203: Διακριτά Μαθηματικά
Κεφάλαιο 5: Σχέσεις

Σπυρίδων Τζίμας

Εαρινό Εξάμηνο 2025

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Υπενθύμιση: Καρτεσιανό Γινόμενο

Μια ακολουθία είναι ένα αντικείμενο που δηλώνεται όπως ένα σύνολο όπου επιπλέον

- ✔ μας ενδιαφέρει τι περιέχει σε κάθε θέση
- ✔ και επιτρέπεται να εμφανίζεται σε περισσότερες από μία θέσεις το ίδιο αντικείμενο.

Παράδειγμα: $(a, b) \neq (b, a) \neq (b, a, a) \neq (a, b, a)$

Τις ακολουθίες δύο ή πολλών θέσεων τις καλούμε και ζεύγη ή πλειάδες αντίστοιχα.

Το σύνολο $\{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$ το καλούμε καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A, B και το συμβολίζουμε με $A \times B$.

Γενικότερα, το σύνολο $\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (a_1 \in A_1) \wedge (a_2 \in A_2) \wedge \dots \wedge (a_n \in A_n)\}$
το καλούμε καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_n$
και το συμβολίζουμε με $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.
Αν $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, τότε το συμβολίζουμε και με A^n.

Σχέσεις

Καλούμε (*n*-μελή) σχέση κάθε υποσύνολο καρτεσιανού γινομένου (n συνόλων).

Παραδείγματα: Έστω A ένα σύνολο ανδρών και B ένα σύνολο γυναικών.

Μονομελείς Σχέσεις

Η σχέση $R_{served} \subseteq A$ όλων των ανδρών που έχουν ολοκληρώσει την στρατιωτική τους θητεία.
Η σχέση $R_{prime} \subseteq \mathbb{N}$ όλων των πρώτων αριθμών.

Διμελείς Σχέσεις

Η σχέση $R_{couple} \subseteq A \times B$ όλων των ζευγών (a, b) που είναι σε σχέση (ή αλλιώς ζευγάρια).
Η σχέση $R_{divisor} \subseteq \mathbb{N}^2$ όλων των ζευγών (a, b) που είναι τέτοια ώστε το a διαιρεί το b.

Τριμελείς Σχέσεις

Η σχέση $R_{parents} \subseteq A \times B \times (A \cup B)$ όλων των τριάδων (a, b, c) που είναι τέτοιες ώστε οι a και b να είναι πατέρας και μητέρα του/της c αντίστοιχα.
Η σχέση $R_{Pythagorian} \subseteq \mathbb{N}^3$ όλων των τριάδων (a, b, c) που είναι τέτοιες ώστε $a^2 + b^2 = c^2$.

Συναρτήσεις

Μία σχέση $R \subseteq A \times B$ καλείται σχέση από το A στο B.
Μία σχέση $R \subseteq A^2$ καλείται σχέση επί του A.

Για κάθε σχέση $R \subseteq A \times B$,
το σύνολο $\{a \mid (a, b) \in R\} \subseteq A$ καλείται το πεδίο ορισμού της και συμβολίζεται με $\mathcal{D}(R)$ και
το σύνολο $\{b \mid (a, b) \in R\} \subseteq B$ καλείται το πεδίο τιμών της και συμβολίζεται με $\mathcal{R}(R)$.

Μια σχέση $R \subseteq A \times B$ που είναι τέτοια ώστε
να μην υπάρχει $a \in A$ που να εμφανίζεται στο πρώτο μέλος σε δύο διαφορετικά ζεύγη της R
καλείται συνάρτηση.

Για κάθε σχέση $R \subseteq A \times B$,
η σχέση $\{(b, a) \mid (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$ καλείται η αντίστροφη της R και συμβολίζεται με R^{-1}.

Σχέσεις και Συναρτήσεις

Παράδειγμα: Έστω τα σύνολα $A = \{a, b, c, d\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$ και οι ακόλουθες σχέσεις:

$$R_1 = \{(a,1),(a,2),(b,3)\} \qquad R_2 = \{(a,3),(b,1),(c,1)\} \qquad R_3 = \{(a,2),(c,3),(d,1)\}$$

Υπολογίστε τα πεδία ορισμού και τα πεδία τιμών αυτών και των αντίστροφών τους.
Ελέγξτε αν αυτές ή/και οι αντίστροφές τους είναι συναρτήσεις.

$$R_1^{-1} = \{(1,a),(2,a),(3,b)\} \qquad R_2^{-1} = \{(1,b),(1,c),(3,a)\} \qquad R_3^{-1} = \{(1,d),(2,a),(3,c)\}$$

$$\mathcal{D}(R_1) = \{a,b\} = \mathcal{R}(R_1^{-1}) \qquad \mathcal{D}(R_2) = \{a,b,c\} = \mathcal{R}(R_2^{-1}) \qquad \mathcal{D}(R_3) = \{a,c,d\} = \mathcal{R}(R_3^{-1})$$
$$\mathcal{R}(R_1) = \{1,2,3\} = \mathcal{D}(R_1^{-1}) \qquad \mathcal{R}(R_2) = \{1,3\} = \mathcal{D}(R_2^{-1}) \qquad \mathcal{R}(R_3) = \{1,2,3\} = \mathcal{D}(R_3^{-1})$$

η R_1 δεν είναι
η R_1^{-1} είναι

η R_2 είναι
η R_2^{-1} δεν είναι

η R_3 είναι
η R_3^{-1} είναι

Σχέσεις και Συναρτήσεις: Συμβολισμός

Έστω σχέση $R \subseteq A \times B$. Τότε η πρόταση $(a, b) \in R$ συμβολίζεται $a \; R \; b$.

Έστω συνάρτηση $F \subseteq X \times Y$.
Τότε η πρόταση $F \subseteq X \times Y$ συμβολίζεται $F : X \to Y$ και διαβάζεται «F από το X στο Y» και η πρόταση $(x, y) \in F$ συμβολίζεται $F(x) = y$ και διαβάζεται «F του x ισούται με y».

Ιδιότητες των Διμελών Σχέσεων

Μία διμελής σχέση R επί του A καλείται

- **ανακλαστική** ή **αυτοπαθής** αν $a \; R \; a$ για κάθε $a \in A$,
- **συμμετρική** αν $a \; R \; b \Rightarrow b \; R \; a$ για κάθε $a, b \in A$,
- **αντισυμμετρική** αν $\left.\begin{array}{l} a \; R \; b \\ b \; R \; a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b$ για κάθε $a, b \in A$, και
- **μεταβατική** αν $\left.\begin{array}{l} a \; R \; b \\ b \; R \; c \end{array}\right\} \Rightarrow a \; R \; c$ για κάθε $a, b, c \in A$.

Πλήθος των Διμελών Σχέσεων

Άσκηση: Έστω το σύνολο $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Απαριθμήστε όλες τις δυνατές διμελείς σχέσεις επί του A στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Χωρίς κανέναν περιορισμό: 2^{100}
2. Αν πρέπει να είναι ανακλαστικές: 2^{90}
3. Αν πρέπει να είναι συμμετρικές: 2^{55}
4. Αν πρέπει να είναι αντισυμμετρικές: $2^{10} \times 3^{45}$
5. Αν πρέπει να είναι συμμετρικές και αντισυμμετρικές: 2^{10}
6. Αν πρέπει να μην είναι ούτε συμμετρικές ούτε αντισυμμετρικές: $2^{100} - 2^{55} - 2^{10} \times 3^{45} + 2^{10}$

Σχέσεις Ισοδυναμίας

Μία διμελής σχέση R επί του A καλείται σχέση ισοδυναμίας
αν έχει και τις τρεις ακόλουθες ιδιότητες:

- ✔ ανακλαστική,
- ✔ συμμετρική και
- ✔ μεταβατική.

Μία σχέση ισοδυναμίας επί του A διαμερίζει το σύνολο A σε υποσύνολα που περιέχουν στοιχεία που σχετίζονται όλα μεταξύ τους ανά δύο και καλούνται κλάσεις ισοδυναμίας.

Αλλά και αντίστροφα, μία διαμέριση $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ του συνόλου A επάγει μία σχέση ισοδυναμίας επί του A, την $\{(a, b) \mid \text{ υπάρχει } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ τέτοιο ώστε } a, b \in A_i\}$.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε τις σχέσεις ιοοδυναμίας με το σύμβολο $\equiv$.

Σχέσεις Διάταξης

Μία διμελής σχέση R επί του A καλείται σχέση μερικής διάταξης
αν έχει και τις τρεις ακόλουθες ιδιότητες:

- ✔ ανακλαστική,
- ✔ αντισυμμετρική και
- ✔ μεταβατική.

Μία διμελής σχέση R επί του A καλείται σχέση ολικής διάταξης
αν είναι σχέση μερικής διάταξης και $\quad a\ R\ b$ ή $b\ R\ a \quad$ για κάθε $a, b \in A$.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε τις σχέσεις διάταξης με το σύμβολο $\leq$.

Σχέσεις Ισοδυναμίας και Διάταξης

Παράδειγμα: Έστω Σ^* το σύνολο όλων των δυνατών συμβολοσειρών με αλφάβητο το $\Sigma = \{0, 1\}$ και R_{count} η διμελής σχέση επί του Σ^* με στοιχεία (s_1, s_2) τέτοια ώστε οι συμβολοσειρές s_1 και s_2 να περιέχουν το ίδιο πλήθος εμφανίσεων του συμβόλου 0. Δείξτε ότι η R_{count} είναι σχέση ισοδυναμίας. Περιγράψτε την διαμέριση του Σ^* που επάγει την R_{count}.

Παράδειγμα: Έστω $R_{divisor}$ η διμελής σχέση επί του $\mathbb{N}$ με στοιχεία (a, b) τέτοια ώστε ο a διαιρεί τον b. Δείξτε ότι η $R_{divisor}$ είναι σχέση μερικής διάταξης. Είναι η $R_{divisor}$ σχέση ολικής διάταξης;

Διατεταγμένα Σύνολα και Ακρότατα

Ένα σύνολο A εφοδιασμένο με μία σχέση μερικής (ολικής) διάταξης καλείται μερικά (ολικά) διατεταγμένο σύνολο.

Έστω $(A, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Ένα στοιχείο a του A καλείται

- ολικό μεγιστικό (ελαχιστικό) αν δεν υπάρχει στοιχείο $b \neq a$ τέτοιο ώστε $a \leq b$ ($b \leq a$) και
- ολικό μέγιστο (ελάχιστο) αν κάθε στοιχείο $b \neq a$ είναι τέτοιο ώστε $b \leq a$ ($a \leq b$).

Παρατηρήσεις

Ένα μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο είναι και μεγιστικό (ελαχιστικό) στοιχείο.
Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο έχει απαραίτητα τουλάχιστον ένα μεγιστικό (ελαχιστικό) στοιχείο, αλλά δεν έχει απαραίτητα μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο.
Ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο έχει απαραίτητα μοναδικό ολικό μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο.