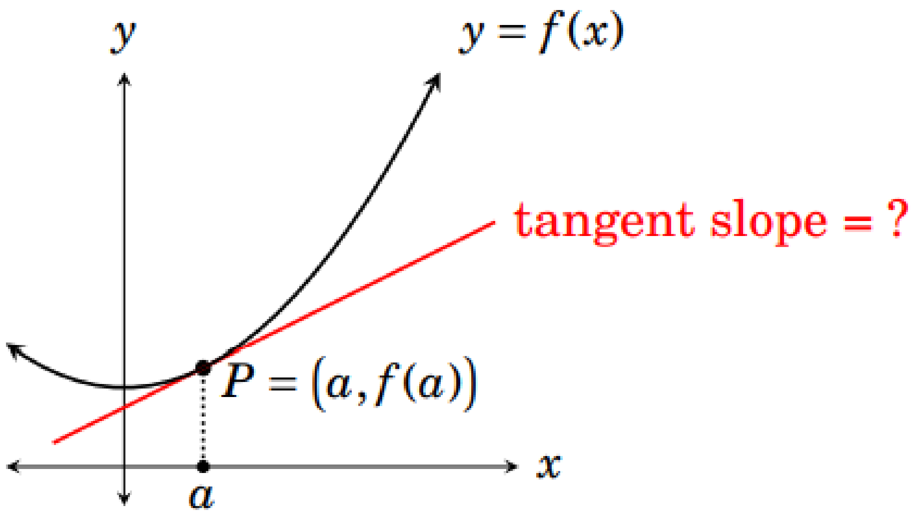
Τμήμα Πληροφορικής & Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2024-2025

Παράγωγος Συνάρτησης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Το θεμελιώδες πρόβλημα του διαφορικού λογισμού

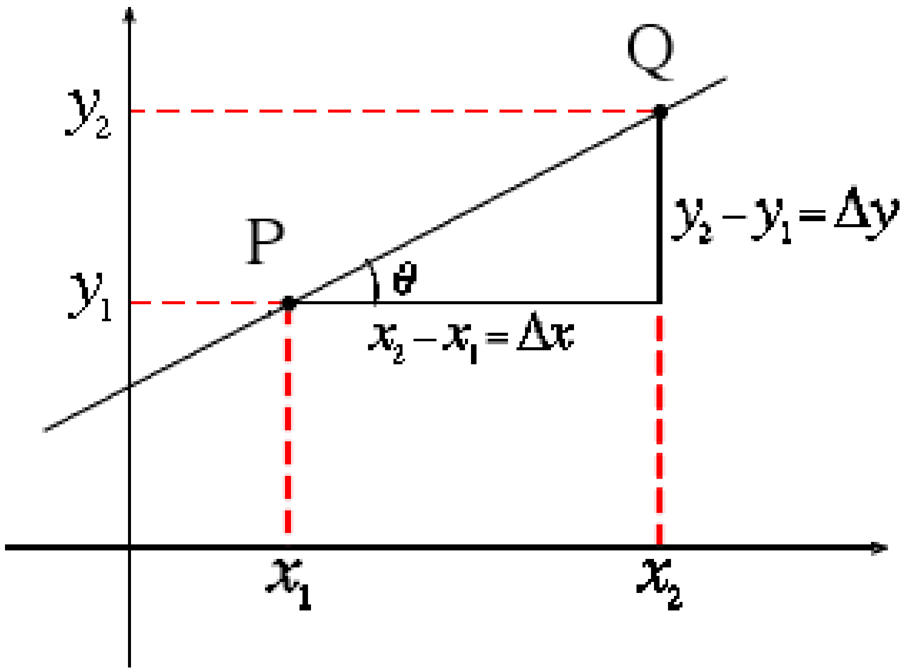
- Το πρωταρχικό πρόβλημα του διαφορικού λογισμού είναι να βρεθεί **η κλίση της εφαπτομένης** σε μια συνάρτηση $f(x)$ στο σημείο $(a, f(a))$



Κλίση ευθείας γραμμής (Υπενθύμιση)

- Έστω ε μια ευθεία γραμμή του επιπέδου που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα των y και $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ δύο οποιοδήποτε σημεία της
- Αν $\Delta y = y_2 - y_1$ είναι η κατακόρυφη ανύψωση και $\Delta x = x_2 - x_1$ είναι η οριζόντια μετατόπιση από το P στο Q τότε ορίζουμε ως **κλίση της ευθείας** ε το λόγο

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

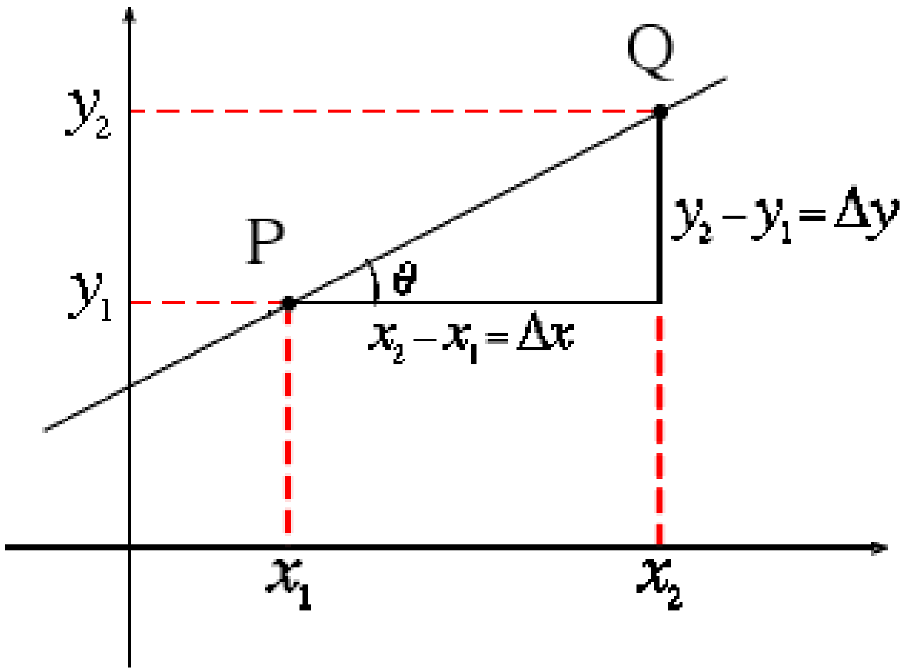


Κλίση ευθείας γραμμής (Υπενθύμιση)

- Η **γωνία κλίσης** θ μιας ευθείας που τέμνει τον άξονα των x είναι η μικρότερη θετική γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα των x
- Η **κλίση** μιας ευθείας είναι η εφαπτομένη της γωνίας κλίσης θ της ευθείας ε δηλαδή

$$m = \tan\theta$$

εφόσον $\theta \neq 90°$



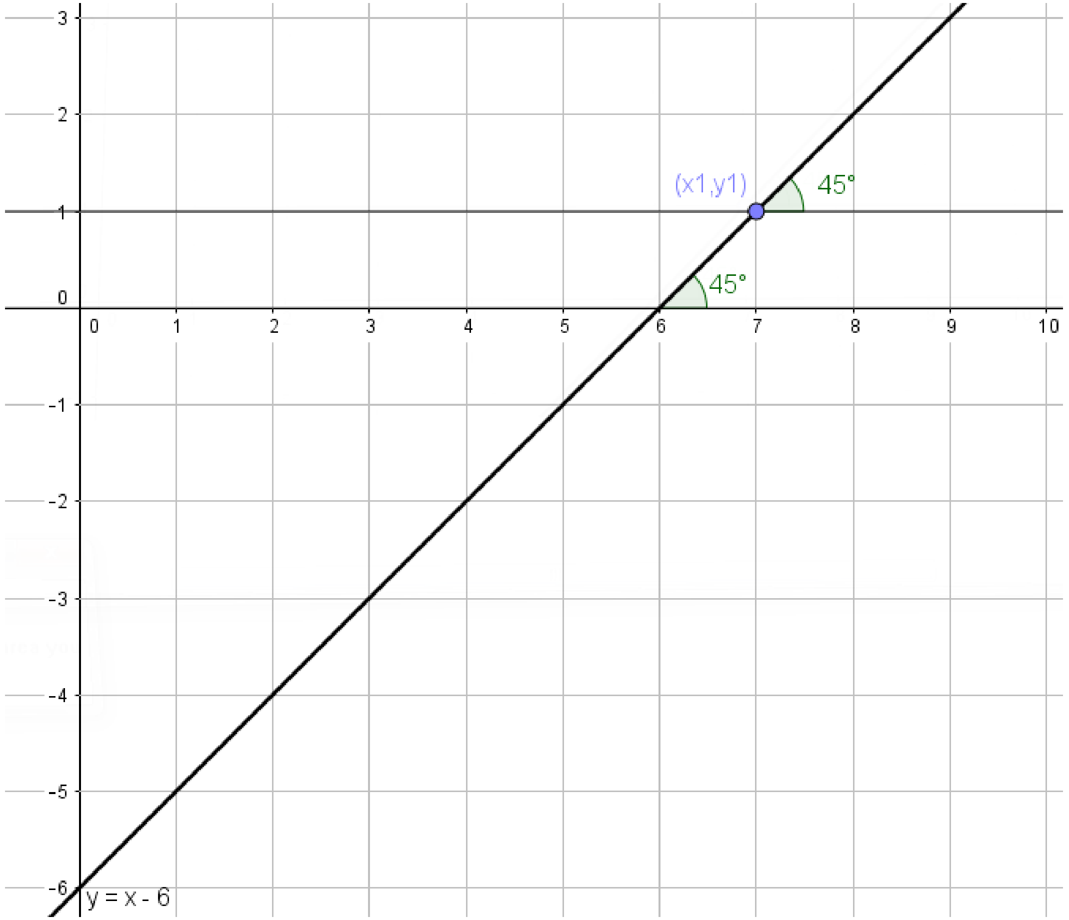
Εξίσωση Ευθείας

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο (x_1, y_1) και έχει κλίση m είναι:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (7,1) και σχηματίζει γωνία 45ο με το θετικό άξονα των x

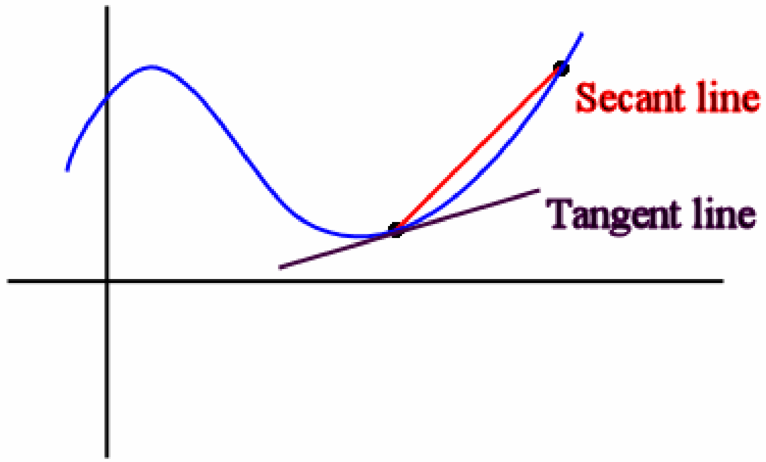


Λύση:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow$$
$$y - 1 = \tan 45\,(x - 7) \Rightarrow$$
$$y - 1 = x - 7 \Rightarrow$$
$$y = x - 6$$

Κλίση καμπύλης

- Η κλίση μιας καμπυλόγραμμης συνάρτησης διαφέρει από σημείο σε σημείο.
- Η κλίση σε ένα δοσμένο σημείο μπορεί να υπολογιστεί από την κλίση της ευθείας που εφάπτεται στην καμπύλη σε αυτό το σημείο
- Θα υπολογίσουμε την κλίση της **εφαπτομένης ευθείας (tangent line)** ***ε*** με τη βοήθεια της κλίσης της **τέμνουσας ευθείας (secant line)**

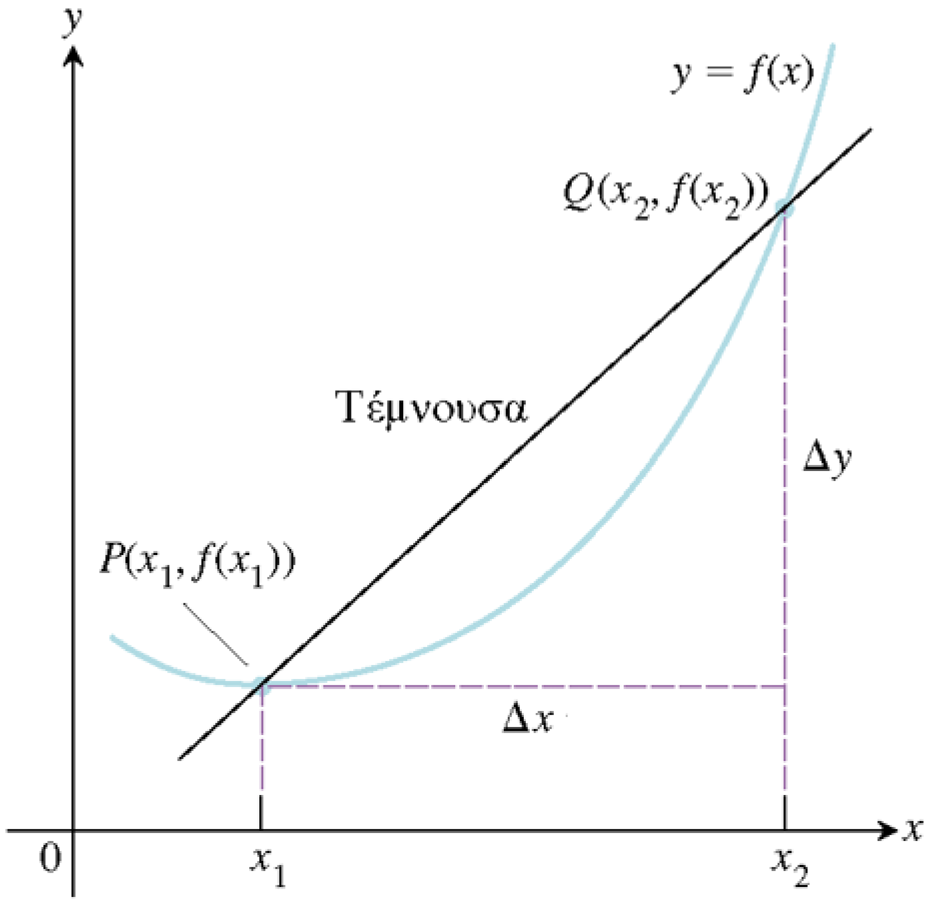


http://clas.sa.ucsb.edu/staff/lee/secant,%20tangent,%20and%20derivatives.htm

Τέμνουσα μιας καμπύλης

- **Τέμνουσα τ** μιας καμπύλης είναι η ευθεία που τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία της έστω $P(x_1, y_1)$ και $Q(x_2, y_2)$.
- **Η κλίση της τέμνουσας τ** μπορεί να εκφραστεί ως

$$m_\tau = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

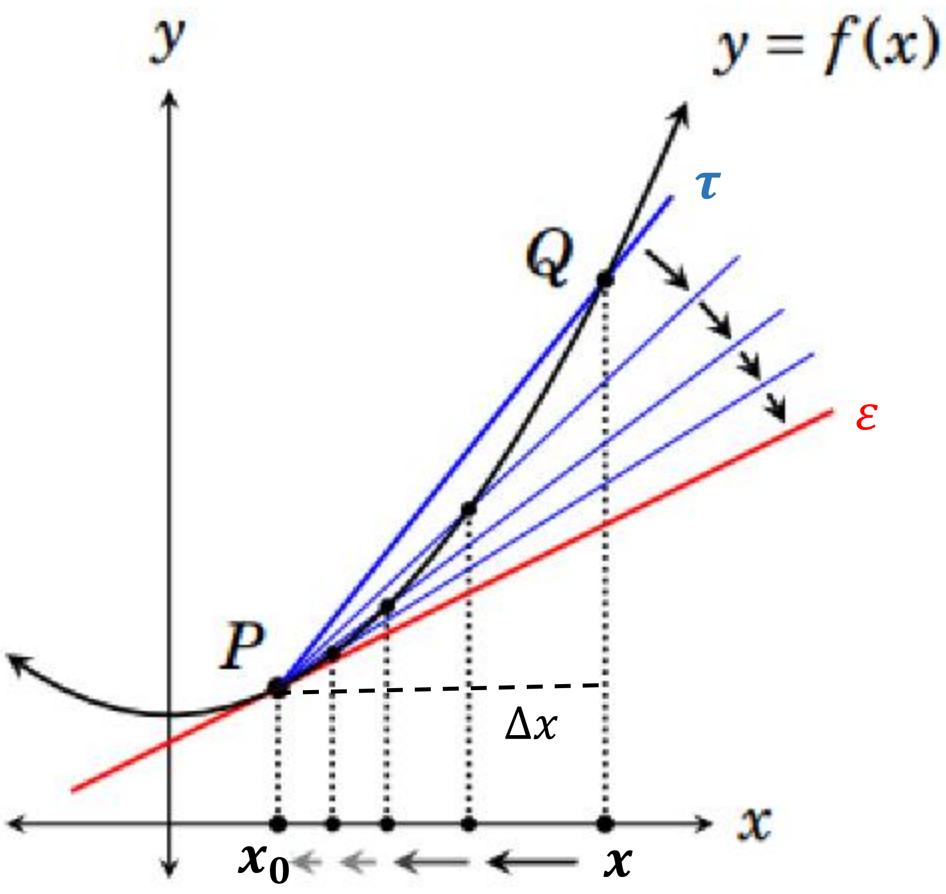


Κλίση καμπύλης

Έστω $P(x_0, y_0)$ και $Q(x, y)$ δύο σημεία της $y = f(x)$ και τ η τέμνουσα που διέρχεται από τα δύο σημεία.

Καθώς το Q πλησιάζει το P :

- $x \to x_0$
- η τέμνουσα τ θα στραφεί γύρω από το σημείο P
- η τέμνουσα τ πλησιάζει την εφαπτομένη ε.
- $m_\tau = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ πλησιάζει την κλίση της εφαπτομένη m_ε



$x = x_0 + \Delta x$

Άρα η **κλίση της καμπύλης** $= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Κλίση καμπύλης

- Βλ. https://www.desmos.com/calculator/8ubngtz3ei

Παράδειγμα

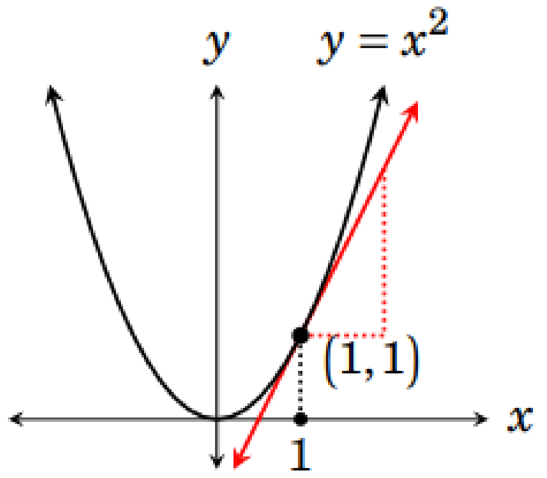
Υπολογισμός της κλίσης της $f(x) = x^2$ στο $(1, f(1))$

$$m_\varepsilon = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$



Μέσος και στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής

- Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$. Ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** (ΜΡΜ) της f από το σημείο x_0 στο $x = x_0 + \Delta x$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\mathrm{MPM} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

- Καθώς $\Delta x \to 0$, ο μέσος ρυθμός μεταβολής στο x_1 προσεγγίζει το **στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής** (ΣΡΜ) που ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\Sigma\mathrm{PM} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Παράδειγμα

- Αν αφήσουμε μια μπάλα να πέσει από κάποιο ύψος, η απόσταση y που θα διανύσει ως συνάρτηση του χρόνου t δίνεται από τη σχέση $y(t) = \frac{1}{2}gt^2$ όπου $g = 9.8m/s^2$
- Γνωρίζοντας ότι **η ταχύτητα ορίζεται ως μετατόπιση προς το χρόνο που χρειάστηκε για να πραγματοποιηθεί η μετατόπιση**, να υπολογιστούν:
    - η μέση ταχύτητα μεταξύ $t = 3sec$ και $t = 4sec$
    - η στιγμιαία ταχύτητα στα 3 sec

- Μέση ταχύτητα μεταξύ $t = 3\text{sec}$ και $t = 4\text{sec}$

$$\text{ΜΕΣΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ} = \frac{\text{ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ}}{\text{ΧΡΟΝΟ}}$$

$$= \frac{y(4) - y(3)}{4 - 3} = \frac{\frac{1}{2}9.8 \cdot 4^2 - \frac{1}{2}9.8 \cdot 3^2}{4 - 3}$$

$$= \frac{4.9 \cdot 16 - 4.9 \cdot 9}{1} = 34.3\,{}^{m}/_{sec}$$

- Στιγμιαία ταχύτητα στο t

$$\lim_{t \to 3} \frac{4.9(t)^2 - 4.9\ \ 3^2}{t - 3} =$$

$$\lim_{t \to 3} \frac{4.9(t - 3)(t + 3)}{(t - 3)} =$$

$$\lim_{t \to 3} 4.9(t + 3) = 9.8 \cdot 3 = 29.4\,{}^{m}/_{sec}$$

Παράγωγος συνάρτησης $f(x)$ σε σημείο x_0: $f'(x_0)$

Ορισμός: Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** (διαφορίσιμη) σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το όριο αυτό λέγεται **παράγωγος** της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Αν θέσουμε $x = x_0 + \Delta x$, τότε καθώς $x \to x_0$ έχουμε $\Delta x \to 0$ και το όριο γράφεται

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Πρόταση

Η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη στο $\boldsymbol{x_0}$** αν και μόνο αν υπάρχουν τα ακόλουθα όρια στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι ίσα

Παράγωγος συνάρτησης

- Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η συνάρτηση $f'(x)$ που η τιμή της σε κάθε x ορίζεται ως εξής:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

  όταν υπάρχει αυτό το όριο

- Το **πεδίο ορισμού** της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f όπου υπάρχει το παραπάνω όριο

Παράγωγος συνάρτησης

- Η παράγωγος μιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η συνάρτηση $f'(x)$ που η τιμή της σε κάθε x ορίζεται ως εξής:

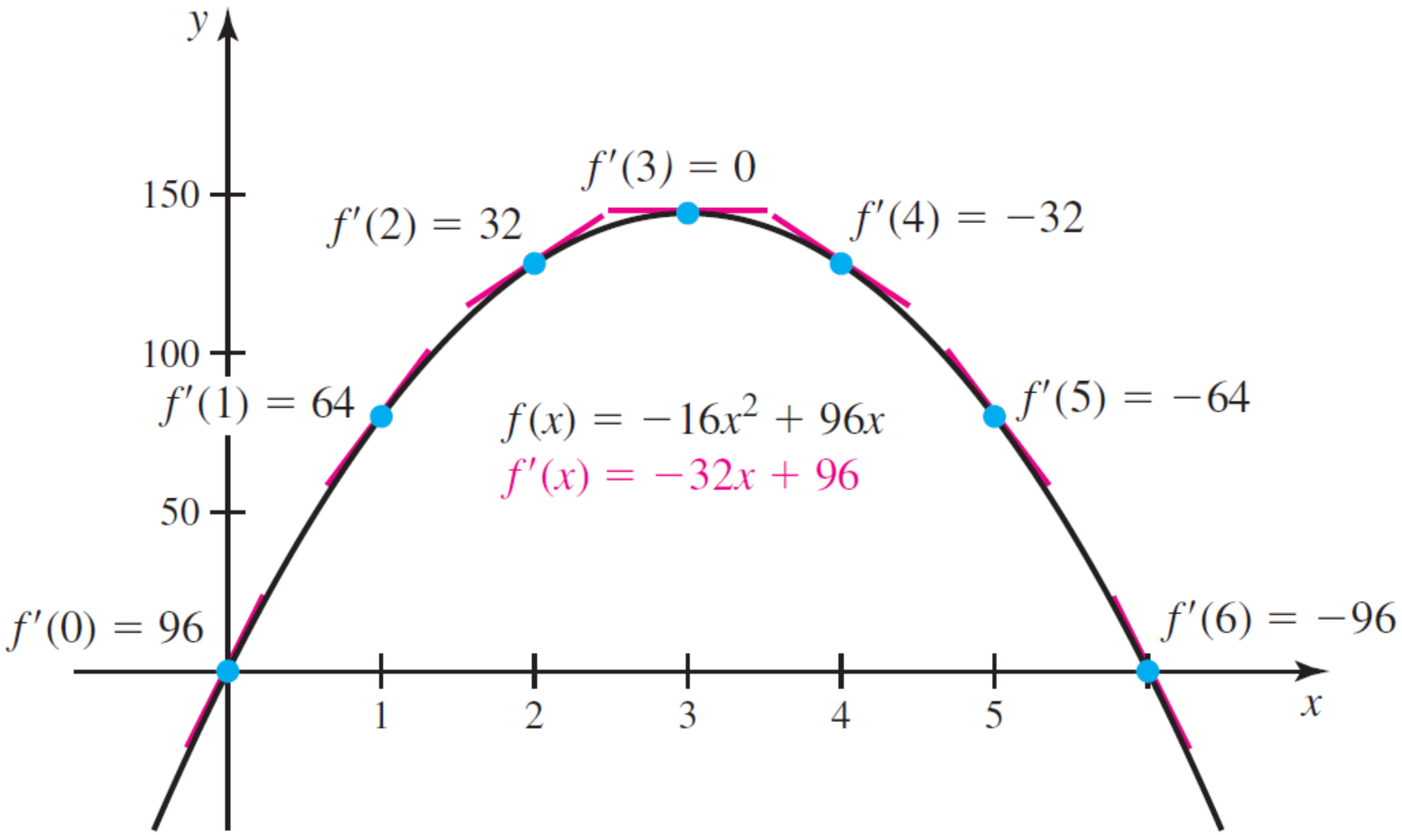
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

όταν υπάρχει αυτό το όριο

- Το **πεδίο ορισμού** της f' είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της f όπου υπάρχει το παραπάνω όριο

- Η παράγωγος f' μιας συνάρτησης f είναι μια συνάρτηση η οποία **μετρά την κλίση** και **το στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής** της f σε κάθε δοσμένο σημείο

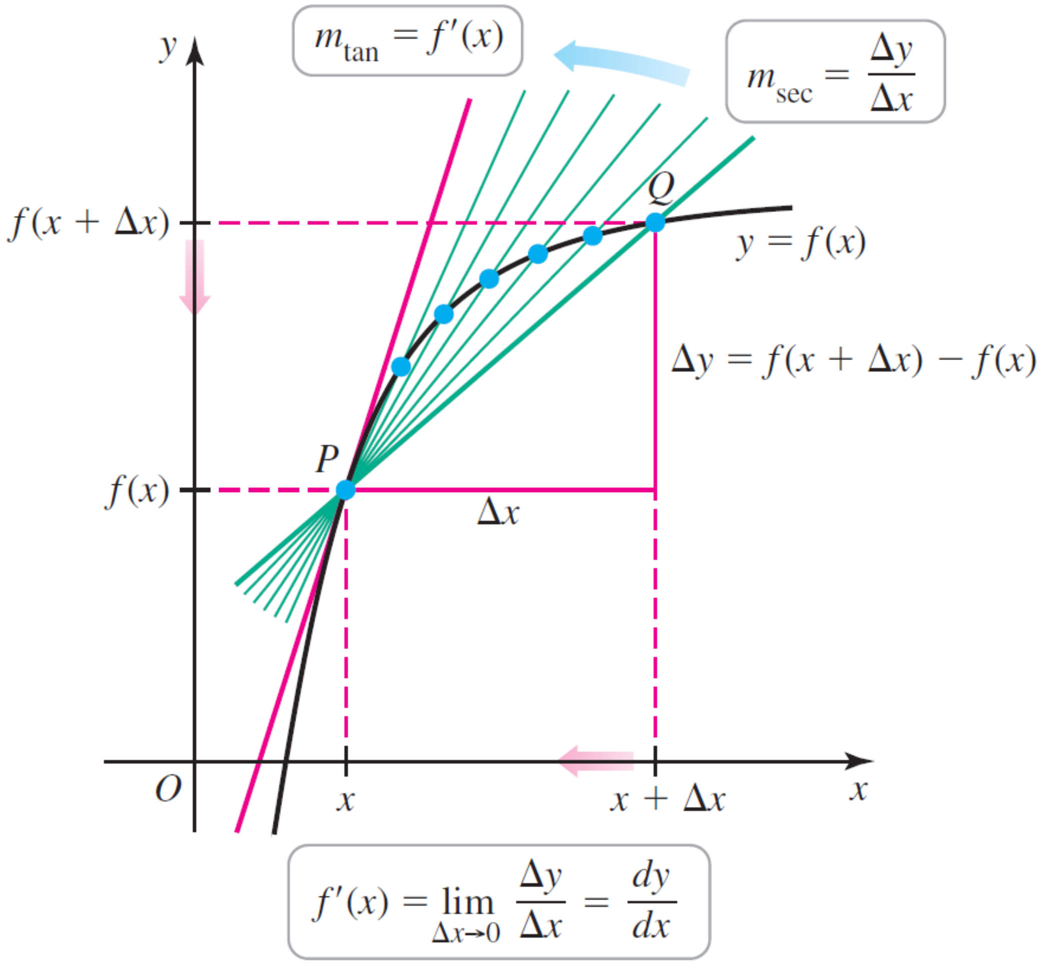
Παράδειγμα



y
150
100
50
x
1
2
3
4
5
f′(0) = 96
f′(1) = 64
f′(2) = 32
f′(3) = 0
f′(4) = −32
f′(5) = −64
f′(6) = −96
f(x) = −16x² + 96x
f′(x) = −32x + 96

Συμβολισμός Παραγώγου

- Συνηθισμένοι συμβολισμοί για την παράγωγο της $y = f(x)$ είναι οι ακόλουθοι:
  - $f'(x)$ συμβολισμός του Lagrange
  - $\dfrac{dy}{dx}$ συμβολισμός του Leibnitz
  - $\dfrac{df}{dx}(x)$ συμβολισμός του Leibnitz



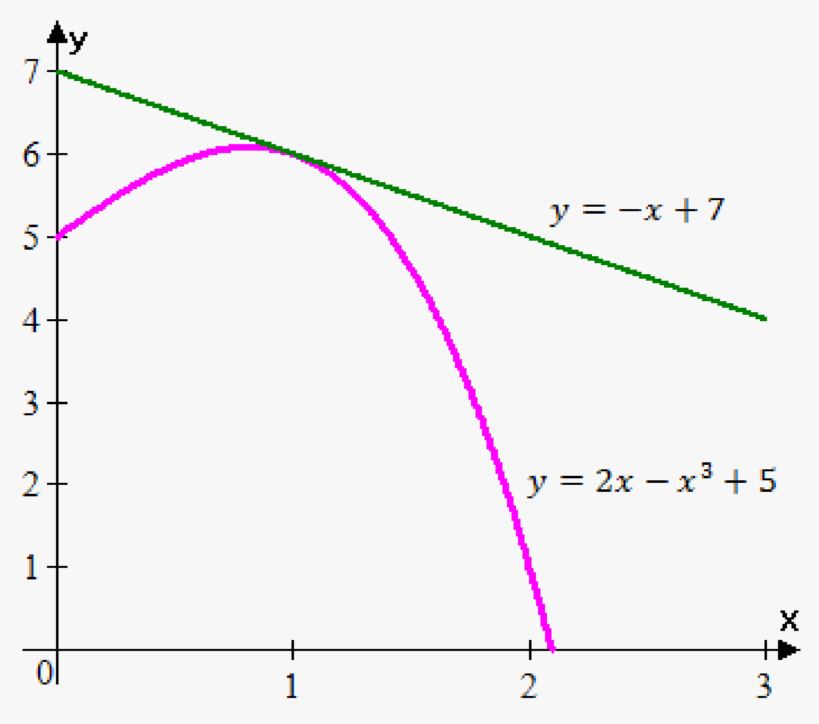
Κλίση της εφαπτομένης

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0 . Άρα

κλίση της f στο $x_0 := f'(x_0)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο x_0 είναι

$$\boldsymbol{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$



…://www.emathhelp.net/notes/calculus-1/derivative/tangent-line-velocity-and-other-rates-of-changes/

Παράδειγμα

- Έστω $f(x) = x^3 - 3x + 3$

I. Να υπολογιστεί η παράγωγος της f στο x με τον τύπο $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

II. Να υπολογιστεί ο ρυθμός στιγμιαίας μεταβολής στο σημείο $x = 5$

III. Να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x = 5$

I. Η παράγωγος της $f(x)$ δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - 3(x + \Delta x) + 3 - x^3 + 3x - 3}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3x - 3\Delta x - x^3 + 3x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 - 3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3] = 3x^2 - 3$$

II. για $x_0 = 5$, καθώς $f'(x) = 3x^2 - 3$ προκύπτει ότι ο ρυθμός στιγμιαίας μεταβολής θα είναι $f'(5) = 72$

III. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $x_0 = 5$, $y_0 = f(5) = 113$ για τη συνάρτηση $f(x)$ προκύπτει ως εξής:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y - 113 = 72(x - 5) \Rightarrow$$

$$y = 72x - 247$$

Δεξιά και αριστερή παράγωγος

Έστω η συνάρτηση $y = f(x)$. Εάν το όριο

$$f'_\delta(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε καλούμε αυτό το όριο **δεξιά παράγωγο** της f στο x

Επίσης αν υπάρχει το όριο

$$f'_a(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

και είναι πεπερασμένο τότε καλούμε το όριο αυτό **αριστερή παράγωγο** της f στο x

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι **παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x, αν και μόνο αν, υπάρχουν η δεξιά και η αριστερή παράγωγοι στο x και είναι ίσες οπότε και ισχύει

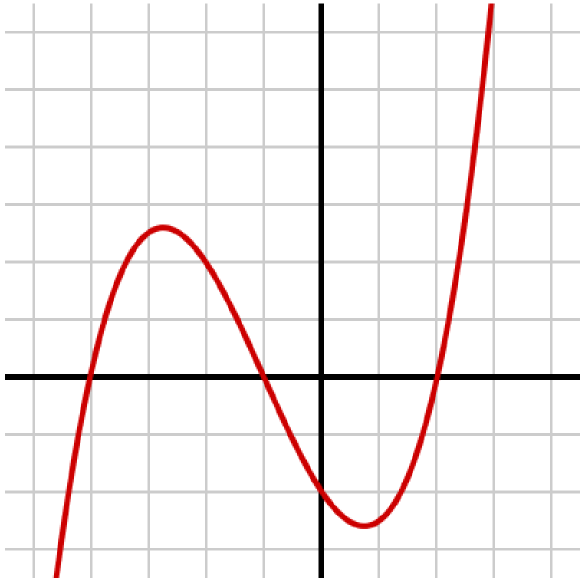
$$f'_\delta(x) = f'_\alpha(x) = f'(x)$$

Παράγωγος και συνέχεια

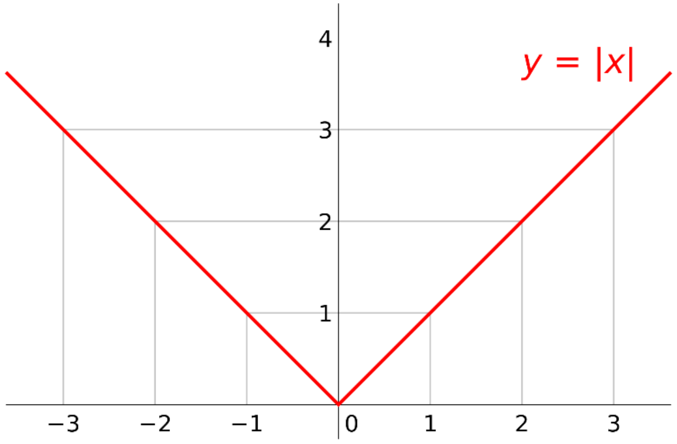
Θεώρημα:

Αν η f **είναι παραγωγίσιμη** σε ένα σημείο x_0 τότε η f **συνεχής** στο x_0

Αν η f **είναι παραγωγίσιμη** σε ένα διάστημα (a, b) τότε η f **συνεχής** στο (a, b)



παραγωγίσιμη
άρα συνεχής



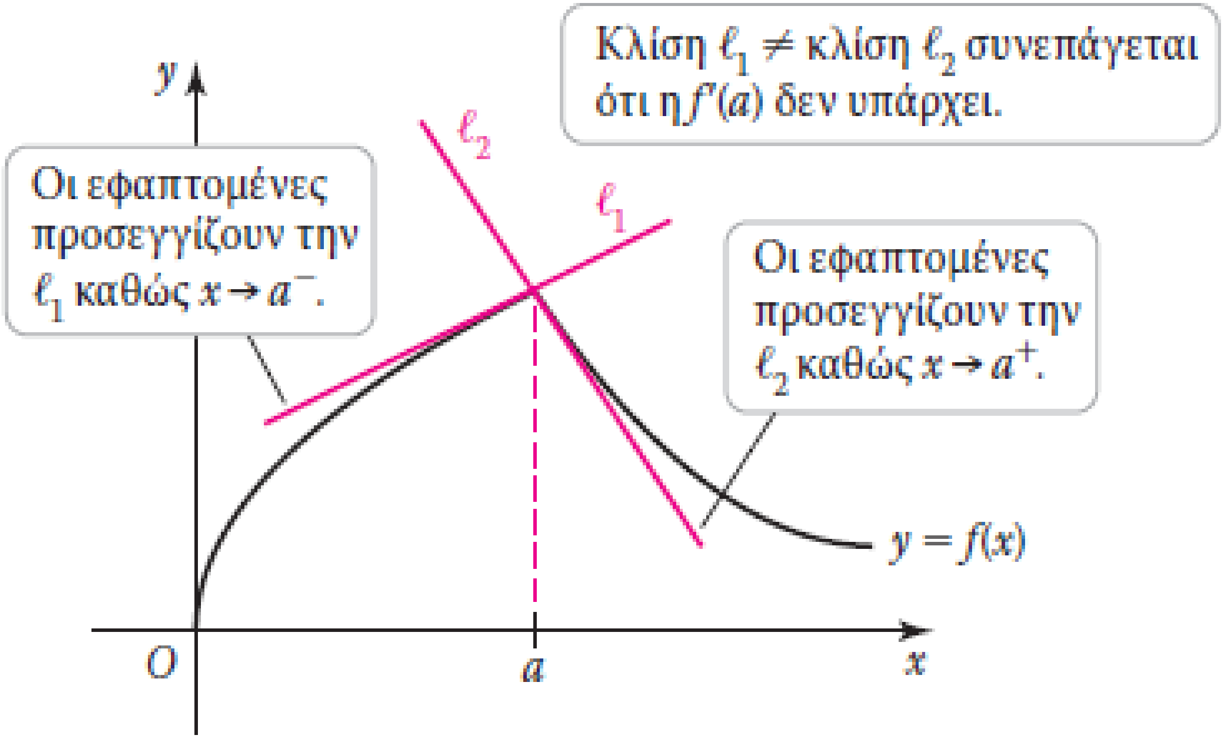
Μη παραγωγίσιμη
αλλά συνεχής

Παράγωγος και συνέχεια

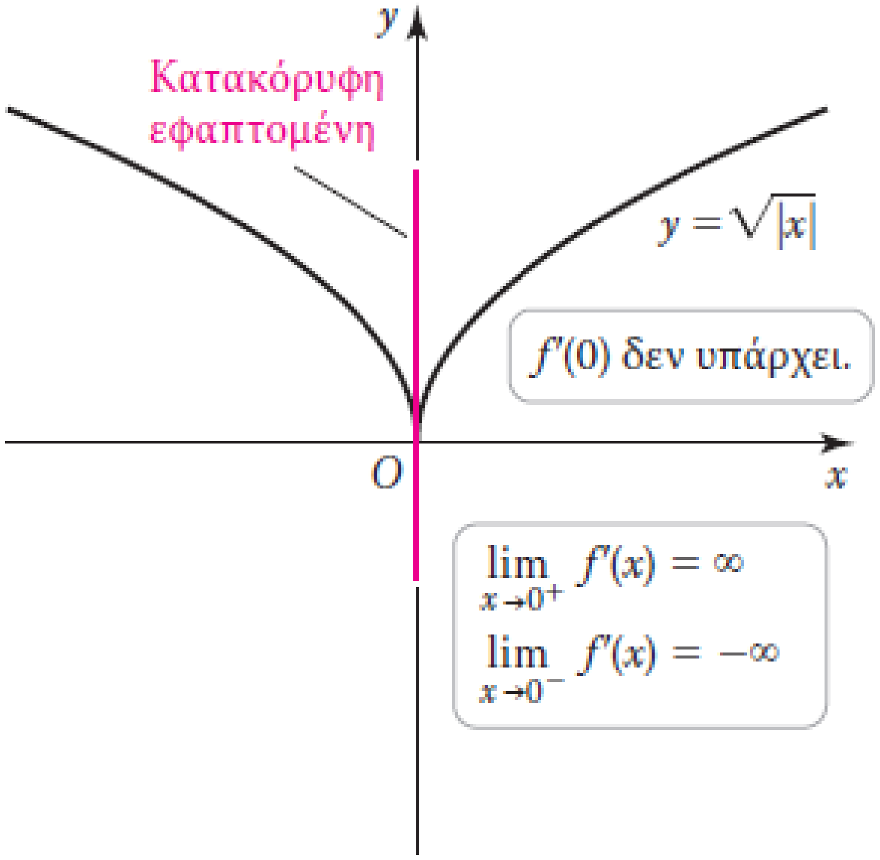
Πόρισμα:
Αν η f **δεν είναι συνεχής** στο x_0 τότε **δεν είναι παραγωγίσιμη** στο x_0

- Για να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα σημείο θα πρέπει:
  - Να είναι συνεχής σε αυτό το σημείο
  - Να έχει μια μοναδική εφαπτομένη σε αυτό το σημείο

Παράδειγμα 1

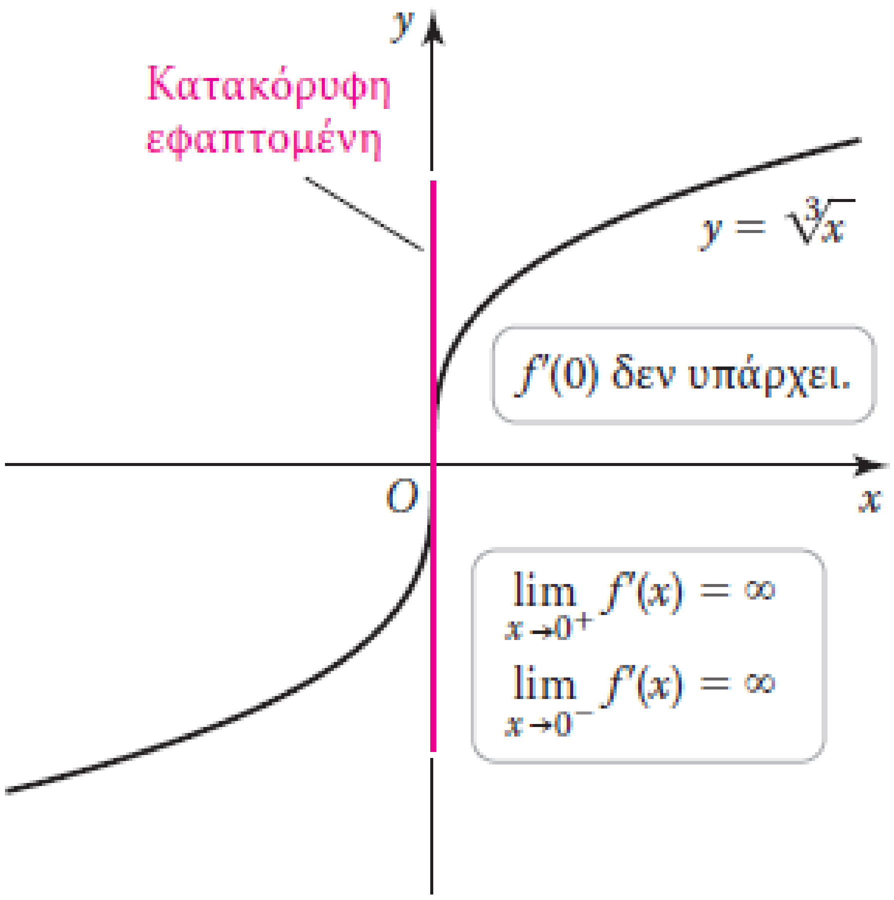


Παράδειγμα 2



(α)

Παράδειγμα 3



(β)

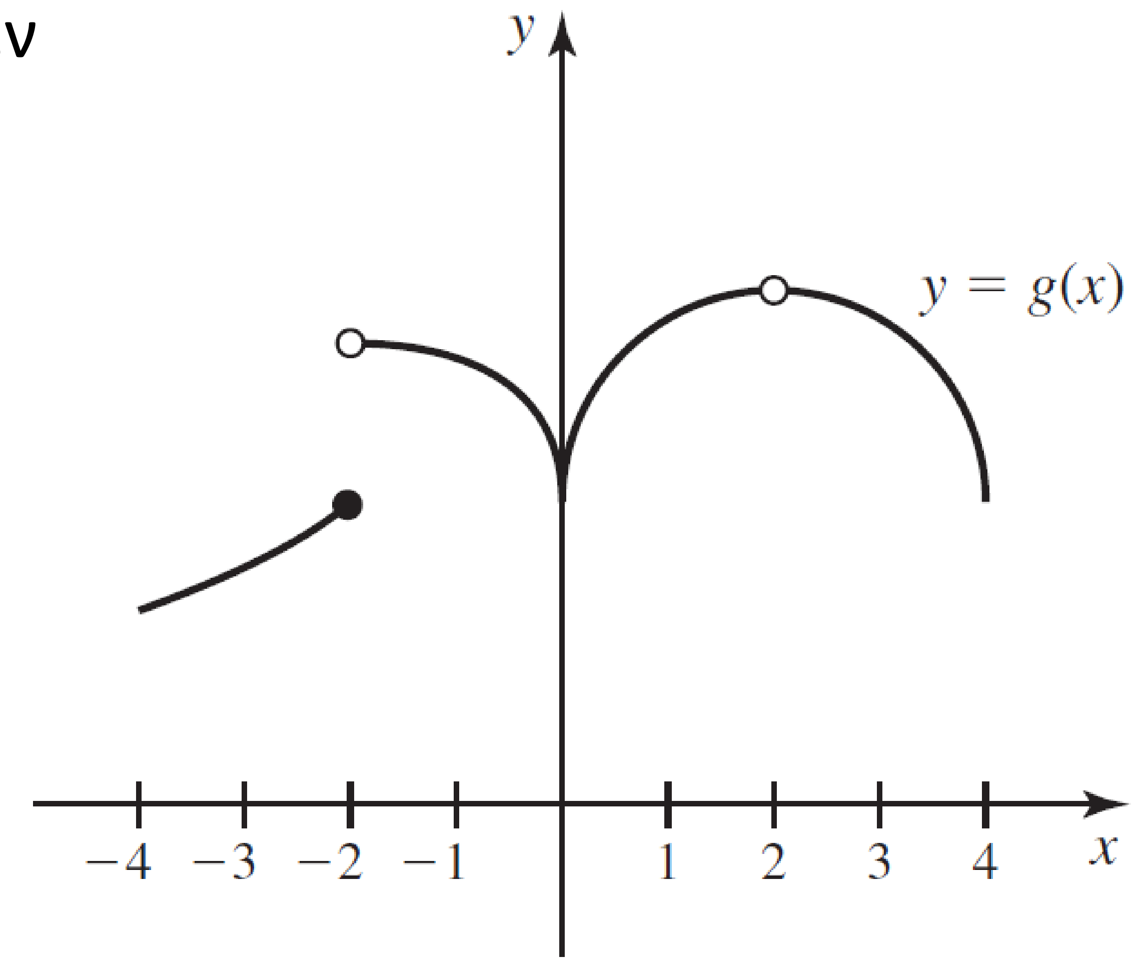
Πότε μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο;

Μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν ισχύει μία τουλάχιστον από τις 3 προϋποθέσεις

- η f **δεν είναι συνεχής** στο x_0
- η f έχει μια **κορυφή** στο x_0
- η f έχει μια **κατακόρυφη εφαπτομένη** στο x_0

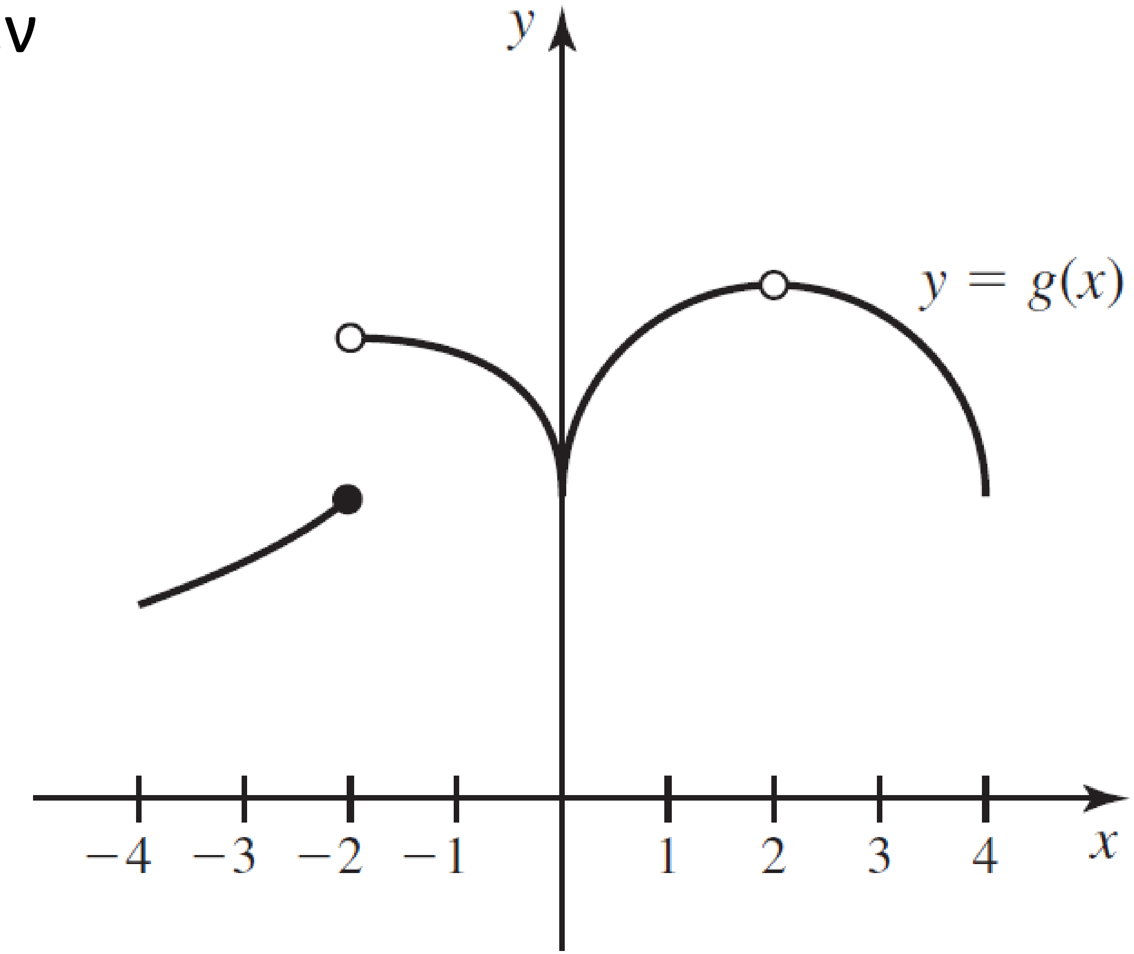
Άσκηση

Βρείτε τα σημεία στα οποία η g δεν είναι παραγωγίσιμη. Εξηγείστε.



Άσκηση

Βρείτε τα σημεία στα οποία η g δεν είναι παραγωγίσιμη. Εξηγείστε.



Λύση:

$x = -2$ δεν είναι συνεχής

$x = 0$ έχει κατακόρυφη εφαπτ.

$x = 2$ δεν είναι συνεχής

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

- Η **σταθερή συνάρτηση** $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$, δηλαδή

$$\boldsymbol{(c)' = 0}$$

- Η **ταυτοτική συνάρτηση** $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 1$, δηλαδή

$$\boldsymbol{(x)' = 1}$$

- Η **συνάρτηση δύναμη** $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = nx^{n-1}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

- Η συνάρτηση **τετραγωνική ρίζα** $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

- Η **εκθετική** συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x$ δηλαδή

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$$

- Η **εκθετική συνάρτηση** $f(x) = a^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \ln(a)\, a^x$ δηλαδή

$$\boldsymbol{(a^x)' = ln(a)\, a^x}$$

- Η **λογαριθμική** συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$ δηλαδή

$$\boldsymbol{(ln\, x)' = \frac{1}{x}}$$

Παράγωγοι βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- Η συνάρτηση **ημίτονο** $f(x) = \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \cos x$, δηλαδή

$$\boldsymbol{(\sin x)' = \cos x}$$

- Η συνάρτηση **συνημίτονο** $f(x) = \cos x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -\sin x$, δηλαδή

$$\boldsymbol{(\cos x)' = -\sin x}$$

- Η συνάρτηση **εφαπτομένη** $f(x) = \tan x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x |\cos x = 0\}$ με $f'(x) = \frac{1}{cos^2 x}$ δηλαδή

$$\boldsymbol{(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x}$$

Παράγωγοι αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- Η συνάρτηση $f(x) = \sin^{-1} x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$\boldsymbol{(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \cos^{-1} x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{(\cos^{-1} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \tan^{-1} x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ δηλαδή

$$\boldsymbol{(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

Απόδειξη ότι $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}{x_0}^2 + \cdots + {x_0}^{n-1})}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} [x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}{x_0}^2 + \cdots + {x_0}^{n-1}] =$$

$$= {x_0}^{n-1} + {x_0}^{n-2}x_0 + {x_0}^{n-3}{x_0}^2 + \cdots + {x_0}^{n-1} =$$

$$\boldsymbol{n{x_0}^{n-1}}$$

Απόδειξη ότι $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}}}$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων (σύνοψη)

Σταθερή συνάρτηση: $(\boldsymbol{c})' = \mathbf{0}$

Ταυτοτική συνάρτηση: $(\boldsymbol{x})' = \mathbf{1}$

Δύναμη: $(\boldsymbol{x^n})' = \boldsymbol{n x^{n-1}}$

Τετραγωνική Ρίζα: $(\sqrt{\boldsymbol{x}})' = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$

Εκθετική συνάρτηση: $(\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x}$

Εκθετική συνάρτηση: $(\boldsymbol{a^x})' = \boldsymbol{a^x lna}$

Λογαριθμική: $(\boldsymbol{lnx})' = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}$

Ημίτονο: $(\boldsymbol{sinx})' = \boldsymbol{cosx}$

Συνημίτονο: $(\boldsymbol{cosx})' = -\boldsymbol{sinx}$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

Εφαπτομένη: $(\boldsymbol{tanx})' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos^2 x}} = \boldsymbol{sec^2(x)}$

Αντίστροφο ημίτονο: $(\boldsymbol{sin^{-1}\, x})' = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}$

Αντίστροφο συνημίτονο: $(\boldsymbol{cos^{-1}\, x})' = \frac{\mathbf{-1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{x^2}}}$

Αντίστροφη Εφαπτομένη : $(\boldsymbol{tan^{-1}\, x})' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\boldsymbol{x^2}}$

Βασικοί κανόνες παραγώγισης

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $y = f(x)$ και $z = g(x)$ οι οποίες είναι ορισμένες, συνεχείς και παραγωγίσιμες σε ένα κοινό πεδίο ορισμού A. Τότε για πεπερασμένο πλήθος αριθμητικών πράξεων ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
2. $[cf(x)]' = cf'(x)$ με c σταθερή τιμή
3. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$
5. $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} \quad , g(x) \neq 0$

Παράδειγμα 1

Βρείτε τα x για τα οποία η εφαπτομένη ευθεία της $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ στο $(x, f(x))$ είναι οριζόντια

Λύση: Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο $\left(x, f(x)\right)$ είναι ίση με

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (2x^3)' - (3x^2)' - (36x)' \\ &= 2(x^3)' - 3(x^2)' - 36(x)' \\ &= 2 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} - 36 \cdot 1 \\ &= 6x^2 - 6x - 36 \end{aligned}$$

Η εφαπτομένη ευθεία είναι οριζόντια όταν έχει κλίση 0, δηλ. όταν

$$6x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

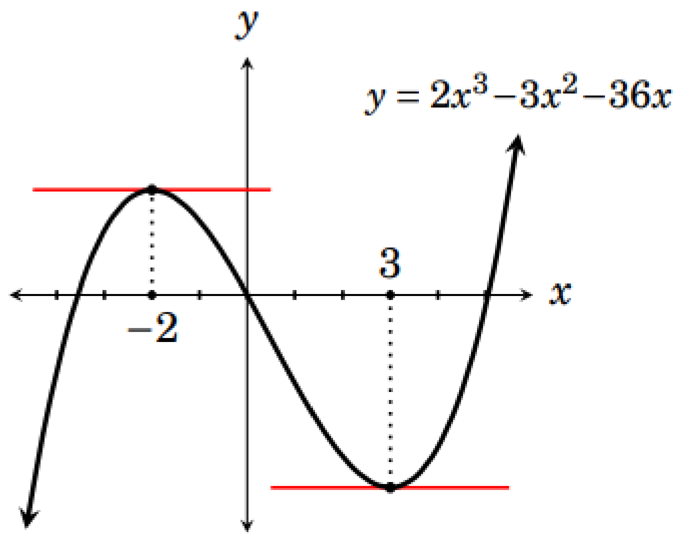
$$x = -3, \qquad x = 2$$

Παράδειγμα 1

Βρείτε τα x για τα οποία η εφαπτομένη ευθεία της $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x$ στο $(x, f(x))$ είναι οριζόντια

Άρα η εφαπτομένη ευθεία είναι οριζόντια

(δηλ. έχει κλίση 0) στα $x = -3, \quad x = 2$



Παράδειγμα 2

Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία της $y = 4 - 2\sqrt{x}$ στο $(1,2)$

Λύση: Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο $\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Έχουμε $x_0 = 1, f(x_0) = 2$

$$\frac{dy}{dx} = (4)' - (2\sqrt{x})' = 0 - 2(\sqrt{x})' = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

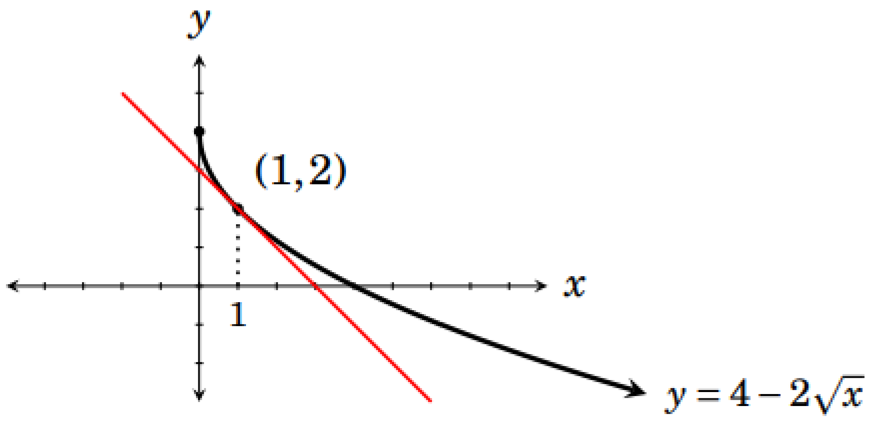
Άρα $f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$

Παράδειγμα 2

Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθεία της $y = 4 - 2\sqrt{x}$ στο $(1,2)$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$y - 2 = 1 \cdot (x - 1)$$
$$y = x - 1 + 2$$
$$y = x + 1$$



Παράδειγμα 3

Έστω $f(x) = 3x^2 + 200$ και $g(x) = 2x^3 - 72x$. Βρείτε όλα τα σημεία x για τα οποία η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της $f(x)$ στο $(x, f(x))$ ισούται με την η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της $g(x)$ στο $(x, g(x))$

Λύση:

Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της $f(x)$ στο $(x, f(x))$ ισούται με $f'(x)$

Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της $g(x)$ στο $(x, g(x))$ ισούται με $g'(x)$

Πρέπει

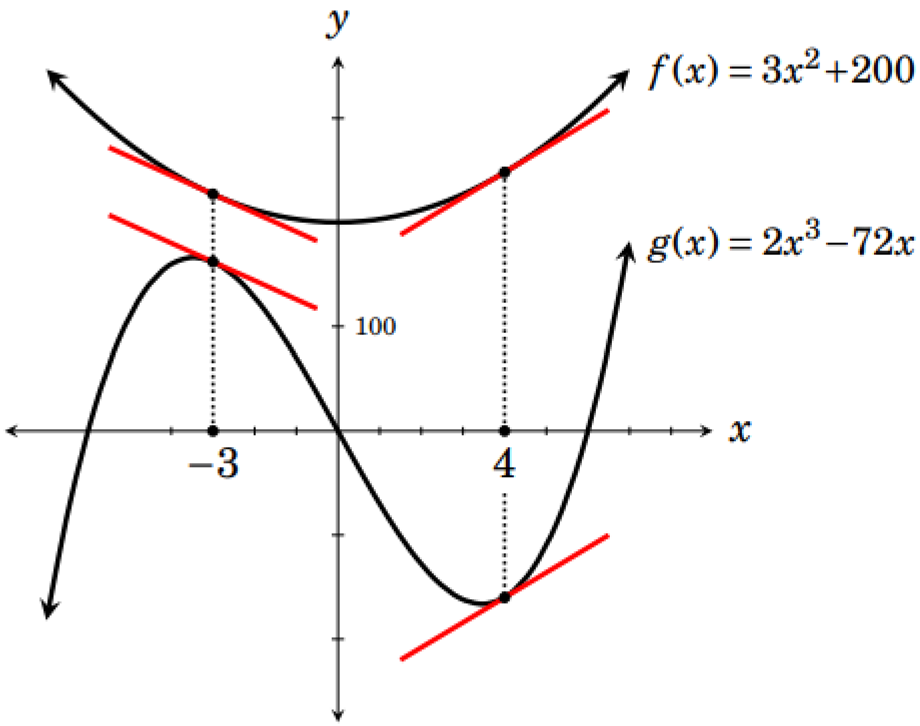
$$f'(x) = g'(x)$$
$$(3x^2 + 200)' = (2x^3 - 72x)'$$
$$(3x^2)' + (200)' = (2x^3)' - (72x)'$$
$$6x = 6x^2 - 72$$
$$6x^2 - 6x - 72 = 0$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$x = -4, \qquad x = 3$$

Παράδειγμα 3

Έστω $f(x) = 3x^2 + 200$ και $g(x) = 2x^3 - 72x$. Βρείτε όλα τ6α σημεία x για τα οποία η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της $f(x)$ στο $(x, f(x))$ ισούται με την η κλίση της εφαπτομένης ευθείας της $g(x)$ στο $(x, g(x))$

Άρα για $x = -4, \quad x = 3$

έχουμε $f'(x) = g'(x)$



Εύρεση παραγώγου στο Octave

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = 2\sin(x) + 3x^5$ με χρήση του Octave

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
Symbolic pkg v2.8.0: Python communication link active, SymPy v1.4.
>>
>>  y=2*sin(x)+3*x^5
y = (sym)

     5
  3*x  + 2*sin(x)

>> Dy=diff(y)
Dy = (sym)

      4
  15*x  + 2*cos(x)
```

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Εισαγωγή

$$\frac{d}{dx}[\sin(x)\,(x^2+x)] = \cos(x)\,(x^2+x) + \sin(x)(2x+1)$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2+x)] = ?$$

Μέχρι στιγμής δεν υπάρχει ένας κανόνας

Στόχος:

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] = ?$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

$$\frac{d}{dx}[f\quad(g(x))] = ?$$

Χρειαζόμαστε έναν κανόνα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0

και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$,

τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0)$$

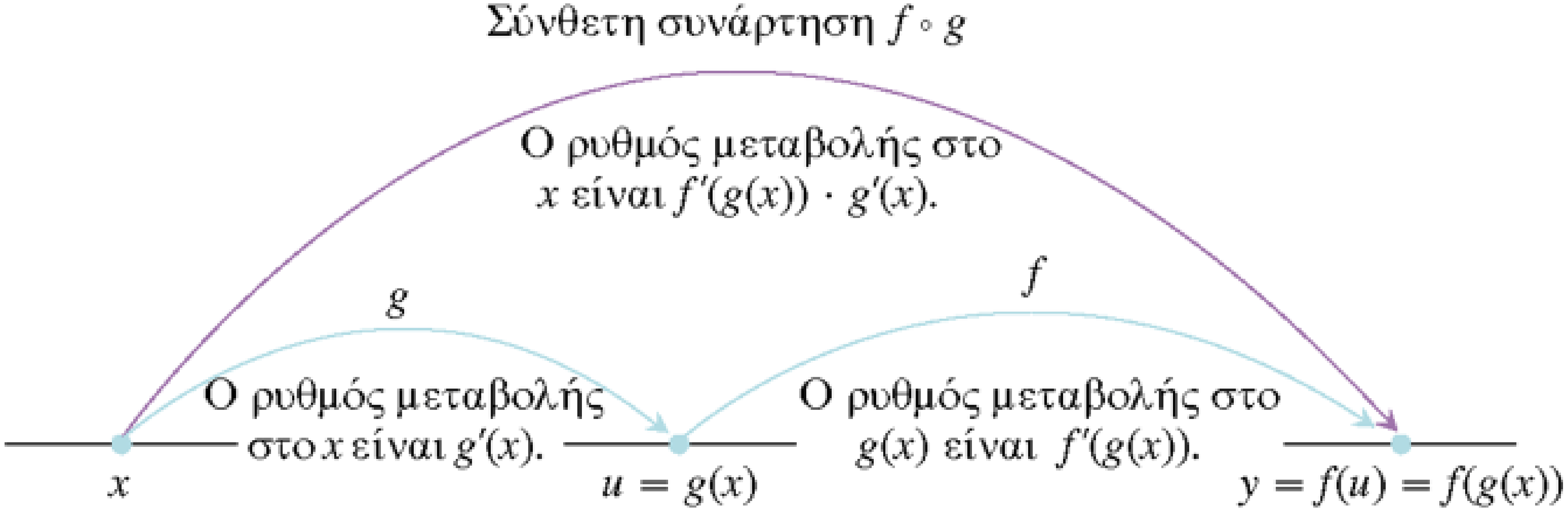
Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ

και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$

τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$\frac{d}{dx}\left[f\big(g(x)\big)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Οι ρυθμοί μεταβολής πολλαπλασιάζονται



Οι ρυθμοί μεταβολής πολλαπλασιάζονται: Η παράγωγος της $f \circ g$ στο x ισούται με την παράγωγο της f στο σημείο $g(x)$ επί την παράγωγο της g στο σημείο x.

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης- Κανόνας Αλυσίδας

Θεώρημα: $$\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'(g(x))g'(x)$$

Ένας άλλος τρόπος:

Έστω $y = f\left(g(x)\right)$. Τότε $\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$

Επομένως,

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right]}_{\frac{dy}{dx}} = f'\left(g(x)\right)g'(x) = \underbrace{f'(u)\cdot g'(x)}_{\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

$$= \cdots \quad \cdots \quad \cdots =$$

Κανόνας της αλυσίδας (chain rule)

Αν $y = f\big(g(x)\big)$. Τότε $\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases}$ και

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

που είναι γνωστός ως **κανόνας της αλυσίδας**

Το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι πηλίκο. Στον κανόνα της αλυσίδας απλά συμπεριφέρεται ως πηλίκο, γεγονός που διευκολύνει την απομνημόνευση του κανόνα

Παράδειγμα 1

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] =$$

$$\frac{d}{dx}[f\quad(g(x))] =$$

Παράδειγμα 1

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] =$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

$$\frac{d}{dx}[f \quad (g(x))] = \quad f' \ (g(x)) \quad g'(x)$$

Παράδειγμα 1

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] = \cos$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\frac{d}{dx}[f\quad(g(x))] = \quad f'\ (g(x)) \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα 1

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] = \cos(x^2 + x)$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\frac{d}{dx}[f \quad (g(x))] = \quad f' \ (g(x)) \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα 1

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

$$\frac{d}{dx}[f\ \ (g(x))] = \ \ f'\ (g(x)) \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα 1

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$\frac{d}{dx}[f\ \ (g(x))] = \ f'\ (g(x)) \cdot g'(x)$$

Παράδειγμα 1 (2ος τρόπος)

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2 + x)] =?$$

Θέτω $y = \sin(x^2 + x)$, … $\begin{cases} y = sin(u) \\ u = x^2 + x \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$= \cos(u) \cdot (2x + 1) =$$

$$=\cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

Θεώρημα: $\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = e^{(-x^2+1)}$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{(-x^2+1)}\ \right] =$$

$$= e^{-x^2+1} \cdot (-x^2+1)'$$

$$= e^{-x^2+1}(-2x) = -2xe^{-x^2+1}$$

Γενικά

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[e^{g(x)}\right] = e^{g(x)}g'(x)}$$

Θεώρημα: $\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Παράδειγμα 3. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = e^{(\sin(x))}$

$$\frac{d}{dx}[e^{(\sin(x))}] =$$
$$= e^{sinx} \cdot (\sin(x))'$$
$$= e^{sinx}(\cos(x))$$

Θεώρημα: $\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Παράδειγμα 4. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = \ln(x^2 + x + 2)$

$$\frac{d}{dx}[\ln(x^2 + x + 2)] =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + x + 2)} \cdot (x^2 + x + 2)'$$

$$= \frac{1}{(x^2 + x + 2)} \cdot (2x + 1)$$

$$= \frac{(2x + 1)}{(x^2 + x + 2)}$$

Γενικά

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\ln(g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

Θεώρημα: $\frac{d}{dx}\left[f\big(g(x)\big)\right] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Παράδειγμα 5. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

$$\frac{d}{dx}[\ln(\sqrt{x})] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2x}$$

Εύρεση παραγώγου στο Octave

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x) = (3x^2 + 5)^9$ με χρήση του Octave

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
Symbolic pkg v2.8.0: Python communication link active, SymPy v1.4.
>> y=(3*x^2+5)^9
y = (sym)

            9
  /   2    \
  \3*x  + 5/

>> Dy=diff(y)
Dy = (sym)

                 8
       /   2    \
  54*x*\3*x  + 5/
```

Rule	Generalized rule
$\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$	$\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x)\right)\right]=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[x^n\right]=nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}\left[\left(g(x)\right)^n\right]=n\left(g(x)\right)^{n-1}g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[e^x\right]=e^x$	$\frac{d}{dx}\left[e^{g(x)}\right]=e^{g(x)}\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[\sin(x)\right]=\cos(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\sin\left(g(x)\right)\right]=\cos\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[\tan(x)\right]=\sec^2(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\tan\left(g(x)\right)\right]=\sec^2\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[\sec(x)\right]=\sec(x)\tan(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\sec\left(g(x)\right)\right]=\sec\left(g(x)\right)\tan\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[\cos(x)\right]=-\sin(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\cos\left(g(x)\right)\right]=-\sin\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[\cot(x)\right]=-\csc^2(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\cot\left(g(x)\right)\right]=-\csc^2\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[\csc(x)\right]=-\csc(x)\cot(x)$	$\frac{d}{dx}\left[\csc\left(g(x)\right)\right]=-\csc\left(g(x)\right)\cot\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$

Rule	Chain rule generalization
$\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$	$\frac{d}{dx}\left[e^{g(x)}\right] = e^{g(x)}g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = \ln(a)a^x$	$\frac{d}{dx}\left[a^{g(x)}\right] = \ln(a)a^{g(x)}g'(x)$
$\frac{d}{dx}\left[\ln\|x\|\right] = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}\left[\ln\|g(x)\|\right] = \frac{g'(x)}{g(x)}$
$\frac{d}{dx}\left[\log_a\|x\|\right] = \frac{1}{x\ln(a)}$	$\frac{d}{dx}\left[\log_a\|g(x)\|\right] = \frac{g'(x)}{g(x)\ln(a)}$

$$\frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left[\sin^{-1}(g(x))\right] = \frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}}g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(x)\right] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left[\cos^{-1}(g(x))\right] = \frac{-1}{\sqrt{1-(g(x))^2}}g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(x)\right] = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(g(x))\right] = \frac{1}{1+(g(x))^2}g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\cot^{-1}(x)\right] = \frac{-1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left[\cot^{-1}(g(x))\right] = \frac{-1}{1+(g(x))^2}g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sec^{-1}(x)\right] = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\left[\sec^{-1}(g(x))\right] = \frac{g'(x)}{|g(x)|\sqrt{(g(x))^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\csc^{-1}(x)\right] = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\left[\csc^{-1}(g(x))\right] = \frac{-g'(x)}{|g(x)|\sqrt{(g(x))^2-1}}$$

Δεύτερη, τρίτη,..., νιοστή παράγωγος

Αν f είναι μια συνάρτηση με πεδίου ορισμού A και A_1 είναι το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f': A_1 \to \mathbb{R}$$

η οποία ονομάζεται **πρώτη παράγωγος συνάρτηση της $\boldsymbol{f}$** ή απλά παράγωγος της f και συμβολίζεται ως $f'(x)$ είτε ως $\frac{df}{dx}$

Η παράγωγος της f' αν υπάρχει λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με $f''(x)$ ή $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$

Επαγωγικά ορίζεται η **νιοστή παράγωγος της $\boldsymbol{f}$**, με $n \geq 3$ και συμβολίζεται με $f^{(n)}$ ή $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$

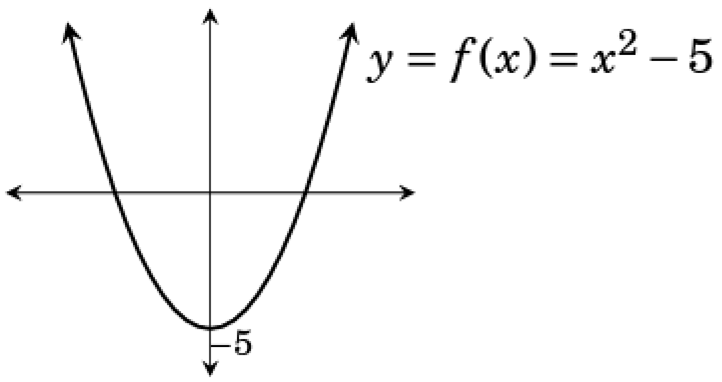
Εύρεση παραγώγων μεγαλύτερης τάξης στο Octave

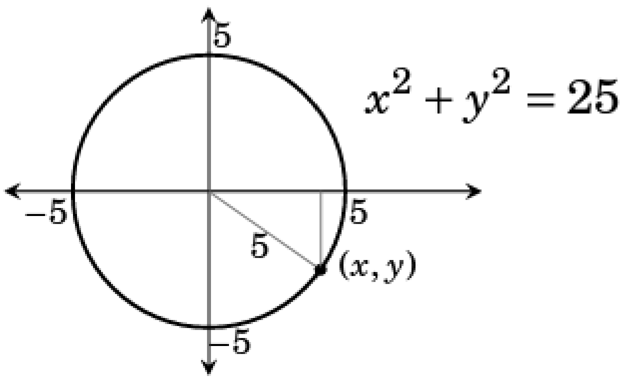
Να βρεθεί η 3η παράγωγος της $f(x) = 2\sin(x) + 3x^5$ με χρήση του Octave.
Έπειτα να βρεθεί η τιμή της στο $x = \pi$.

```
>>  y=2*sin(x)+3*x^5
y = (sym)

       5
  3*x   + 2*sin(x)

>> D3y=diff(y,3,x)
D3y = (sym)

     /     2         \
  2*\90*x  - cos(x)/

>> D3y2=subs(D3y,pi)
D3y2 = (sym)

             2
  2 + 180*pi
```

Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Επισκόπηση





Το y είναι μια (σαφής) συνάρτηση του x

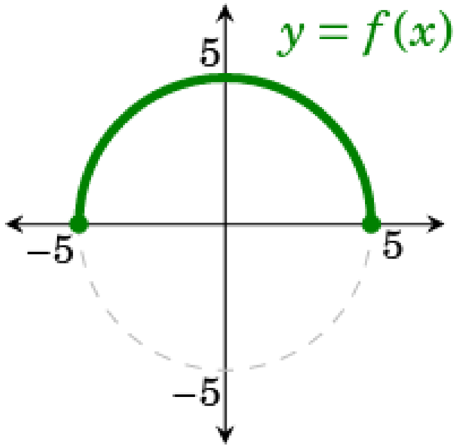
Μπορούμε να υπολογίσουμε την $f'(x)$

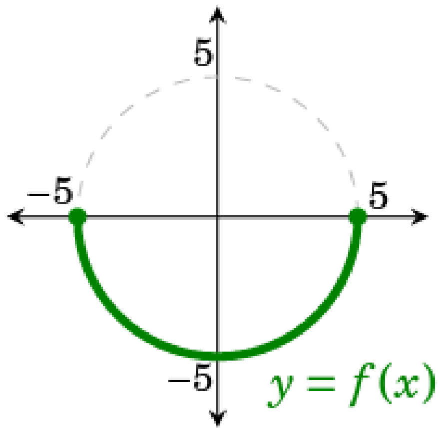
Το y συνδέεται με το x μέσω της εξίσωσης $x^2 + y^2 = 25$
Αλλά το y δεν είναι μια (σαφής) συνάρτηση του x

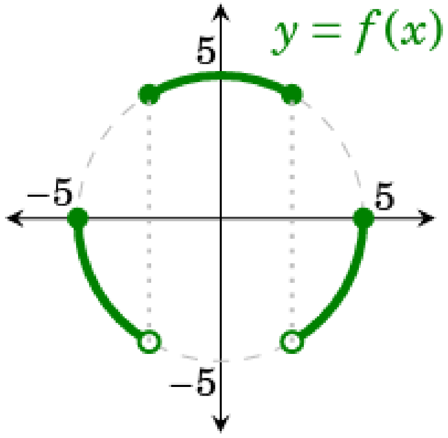
Δεν είναι ξεκάθαρο πως θα υπολογίσουμε την παράγωγο του y

Επισκόπηση

Υπάρχουν πολλές συναρτήσεις $y = f(x)$ που ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$, δηλ. την $x^2 + [f(x)]^2 = 25$







Τέτοιες συναρτήσεις $f(x)$ ονομάζονται **πεπλεγμένες συναρτήσεις** της εξίσωσης $x^2 + y^2 = 25$

Θα δούμε τώρα πως υπολογίζουμε την παράγωγο μιας πεπλεγμένης συνάρτησης

Πεπλεγμένη Συνάρτηση (implicit function)

Π.χ. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ ή $x^2 + y^2 = 1$

ή $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

Αν $F(x,y) = x^2 + x^3 y^2 - e^x lny = 0$

$$\Rightarrow \quad y = ?$$

Ορισμός -Πεπλεγμένη Συνάρτηση

Πεπλεγμένη ονομάζεται μια συνάρτηση $y(x)$, αν ορίζεται μέσω μιας εξίσωσης της μορφής

$$F(x, y) = 0$$

Παράγωγος Πεπλεγμένης Συνάρτησης

- Η παραγώγιση μιας πεπλεγμένης συνάρτησης γίνεται με παραγώγιση της σχέσης ορισμού της $F(x, y) = 0$, εφαρμόζοντας την **μέθοδο παραγώγισης μιας σύνθετης συνάρτησης**.

- Για τον υπολογισμό της παραγώγου μιας πεπλεγμένης συνάρτησης:
  1. Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή y με $y = f(x)$
  2. Παραγωγίζουμε την εξίσωση $F(x, y) = 0$ ως προς x
  3. Λύνουμε την εξίσωση ως προς $y' = \frac{dy}{dx}$

Παράδειγμα 1 (Πεπλεγμένη παραγώγιση)

Υπολογίστε την $\frac{dy}{dx}$ απευθείας από την εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$

1. Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή y με $y = f(x)$: $\quad x^2 + f(x)^2 = 1$
2. Παραγωγίζουμε ως προς x

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}\left[\left(f(x)\right)^2\right] = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

3. Λύνουμε την εξίσωση ως προς y'

$$f'(x) = \frac{x}{f(x)}, \qquad f(x) \neq 0$$

Παράδειγμα 2 (Πεπλεγμένη παραγώγιση)

Υπολογίστε την $\frac{dy}{dx}$ απευθείας από την εξίσωση $xy + e^y = 0$

1. Αντικαθιστούμε τη μεταβλητή y με $y = f(x)$:

$$x \cdot f(x) + e^{f(x)} = 0$$

1. Παραγωγίζουμε ως προς x

$$\frac{d}{dx}(x \cdot f(x)) + \frac{d}{dx}\left[e^{f(x)}\right] = \frac{d}{dx}(0)$$

$$[f(x) + x \cdot f'(x)] + e^{f(x)} f'(x) = 0$$

3. Λύνουμε την εξίσωση ως προς $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{x + e^{f(x)}}, \qquad x + e^y \neq 0$$

$$xy + e^y = 0$$

$$\frac{d}{dx}[xy + e^y] = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}[xy] + \frac{d}{dx}[e^y] = 0$$

$$y + xy' + e^y y' = 0$$

$$y'(x + e^y) = -y$$

$$y' = -\frac{y}{x + e^y}$$

Λογαριθμική Παραγώγιση

Σύνοψη

Στόχος: Η χρήση των λογαρίθμων για τον υπολογισμό παραγώγων

Ιδιότητες Λογαρίθμων (Υπενθύμιση)

$$\ln|ab| = \ln|a| + \ln|b| \qquad \ln\left|\frac{a}{b}\right| = \ln|a| - \ln|b|$$

$$\ln\left|a^b\right| = b ln|a| \qquad \ln\left|\frac{1}{b}\right| = -\ln|b|$$

Κανόνες Παραγώγισης Λογαρίθμων (Υπενθύμιση)

$$\frac{d}{dx}\{\ln|x|\} = \frac{1}{x} \qquad \frac{d}{dx}\{lnx\,\} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\{\ln|g(x)|\} = \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad \frac{d}{dx}\{\ln g(x)\} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Λογαριθμική Παραγώγιση-Γιατί;

Αν $y = x^3$ τότε $y' = 3x^2$

Αν $y = 3^x$ τότε $y' = \ln(3)\, 3^x$

Αν $y = x^x$ τότε $y' = ?$ Δεν υπάρχει κανόνας

Στρατηγική: Πριν την παραγώγιση, λογαριθμήστε και τα δύο μέλη και απλοποιήστε

$$y = x^x$$
$$\ln|y| = \ln|x^x|$$
$$\ln|y| = x\ln|x|$$
$$\frac{d}{dx}[\ln|y|] = \frac{d}{dx}[x\ln|x|]$$
$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln|x| + x\frac{1}{x}$$
$$y' = y(\ln|x| + 1)$$
$$y' = x^x(\ln|x| + 1)$$

Λογαριθμική Παραγώγιση
Για να παραγωγίσουμε μια πολύκλοκη συνάρτηση

Λογαριθμική Παραγώγιση

Για να παραγωγίσουμε μια πολύκλοκη συνάρτηση

1. Θέτουμε $y = f(x)$
2. Λογαριθμίζουμε και τις δύο πλευρές
3. Απλοποιούμε με χρήση ιδιοτήτων των λογάριθμων
4. Παραγωγίζουμε με κανόνες σύνθετης συνάρτησης
5. Λύνουμε ως προς y'

Παράδειγμα

Βρείτε την παράγωγο της $f(x) = \frac{x^5 sinx}{(x+1)e^x}$

Λύση: 1. Θέτουμε $y = \frac{x^5 sinx}{(x+1)e^x}$

2. Λογαριθμίζουμε

$$\ln|y| = \ln\left(\frac{x^5 sinx}{(x+1)e^x}\right)$$

3. Απλοποιούμε

$$\ln|y| = \ln|x^5 sinx| - \ln|(x+1)e^x|$$

$$\ln|y| = \ln\left|x^5\right| + \ln|sinx| - \ln|(x+1)| - \ln|e^x|$$

$$\ln|y| = 5\ln|x| + \ln|sinx| - \ln|(x+1)| - x$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\ln|y| = 5\ln|x| + \ln|sinx| - \ln|(x+1)| - x$$

4. Παραγωγίζω

$$\frac{d}{dx}[\ln|y|] = \frac{d}{dx}[5\ln|x| + \ln|sinx| - \ln|(x+1)| - x]$$

$$\frac{y'}{y} = 5\frac{1}{x} + \frac{1}{sinx}cosx - \frac{1}{x+1} - 1$$

$$y' = y\left(\frac{5}{x} + \frac{cosx}{sinx} - \frac{1}{x+1} - 1\right)$$

$$y' = \frac{x^5 sinx}{(x+1)e^x}\left(\frac{5}{x} + \frac{cosx}{sinx} - \frac{1}{x+1} - 1\right)$$

Ρυθμοί Μεταβολής

Ρυθμός μεταβολής

- Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 τότε ονομάζουμε **ρυθμό μεταβολής του $\boldsymbol{y}$ ως προς το $\boldsymbol{x}$ στο σημείο $\boldsymbol{x_0}$** την παράγωγο $f'(x_0)$
- Έστω μια συνάρτηση $s(t)$ η οποία καθορίζει τη θέση ενός σώματος το οποίο κινείται στον άξονα των τετμημένων τη χρονική στιγμή t
- Ο ρυθμός μεταβολής της s ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι **η στιγμιαία ταχύτητα** $v(t_0)$ του σώματος και ισχύει ότι
$$v(t_0) = s'(t_0)$$
- Ο ρυθμός μεταβολής της v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι **η επιτάχυνση** $a(t_0)$ του σώματος και ισχύει ότι
$$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$$

Έστω $s(t) = -t^2 + 4t$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός κινητού. Να βρεθεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή $t_0 = 2$

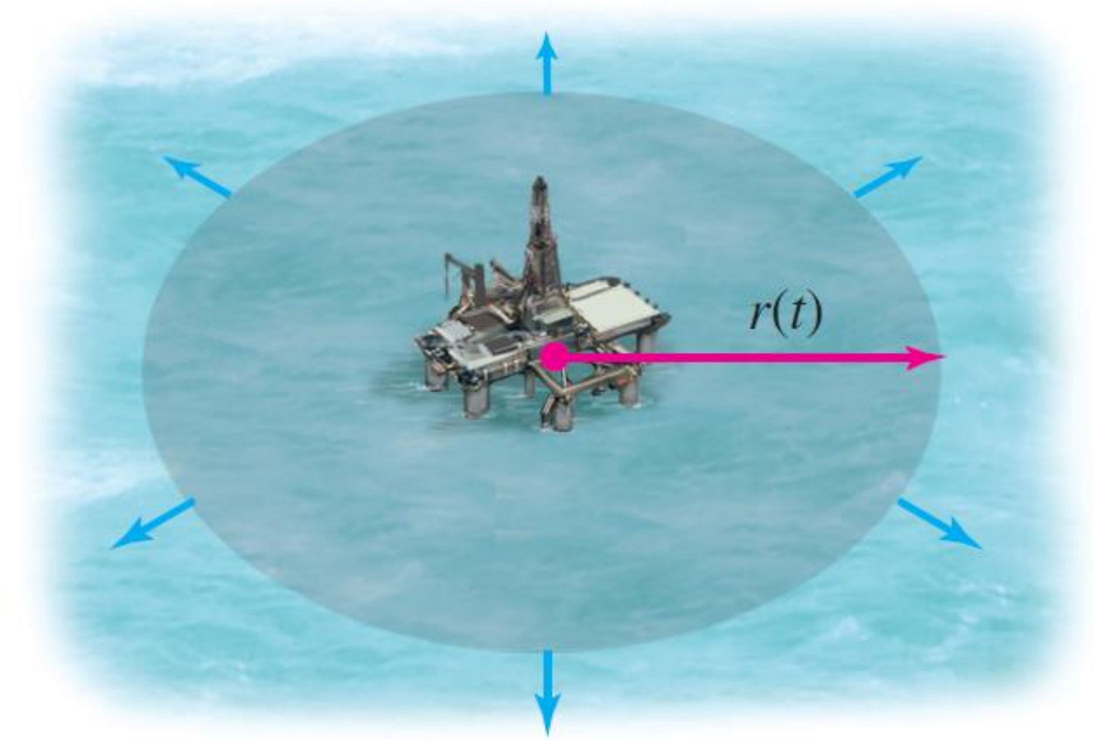
Θέση: $s(2) = -2^2 + 4 * 2 = 4$

Ταχύτητα: $v(t) = s'(t) = -2 * t + 4 \Rightarrow \ v(2) = 0$

Επιτάχυνση: $a(t) = v'(t) = -2 \Rightarrow a(2) = -2$

Παράδειγμα

- Σε μια εξέδρα πετρελαίου προκαλείται διαρροή (σε ήρεμη θάλασσα) και το πετρέλαιο εξαπλώνεται σε μια κυκλική κηλίδα γύρω από την εξέδρα. Εάν η ακτίνα της κηλίδας μεγαλώνει με ρυθμό 30m/hr, πόσο γρήγορα μεγαλώνει η επιφάνεια της κηλίδας όταν η κηλίδα έχει ακτίνα 100m ;



Λύση

Μεταβλητές που μεταβάλλονται ταυτόχρονα:

Η ακτίνα του κύκλου $r(t)$

Η επιφάνειά του $E(t) = \pi r^2(t)$

Στόχος να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας $E'(t)$, δεδομένου ότι $r'(t) = 30\ m/hr$

Παραγωγίζοντας ως προς t

$$E'(t) = \frac{d}{dt}\left(\pi r^2(t)\right) = 2\pi r(t)\, r'(t)$$

Αντικαθιστώντας τις δεδομένες τιμές

$$E'(t) = 2\pi(100m)\left(30\frac{m}{hr}\right) = 6000\pi\frac{m^2}{hr}$$