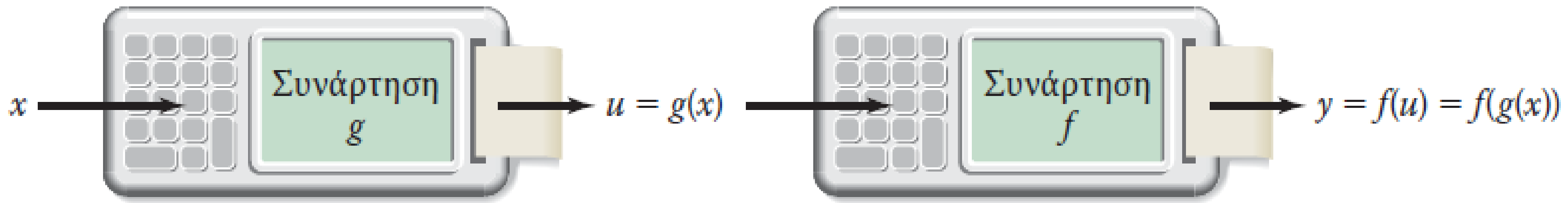
Περιεχόμενα

- Συναρτήσεις (Μέρος Α)
  - Ορισμός
  - Βασικές έννοιες
  - Τρόποι έκφρασης
  - Γραφική παράσταση
  - Χαρακτηριστικές συναρτήσεις
  - Γραφήματα στο Octave/Matlab
- Συναρτήσεις (Μέρος Β)
  - Σύνθεση Συναρτήσεων
  - Γραφήματα - Συμμετρίες
  - Σχεδιάζοντας Συναρτήσεις
  - Βασικές Συναρτήσεις
  - Άρτιες- Περιττές Συναρτήσεις
  - Τμηματικές Συναρτήσεις

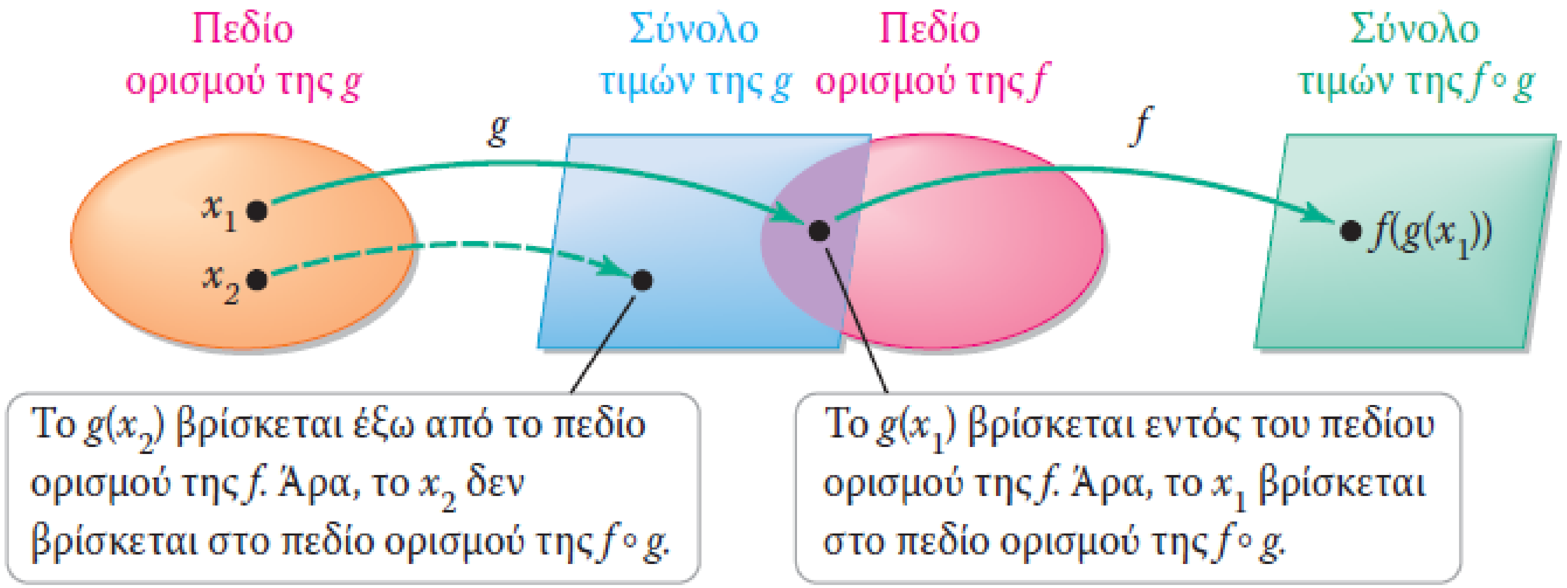
Σύνθεση συναρτήσεων

- Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως τότε ονομάζουμε **σύνθεση** της g με την f και συμβολίζουμε $f \circ g$ τη συνάρτηση με τύπο: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της g για τα οποία το $u = g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f

Σύνθεση συναρτήσεων



(α)



(β)

Παράδειγμα: Αν $f(x) = \sqrt{3x+1}$ και $g(x) = 2x - 1$, βρείτε την $f \circ g$ και την $g \circ f$

Λύση: Έχουμε

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \sqrt{3g(x) + 1}$$
$$= \sqrt{3(2x-1)+1} = \sqrt{6x - 3 + 1} = \sqrt{6x - 2}$$

Πεδίο ορισμού: $6x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1/3$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2f(x) - 1 = 2\sqrt{3x+1} - 1$$

Πεδίο ορισμού: $3x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -1/3$

Παράδειγμα 2

- Γράψτε τη $h(x) = \sqrt{4x^2 + 4x - 3}$ ως σύνθεση δύο συναρτήσεων

Λύση: Έστω $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 4x^2 + 4x - 3$. Τότε

$$h(x) = f\big(g(x)\big).$$

Λύση 2: Έστω $f(x) = \sqrt{x - 3}$ και $g(x) = 4x^2 + 4x$. Τότε

$$h(x) = f\big(g(x)\big).$$

Παράδειγμα 3

- Γράψτε τη $F(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$ ως σύνθεση συναρτήσεων

Λύση: Έστω $h(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f(x) = \sqrt{x}$ και $\quad g(x) = 4x^2 + 4x - 3$.

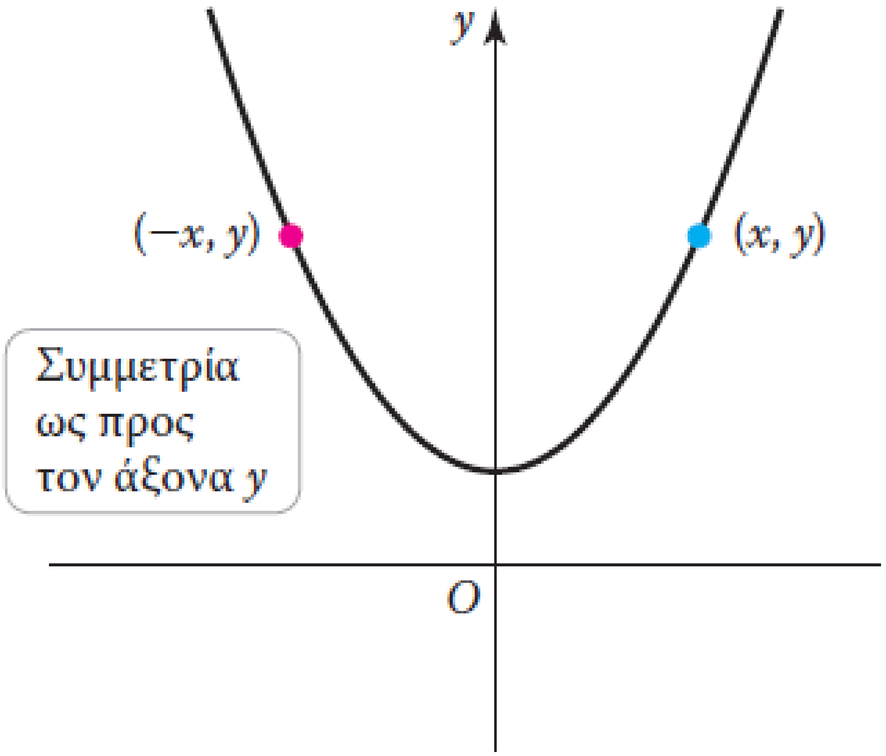
Τότε

$$F(x) = h\left(f\left(g(x)\right)\right) = (h \circ f \circ g)(x).$$

Γραφήματα- Συμμετρίες

Συμμετρία στις γραφικές παραστάσεις (1/3)

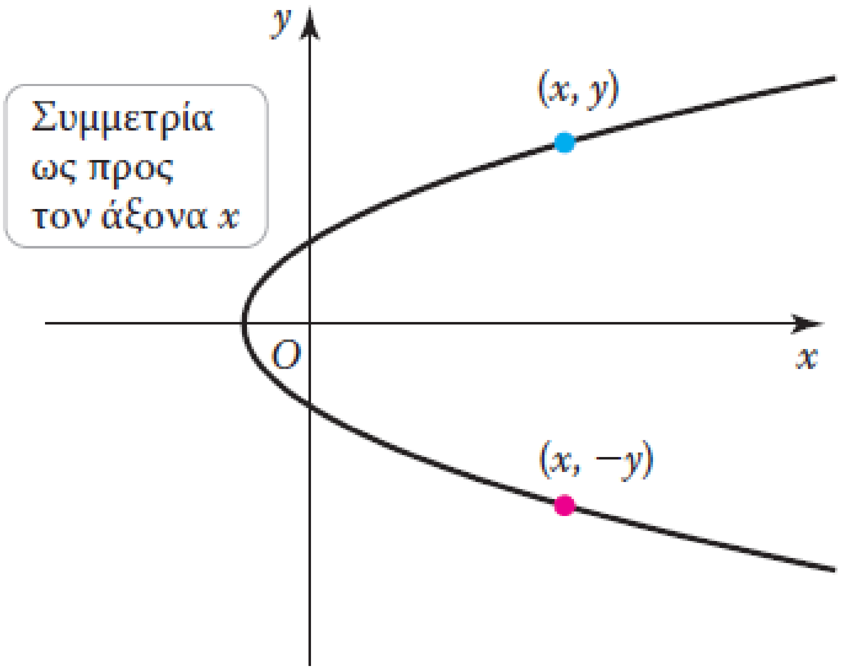
- Ένα γράφημα είναι **συμμετρικό ως προς τον άξονα των *y*** εάν , για κάθε σημείο (x,y) του γραφήματος, το σημείο $(-x,y)$ ανήκει επίσης στο γράφημα
- Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι το γράφημα παραμένει αμετάβλητο όταν ανακλάται καθέτως στον άξονα των y



(α)

Συμμετρία στις γραφικές παραστάσεις (2/3)

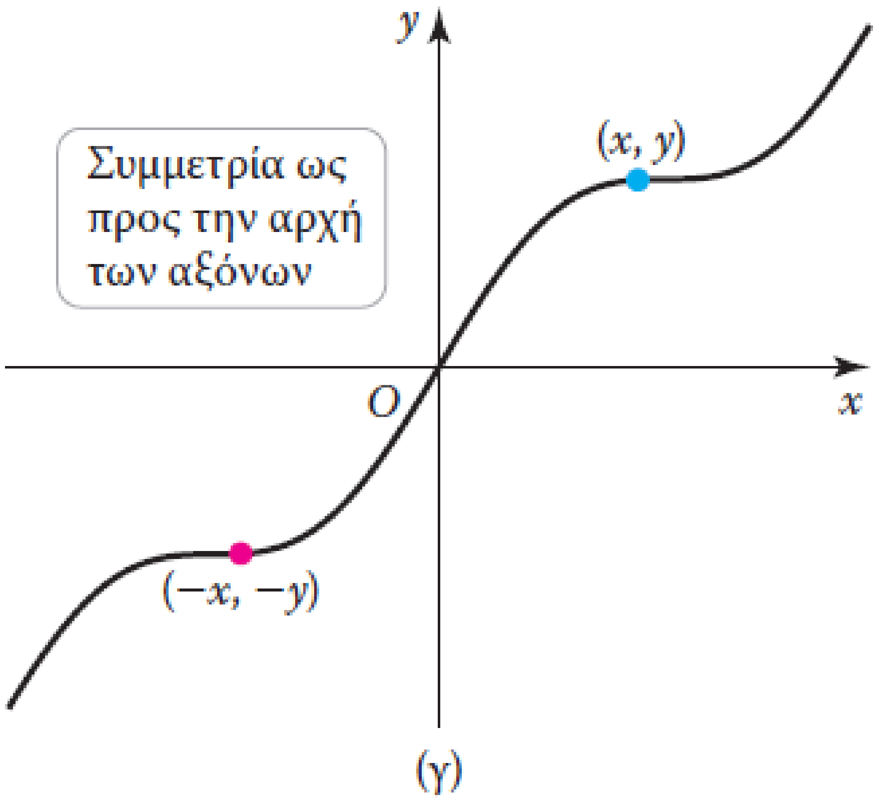
- Ένα γράφημα είναι **συμμετρικό ως προς τον άξονα των** x εάν , για κάθε σημείο (x,y) του γραφήματος, το σημείο $(x,-y)$ ανήκει επίσης στο γράφημα
- Αυτή η ιδιότητα σημαίνει ότι το γράφημα παραμένει αμετάβλητο όταν ανακλάται καθέτως στον άξονα των x



(β)

Συμμετρία στις γραφικές παραστάσεις (3/3)

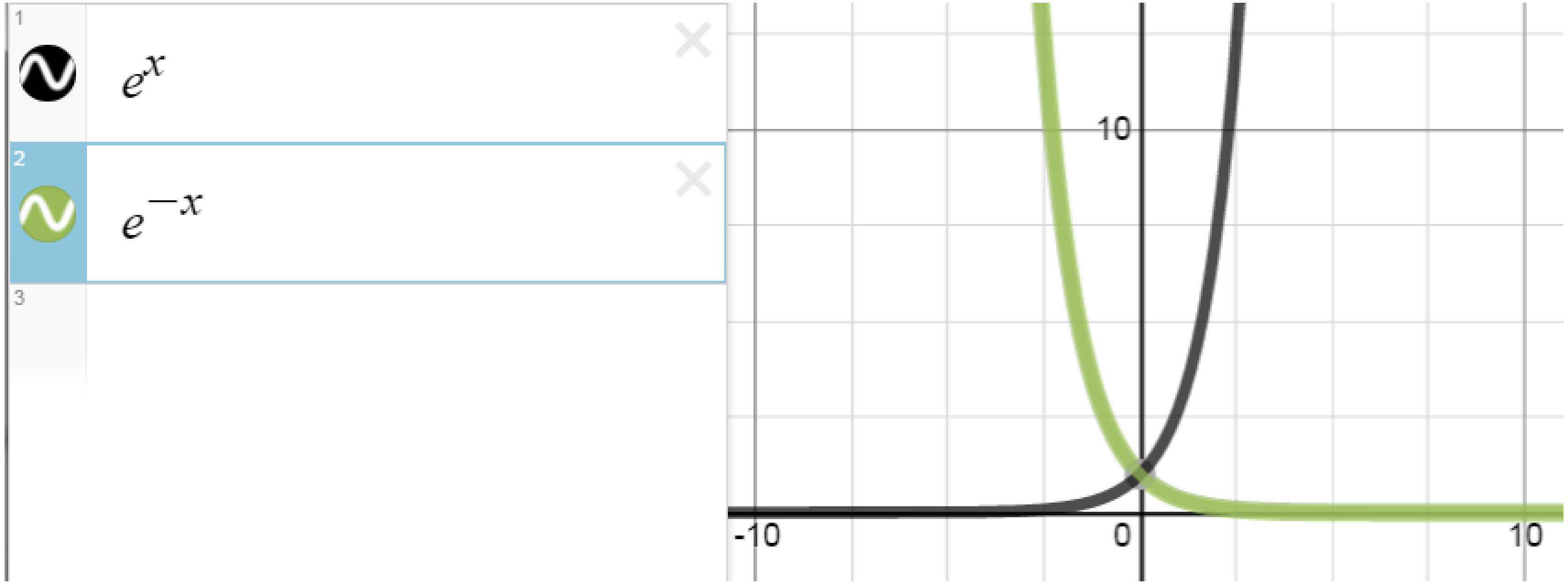
- Ένα γράφημα είναι **συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων** εάν , για κάθε σημείο (x, y) του γραφήματος, το σημείο $(-x,-y)$ ανήκει επίσης στο γράφημα
- Συμμετρία ως προς τον άξονα των x και ως προς τον άξονα των y συνεπάγεται συμμετρία ως προς την αρχή των αξόνων, αλλά όχι το αντίστροφο.



Σχεδιάζοντας Συναρτήσεις

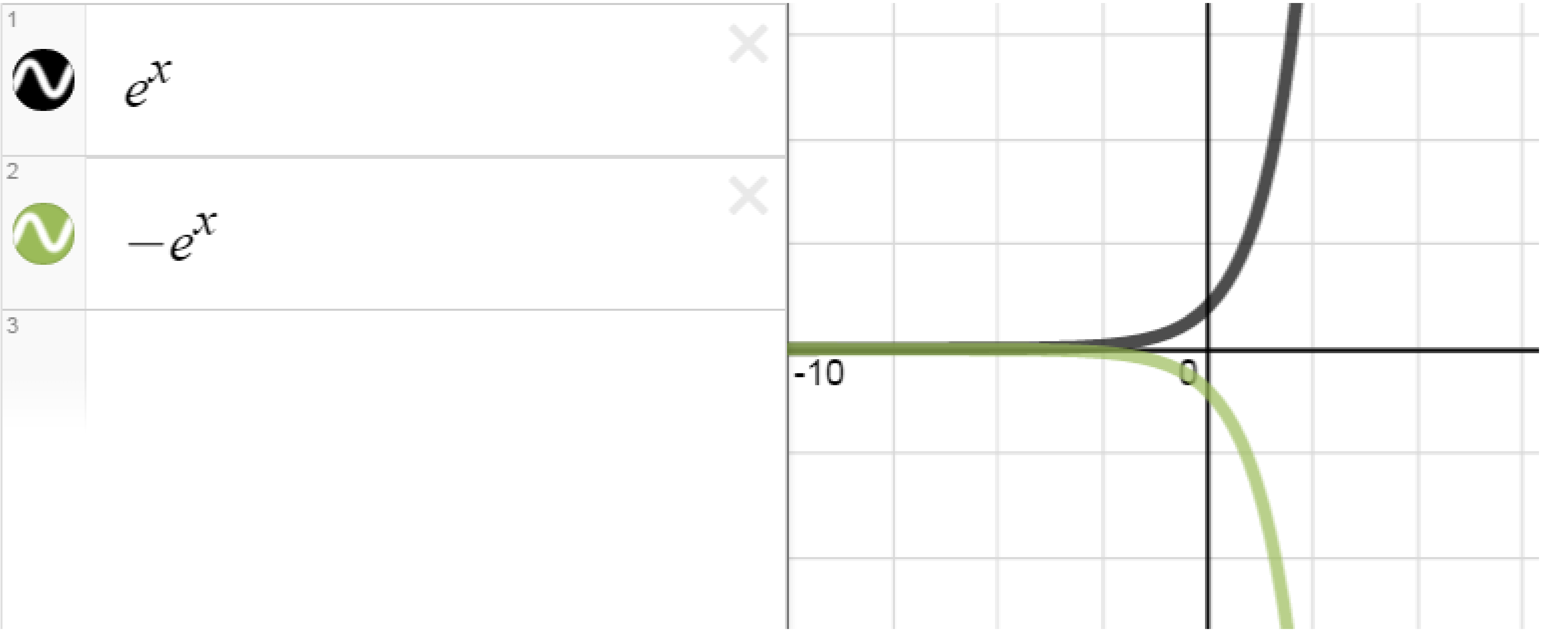
Γραφική παράσταση της $f(-x)$

- Η γραφική παράσταση της $f(-x)$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα y



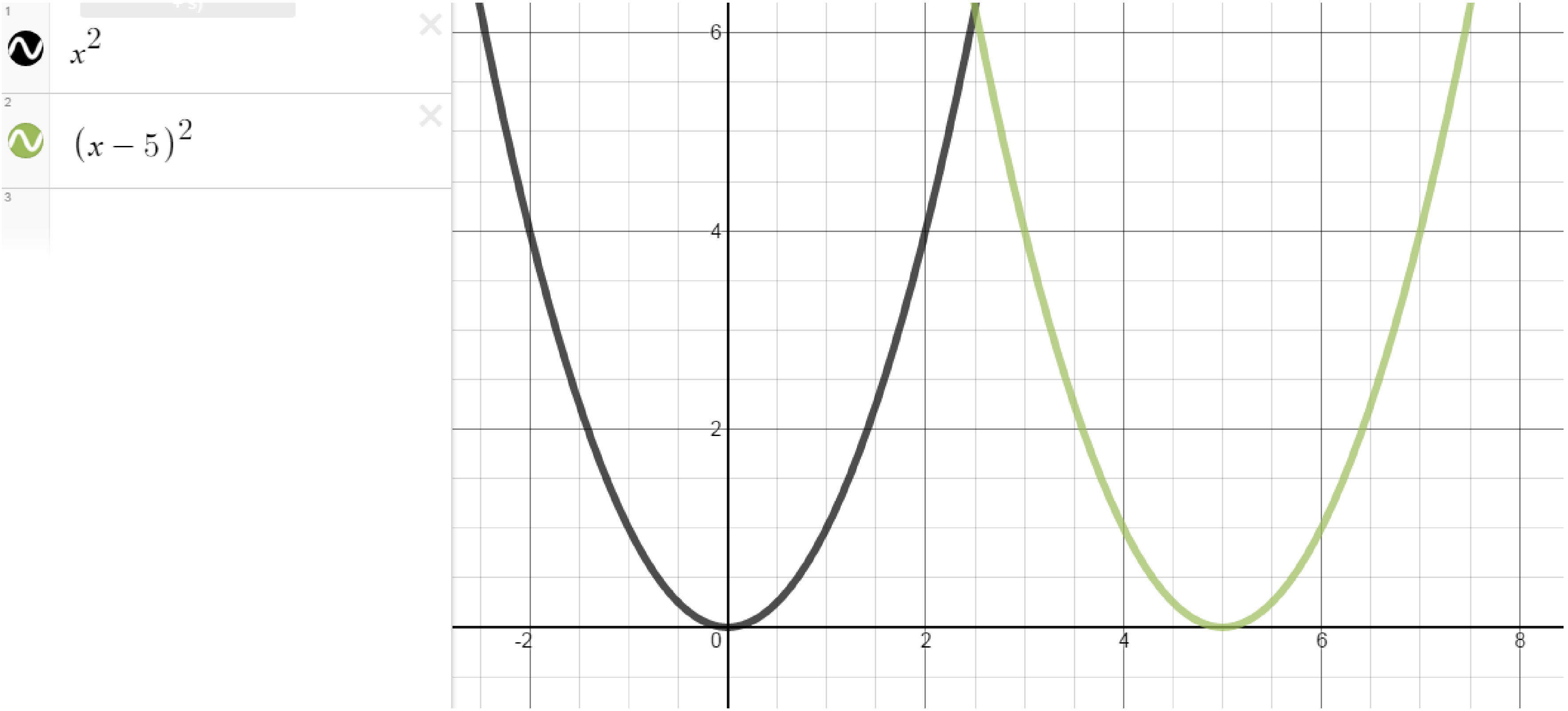
Γραφική παράσταση της $-f(x)$

- Η γραφική παράσταση της $-f$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα x.



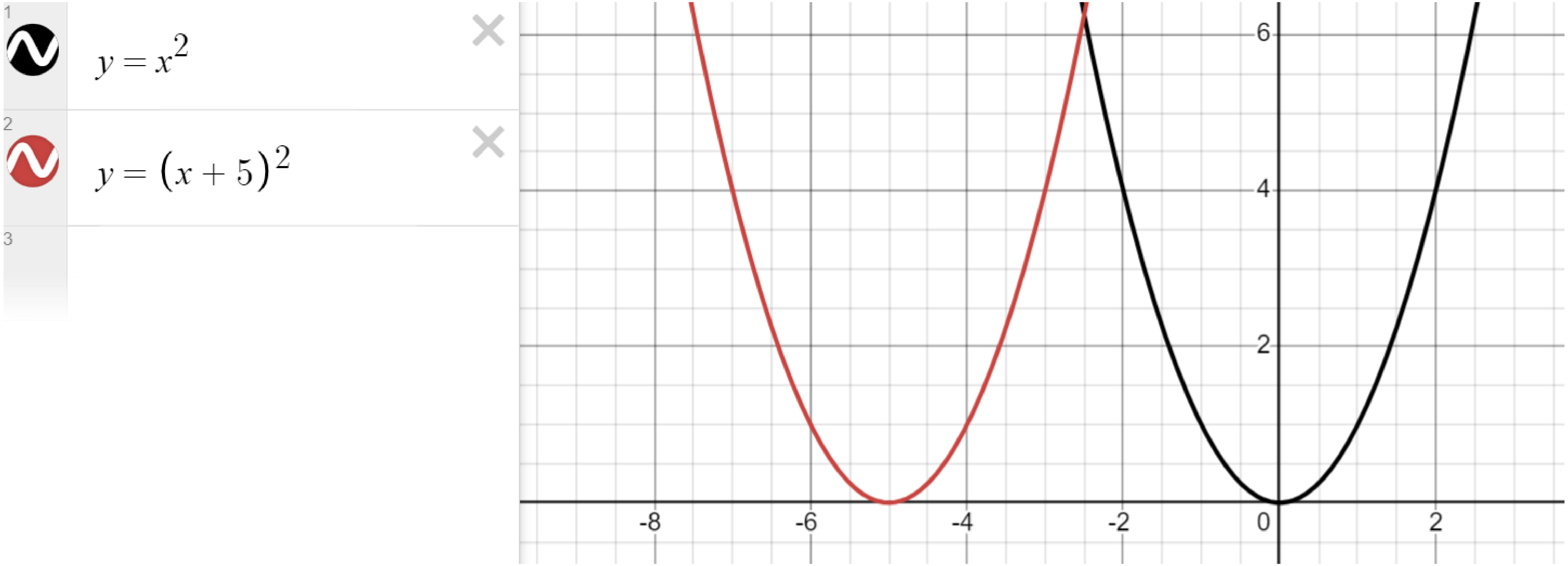
Οριζόντια μετατόπιση γραφικής παράστασης

- $f(x-k)$: μετατοπίζει την $f(x)$ προς τα **δεξιά** κατά $k > 0$



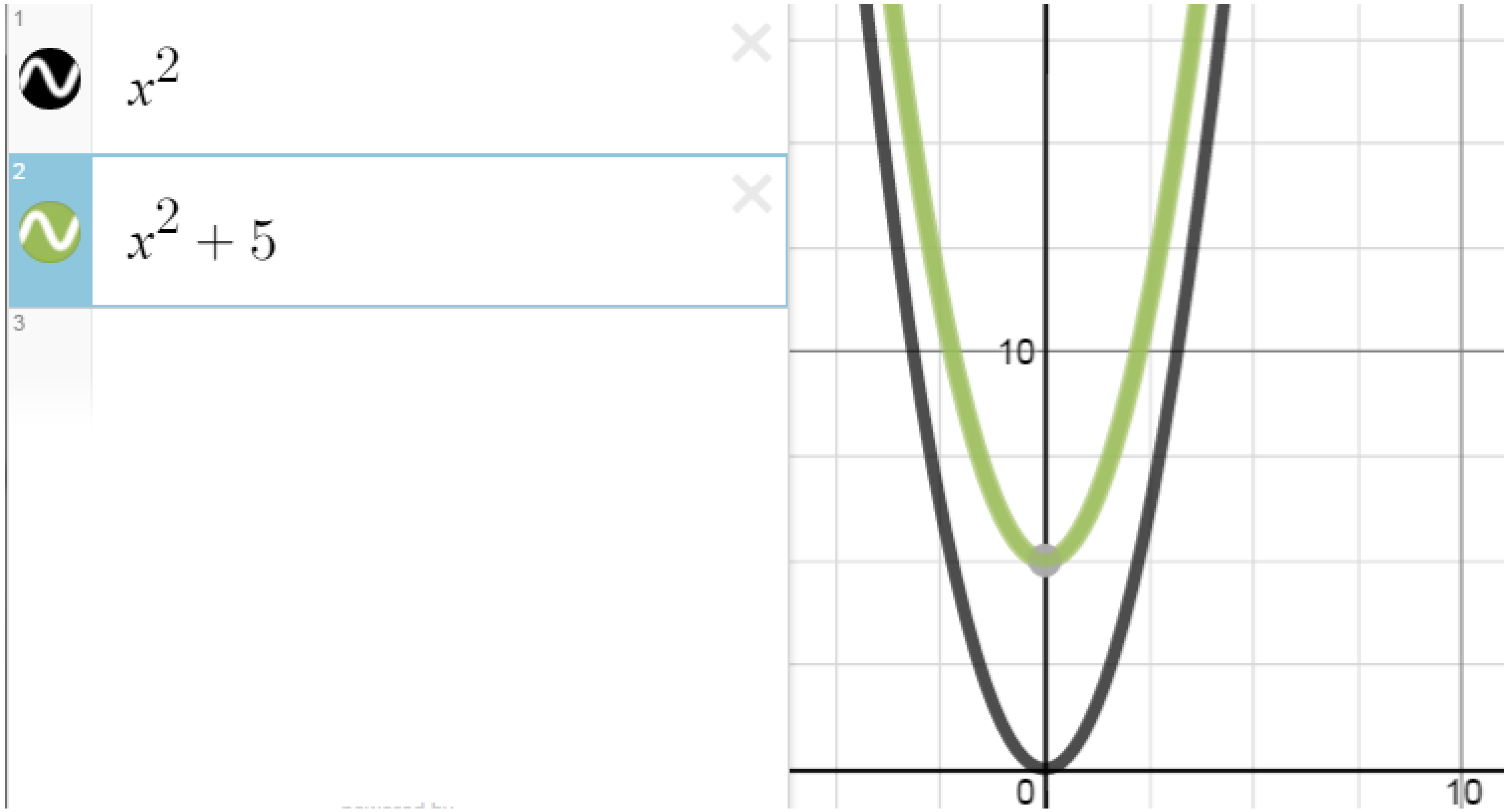
Οριζόντια μετατόπιση γραφικής παράστασης

- $f(x+k)$: μετατοπίζει την $f(x)$ προς τα **αριστερά** κατά $k > 0$



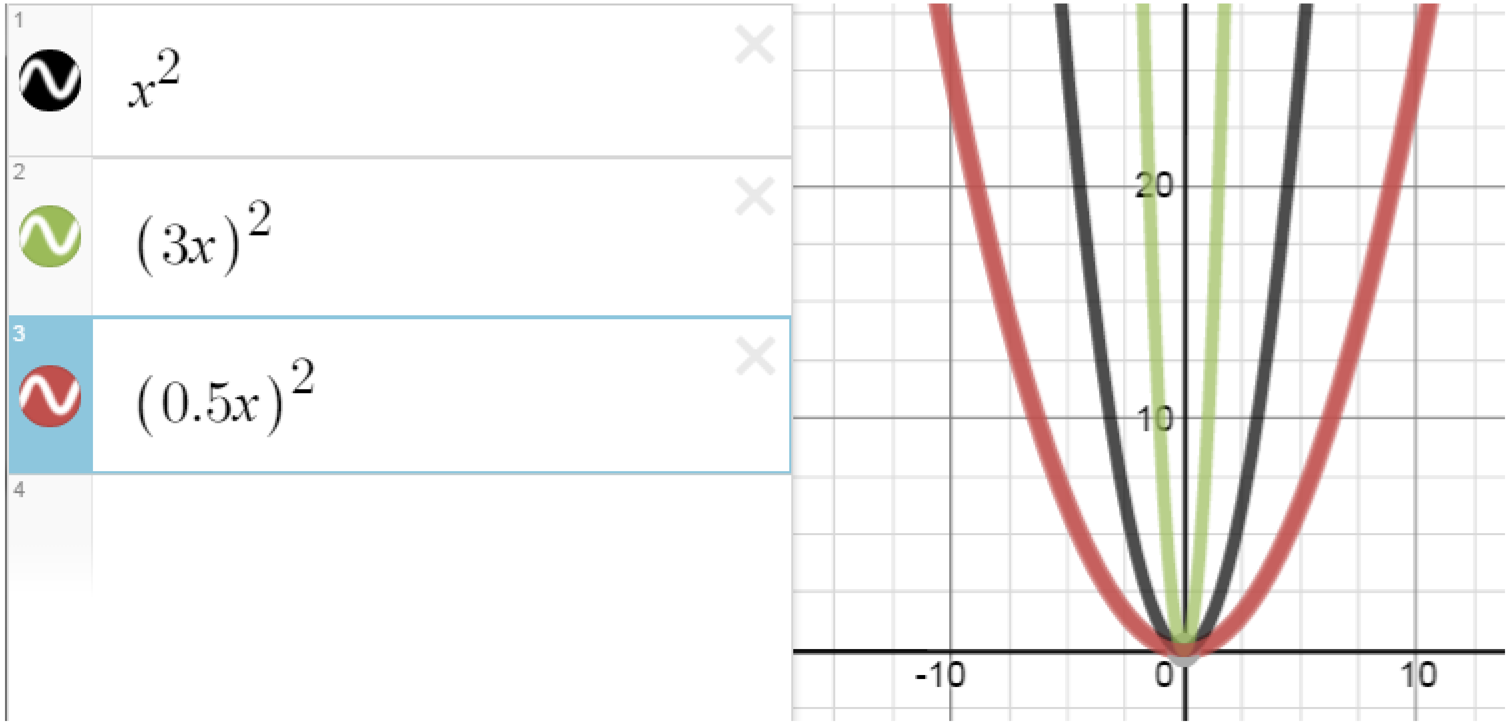
Κατακόρυφη μετατόπιση γραφικής παράστασης

- $f(x) + k$: μετατοπίζει την $f(x)$ προς τα **πάνω** κατά k



Σμίκρυνση και μεγέθυνση γραφικής παράστασης

- $f(\alpha x)$ αν $\alpha > 1$ τότε παρατηρείται οριζόντια **σμίκρυνση** ενώ αν $0 < \alpha < 1$ τότε παρατηρείται οριζόντια **μεγέθυνση**

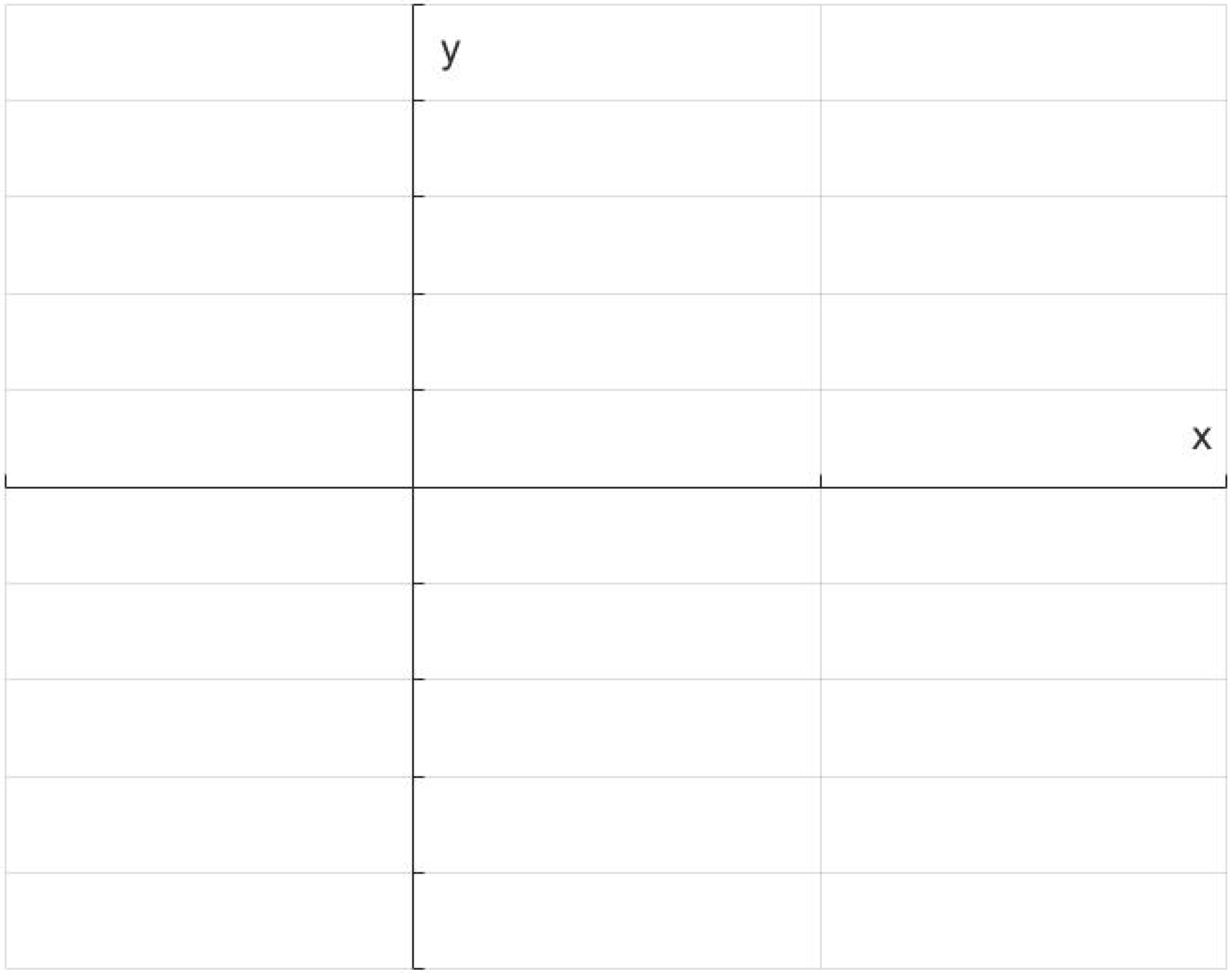


Γραφική παράσταση της $|f(x)|$

- Η γραφική παράσταση της $|f|$ είναι συμμετρική της f ως προς τον άξονα x για τα σημεία της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x.

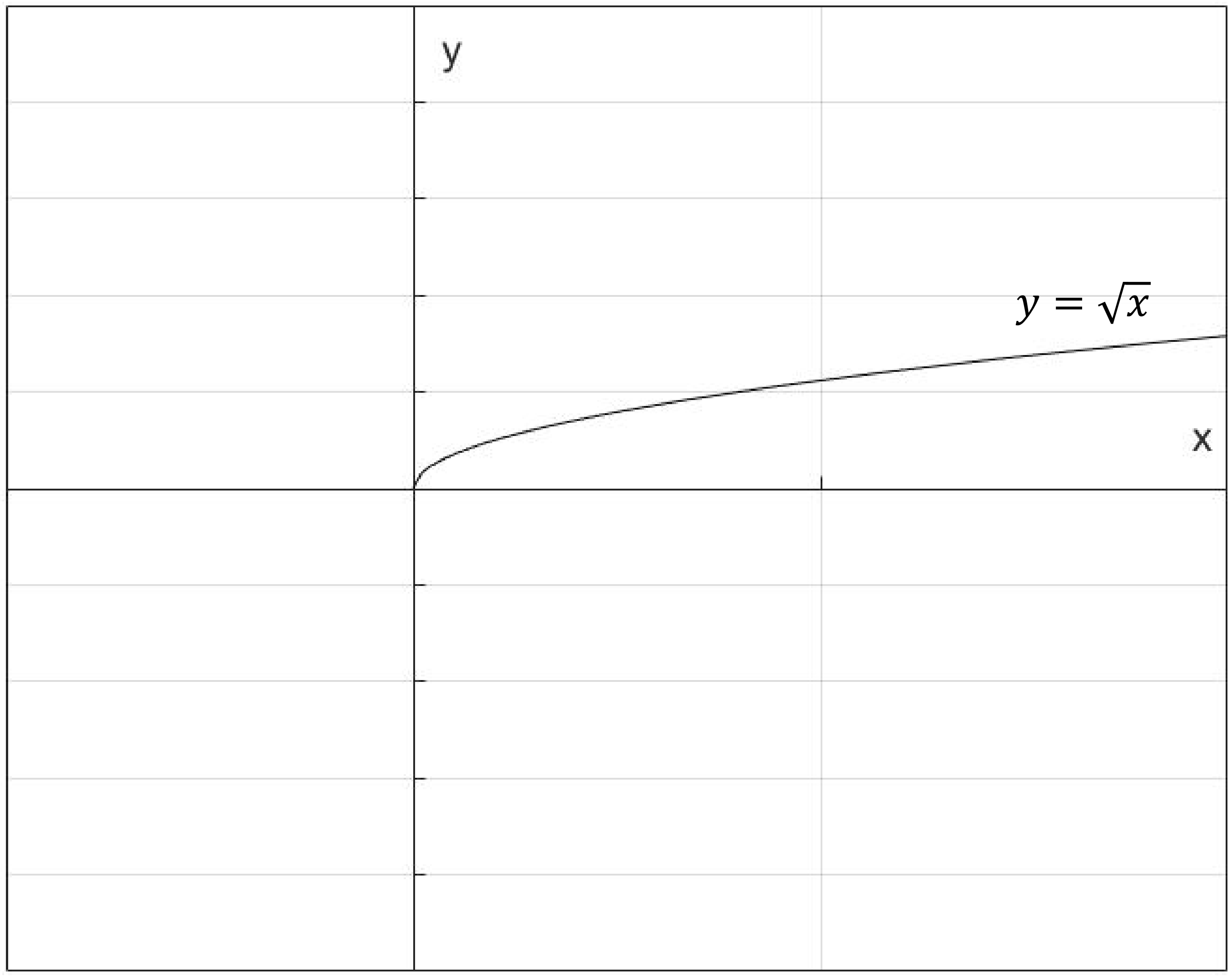
Παράδειγμα

- Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$



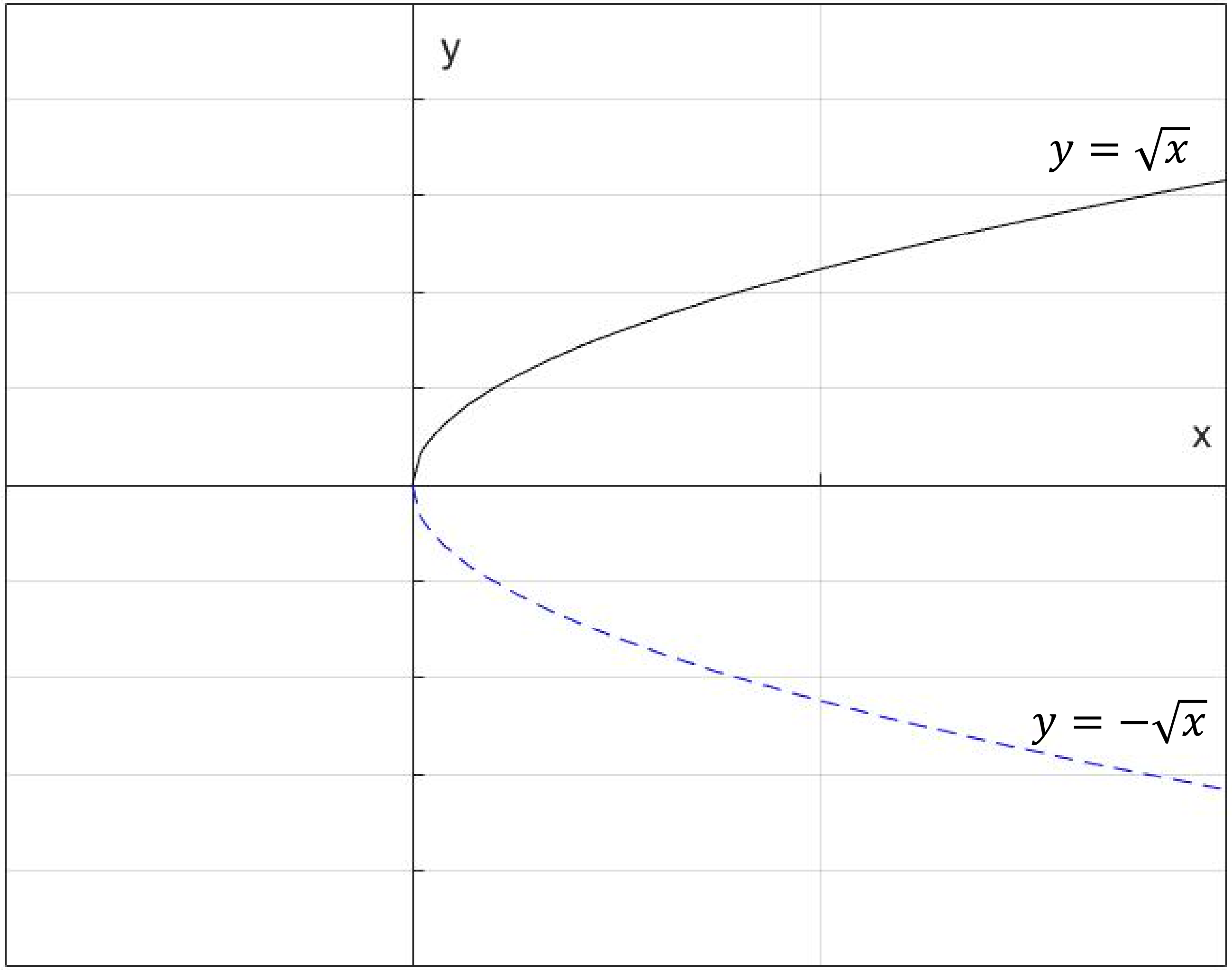
Παράδειγμα

- Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$



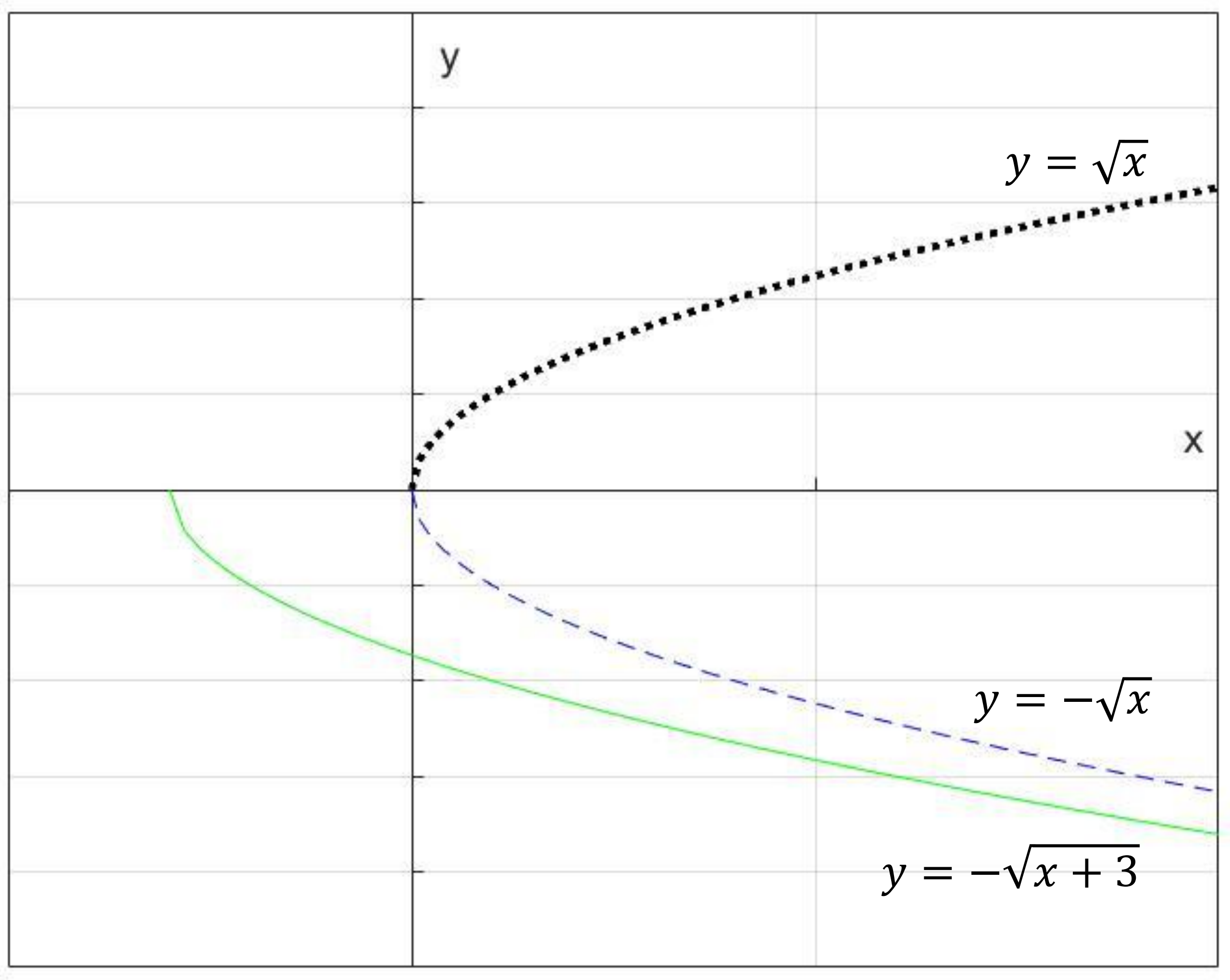
Παράδειγμα

- Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$



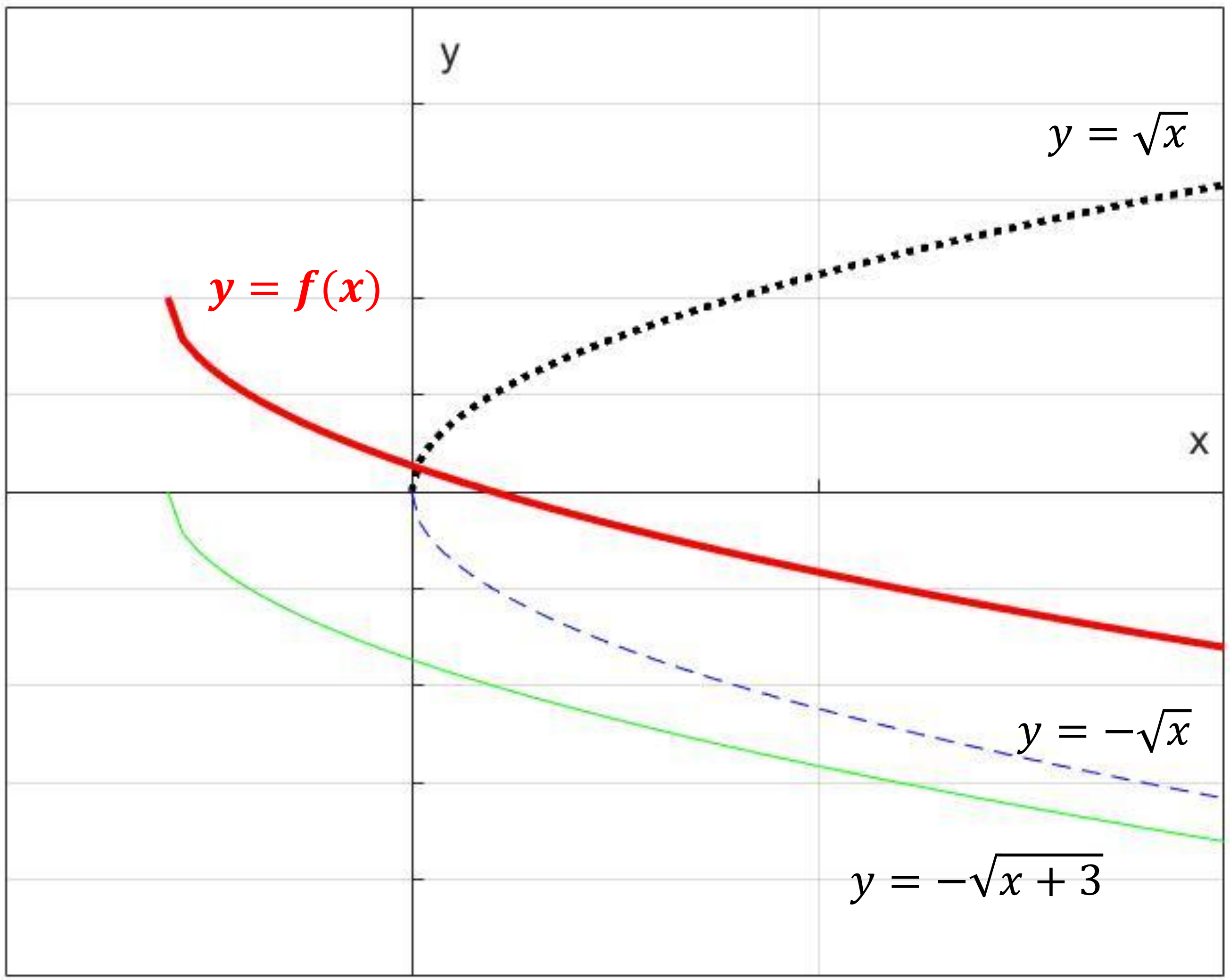
Παράδειγμα

- Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$



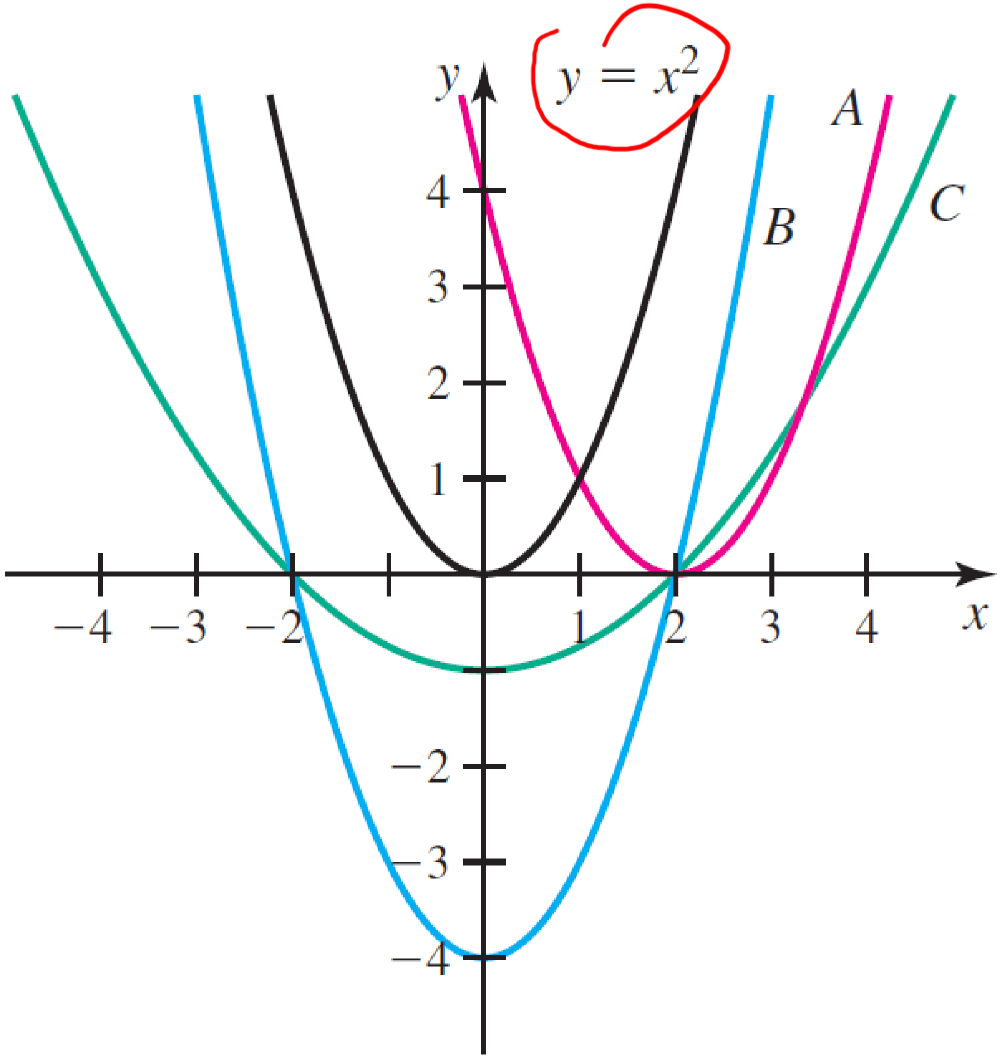
Παράδειγμα

- Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2 - \sqrt{x+3}$



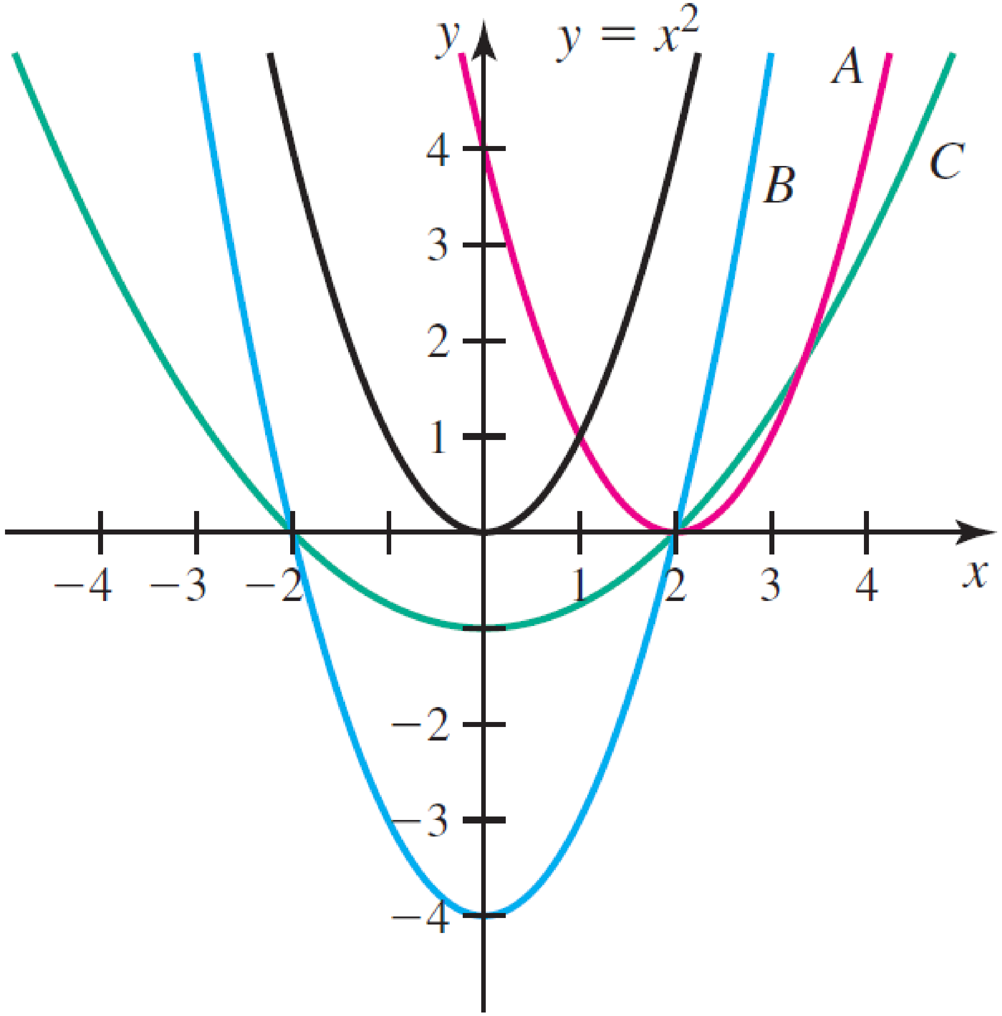
Άσκηση

Τα γραφήματα A,B,C προέρχονται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ χρησιμοποιώντας μετατοπίσεις και σμίκρυνση-μεγέθυνση. Βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει κάθε γράφημα



Λύση

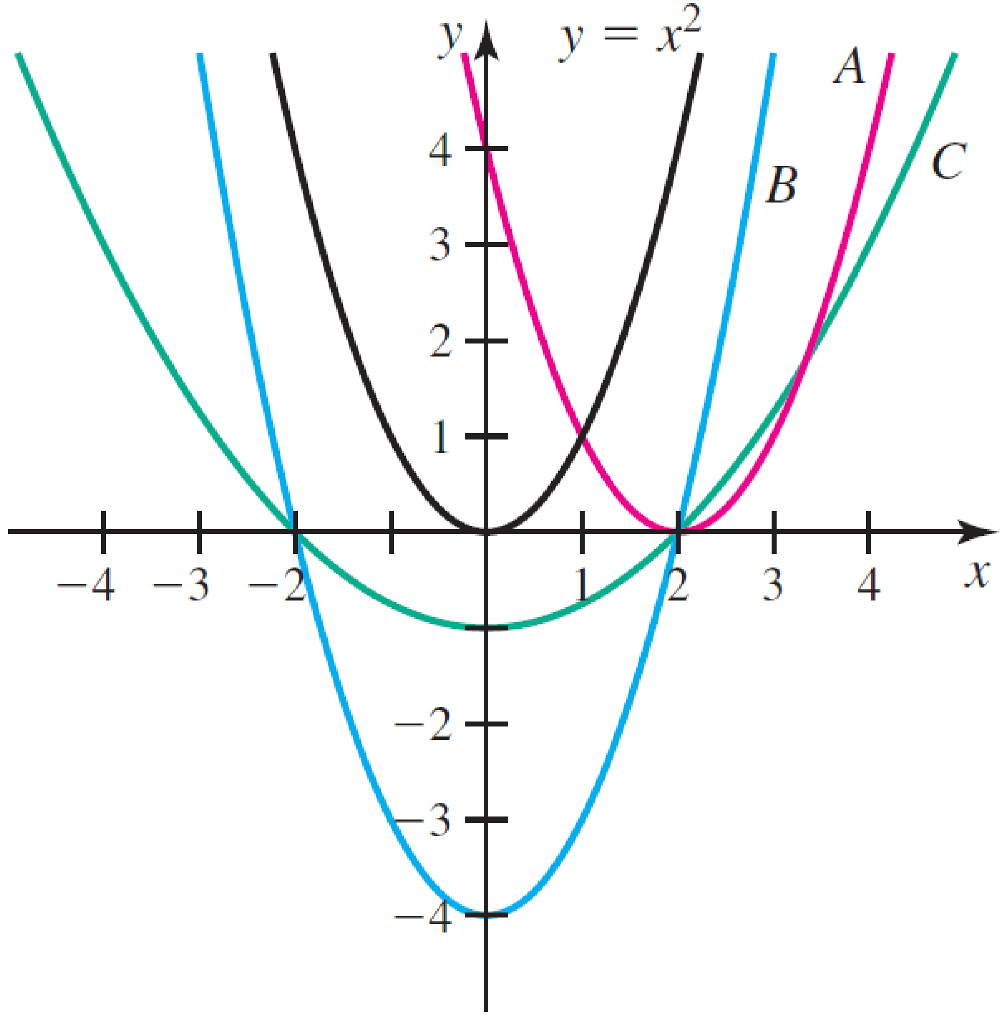
A) Το γράφημα A προέρχεται από μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά . Άρα παριστάνει τη συνάρτηση



Λύση

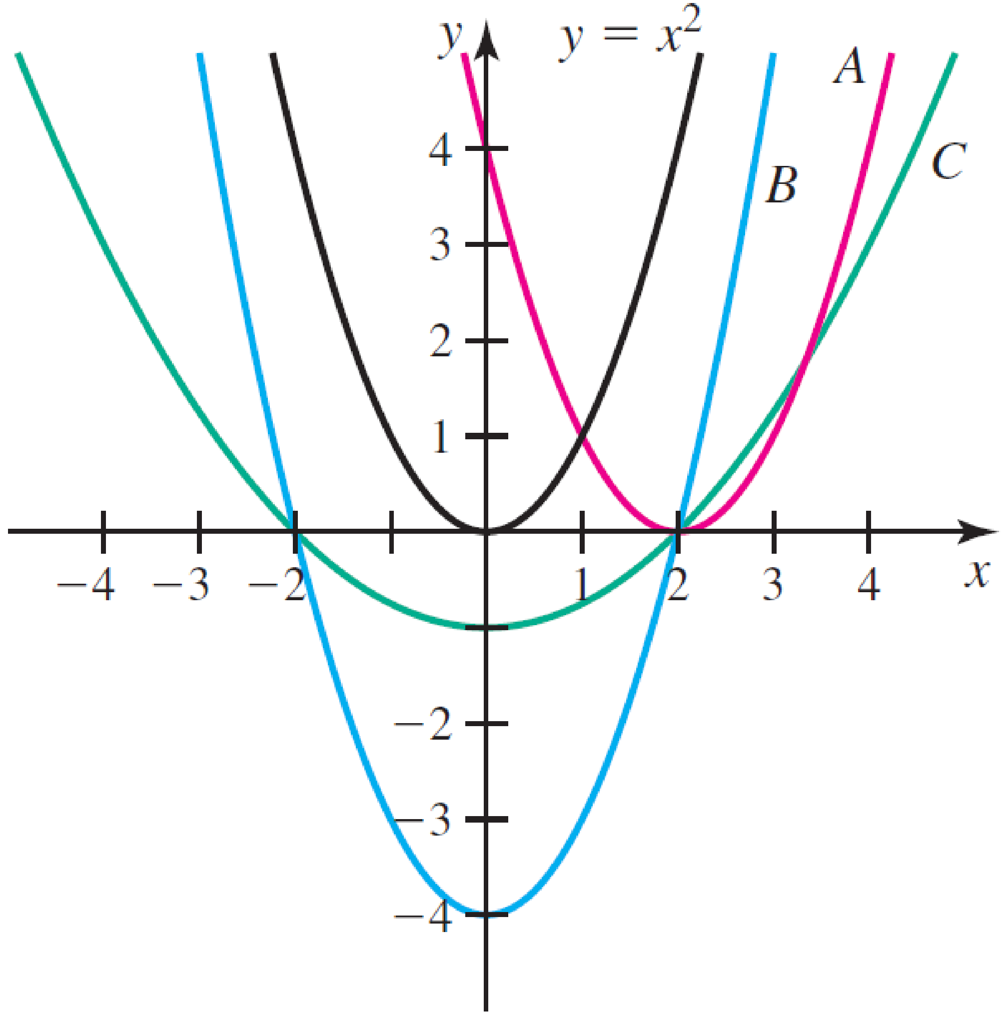
Α) Το γράφημα Α προέρχεται από μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά . Άρα παριστάνει τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x-2) = (x-2)^2$$



Λύση

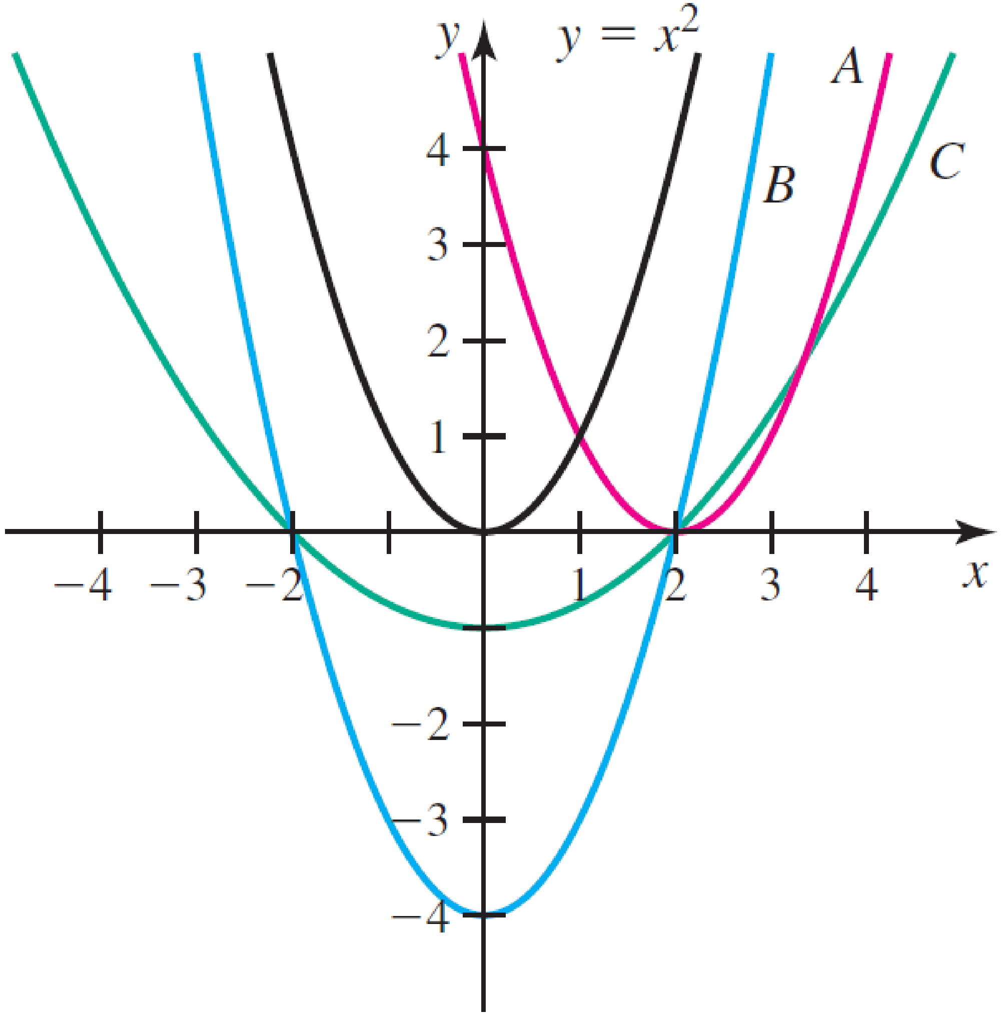
B) Το γράφημα B προέρχεται από μετατόπιση της f κατά 4 μονάδες προς τα κάτω . Άρα παριστάνει τη συνάρτηση



Λύση

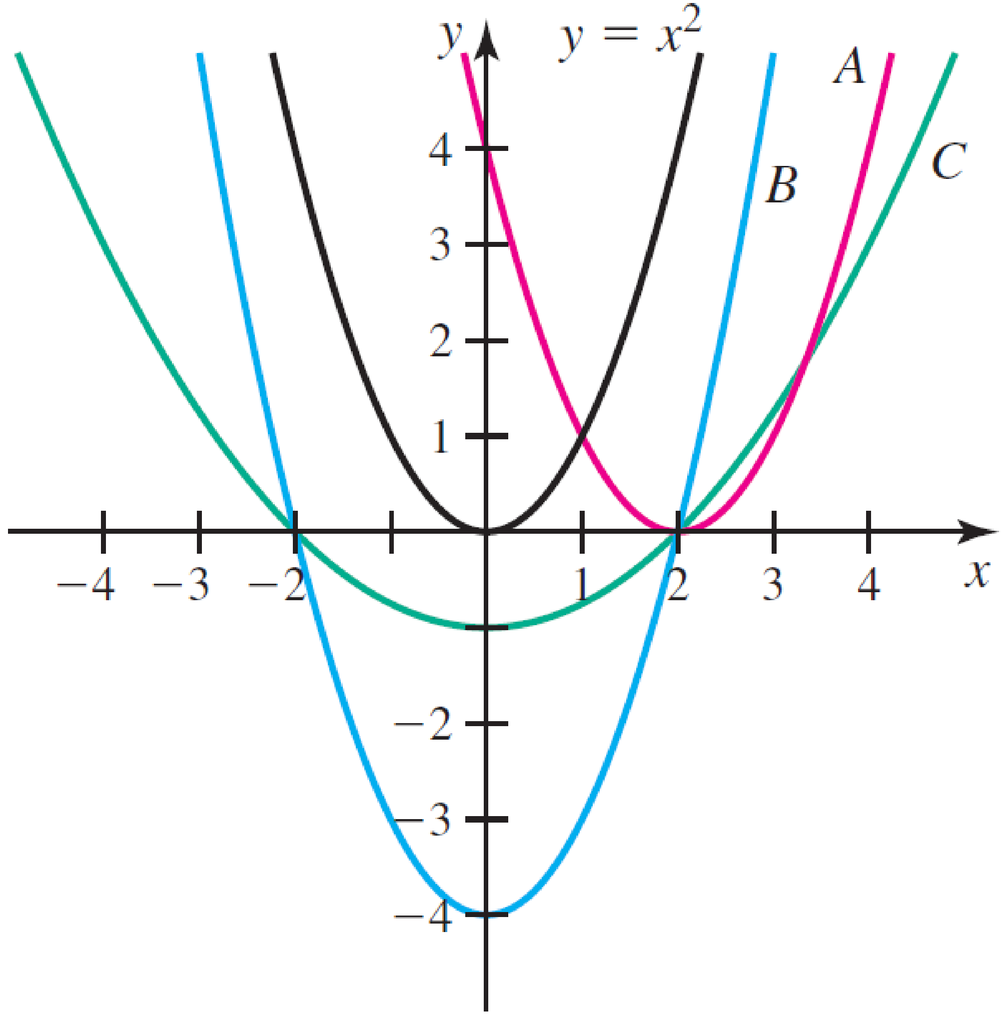
B) Το γράφημα B προέρχεται από μετατόπιση της f κατά 4 μονάδες προς τα κάτω . Άρα παριστάνει τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 4 = x^2 - 4$$



Λύση

C) Το γράφημα C προέρχεται από μεγέθυνση και μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω . Άρα παριστάνει τη συνάρτηση



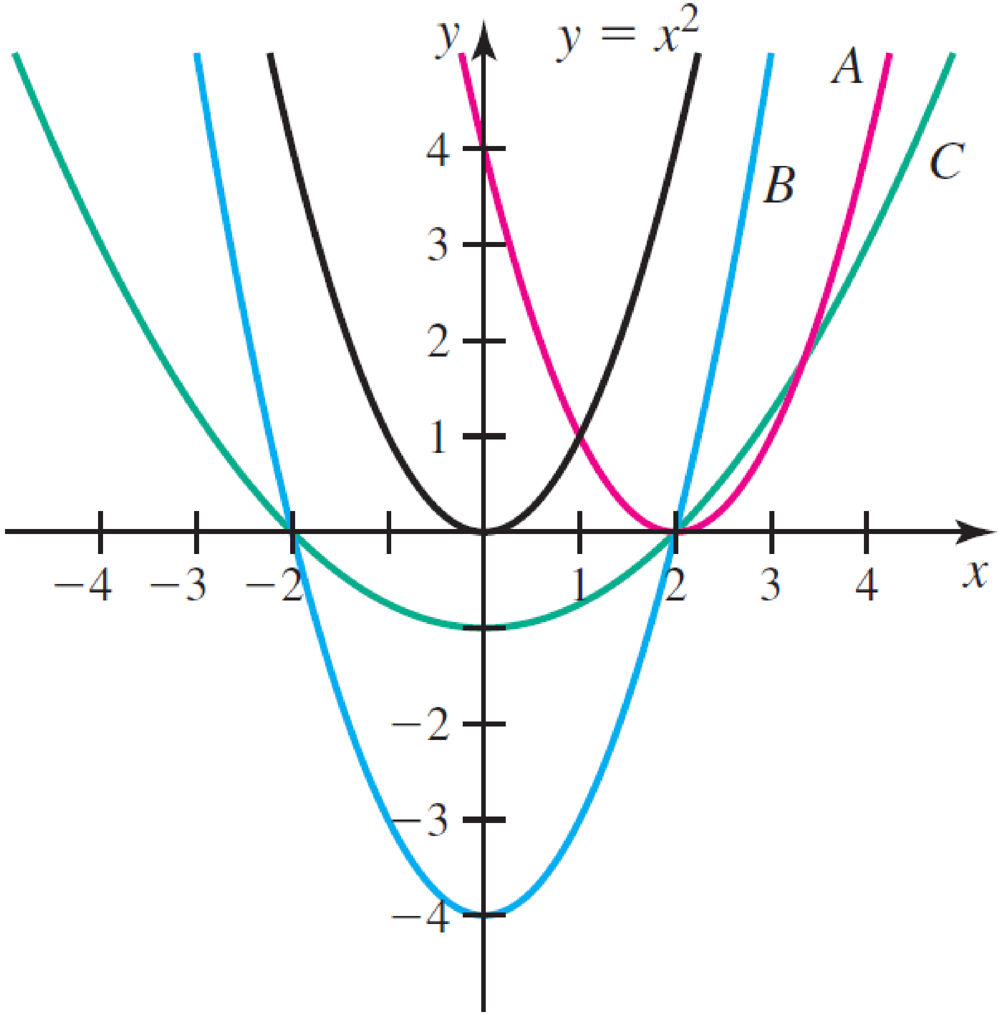
Λύση

C) Το γράφημα C προέρχεται από μεγέθυνση και μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω . Άρα παριστάνει τη συνάρτηση

$$w(x) = f(ax) - 1 = (ax)^2 - 1$$

$$w(x) = cx^2 - 1.$$

$$0 < c < 1$$

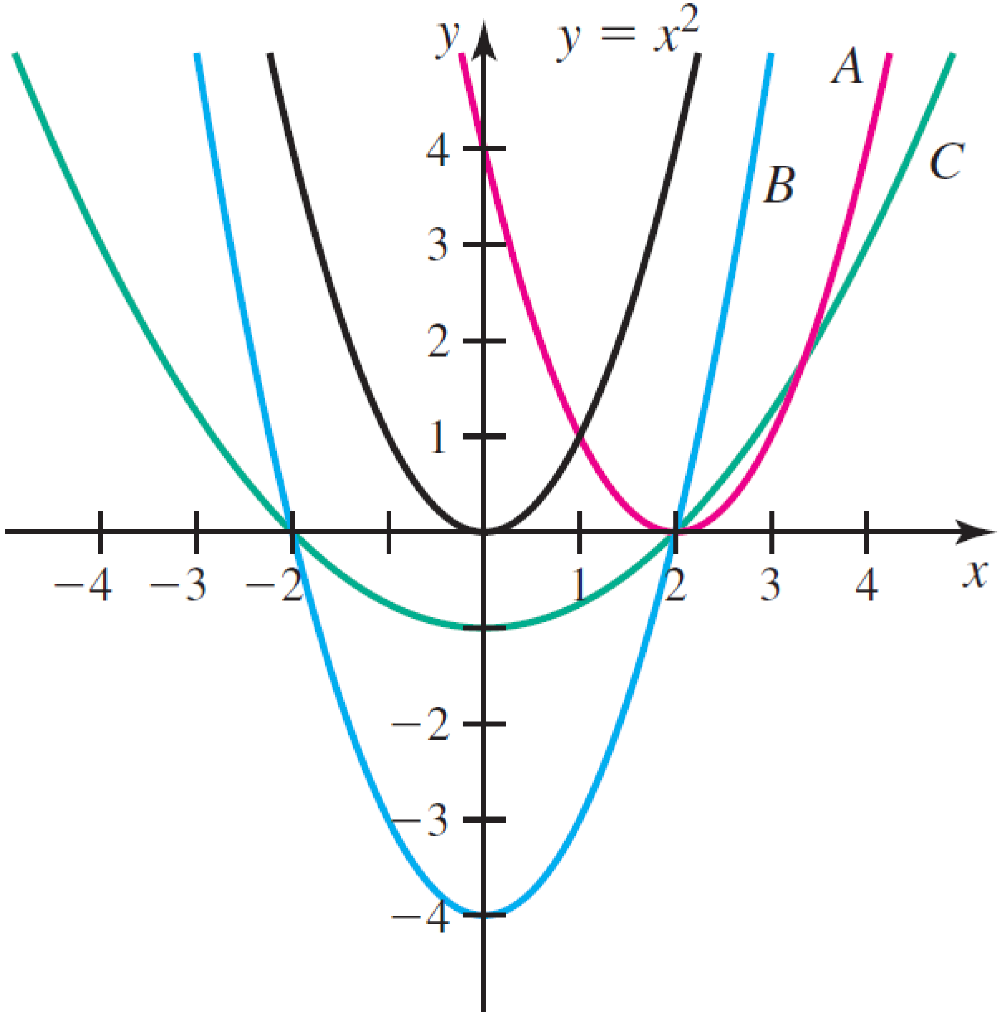


Λύση

$$w(x) = cx^2 - 1.$$

Αλλά η w διέρχεται από τα σημεία $(\pm 2{,}0)$. Άρα

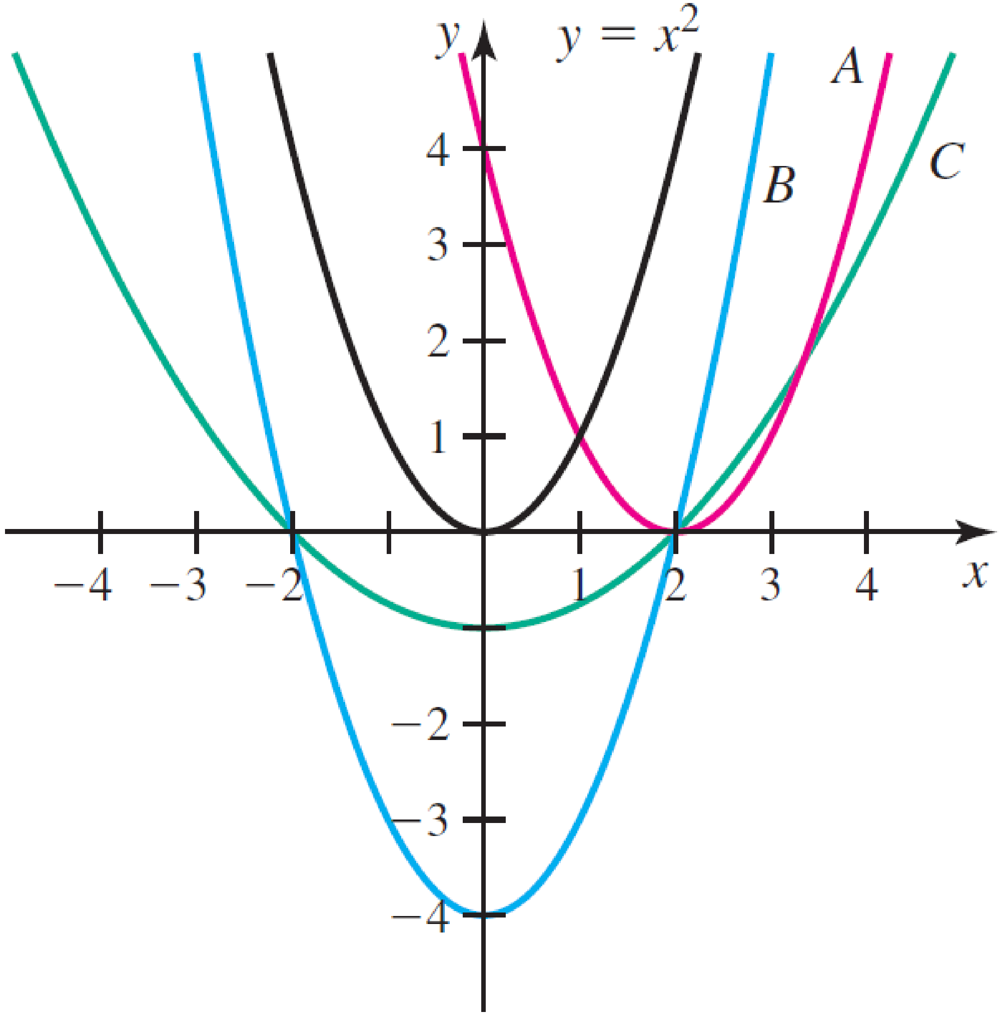
$$c = \frac{1}{4}$$



Λύση

C) Το γράφημα C προέρχεται από μεγέθυνση και μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω . Άρα παριστάνει τη συνάρτηση

$$w(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1.$$



Βασικές συναρτήσεις

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις, π.χ. $f(x) = x^2 + 3x - 1$
- Ρητές συναρτήσεις, π.χ. $f(x) = \frac{x^3-1}{(x+2)}$
- Συναρτήσεις τετραγωνικής ρίζας, π.χ. $f(x) = \sqrt{x+2} + 2x$
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις, π.χ. $f(x) = 3\sin x^2$
- Εκθετικές συναρτήσεις, π.χ. $f(x) = 2^x$
- Λογαριθμικές συναρτήσεις, π.χ. $f(\mathrm{x}) = \log x + 2$

Μερικές ιδιότητες των συναρτήσεων

- Πεδίο ορισμού
- Πεδίο τιμών
- Συνέχεια
- Μονοτονία
- Τοπικά μέγιστα και ελάχιστα
- Ολικό μέγιστο και ελάχιστο
- Ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης $f(x) = 0$
- Κλίση της συνάρτησης σε ορισμένα σημεία
- Άρτια και περιττή συνάρτηση
- Περιοδικότητα

Άρτιες Συναρτήσεις

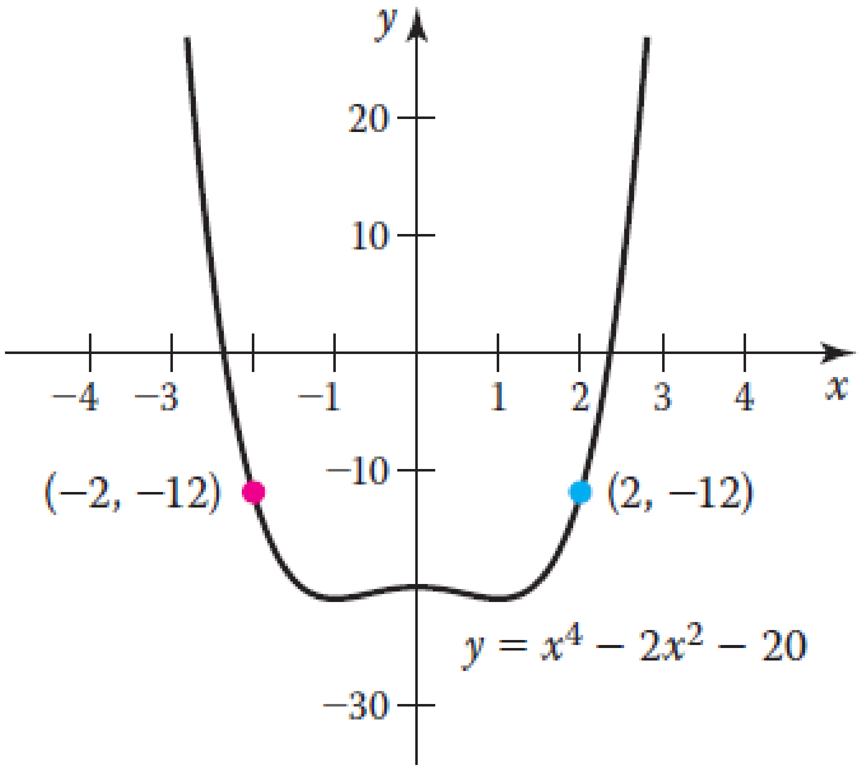
Μια συνάρτηση f είναι **άρτια** αν για κάθε x στο πεδίο ορισμού της, ο αριθμός $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού της και

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

Άρτιες συναρτήσεις

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι **συμμετρική ως προς τον άξονα των $\boldsymbol{y}$**
- Παράδειγμα: η συνάρτηση $x^4 - 2x^2 - 20$ είναι άρτια

Άρτια συνάρτηση: εάν το (x, y) ανήκει στο γράφημα, τότε το $(-x, y)$ ανήκει στο γράφημα.



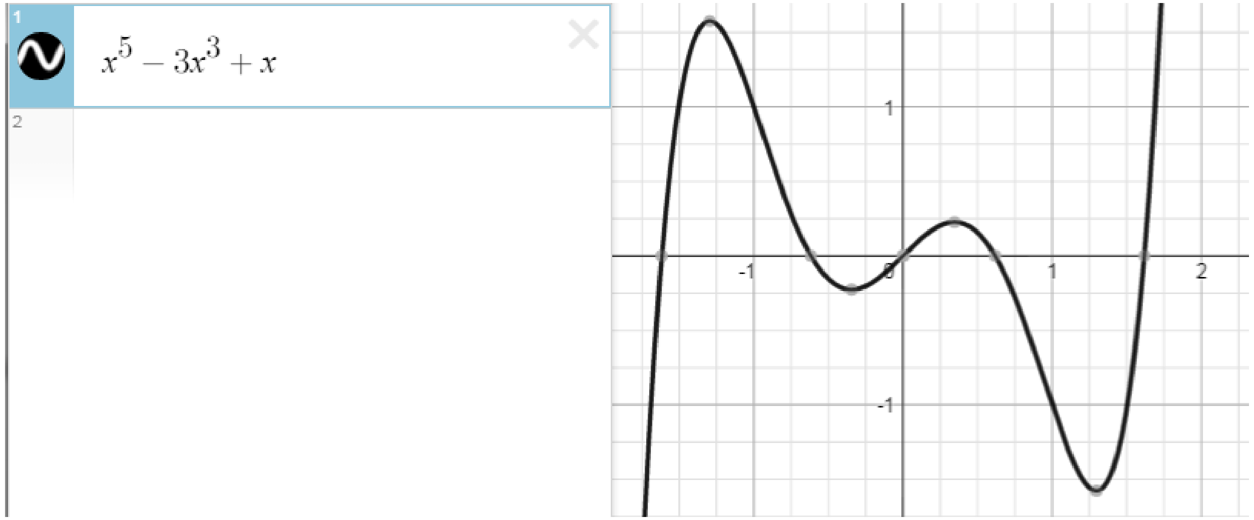
Περιττές Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση f είναι **περιττή** αν για κάθε x στο πεδίο ορισμού της, ο αριθμός $-x$ βρίσκεται επίσης στο πεδίο ορισμού της και

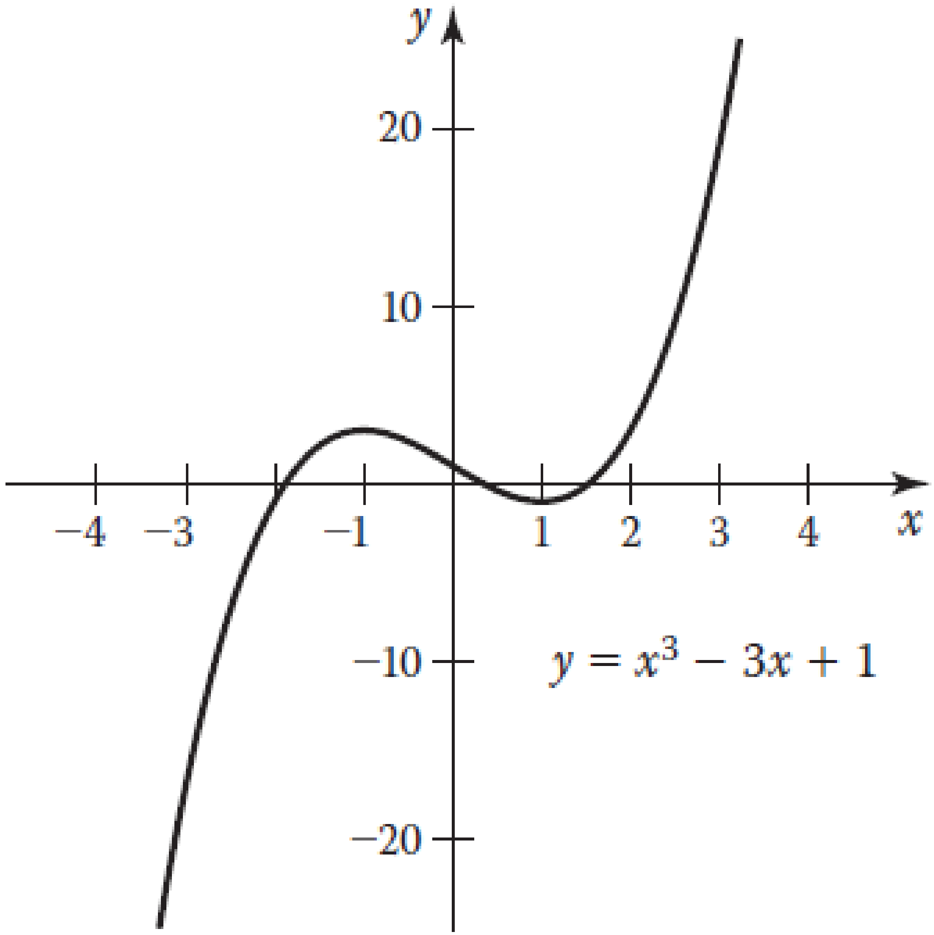
$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

Περιττές συναρτήσεις

- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι **συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων**
- Η συνάρτηση $x^5 - 3x^3 + x$ είναι περιττή



Δεν υπάρχει συμμετρία: η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.



Τμηματικές συναρτήσεις

- Πρόκειται για συναρτήσεις οι οποίες συμπεριφέρονται διαφορετικά ανάλογα με το εύρος τιμών στο οποίο βρίσκεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x

Τμηματικές συναρτήσεις

Παράδειγμα:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \alpha\nu\ x < 0 \\ x & \alpha\nu\ 0 \leq x \leq 10 \\ 10 & \alpha\nu\ x > 10 \end{cases}$$