

203: Διακριτά Μαθηματικά

Εξέταση Προόδου: Ομάδα Α

Η βαθμολογική αξία της εξέτασης είναι 5 μονάδες. Η χρονική διάρκεια της εξέτασης είναι μιάμιση ώρα. Επιτρέπεται στυλό μόνο μπλε και μαύρου χρώματος. Επιτρέπεται μολύβι μόνο για γραφή στο πρόχειρο.

Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1. (2.5 μονάδες) Δίνεται ο ακόλουθος προτασιακός τύπος:

$$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow r$$

- α'. (1 μονάδα) Κατασκευάστε τον πίνακα αληθείας του και αναφέρετε αν είναι ταυτολογία ή αντίφαση.
- β'. (1.5 μονάδα) Βρείτε τον απλούστερο δυνατό ταυτολογικά ισοδύναμο προτασιακό τύπο κάνοντας χρήση των Κανόνων της Προτασιακής Λογικής.

Θέμα 2. (0.5 μονάδα) Σε μία δημοσκόπηση για το μέλλον της αυτοκίνησης συμμετείχαν 144 άτομα. Από αυτούς, οι 100 εξέφρασαν την άποψη ότι είναι οι κινητήρες εσωτερικής καύσης και οι 64 ότι είναι οι ηλεκτρικοί κινητήρες. Υπολογίστε πόσοι από τους συμμετέχοντες πιστεύουν πώς το μέλλον της αυτοκίνησης είναι οι υβριδικοί κινητήρες που αποτελούν συνδυασμό κινητήρα εσωτερικής καύσης και ηλεκτρικού κινητήρα.

Θέμα 3. (1 μονάδα) Για την διεξαγωγή μίας εξέτασης του μαθήματος Διακριτά Μαθηματικά, επιθυμούμε να κατανοήσουμε τους φοιτητές με δικαίωμα συμμετοχής σε 2 τμήματα. Απαριθμήστε όλες τις δυνατές επιλογές στις περιπτώσεις που ακολουθούν κάνοντας χρήση του μοντέλου σφαιρίδια-κουτιά.

- α'. (0.5 μονάδα) Αν πρέπει να τους διαχωρήσουμε σύμφωνα με τον αριθμό μητρώου τους σε άρτιους και περιττούς.
- β'. (0.5 μονάδα) Αν πρέπει να τους διαχωρήσουμε σύμφωνα με το πρώτο γράμμα του επωνύμου τους σε δύο διαστήματα. Σε αυτήν την περίπτωση, μία επιλογή είναι «από Α έως Μ» στο πρώτο τμήμα και «από Ν έως Ω» στο δεύτερο.

Θέμα 4. (1 μονάδα) Μία αυτοκινητοβιομηχανία πουλά αυτοκίνητα του μοντέλου M που κατασκευάζει σε δύο εργοστάσια, έστω A και B . Το εργοστάσιο A έχει ρυθμό παραγωγής 4000 αυτοκίνητα το μήνα και το B έχει 1000 αυτοκίνητα το μήνα. Έχει εκτιμηθεί πως το ποσοστό των αυτοκινήτων που κατασκευάζονται ελαττωματικά στο εργοστάσιο A είναι 10% και στο B είναι 5%.

- α'. (0.5 μονάδα) Υπολογίστε την πιθανότητα να αγοράσουμε αυτοκίνητο του μοντέλου M το οποίο είναι ελαττωματικό εκ κατασκευής.
- β'. (0.5 μονάδα) Δεδομένου ότι το αυτοκίνητο του μοντέλου M που αγοράσαμε είναι ελαττωματικό εκ κατασκευής, υπολογίστε την πιθανότητα να κατασκευάστηκε στο εργοστάσιο A .

Κανόνες Προτασιακής Λογικής

Αντιμεταθετικός:	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Προσεταιριστικός:	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Επιμεριστικός:	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
De Morgan:	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Συμπληρώματος:	$P \wedge \neg P \equiv \perp$	$P \vee \neg P \equiv \top$
Απορροφητικός:	$\top \wedge P \equiv P$	$\top \vee P \equiv \top$
	$\perp \wedge P \equiv \perp$	$\perp \vee P \equiv P$
	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Διπλής Άρνησης:	$\neg\neg P \equiv P$	
Συνεπαγωγής:	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Ισοδυναμίας:	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Μοντέλο Σφαιρίδια-Κουτιά

k σφαιρίδια	σε n κουτιά	χωρ/τας	# δυνατών τοποθετήσεων
διακεκριμένα	διακεκριμένα	το πολύ ένα	$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (διατάξεις)
διακεκριμένα δεν μας ενδιαφέρει η σειρά μέσα στα κουτιά	διακεκριμένα	άπειρης	n^k
διακεκριμένα μας ενδιαφέρει η σειρά μέσα στα κουτιά	διακεκριμένα	άπειρης	$P(n+k-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$
m διακεκριμένες ομάδες με k_1, \dots, k_m όμοια	διακεκριμένα	το πολύ ένα	$\frac{P(n, k)}{k_1! \cdots k_m!} = \frac{n!}{(n-k)! k_1! \cdots k_m!}$
όμοια	διακεκριμένα	το πολύ ένα	$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (συνδυασμοί)
όμοια	διακεκριμένα	άπειρης	$C(n+k-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$