203: Διακριτά Μαθηματικά
Κεφάλαιο 0: Μαθηματική Επαγωγή

Σπυρίδων Τζίμας

Εαρινό Εξάμηνο 2025

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μαθηματική Επαγωγή

Μας ενδιαφέρει να αποδείξουμε προτάσεις της μορφής

«Για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $P(n)$.»,

όπου $P(n)$ είναι μια έκφραση με ανεξάρτητη μεταβλητή n που παίρνει ακέραιες τιμές.

Παράδειγμα: Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
(Άθροισμα πρώτων n περιττών φυσικών αριθμών.)

Το επιτυγχάνουμε κάνοντας χρήση της αποδεικτικής μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής που αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

Βάση της επαγωγής: Δείχνουμε ότι ισχύει $P(n_0)$.
Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq n_0$ ισχύει $P(n)$.
Επαγωγικό βήμα: Δείχνουμε ότι για το ίδιο n ισχύει και $P(n+1)$.

Μαθηματική Επαγωγή

Άσκηση: Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
(Άθροισμα πρώτων n περιττών φυσικών αριθμών.)

Λύση: Θα το δείξουμε κάνοντας χρήση της μαθηματικής επαγωγής.
Βάση της επαγωγής: $(2 \cdot 1 - 1) = 1^2$ που ισχύει.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ για κάποιο $n \geq 1$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$.

$$
\begin{aligned}
& 1 + 3 + 5 + \cdots + (2(n+1) - 1) \\
&= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) && \text{Εμφάνιση προτελευταίου όρου} \\
&= n^2 + (2(n+1) - 1) && \text{Επαγωγική υπόθεση} \\
&= n^2 + 2n + 1 && \text{Αλγεβρικές πράξεις} \\
&= (n+1)^2 && \text{Τριώνυμο}
\end{aligned}
$$

Μαθηματική Επαγωγή

Άσκηση: Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(Άθροισμα πρώτων n φυσικών αριθμών.)

Λύση: Θα το δείξουμε κάνοντας χρήση της μαθηματικής επαγωγής.

Βάση της επαγωγής: $1 = 1(1+1)/2$ που ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n+1)/2$ για κάποιο $n \geq 1$.

Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = (n+1)((n+1)+1)/2$.

$$
\begin{aligned}
& 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) \\
&= 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) && \text{Εμφάνιση προτελευταίου όρου} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{Επαγωγική υπόθεση} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} && \text{Ομώνυμα κλάσματα} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} && \text{Αντιμεταθετική και επιμεριστική ιδιότητα}
\end{aligned}
$$

Μαθηματική Επαγωγή

Άσκηση: Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 3$ ισχύει $n^2 \leq 2^n$.

Λύση: Θα το δείξουμε κάνοντας χρήση της μαθηματικής επαγωγής.
Βάση της επαγωγής: $2^2 \leq 2^2$ που ισχύει.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι $n^2 \leq 2^n$ για κάποιο $n \geq 3$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

$$
\begin{aligned}
& (n+1)^2 & \\
&= n^2 + 2n + 1 & \text{Τριώνυμο} \\
&\leq n^2 + 2n + n = n^2 + 3n & 1 \leq 3 \leq n \\
&\leq n^2 + n^2 = 2n^2 & 3 \leq n \Rightarrow 3n \leq n^2 \\
&\leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} & \text{Επαγωγική υπόθεση}
\end{aligned}
$$

Παραγοντικό

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n, καλούμε παραγοντικό του n τον αριθμό $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Για το 0, ορίζουμε $0! = 1$. Παρατηρούμε ότι το παραγοντικό ενός θετικού ακεραίου n μπορεί να οριστεί και αναδρομικά ως $n! = (n-1)! \cdot n$.

Άσκηση: Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 4$ ισχύει $2^n \leq n!$.

Λύση: Θα το δείξουμε κάνοντας χρήση της μαθηματικής επαγωγής.
Βάση της επαγωγής: $2^4 = 16 \leq 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$ που ισχύει.
Επαγωγική υπόθεση: Έστω ότι $2^n \leq n!$ για κάποιο $n \geq 4$.
Επαγωγικό βήμα: Θα δείξουμε ότι $2^{n+1} \leq (n+1)!$.

$$\begin{aligned}
& 2^{n+1} & \\
&= 2^n \cdot 2 & \text{Αλγεβρικές Πράξεις} \\
&\leq n! \cdot 2 & \text{Επαγωγική υπόθεση} \\
&\leq n! \cdot (n+1) & 1 \leq 4 \leq n \Rightarrow 2 \leq n+1 \\
&\leq (n+1)! & \text{Παραγοντικό}
\end{aligned}$$