203: Διακριτά Μαθηματικά
Κεφάλαιο 1: Μαθηματική Λογική

Σπυρίδων Τζίμας

Εαρινό Εξάμηνο 2025

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Μαθηματική Λογική

Αναφέρεται και ως Τυπική Λογική (Formal Logic).

Αποτελεί την γλώσσα των Μαθηματικών.

Είναι το πλαίσιο μέσα στο οποίο

- εισάγουμε υποθέσεις και
- εξάγουμε συμπεράσματα.

Προτασιακή Λογική

Αντικείμενα της Προτασιακής Λογικής είναι οι (Λογικές) Προτάσεις.
Αυτές είναι προτάσεις που μπορούν να χαρακτηριστούν
αντικειμενικά είτε ως αληθείς είτε ως ψευδείς.

- «Ο ήλιος λάμπει.»
- «Τα πουλιά κολυμπούν.»
- «Σήμερα είναι μια όμορφη μέρα!»

- «Ένα κι ένα κάνουν δύο.»
- «Το 2025 είναι πρώτος αριθμός.»
- «Τα Διακριτά Μαθηματικά είναι εύκολα!»

Προτασιακή Λογική

Για να συμβολίσουμε απλές (ή αλλιώς ατομικές) προτάσεις, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $p, q, r, \ldots$ (προτασιακές μεταβλητές).

Δημιουργούμε πιο σύνθετες προτάσεις από άλλες προτάσεις κάνοντας χρήση λογικών συνδέσμων (ή αλλιώς λογικών πράξεων).

		Γράφουμε	Διαβάζουμε
$\neg$	Άρνηση	$\neg p$	όχι p
$\wedge$	Σύζευξη	$p \wedge q$	p και q
$\vee$	Διάζευξη	$p \vee q$	p ή q
$\rightarrow$	Συνεπαγωγή	$p \rightarrow q$	p συνεπάγεται q (ή αλλιώς αν p τότε q)
$\leftrightarrow$	Ισοδυναμία	$p \leftrightarrow q$	p ισοδυναμεί με q (ή αλλιώς p αν και μόνο αν q)

Προτασιακή Λογική

Για να συμβολίσουμε οσοδήποτε σύνθετες προτάσεις, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $P, Q, R, \ldots$ (προτασιακοί τύποι).

Ένας προτασιακός τύπος R είναι

- είτε μία προτασιακή μεταβλητή,
- είτε της μορφής $\neg P$ ή $P \wedge Q$ ή $P \vee Q$ ή $P \rightarrow Q$ ή $P \leftrightarrow Q$, όπου P, Q είναι προτασιακοί τύποι.

Προτεραιότητα Λογικών Συνδέσμων

Μέσα σε έναν προτασιακό τύπο, οι λογικοί σύνδεσμοι δρουν με την ακόλουθη σειρά προτεραιότητας:

$$\neg \quad > \quad \wedge \quad > \quad \vee \quad > \quad \rightarrow \quad > \quad \leftrightarrow$$

Μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των λογικών πράξεων χρησιμοποιώντας παρενθέσεις.

Παράδειγμα: Προσθέστε τόσα ζεύγη παρενθέσεων στον προτασιακό τύπο $\neg p \vee q \leftrightarrow r$ όσες και οι εμφανίσεις λογικών σύνδεσμων που περιέχει έτσι ώστε να μην τον αλλάξετε.

$$(((\neg p) \vee q) \leftrightarrow r)$$

Αποτίμηση

Οι προτασιακές μεταβλητές μπορούν να πάρουν τιμές από το σύνολο $\{\mathrm{A}(\text{ληθής}), \Psi(\text{ευδής})\}$.

Καλούμε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών κάθε ανάθεση συγκεκριμένων τιμών σε όλες τις προτασιακές μεταβλητές που χρησιμοποιούμε.

Κάθε αποτίμηση των προτασιακών μεταβλητών επεκτείνεται σε αποτίμηση των προτασιακών τύπων που αποδίδει συγκεκριμένη τιμή σε οποιονδήποτε προτασιακό τύπο.

Παράδειγμα: Κάθε αποτίμηση τέτοια ώστε $p = \mathrm{A}$ και $q = \Psi$ επεκτείνεται ούτως ώστε:

$$\neg p = \Psi \qquad p \wedge q = \Psi \qquad p \vee q = \mathrm{A} \qquad p \to q = \Psi \qquad p \leftrightarrow q = \Psi$$

Πίνακας Αλήθειας

Ο πίνακας αλήθειας ενός προτασιακού τύπου συγκεντρώνει τις τιμές που αποδίδονται σε αυτόν από τις επεκτάσεις όλων των δυνατών αποτιμήσεων των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτόν.

Παρατήρηση: Όλες οι δυνατές αποτιμήσεις n προτασιακών μεταβλητών είναι 2^n.

p	$\neg p$
Α	Ψ
Ψ	Α

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α

Ταυτολογίες και Αντιφάσεις

Καλούμε ταυτολογία κάθε προτασιακό τύπο που αποτιμάται πάντα ως αληθής.
Καλούμε αντίφαση κάθε προτασιακό τύπο που αποτιμάται πάντα ως ψευδής.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α

Ταυτολογίες και Αντιφάσεις

Άσκηση: Εξετάστε αν οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες ή αντιφάσεις.

$$P_1 = (p \wedge q \to r) \to (p \vee q \to r) \qquad P_2 = (p \vee q \to r) \to (p \wedge q \to r)$$

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \to r$	$p \vee q \to r$	P_1	P_2
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Ταυτολογίες και Αντιφάσεις

Άσκηση: Εξετάστε αν οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες ή αντιφάσεις.

$$P_3 = (p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \qquad P_4 = (q \to p) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$	$q \to p$	P_3	P_4
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α

Ταυτολογίες και Αντιφάσεις

Άσκηση: Εξετάστε αν οι ακόλουθοι προτασιακοί τύποι είναι ταυτολογίες ή αντιφάσεις.

$$P_5 = (p \to \neg q) \leftrightarrow (\neg p \to q) \qquad P_6 = (p \to \neg q) \leftrightarrow (q \to \neg p)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg p \to q$	$q \to \neg p$	P_5	P_6
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α

Ταυτολογική Ισοδυναμία

Έστω προτασιακοί τύποι P, Q. Αν ο προτασιακός τύπος $P \leftrightarrow Q$ είναι ταυτολογία, τότε λέμε ότι ο P και ο Q είναι (ταυτολογικά) ισοδύναμοι και γράφουμε $P \equiv Q$.

Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής

Έστω προτασιακοί τύποι P, Q, R, ταυτολογία $\top$ και αντίφαση $\bot$.

Αντιμεταθετικός

$P \land Q \equiv Q \land P$

$P \lor Q \equiv Q \lor P$

Προσεταιριστικός

$P \land (Q \land R) \equiv (P \land Q) \land R$

$P \lor (Q \lor R) \equiv (P \lor Q) \lor R$

Επιμεριστικός

$P \land (Q \lor R) \equiv (P \land Q) \lor (P \land R)$

$P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$

Απορροφητικός

$\top \land P \equiv P \qquad \top \lor P \equiv \top$

$\bot \land P \equiv \bot \qquad \bot \lor P \equiv P$

$P \land P \equiv P \qquad P \lor P \equiv P$

Συμπληρώματος

$P \land \neg P \equiv \bot \qquad P \lor \neg P \equiv \top$

De Morgan

$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$

$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$

Διπλής Άρνησης: $\neg\neg P \equiv P$

Συνεπαγωγής: $P \to Q \equiv \neg P \lor Q$

Αντιθετοαντιστροφής: $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$

Ισοδυναμίας: $P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \land (Q \to P)$

Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τους Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής, βρείτε τον απλούστερο δυνατό προτασιακό τύπο που είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο:

$$
\begin{array}{ll}
((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \vee (\neg P \wedge \neg Q) & \\
\equiv (P \wedge \neg Q) \vee ((\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) & \text{Προσεταιριστικός} \\
\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) & \text{Επιμεριστικός} \\
\equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \top) & \text{Συμπληρώματος} \\
\equiv (P \wedge \neg Q) \vee \neg P & \text{Απορροφητικός} \\
\equiv (P \vee \neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg P) & \text{Επιμεριστικός} \\
\equiv \top \wedge (\neg Q \vee \neg P) & \text{Συμπληρώματος} \\
\equiv \neg Q \vee \neg P & \text{Απορροφητικός} \\
\equiv \neg (Q \wedge P) & \text{De Morgan}
\end{array}
$$

Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τους Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής, βρείτε τον απλούστερο δυνατό προτασιακό τύπο που είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο:

$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge R)$	
$\equiv (P \wedge Q) \vee ((P \wedge \neg Q) \wedge (R)) \vee (\neg P \wedge R)$	Προσεταιριστικός
$\equiv (((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge Q) \vee R)) \vee (\neg P \wedge R)$	Επιμεριστικός
$\equiv ((P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge Q) \vee R)) \vee (\neg P \wedge R)$	Επιμεριστικός
$\equiv ((P \vee \bot) \wedge ((P \wedge Q) \vee R)) \vee (\neg P \wedge R)$	Συμπληρώματος
$\equiv (P \wedge ((P \wedge Q) \vee R)) \vee (\neg P \wedge R)$	Απορροφητικός
$\equiv (P \wedge (P \wedge Q)) \vee (P \wedge R) \vee (\neg P \wedge R)$	Επιμεριστικός
$\equiv ((P \wedge P) \wedge Q) \vee ((P \wedge R) \vee (\neg P \wedge R))$	Προσεταιριστικός
$\equiv (P \wedge Q) \vee ((P \wedge R) \vee (\neg P \wedge R))$	Απορροφητικός
$\equiv (P \wedge Q) \vee ((P \wedge \neg P) \vee R)$	Επιμεριστικός
$\equiv (P \wedge Q) \vee (\bot \vee R)$	Συμπληρώματος
$\equiv (P \wedge Q) \vee R$	Απορροφητικός

Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τους Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής, βρείτε τον απλούστερο δυνατό προτασιακό τύπο που είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο:

$$
\begin{array}{lr}
\neg(P \to Q) \lor (P \land Q) & \\
\equiv \neg(\neg P \lor Q) \lor (P \land Q) & \text{Συνεπαγωγής} \\
\equiv (\neg\neg P \land \neg Q) \lor (P \land Q) & \text{De Morgan} \\
\equiv (P \land \neg Q) \lor (P \land Q) & \text{Διπλής Άρνησης} \\
\equiv P \land (\neg Q \lor Q) & \text{Επιμεριστικός} \\
\equiv P \land \top & \text{Συμπληρώματος} \\
\equiv P & \text{Απορροφητικός}
\end{array}
$$

Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τους Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής, βρείτε τον απλούστερο δυνατό προτασιακό τύπο που είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο:

$$
\begin{array}{ll}
P \to ((Q \to P) \vee R) & \\
\equiv P \to ((\neg Q \vee P) \vee R) & \text{Συνεπαγωγής} \\
\equiv \neg P \vee ((\neg Q \vee P) \vee R) & \text{Συνεπαγωγής} \\
\equiv \neg P \vee ((P \vee \neg Q) \vee R) & \text{Αντιμεταθετικός} \\
\equiv (\neg P \vee P) \vee (\neg Q \vee R) & \text{Προσεταιριστικός} \\
\equiv \top \vee (\neg Q \vee R) & \text{Συμπληρώματος} \\
\equiv \top & \text{Απορροφητικός}
\end{array}
$$

Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τους Κανόνες Ισοδυναμίας της Προτασιακής Λογικής, βρείτε τον απλούστερο δυνατό προτασιακό τύπο που είναι ισοδύναμος με τον ακόλουθο:

$$
\begin{array}{lr}
((P \to Q) \wedge \neg Q) \to \neg P & \\
\equiv ((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \to \neg P & \text{Συνεπαγωγής} \\
\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \to \neg P & \text{Επιμεριστικός} \\
\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee \bot \to \neg P & \text{Συμπληρώματος} \\
\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \to \neg P & \text{Απορροφητικός} \\
\equiv \neg(P \vee Q) \to \neg P & \text{De Morgan} \\
\equiv P \to (P \vee Q) & \text{Αντιθετοαντιστροφής} \\
\equiv \neg P \vee (P \vee Q) & \text{Συνεπαγωγής} \\
\equiv (\neg P \vee P) \vee Q & \text{Προσεταιριστικός} \\
\equiv \top \vee Q & \text{Συμπληρώματος} \\
\equiv \top & \text{Απορροφητικός}
\end{array}
$$