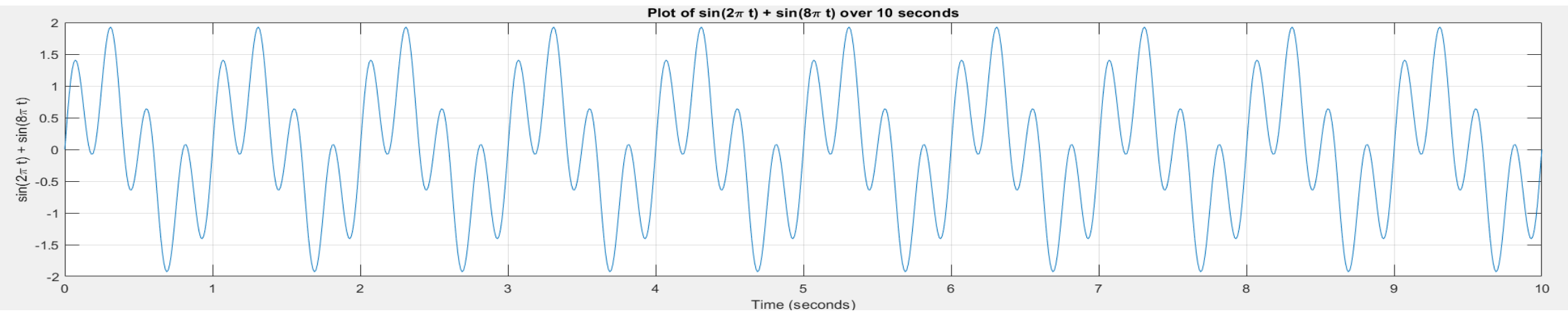
$$\sin(2t) + \sin(8t)$$



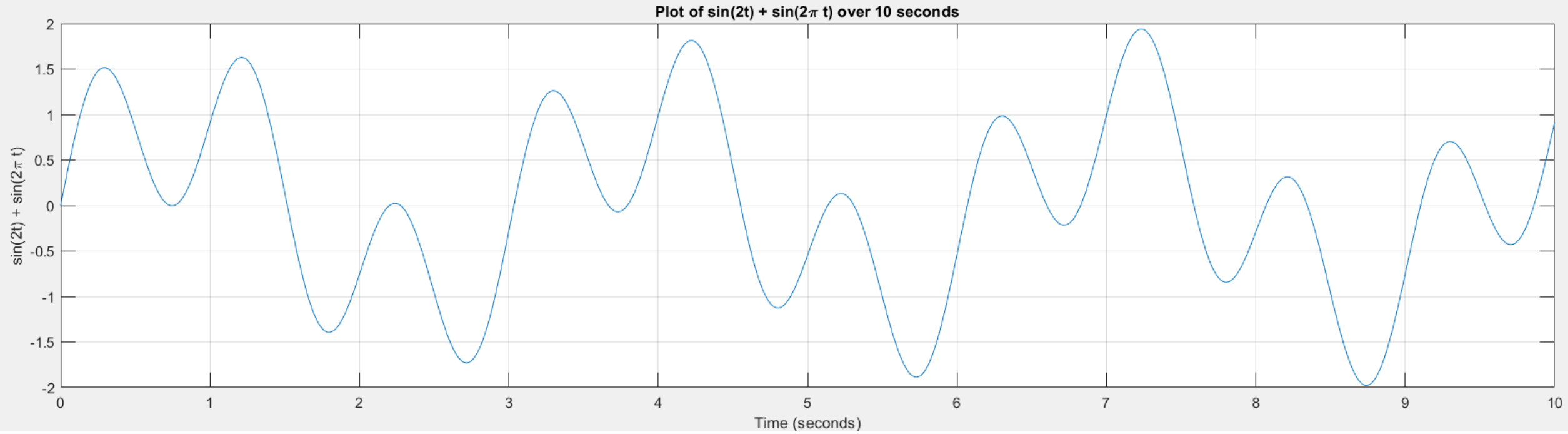
$$\sin(2\pi t)$$



$$\sin(2\pi t) + \sin(8\pi t)$$



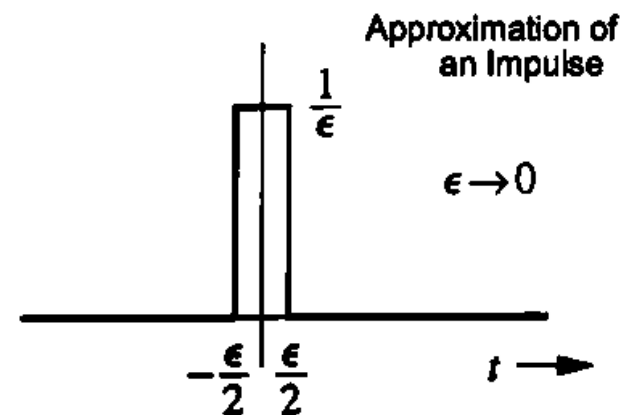
$$\sin(2t) + \sin(2\pi t)$$



# Κρουστική Συνάρτηση (1/2)

- Η **κρουστική (impulse) συνάρτηση** ή κρουστικό σήμα ονομάζεται και συνάρτηση **δέλτα** ή συνάρτηση **Dirac**. Επιτρέπει την περιγραφή φαινομένων με στιγμιαία διάρκεια.

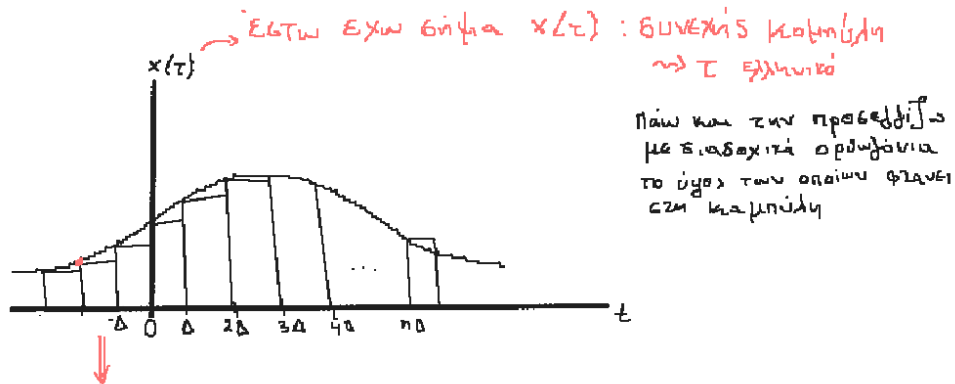
$$\delta(t) = \begin{cases} 0, \text{αν } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$



μπορεί να θεωρηθεί σαν μία “συνάρτηση” που μηδενίζεται για κάθε  $t \neq 0$  και το συνολικό εμβαδόν του τμήματος του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη  $\delta(t)$  και τον άξονα των  $t$  είναι ίσο με την μονάδα.

# Κάθε σήμα συνεχούς χρόνου μπορεί να εκφραστεί ως ολοκλήρωμα σταθμισμένων ολισθημένων κρουστικών:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau$$



π.χ.

Χ στη θέση  $-2\Delta$

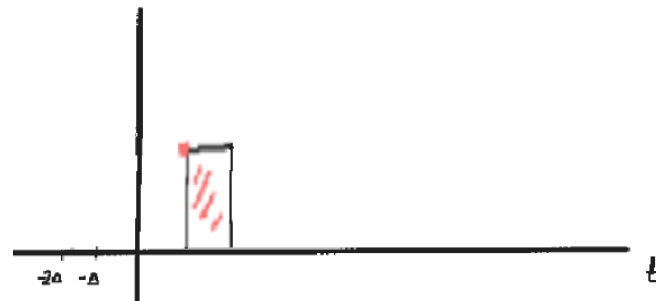


$\Delta$ : Εύρος του ορθογωνίου



π.χ.

Χ στη θέση  $-\Delta$



# Περιεχόμενα ενότητας

## 1. Ορισμός και Κατηγορίες Συστημάτων

- Συστήματα Συνεχούς Χρόνου
- Συστήματα Διακριτού Χρόνου

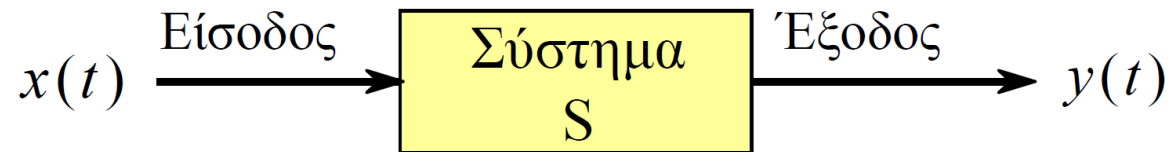
## 2. Συνδέσεις Συστημάτων

## 3. Είδη Συστημάτων

- Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
- Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
- Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
- Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
- Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

# Ορισμός συστήματος

- Σύστημα είναι κάθε οντότητα που επενεργεί σε κάποιο σήμα  $x(t)$  και ως αποτέλεσμα παράγει ένα (νέο) σήμα  $y(t)$ .
- Από μαθηματική άποψη ένα σύστημα θεωρείται ως ένας μετασχηματισμός  $\mathcal{S}[\cdot]$  που μετασχηματίζει ένα σήμα  $x(t)$  σε ένα άλλο σήμα  $y(t)$  σύμφωνα με τη σχέση  $y(t) = \mathcal{S}[x(t)]$ .
- Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται **σχέση εισόδου – εξόδου** και περιγράφει ένα σύστημα στο πεδίο του χρόνου (time domain) με βάση την είσοδο και την έξοδό του, αγνοώντας πλήρως την εσωτερική δομή και περιγραφή του συστήματος.

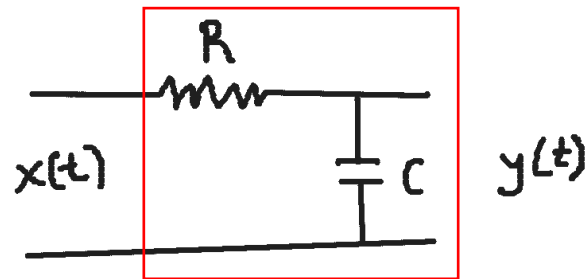
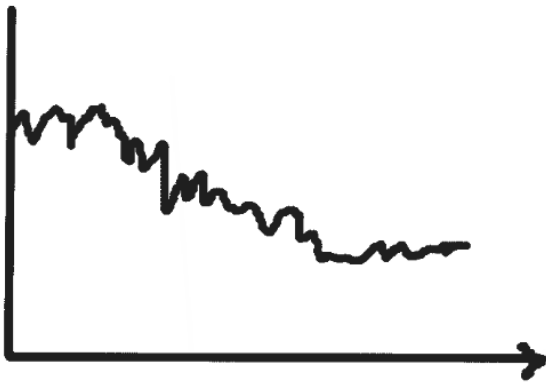


*Σχηματική περιγραφή του συστήματος  $S$ .*

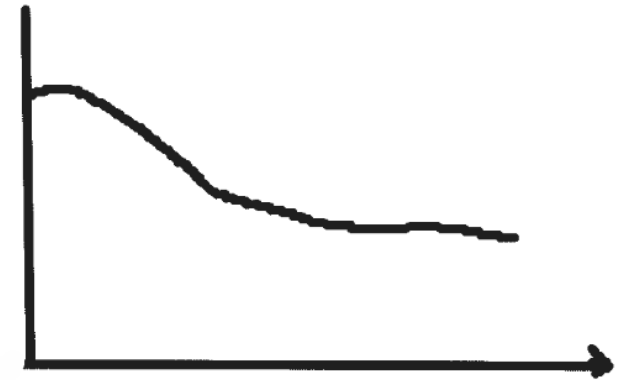
# Ορισμός συστήματος - Παραδείγματα

- Ένα σύστημα ψηφιακής καταγραφής ήχου μετατρέπει ένα ακουστικό σήμα σε μια σειρά από αριθμούς (bits) τους οποίους καταγράφει, π.χ., σε οπτικό δίσκο.
- Ηχητικό φίλτρο για μουσική. Παίρνει το ηχητικό σήμα, το τροποποιεί αφαιρώντας πχ τις ψηλές συχνότητες
- Ένα σύστημα επικοινωνίας μεταφέρει πληροφορία, π.χ. το σήμα φωνής, από ένα σημείο του χώρου, που λέγεται πηγή, σε ένα άλλο σημείο, που είναι ο προορισμός χρήσης της.

# Ορισμός συστήματος - Παραδείγματα



Analog filter



# Κατηγορίες συστημάτων (1/6)

(A) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

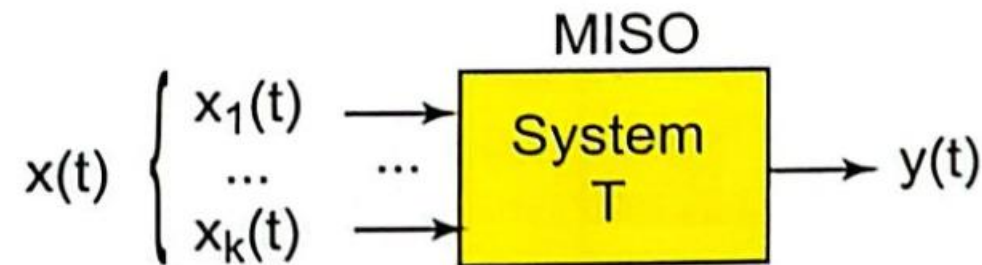
- Συστήματα **μιας εισόδου - μιας εξόδου** (SISO – Single Input, Single Output).
- Παραδείγματα απλών συστημάτων μιας εισόδου-μιας εξόδου είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιαστής  $y(t) = \alpha \cdot x(t)$  και το σύστημα καθυστέρησης  $y(t) = x(t - t_0)$ .



# Κατηγορίες συστημάτων (2/6)

(Α) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

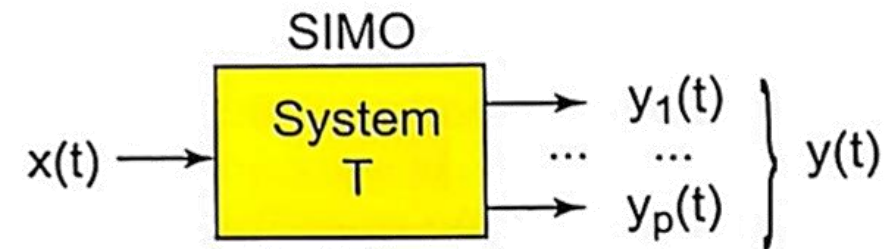
- Συστήματα με **πολλές εισόδους και μία έξοδο** (MISO – Multiple Input, Single Output).
- Παράδειγμα τέτοιων συστημάτων είναι ο αθροιστής δύο ή περισσότερων σημάτων  $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$  και ο πολλαπλασιαστής  $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$



# Κατηγορίες συστημάτων (3/6)

(Α) Ανάλογα με το **πλήθος των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα με **μία είσοδο και πολλές εξόδους** (SIMO – Single Input, Multiple Output).



- Συστήματα με **πολλές εισόδους και πολλές εξόδους** (MIMO – Multiple Input, Multiple Output).



# Κατηγορίες συστημάτων (4/6)

(B) Ανάλογα με τη **φύση των εισόδων – εξόδων**:

- Συστήματα **συνεχούς χρόνου** ή **αναλογικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι αναλογικά σήματα.
- Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι σήματα διακριτού χρόνου, τότε τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως συστήματα **διακριτού χρόνου**.
- **Αιτιοκρατικά συστήματα**, όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι απλά αιτιοκρατικά σήματα.
- Όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι στοχαστικά σήματα, τα συστήματα χαρακτηρίζονται ως **στοχαστικά συστήματα**.

# Κατηγορίες συστημάτων (5/6)

- **Σύστημα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ)** (continuous time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου **συνεχούς χρόνου**  $x(t)$  και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου **συνεχούς χρόνου**:

$$y(t) = S[x(t)]$$

- **Σύστημα διακριτού χρόνου (ΣΔΧ)** (discrete time system) είναι κάθε οντότητα που ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου  $\{x(n)\}$  **διακριτού χρόνου** και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου  $\{y(n)\}$  **διακριτού χρόνου**:

$$\{y(n)\} = T[\{x(n)\}]$$

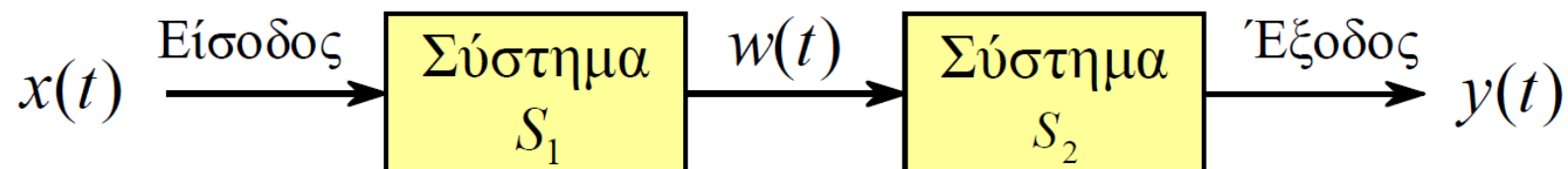
# Κατηγορίες συστημάτων (6/6)

- Υπάρχουν επίσης συστήματα τα οποία μετασχηματίζουν αναλογικές εισόδους σε διακριτές εξόδους και το αντίθετο. Τέτοια συστήματα είναι γνωστά ως υβριδικά συστήματα.
- Ένα σύστημα περιγράφεται δομικά καθορίζοντας
  - ✓ Την τοπολογία του συστήματος.
  - ✓ Τον τρόπο διασύνδεσης των στοιχείων του.
  - ✓ Τη συναρτησιακή περιγραφή των σχέσεων των στοιχείων (μαθηματικό μοντέλο).

# Συνδέσεις συστημάτων (1/4)

- Ένα σύστημα μπορεί να αναλυθεί σε απλούστερα συστήματα τα οποία διασυνδέονται μεταξύ τους με διάφορους τρόπους.
- Οι βασικότερες συνδέσεις μεταξύ συστημάτων είναι η **σειριακή**, η **παράλληλη**, η **μεικτή** και η σύνδεση με **ανατροφοδότηση** ή **ανάδραση**.

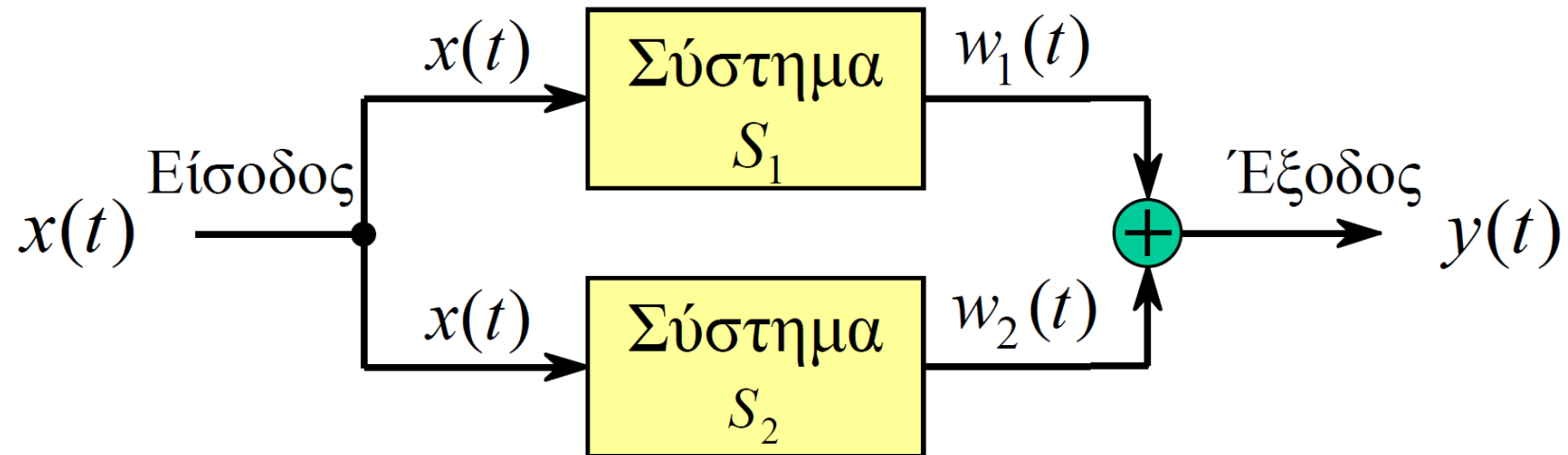
## 1. Σειριακή σύνδεση συστημάτων



Η έξοδος είναι :  $y(t) = S_2[S_1[x(t)]]$

# Συνδέσεις συστημάτων (2/4)

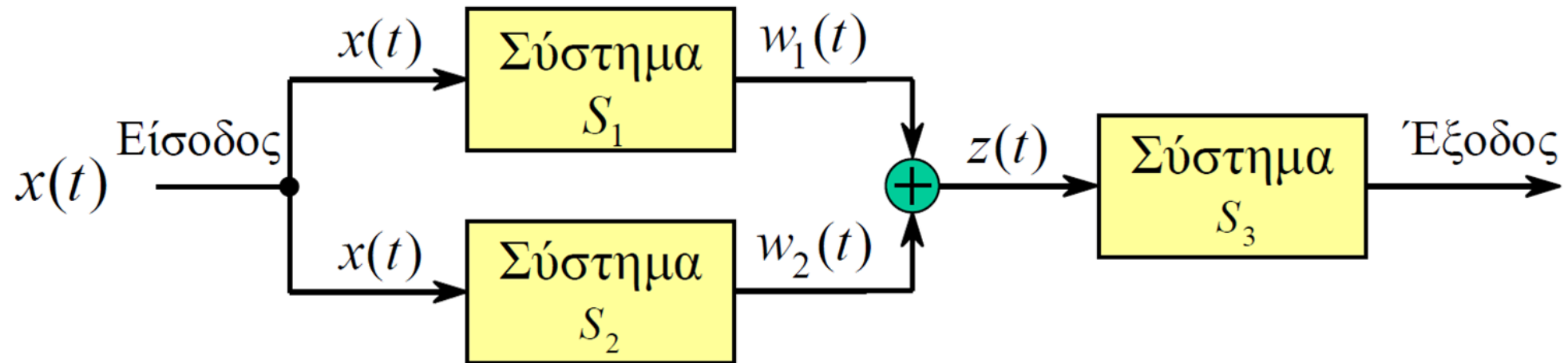
## 2. Παράλληλη σύνδεση συστημάτων



Η έξοδος είναι :  $y(t) = S1[x(t)] + S2[x(t)]$

# Συνδέσεις συστημάτων (3/4)

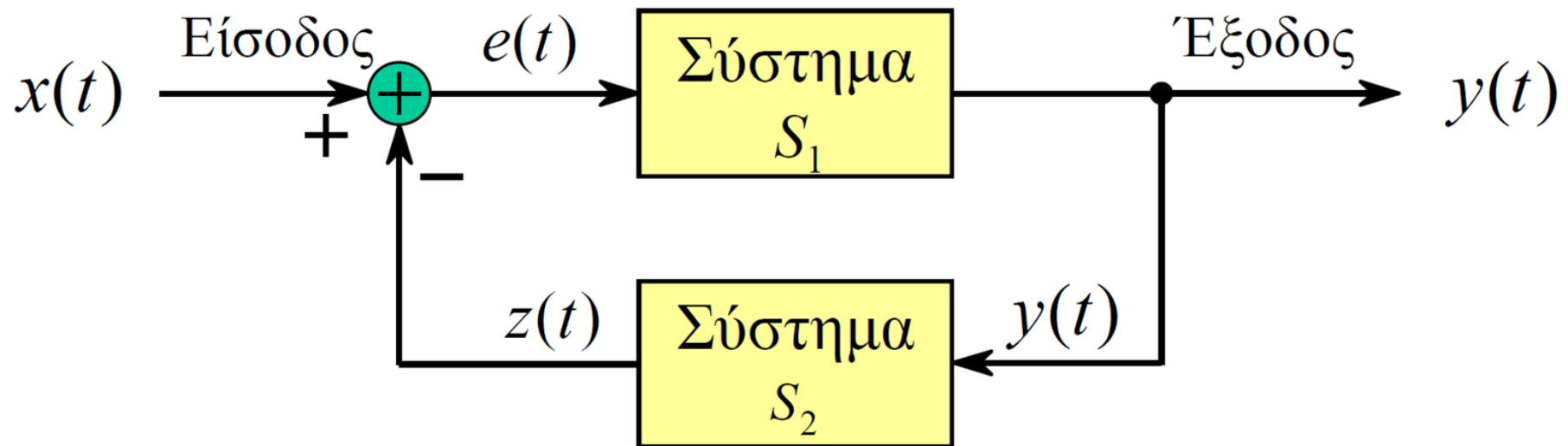
## 3. Μεικτή σύνδεση συστημάτων



Η έξοδος είναι :  $y(t) = S3[S1[x(t)] + S2[x(t)]]$

# Συνδέσεις συστημάτων (4/4)

## 4. Σύνδεση συστημάτων με ανατροφοδότηση-ανάδραση



Η έξοδος είναι :  $y(t) = S_1[x(t)] \pm S_2[x(t)]$

# Είδη συστημάτων

- Ένα σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση ηρεμίας** τη χρονική στιγμή  $t_0$ , εάν δεν έχει υποστεί διέγερση από κάποιο σήμα για  $t < t_0$ . Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα δεν έχει αποθηκευμένη ενέργεια κατά τη χρονική στιγμή  $t = t_0$ .
- Είδη συστημάτων που βρίσκονται σε κατάσταση αρχικής ηρεμίας:
  - Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα
  - Αιτιατά και Μη Αιτιατά Συστήματα
  - Στατικά και Δυναμικά Συστήματα
  - Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα
  - Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (1/10)

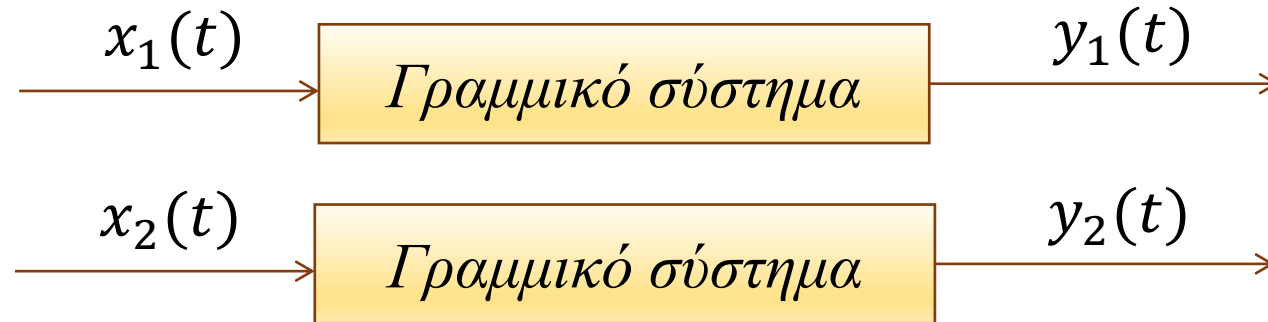
- Ένα σύστημα που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία ονομάζεται **γραμμικό**, όταν και μόνον όταν δοθέντων δύο σημάτων εισόδου  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$ , ισχύει η σχέση:

$$S[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1S[x_1(t)] + a_2S[x_2(t)]$$

- Δηλαδή, η απόκριση του συστήματος σε είσοδο που είναι ο γραμμικός συνδυασμός δύο σημάτων, ισούται με τον αντίστοιχο **γραμμικό συνδυασμό των αποκρίσεων** του συστήματος σε καθένα από τα σήματα αυτά.
- Αυτή είναι η **αρχή της υπέρθεσης** (επαλληλίας - superposition) και επεκτείνεται για οποιοδήποτε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό σημάτων.

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (2/10)

□ Γραμμικό σύστημα



$$\begin{aligned} a \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t) &\rightarrow \text{Γραμμικό σύστημα} \rightarrow y(t) = \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) \\ &= \alpha \cdot S\{x_1(t)\} + \beta \cdot S\{x_2(t)\} \end{aligned}$$

$$y(t) = S\{\alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)\} = \alpha \cdot S\{x_1(t)\} + \beta \cdot S\{x_2(t)\} = \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t)$$

*Αρχή υπέρθεσης*

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (3/10)

Γραμμικά είναι τα συστήματα εκείνα τα οποία έχουν τις ιδιότητες της ομογένειας και της προσθετικότητας.

- **Ομογένεια:** Εάν η είσοδος  $x(t)$  προκαλεί την έξοδο  $y(t)$ , τότε η είσοδος  $ax(t)$  θα προκαλεί την έξοδο  $ay(t)$ . Αυτό πρακτικά σημαίνει πως ο πολλαπλασιασμός της εισόδου επί μια σταθερά  $a$  προκαλεί έναν αντίστοιχο πολλαπλασιασμό της εξόδου.
- Τέτοια συστήματα είναι οι ενισχυτές (όταν λειτουργούν στη γραμμική περιοχή) και η αντίσταση θεωρώντας σαν είσοδο το ρεύμα και σαν έξοδο την τάση στα άκρα της

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$ax(t) \rightarrow ay(t)$$

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (4/10)

Γραμμικά είναι τα συστήματα εκείνα τα οποία έχουν τις ιδιότητες της ομογένειας και της προσθετικότητας.

- **Προσθετικότητα:** Εάν η είσοδος  $x_1(t)$  δίνει στην έξοδο το σήμα  $y_1(t)$  και η είσοδος  $x_2(t)$  δίνει αντίστοιχα το  $y_2(t)$ , τότε εάν στην είσοδο εφαρμοστεί το  $x_1(t) + x_2(t)$  θα προκύψει στην έξοδο το σήμα  $y_1(t) + y_2(t)$

Η ιδιότητα της **προσθετικότητας** μας λέει ότι αν

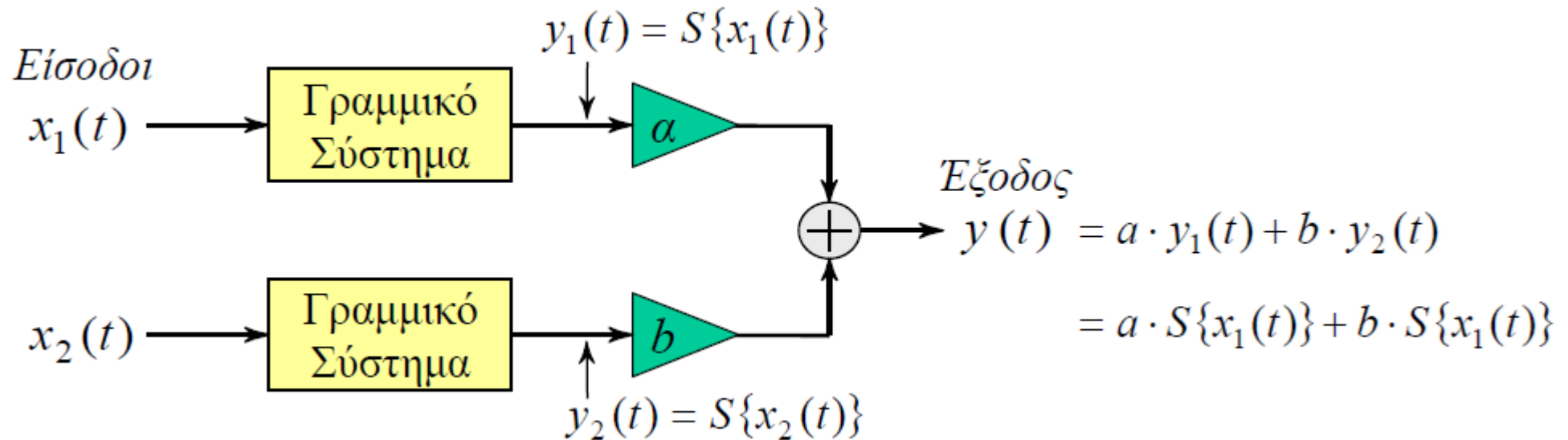
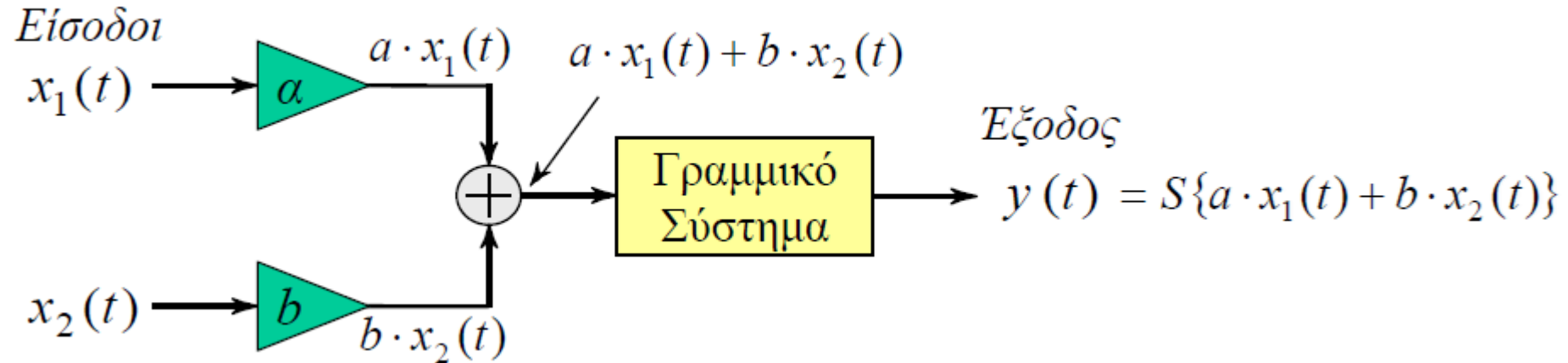
$$x_1(t) \rightarrow y_1(t), \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

τότε

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (5/10)

Σχηματική περιγραφή της γραμμικότητας ενός συστήματος



# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (6/10)

## □ Γραμμικό σύστημα

### Παραδείγματα

- Ηλεκτρικά κυκλώματα τα οποία περιλαμβάνουν αντιστάσεις, πυκνωτές και πηνία.
- Ενισχυτές και φίλτρα.
- Συστήματα διάδοσης ηχητικών ή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.
- Μηχανικά συστήματα που περιλαμβάνουν μάζες, ελατήρια και απόσβεση.

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (7/10)

## □ Γραμμικό σύστημα

### Παραδείγματα

- Συστήματα συνεχούς χρόνου στα οποία η έξοδος προκύπτει από την παραγωγή ή την ολοκλήρωση της εισόδου.
- Συστήματα διακριτού χρόνου όπου η έξοδος προκύπτει από την διαφορά ή την άθροιση διαδοχικών τιμών της εισόδου.
- Τα ταυτοτικά συστήματα, δηλαδή συστήματα στα οποία η έξοδος είναι ίση με την είσοδο.
- Το μηδενικά συστήματα, όπου η έξοδος είναι μηδενική ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη τιμή της εισόδου.

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (8/10)

## □ Μη – Γραμμικό σύστημα

### Παραδείγματα

- Συστήματα στα οποία η έξοδος ισούται με κάποια **δύναμη της τιμής της εισόδου**, για παράδειγμα η ισχύς που ξοδεύεται σε μια αντίσταση συναρτήσει της τάσης που εφαρμόζεται στα άκρα της.
- Συστήματα ανίχνευσης του μέγιστου ενός σήματος, μετατροπείς του ημιτόνου σε τετραγωνικό σήμα, συστήματα διπλασιασμού της συχνότητας κλπ.
- Συστήματα τα οποία επιδεικνύουν τις συνηθισμένες παραμορφώσεις των ηλεκτρονικών κυκλωμάτων όπως ψαλιδισμό, crossover distortion και slowing.

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (9/10)

- Σε ένα γραμμικό σύστημα ενδέχεται:
  - Να εξαρτάται η έξοδος άμεσα από το χρόνο
  - Να μην εξαρτάται η έξοδος άμεσα από το χρόνο
  - Η έξοδος να προκύπτει από τη χρονική μετατόπιση της εισόδου
  - Η έξοδος να προκύπτει από τη χρονική κλιμάκωση της εισόδου (συμπίεση ή αποσυμπίεση)
- Παραδείγματα γραμμικών συστημάτων

$$y(t) = 5x(t)$$

$$y(t) = 5t \cdot x(t)$$

$$y(t) = 5t^3 \cdot x(t - 6)$$

$$y(t) = x(2t)$$

$$y(t) = 5t^3 \cdot x(t)$$

# Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα (10/10)

- Συστήματα στα οποία η σχέση εισόδου-εξόδου περιλαμβάνει την είσοδο υψωμένη σε δύναμη **δεν** είναι γραμμικά.

## Γραμμικά

$$\alpha) y(t) = 5x(t)$$

$$\beta) y(t) = 5t^3 x(t - 2)$$

$$\gamma) y(t) = 5t^2 \cdot x(t + 6)$$

## Μη Γραμμικά

$$\alpha) y(t) = 5x^2(t)$$

$$\beta) y(t) = 5t^3 x^2(t + 6)$$

$$\gamma) y(t) = 5t^2 \cdot x^3(t)$$

# Παράδειγμα 1

α.  $y(t) = 3x(t) - 2x(t - 1)$       Γραμμικό?

Αν σε είσοδο  $x_1(t)$  έχει απόκριση  $y_1(t)$  και σε είσοδο  $x_2(t)$  έχει απόκριση  $y_2(t)$  τότε σε είσοδο  $ax_1(t) + bx_2(t)$  έχει απόκριση  $ay_1(t) + by_2(t)$

Αποδείξτε!

Εφαρμόζω ως είσοδο το σήμα  $ax_1(t) + bx_2(t)$  για να ελέγξω αν έχει απόκριση  $ay_1(t) + by_2(t)$

$$y(t) = 3[ax_1(t) + bx_2(t)] - 2[ax_1(t - 1) + bx_2(t - 1)]$$

$$y(t) = 3ax_1(t) + 3bx_2(t) - 2ax_1(t - 1) - 2bx_2(t - 1)$$

$$y(t) = a[3x_1(t) - 2x_1(t - 1)] + b[3x_2(t) - 2x_2(t - 1)]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$y_1(t)$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$y_2(t)$

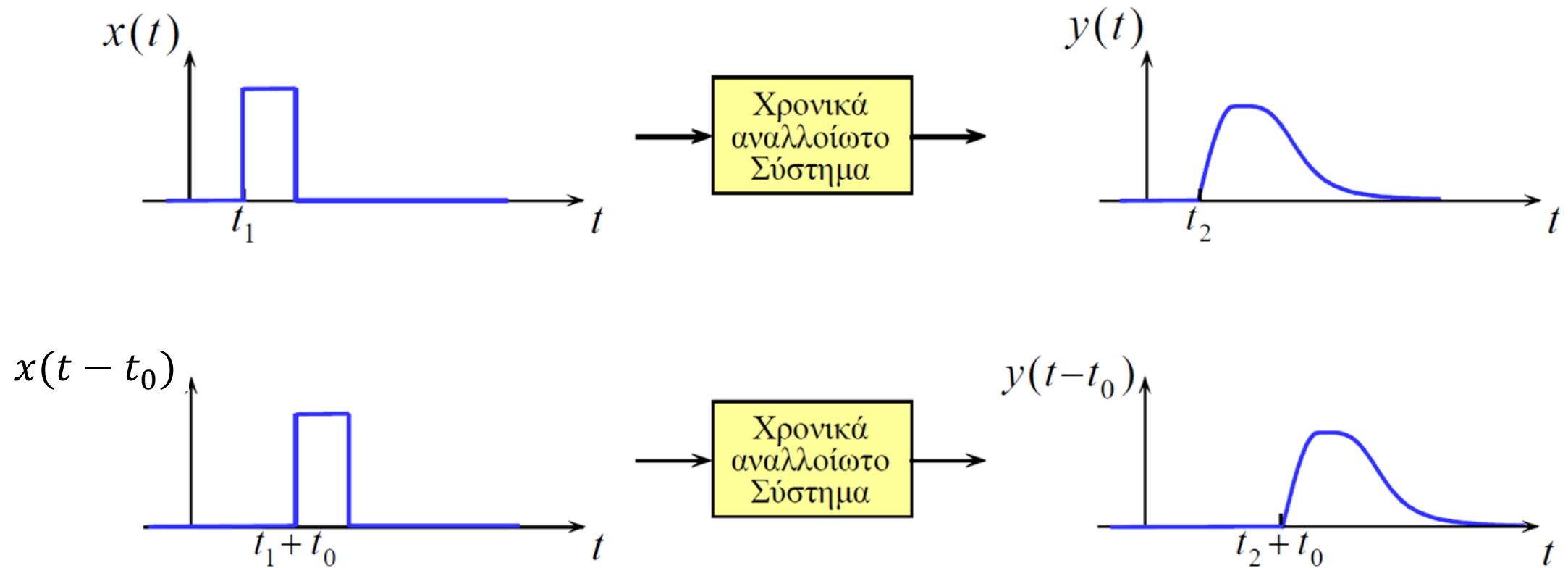
$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

Γραμμικό!

# Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (1/5)

- **Χρονικά αμετάβλητο** καλούμε ένα σύστημα για το οποίο ισχύει
  - Χρονική ολίσθηση της εισόδου προκαλεί χρονική ολίσθηση της εξόδου
  - Αν σε είσοδο  $x(t)$  έχει απόκριση  $y(t)$  τότε σε **είσοδο**  $x(t - t_0)$  **έχει απόκριση**  $y(t - t_0)$  για κάποια χρονική ολίσθηση  $t_0$
- Διαφορετικά καλείται **χρονικά μεταβαλλόμενο**
- Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, υπολογίζουμε την έξοδο  $y(t)$  για είσοδο  $x(t)$ . Αν ισχύει  $y(t) = y(t - t_0)$  για κάθε είσοδο  $x(t)$  και κάθε ολίσθηση  $t_0$  τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

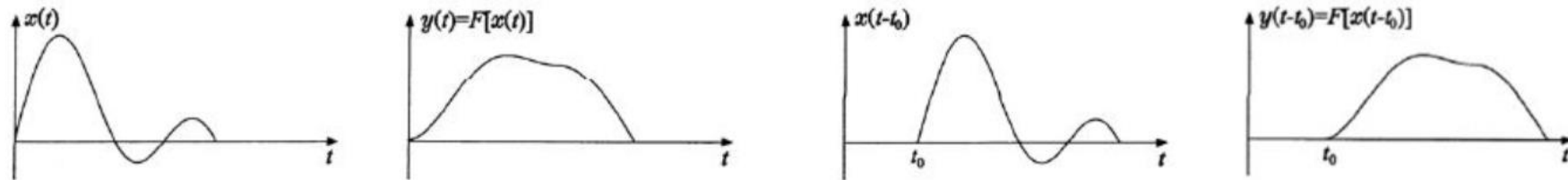
# Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (2/5)



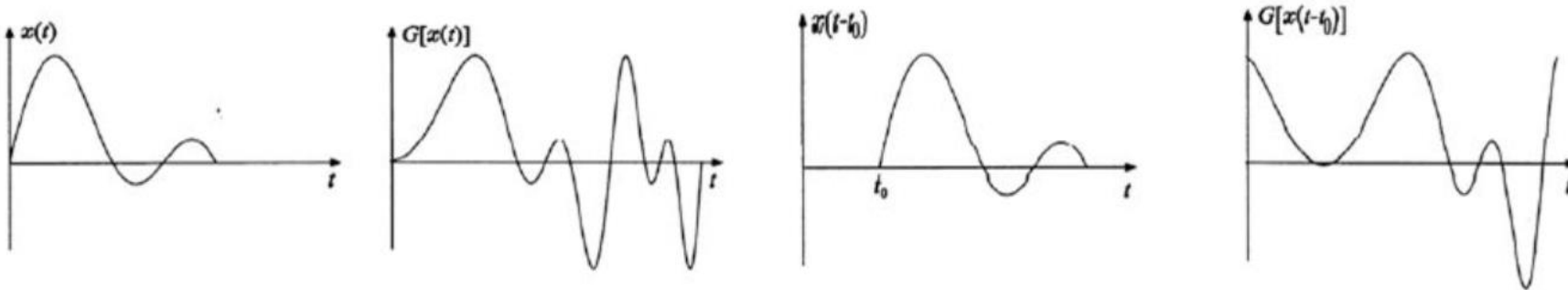
*Η είσοδος και η έξοδος ενός συστήματος χρονικά αμετάβλητου.*

# Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (3/5)

(α)



(β)



Παραδείγματα εισόδου και εξόδου γραμμικού (α) χρονικά αμετάβλητου και  
(β) χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος

# Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (4/5)

- Συστήματα στα οποία η έξοδος **δεν εξαρτάται άμεσα** από τον χρόνο είναι **χρονικά αμετάβλητα** (ή αναλλοίωτα)

## Χρονικά αμετάβλητα

α)  $y(t) = 5x(t)$

β)  $y(t) = 5x(t + 6)$

γ)  $y(t) = 5x^2(t - 2)$

δ)  $y(t) = 2x^3(t - 1)$

## Χρονικά μεταβαλλόμενα

α)  $y(t) = 5t \cdot x^2(t + 6)$

β)  $y(t) = 5t^3 \cdot x(t - 6)$

γ)  $y(t) = 5t \cdot x(t)$

δ)  $y(t) = 5t^2 \cdot x(t - 2)$

# Χρονικά αμετάβλητα/ Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα (5/5)

- Συστήματα τα οποία **μετατοπίζουν την είσοδο ως προς το χρόνο** είναι **χρονικά αμετάβλητα**.
- Συστήματα στα οποία η είσοδος έχει υποστεί **κλιμάκωση ως προς το χρόνο** (συμπίεση ή αποσυμπίεση) είναι **χρονικά μεταβαλλόμενα**

## Χρονικά αμετάβλητα

α)  $y(t) = 3x(t)$

β)  $y(t) = 3x(t - 2)$

γ)  $y(t) = 2x^3(t - 2)$

δ)  $y(t) = x^4\left(t + \frac{2}{5}\right)$

## Χρονικά μεταβαλλόμενα

α)  $y(t) = 5x(2t)$

β)  $y(t) = 5x(2t + 3)$

γ)  $y(t) = 5x\left(\frac{2}{3}t\right)$

δ)  $y(t) = 5x^{-2}(2t)$

## Παράδειγμα 2

α.  $y(t) = 3x(t) - 2x(t - 1)$

Χρονικά αμετάβλητο?

Αν σε είσοδο  $x(t)$  έχει απόκριση  $y(t)$  τότε σε **είσοδο**  $x(t - t_0)$  **έχει απόκριση**  $y(t - t_0)$  για κάποια χρονική ολίσθηση  $t_0$

Αποδείξτε!

Εφαρμόζω χρονική ολίσθηση στην είσοδο  $x(t - t_0)$  για να ελέγξω αν έχει απόκριση  $y(t - t_0)$

$$y(t) = 3x(t - t_0) - 2x(t - t_0 - 1)$$

$$y(t - t_0)$$

Χρονικά αμετάβλητο!

Smart Dude  
↓

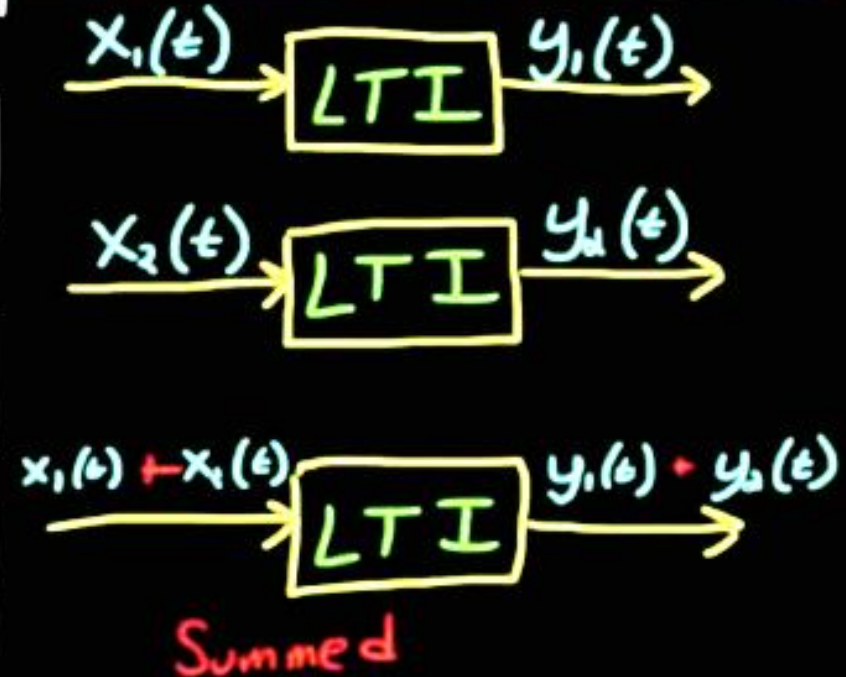
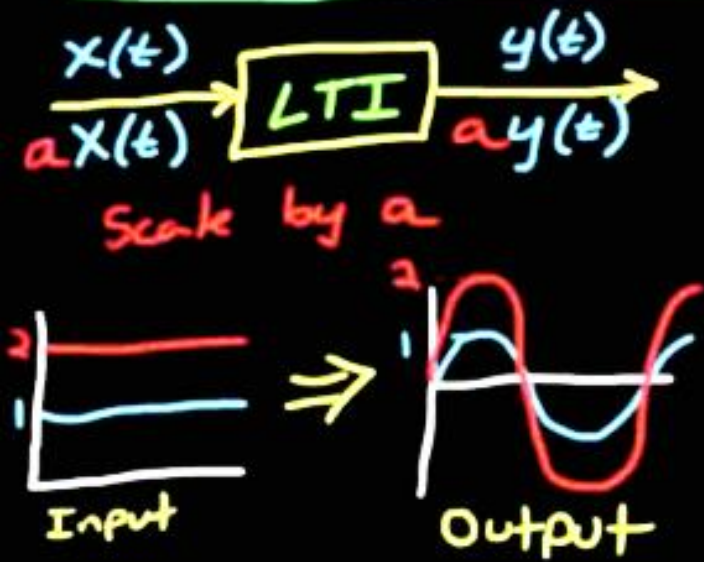
Why are LTI systems important?

"Linear systems are important because we can solve them" - Richard Feynman

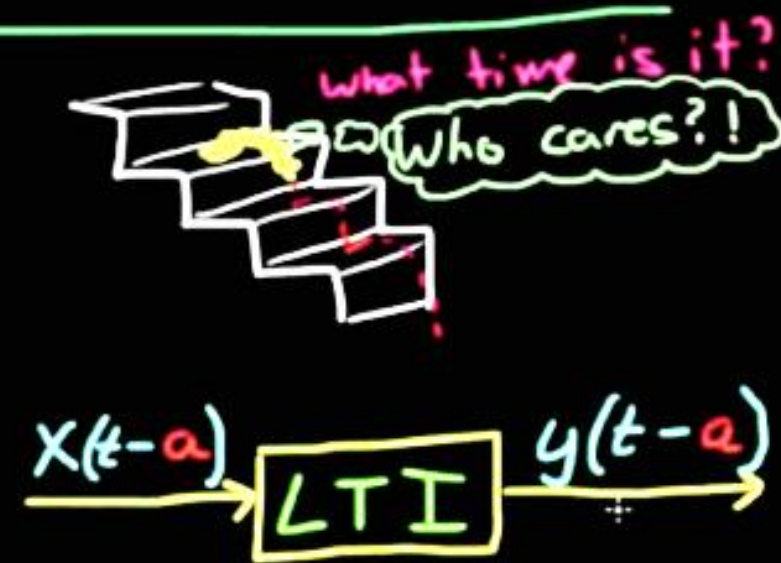
# Linear and Time Invariance (LTI) Systems

All LTI systems have

Homogeneity  $\leftarrow$  Linearity  $\rightarrow$  Superposition (Additivity)



## Time Invariance



# Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (1/7)

- Ένα σύστημα είναι **αιτιατό** (causal) όταν η **παρούσα τιμή της εξόδου** του **δεν εξαρτάται** από **μελλοντικές τιμές της εισόδου**.
- Δηλαδή, για κάθε σήμα εισόδου  $x(t)$  η αντίστοιχη έξοδος  $y(t)$  εξαρτάται μόνο από την παρούσα ή/και τις προηγούμενες τιμές της εισόδου.
- Αντίστροφα, αν η έξοδος  $y(t_0)$  τη χρονική στιγμή  $t_0$  **εξαρτάται** από μεταγενέστερες τιμές του σήματος εισόδου  $x(t)$ , δηλ. για  $t \geq t_0$ , τότε το σύστημα είναι **μη-αιτιατό**.

## Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (2/7)

- Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι αιτιατό αν οι μεταβολές στην έξοδο (αποτέλεσμα) του συστήματος, ποτέ **δεν προηγούνται** των μεταβολών που επιτελούνται στην είσοδο του συστήματος (αιτία).
- Όλα τα φυσικά παθητικά συστήματα έχουν την ιδιότητα της **αιτιότητας**.

# Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (3/7)

- Τα συστήματα τα οποία περιγράφονται από τις εξισώσεις

$$y(t) = \alpha \cdot x(t),$$

$$y(t) = \beta \cdot x(t - 1) \text{ και}$$

$$y(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot x(t - 1)$$

είναι **αιτιατά**, ενώ το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y(t) = \alpha \cdot x(t) + \beta \cdot x(t + 1)$$

**δεν** είναι αιτιατό.

# Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (4/7)

- **Αιτιατά** ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία ο υπολογισμός της τρέχουσας τιμής της εξόδου απαιτεί προηγούμενες (χρονικά) τιμές της εισόδου.
  - Συμπεριλαμβάνεται και η τρέχουσα χρονική στιγμή εισόδου
- Για παράδειγμα

$$y(t) = x(t)$$

$$y(t) = x(t - 2)$$

$$y(t) = x(t) + x(t - 10)$$

$$y(t) = \frac{1}{x(t - 10^5)}$$

# Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (5/7)

- Μη αιτιατά ονομάζονται τα συστήματα που απαιτούν μελλοντικές τιμές της εισόδου για να υπολογιστεί μια τρέχουσα τιμή της εξόδου
- Για παράδειγμα

$$y(t) = x(t + 2)$$

$$y(t) = \sqrt{x(t + 1)}$$

$$y(t) = y(t - 1) + 2x(t) - x(t + 4)$$

# Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (6/7)

- Όλα τα φυσικά συστήματα που δουλεύουν σε πραγματικό χρόνο είναι αιτιατά, γιατί ο χρόνος κινείται προς μία μόνο κατεύθυνση.
- Αντίθετα, εάν η ανεξάρτητη μεταβλητή ενός συστήματος δεν είναι ο χρόνος αλλά κάποια απόσταση, τότε το σύστημα είναι δυνατόν να είναι **μη αιτιατό**. Στην περίπτωση αυτή μπορεί κανείς να μετακινηθεί σε οποιαδήποτε κατεύθυνση και με την έννοια αυτή η έξοδος είναι δυνατόν να εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου.

# Αιτιατά και μη αιτιατά συστήματα (7/7)

- Μια άλλη κατηγορία μη αιτιατών συστημάτων είναι τα συστήματα επεξεργασίας ηχογραφημένων ή μαγνητοσκοπημένων σημάτων, δηλαδή τα συστήματα που δουλεύουν σε μη πραγματικό χρόνο.
- Στα συστήματα αυτά τα δεδομένα αποθηκεύονται σε μια μνήμη και κάποια από αυτά μπορούν να θεωρηθούν σαν «μελλοντικά» σε σχέση με μια επιλεγμένη χρονική στιγμή.

# Βιβλιογραφία

- 1. Σήματα και Συστήματα**, Σεραφείμ Καραμπόγιας, Κεφάλαιο 2, Ενότητες 2.1, 2.2, 2.3 (σελ.31-41)
- 2. Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου**, Αθανάσιος Μάργαρης, Κεφ. 2, Ενότητες 2.1, 2.2, 2.3 (σελ. 44-54)
- 3. Εισαγωγή στη Θεωρία Σημάτων και Συστημάτων**, Σέργιος Θεοδωρίδης και συνεργάτες, Κεφ.1 Ενότητα 1.3 (σελ. 15-19)

# Τέλος Ενότητας