203: Διακριτά Μαθηματικά
Κεφάλαιο 2: Θεωρία Συνόλων

Σπυρίδων Τζίμας

Εαρινό Εξάμηνο 2025

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεωρία Συνόλων

Τα σύνολα αποτελούν τα υποκείμενα και αντικείμενα της γλώσσας των Μαθηματικών.

Το σύνολο είναι μια πρωταρχική έννοια, δηλαδή δεν ορίζεται με την βοήθεια προηγούμενων εννοιών. Διαισθητικά μιλώντας, σύνολο είναι μια συλλογή αντικειμένων που είναι συγκεκριμένα και διακεκριμένα.

Τα αντικείμενα που περιέχει ένα σύνολο τα καλούμε στοιχεία του συνόλου.

Θεωρία Συνόλων

Για να συμβολίσουμε σύνολα, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $A, B, C, \ldots$

Δύο τρόποι δήλωσης ενός συνόλου

Καταγραφή των στοιχείων του: π.χ. $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

Περιγραφή των στοιχείων του: π.χ. $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 20, n \text{ πρώτος}\}$

Αν χρησιμοποιήσουμε την καταγραφή των στοιχείων ενός συνόλου,

- ✔ δεν μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία τα καταγράφουμε
- ✔ ούτε αν τα καταγράψουμε περισσότερες από μία φορές.

Η μόνη πληροφορία που διατηρεί ένα σύνολο είναι αυτή του τι περιέχει.

Παράδειγμα: $\{a, b, c\} = \{b, c, a\} = \{a, b, b, c, c, c\} = \{a, b, c, b, c, a\}$

Θεωρία Συνόλων

Αξίωμα: Υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο, το κενό σύνολο,
το οποίο δεν περιέχει κανένα στοιχείο και συμβολίζεται με $\{\}$ ή $\emptyset$.

Δεν ορίζεται το σύνολο όλων των συνόλων.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύνολο αναφοράς που περιέχει όλα τα αντικείμενα που μας ενδιαφέρει να χρησιμοποιήσουμε ως στοιχεία άλλων συνόλων στη περίπτωσή μας. Καλούμε αυτό το σύνολο σύμπαν και το συμβολίζουμε με U.

Το σύνολο όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου X το καλούμε το δυναμοσύνολο του X και το συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(X)$.

Συνολοθεωρητικές Σχέσεις

Για να εκφράσουμε σχέσεις μεταξύ αντικειμένων, χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα.

Γράφουμε	Διαβάζουμε
$x \in A$	το x ανήκει στο A (ή αλλιώς το x περιέχεται στο A)
$x \notin A$	το x δεν ανήκει στο A (ή αλλιώς το x δεν περιέχεται στο A)
$A \subseteq B$	το A είναι υποσύνολο του B
$A \not\subseteq B$	το A δεν είναι υποσύνολο του B
$A \subset B$	το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B

Παρατηρήσεις: Είτε $x \in A$, είτε $x \notin A$. Είτε $A \subseteq B$, είτε $A \not\subseteq B$.
Πάντα $\varnothing \subseteq A$ και $A \subseteq A$. Αν $A \subset B$, τότε $A \subseteq B$.
$A = B$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Συνολοθεωρητικές Πράξεις

Κατασκευάζουμε νέα σύνολα από τα ήδη υπάρχοντα κάνοντας χρήση συνολοθεωρητικών πράξεων.

Έστω σύμπαν U.

		Γράφουμε	Σημαίνει
$\cup$	Ένωση	$A \cup B$	$\{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$
$\cap$	Τομή	$A \cap B$	$\{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
$\setminus$	Διαφορά	$A \setminus B$	$\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
$\oplus$	Συμμετρική Διαφορά	$A \oplus B$	$\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \vee (x \notin A) \wedge (x \in B)\}$
Συμπλήρωμα (Complement)		A^C	$\{x \mid (x \in U) \wedge (x \notin A)\} = U \setminus A$

Προτεραιότητα Τελεστών

Μέσα σε έναν προτασιακό τύπο, οι τελεστές δρουν με την ακόλουθη σειρά προτεραιότητας:

συνολοθεωρητικές πράξεις $>$ συνολοθεωρητικές σχέσεις $>$ λογικοί σύνδεσμοι

Δεν μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά των τελεστών χρησιμοποιώντας παρενθέσεις.

Παράδειγμα: Προσθέστε τόσα ζεύγη παρενθέσεων στον προτασιακό τύπο $A \cap B \subseteq C \wedge x \in D$ όσες και οι εμφανίσεις τελεστών που περιέχει.

$$(((A \cap B) \subseteq C) \wedge (x \in D))$$

Ιδιότητες των Συνολοθεωρητικών Πράξεων

Έστω σύνολα A, B, C και σύμπαν U.

Αντιμεταθετική

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$A \oplus B = B \oplus A$

Προσεταιριστική

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Επιμεριστική

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Απορροφητική

$A \cup \varnothing = A \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

$A \cup U = U \qquad A \cap U = A$

Συμπληρώματος

$A \cup A^C = U \qquad A \cap A^C = \varnothing$

De Morgan

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Διπλής Άρνησης: $(A^C)^C = A$

Διαφοράς: $A \setminus B = A \cap B^C$

Συμμετρικής Διαφοράς: $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Ιδιότητες των Συνολοθεωρητικών Πράξεων

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συνολοθεωρητικών πράξεων, δείξτε ότι $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

$$
\begin{aligned}
& A \setminus (A \cap B) & \\
&= A \cap (A \cap B)^C & \text{Διαφοράς} \\
&= A \cap (A^C \cup B^C) & \text{De Morgan} \\
&= (A \cap A^C) \cup (A \cap B^C) & \text{Επιμεριστική} \\
&= \varnothing \cup (A \cap B^C) & \text{Συμπληρώματος} \\
&= A \cap B^C & \text{Απορροφητική} \\
&= A \setminus B & \text{Διαφοράς}
\end{aligned}
$$

Ιδιότητες των Συνολοθεωρητικών Πράξεων

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συνολοθεωρητικών πράξεων, δείξτε ότι $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ και $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

$$
\begin{aligned}
&(A \cup B) \setminus C \\
&= (A \cup B) \cap C^C && \text{Διαφοράς} \\
&= (A \cap C^C) \cup (B \cap C^C) && \text{Επιμεριστική} \\
&= (A \setminus C) \cup (B \setminus C) && \text{Διαφοράς}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A \cap B) \setminus C \\
&= (A \cap B) \cap C^C && \text{Διαφοράς} \\
&= (A \cap B) \cap (C^C \cap C^C) && \text{Απορροφητική} \\
&= A \cap (B \cap C^C) \cap C^C && \text{Προσεταιριστική} \\
&= A \cap (C^C \cap B) \cap C^C && \text{Αντιμεταθετική} \\
&= (A \cap C^C) \cap (B \cap C^C) && \text{Προσεταιριστική} \\
&= (A \setminus C) \cap (B \setminus C) && \text{Διαφοράς}
\end{aligned}
$$

Ιδιότητες των Συνολοθεωρητικών Πράξεων

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συνολοθεωρητικών πράξεων, δείξτε ότι $A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$$
\begin{aligned}
& A \oplus B && \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) && \text{Συμμετρικής Διαφοράς} \\
&= (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) && \text{Διαφοράς} \\
&= ((A \cap B^C) \cup B) \cap ((A \cap B^C) \cup A^C) && \text{Επιμεριστική} \\
&= ((A \cup B) \cap (B^C \cup B)) \cap ((A \cup A^C) \cap (B^C \cup A^C)) && \text{Επιμεριστική} \\
&= ((A \cup B) \cap U) \cap (U \cap (B^C \cup A^C)) && \text{Συμπληρώματος} \\
&= (A \cup B) \cap (B^C \cup A^C) && \text{Απορροφητική} \\
&= (A \cup B) \cap (B \cap A)^C && \text{De Morgan} \\
&= (A \cup B) \setminus (B \cap A) && \text{Διαφοράς} \\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B) && \text{Αντιμεταθετική}
\end{aligned}
$$

Καρτεσιανό Γινόμενο

Μια ακολουθία είναι ένα αντικείμενο που δηλώνεται όπως ένα σύνολο όπου επιπλέον

- ✔ μας ενδιαφέρει τι περιέχει σε κάθε θέση
- ✔ και επιτρέπεται να εμφανίζεται σε περισσότερες από μία θέσεις το ίδιο αντικείμενο.

Παράδειγμα: $(a, b) \neq (b, a) \neq (b, a, a) \neq (a, b, a)$

Τις ακολουθίες δύο ή πολλών θέσεων τις καλούμε και ζεύγη ή πλειάδες αντίστοιχα.

Το σύνολο $\{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ το καλούμε καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A, B και το συμβολίζουμε με $A \times B$.

Γενικότερα, το σύνολο $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (a_n \in A_n)\}$
το καλούμε καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $A_1, A_2, \ldots, A_n$
και το συμβολίζουμε με $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.
Αν $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, τότε το συμβολίζουμε και με A^n.

Πληθικότητα και η Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Τον αριθμό που δηλώνει το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου X τον καλούμε πληθικό αριθμό του X και τον συμβολίζουμε με $|X|$.

Παρ/ρήσεις: Αν $A = B$, τότε $|A| = |B|$. Αν $A \subseteq B$, τότε $|A| \leq |B|$. Αν $A \subset B$, τότε $|A| < |B|$.

	ισότητα αν και μόνο αν
$\lvert A \cap B \rvert \leq \lvert A \rvert$	$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$
$\lvert A \cap B \rvert \leq \lvert B \rvert$	$A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$
$\lvert A \setminus B \rvert \leq \lvert A \rvert$	$A \cap B = \varnothing$
$\lvert A \setminus B \rvert \geq \lvert A \rvert - \lvert B \rvert$	$A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$
$\lvert A \cup B \rvert \leq \lvert A \rvert + \lvert B \rvert$	$A \cap B = \varnothing$
$\lvert A \oplus B \rvert \leq \lvert A \rvert + \lvert B \rvert$	$A \cap B = \varnothing$

Πληθικότητα και η Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Τον αριθμό που δηλώνει το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου X
τον καλούμε πληθικό αριθμό του X και τον συμβολίζουμε με $|X|$.

Παρ/ρήσεις: Αν $A = B$, τότε $|A| = |B|$. Αν $A \subseteq B$, τότε $|A| \leq |B|$. Αν $A \subset B$, τότε $|A| < |B|$.

Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Για 2 σύνολα: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
Για 3 σύνολα: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$\ldots$

Για n σύνολα: $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ πλην τους πληθικούς αριθμούς των τομών για όλα τα ζεύγη συν αυτών για όλες τις τριάδες κ.ο.κ.

Άλλες Ισότητες

$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$
$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1||A_2| \cdots |A_n|$
$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

Διαμερίσεις

Δύο σύνολα A και B καλούνται ξένα (μεταξύ τους) αν $A \cap B = \varnothing$.

Ένα υποσύνολο $\mathcal{P}$ του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X καλείται διαμέριση του X αν

- ✔ όλα τα στοιχεία του $\mathcal{P}$ είναι μη-κενά και ανά δύο ξένα και
- ✔ η ένωση όλων των στοιχείων του $\mathcal{P}$ είναι ακριβώς το X.

Παράδειγμα: Το $\{\{a \in \mathbb{Z} \mid a < 0\}, \{0\}, \{a \in \mathbb{Z} \mid a > 0\}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ είναι διαμέριση του $\mathbb{Z}$.

Πληθικότητα

Για κάθε διαμέριση $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ενός συνόλου X,
ισχύει η ισότητα $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = |X|$.

Παράδειγμα:

$U = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10, n \text{ πρώτος}\} = \{2,3,5,7\}$
$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10, n \text{ περιττός}\} = \{1,3,5,7,9\}$
$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10, n \text{ άρτιος}\} = \{0,2,4,6,8\}$
Υπολογίστε τους παρακάτω πληθικούς αριθμούς.

$$\begin{aligned} |A| &= 4 \\ |A^C| &= |U \setminus A| = |U| - |A| \\ &= 10 - 4 = 6 \\ |A \cap B| &= |\{3,5,7\}| = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B| &= 5 \\ |B^C| &= |U| - |B| \\ &= 10 - 5 = 5 \\ |A \cap C| &= |\{2\}| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |C| &= 5 \\ |C^C| &= |U| - |C| \\ &= 10 - 5 = 5 \\ |B \cap C| &= |\{\}| = 0 \end{aligned}$$

$$|U| = 10$$

$$\begin{aligned} |A \setminus B| &= |A \setminus (A \cap B)| = |A| - |A \cap B| = 4 - 3 = 1 \leq 4 = |A| \text{ και } \geq -1 = 4 - 5 = |A| - |B| \\ |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| = 4 + 5 - 3 = 6 \leq 9 = 5 + 4 = |A| + |B| \\ |A \oplus B| &= |A| + |B| - 2|A \cap B| = 4 + 5 - 2 \times 3 = 3 \leq 9 = 5 + 4 = |A| + |B| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A \times B| &= |A||B| = 4 \times 5 = 20 \\ |\mathcal{P}(A)| &= 2^{|A|} = 2^4 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A \times B \times C| &= |A||B||C| = 4 \times 5 \times 5 = 100 \\ |\mathcal{P}(A \times B)| &= 2^{|A \times B|} = 2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 \end{aligned}$$

Άσκηση: Ερωτήθηκαν 30 άτομα ποια από τα βιντεοπαιχνίδια A, B, C έχουν αγοράσει.
Τα 15 από αυτά απάντησαν πως έχουν αγοράσει το A, τα 8 το B, και τα 6 το C.
Τα 3 από αυτά απάντησαν πως έχουν αγοράσει και τα τρία βιντεοπαιχνίδια.
Δείξτε ότι τουλάχιστον 7 από αυτά δεν έχουν αγοράσει κανένα από τα τρία.

Λύση: Το σύμπαν U περιεχεί και τα 30 άτομα που ερωτήθηκαν και μόνο αυτά.
Έστω $A = \{\text{άτομο} \mid \text{άτομο έχει αγοράσει το } A\}$. Ομοίως ορίζουμε και τα σύνολα B, C.
Έστω $Z = \{\text{άτομο} \mid \text{άτομο δεν έχει αγοράσει ούτε το } A \text{ ούτε το } B \text{ ούτε το } C\}$.
Τότε $Z = A^C \cap B^C \cap C^C = (A \cup B \cup C)^C$.

$$|U| = 30 \qquad |A| = 15 \qquad |B| = 8 \qquad |C| = 6 \qquad |A \cap B \cap C| = 3$$

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&\leq |A| + |B| + |C| - |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= |A| + |B| + |C| - 2|A \cap B \cap C| = 15 + 8 + 6 - 2 \times 3 = 23 \\
|Z| &= |(A \cup B \cup C)^C| = |U| - |A \cup B \cup C| \geq 30 - 23 = 7
\end{aligned}$$

Άσκηση: Για τους σχολικούς αγώνες στίβου, 75 παιδιά είχαν την δυνατότητα να συμμετάσχουν σε οσαδήποτε από τρία αθλήματα A, B, C. Τα 20 από αυτά συμμετείχαν και στα τρία αθλήματα. Τα 55 από αυτά συμμετείχαν σε τουλάχιστον δύο από τα τρία. Οι συμμετοχές και στα τρία αθλήματα συνολικά ανήλθαν σε 140. Υπολογίστε πόσα από τα 75 παιδιά δεν συμμετείχαν σε κανένα άθλημα.

Λύση: Το σύμπαν U περιεχεί και τα 75 παιδιά και μόνο αυτά.
Έστω $A = \{\text{παιδί} \mid \text{παιδί συμμετείχε στο } A\}$. Ομοίως ορίζουμε και τα σύνολα B, C.
Έστω $Z = \{\text{παιδί} \mid \text{παιδί δεν συμμετείχε ούτε στο } A \text{ ούτε στο } B \text{ ούτε στο } C\}$.
Τότε $Z = A^C \cap B^C \cap C^C = (A \cup B \cup C)^C$.

$$
\begin{aligned}
75 &= |U| \\
20 &= |A \cap B \cap C| \\
55 &= |(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)| = |A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 2|A \cap B \cap C| \\
140 &= |A| + |B| + |C| \\
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 140 - 55 - 20 = 65 \\
|Z| &= |(A \cup B \cup C)^C| = |U| - |A \cup B \cup C| = 75 - 65 = 10
\end{aligned}
$$