203: Διακριτά Μαθηματικά
Κεφάλαιο 4: Θεωρία Πιθανοτήτων

Σπυρίδων Τζίμας

Εαρινό Εξάμηνο 2025

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Θεωρία Πιθανοτήτων

Στην Θεωρία Πιθανοτήτων, θεωρούμε κάποιο πείραμα τύχης του οποίου η έκβαση εμφανίζει αβεβαιότητα, δηλαδή αν και όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι συγκεκριμένα και διακεκριμένα, δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ποιο από αυτά θα πραγματοποιηθεί, και υπολογίζουμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα από αυτά που μας ενδιαφέρουν.

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τα καλούμε ενδεχόμενα του πειράματος τύχης και το σύμπαν που θεωρούμε είναι το σύνολο των ενδεχομένων του πειράματος. Στο πλαίσιο της Θεωρίας Πιθανοτήτων, το σύμπαν καλείται δειγματοχώρος και όλα τα δυνατά υποσύνολα του δειγματοχώρου καλούνται γεγονότα. Όταν εκτελούμε το πείραμα τύχης και πραγματοποιείται το ενδεχόμενο a, τότε κάθε γεγονός A το οποίο περιέχει το a λέμε ότι συμβαίνει.

Το U καλείται το βέβαιο γεγονός. Το $\varnothing$ καλείται το αδύνατο γεγονός.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Έστω ότι ο δειγματοχώρος U αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα.
Τότε η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός A είναι:

$$P(A) = \frac{|A|}{|U|}$$

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης άρτιου αριθμού ως το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού.

Ο δειγματοχώρος είναι $U = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Το ζητούμενο γεγονός είναι το $A = \{2, 4, 6\}$.
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = \frac{|A|}{|U|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας (από τον Kolmogorov το 1933)

Δύο γεγονότα A, B καλούνται ασυμβίβαστα (ή αλλιώς αμοιβαίως αποκλειόμενα) αν $A \cap B = \varnothing$.

Αξιώματα

- Για κάθε γεγονός A, η πιθανότητα να συμβεί το A είναι $P(A) \geq 0$.
- Η πιθανότητα να συμβεί το βέβαιο γεγονός U είναι $P(U) = 1$.
- Αν A, B είναι δύο ασυμβίβαστα γεγονότα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ιδιότητες

- Για κάθε γεγονός A, η πιθανότητα να συμβεί το A είναι $P(A) \in [0, 1]$.
- Η πιθανότητα να συμβεί το αδύνατο γεγονός $\varnothing$ είναι $P(\varnothing) = 0$.
- Αν A, B είναι δύο γεγονότα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
  (Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού) (Ισχύει και για περισσότερα από 2 σύνολα.)

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας (από τον Kolmogorov το 1933)

Ιδιότητες

- Αν A, B είναι δύο γεγονότα τέτοια ώστε $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$.
- Για κάθε γεγονός A, η πιθανότητα να μην συμβεί το A είναι $P(A^C) = 1 - P(A)$.
- Αν A, B είναι δύο γεγονότα, τότε $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- Αν A, B είναι δύο γεγονότα, τότε $P(A \oplus B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.
- Για κάθε διαμέριση $\{A_1, \ldots, A_n\}$ ενός γεγονότος X, $P(A_1) + \cdots + P(A_n) = P(X)$.

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης άρτιου αριθμού ως το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού.

Ο δειγματοχώρος είναι $U = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Το ζητούμενο γεγονός είναι το $A = \{2, 4, 6\}$. Εφόσον το ζάρι είναι αμερόληπτο, όλα τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, συνεπώς για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί είναι $P(\{i\}) = 1/6$. (Γιατί;)
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας (από τον Kolmogorov το 1933)

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης άρτιου αριθμού ως το αποτέλεσμα της ρίψης ενός μεροληπτικού ζαριού τέτοιου ώστε η πιθανότητα εμφάνισης αριθμού 6 να είναι $1/2$ και τα υπόλοιπα ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα.

Ο δειγματοχώρος είναι $U = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Το ζητούμενο γεγονός είναι το $A = \{2, 4, 6\}$. Από την υπόθεση έχουμε $P(\{6\}) = 1/2$ και ότι όλα τα υπόλοιπα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, συνεπώς για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 5\}$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί είναι $P(\{i\}) = 1/10$. (Γιατί;) Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 2 \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10} = 0.7$$

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας (από τον Kolmogorov το 1933)

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης δύο αριθμών που αθροίζουν στο 6 ως το αποτέλεσμα της ρίψης δύο διακεκριμένων αμερόληπτων ζαριών.

Ο δειγματοχώρος είναι $U = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$. Το ζητούμενο γεγονός είναι το $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$. Για κάθε ενδεχόμενο $u \in U$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί είναι $P(\{u\}) = 1/6^2 = 1/36$. (Γιατί;) Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(\{(1,5)\} \cup \{(2,4)\} \cup \{(3,3)\} \cup \{(4,2)\} \cup \{(5,1)\}) \\
&= P(\{(1,5)\}) + P(\{(2,4)\}) + P(\{(3,3)\}) + P(\{(4,2)\}) + P(\{(5,1)\}) \\
&= \frac{|A|}{|U|} = \frac{5}{36} = 0.13\overline{8}
\end{aligned}
$$

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας (από τον Kolmogorov το 1933)

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα να τραβήξουμε στην τύχη από μία τράπουλα:

1. Άσσο ή μπαστούνι (A ή $\spadesuit$)
2. Ντάμα ή κούπα (Q ή $\heartsuit$)

Ο δειγματοχώρος U είναι το σύνολο των 52 διακεκριμένων φύλλων της τράπουλας. Έστω A το γεγονός να τραβήξουμε άσσο και $\spadesuit$ το γεγονός να τραβήξουμε μπαστούνι. Τότε το ζητούμενο γεγονός είναι το $Z = A \cup \spadesuit$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$
\begin{aligned}
P(Z) = P(A \cup \spadesuit) = P(A) + P(\spadesuit) - P(A \cap \spadesuit) &= \frac{|A|}{|U|} + \frac{|\spadesuit|}{|U|} - \frac{|A \cap \spadesuit|}{|U|} \\
&= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{|A \cup \spadesuit|}{|U|} \approx 0.31
\end{aligned}
$$

Εργαζόμαστε αναλόγως και για την άλλη περίπτωση.

Το Παράδοξο των Γενεθλίων

Άσκηση: Έστω ότι όσον αφορά το ποια ημέρα έχει γενέθλια ο οποιοσδήποτε άνθρωπος όλες οι μέρες του χρόνου είναι ισοπίθανες. Δείξτε ότι αν επιλέξουμε τυχαία 23 ανθρώπους, τότε η πιθανότητα μεταξύ αυτών που επιλέξαμε να υπάρχουν τουλάχιστον 2 που έχουν την ίδια μέρα γενέθλια είναι άνω του 50%.

Σχόλιο: Το 23 είναι το ελάχιστο πλήθος για το οποίο ισχύει αυτό.

Λύση: Επειδή όλες οι μέρες του χρόνου είναι ισοπίθανες, το πείραμα είναι της τυχαίας επιλογής 23 ανθρώπων ισοδυναμεί με το πείραμα της τυχαίας επιλογής 23 ημερών με επανατοποθέση από τις 365 διακεκριμένες μέρες του χρόνου. Άρα $|U| = 365^{23}$. Έστω A το γεγονός όλων των ενδεχομένων που είναι τέτοια ώστε όλες οι ημέρες που επιλέχθηκαν να είναι διαφορετικές. Τότε $|A| = P(365, 23)$ και το ζητούμενο γεγονός είναι το $Z = A^C$.

$$P(Z) = P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{|A|}{|U|} = 1 - \frac{P(365, 23)}{365^{23}} \approx 0.51 > 0.5$$

Άσκηση: Έστω ότι στο τμήμα σπουδάζουν ενεργά ίσου πλήθους φοιτητές και στο 1° έτος, και στο 2° έτος, και στο 3° έτος, και στο 4° και άνω έτος. Μια ντουζίνα φοιτητές περιμένουν στην ουρά για να συμμετάσχουν σε μια προφορική εξέταση. Υπολογίστε την πιθανότητα να συμμετάσχουν στην εξέταση ίσου πλήθους φοιτητές και από τις 4 παραπάνω κατηγορίες.

Λύση: Έχουμε 4 διακεκριμένες κατηγορίες (ομάδες) όμοιων φοιτητών (σφαιριδίων). Το πείραμα της τυχαίας επιλογής 12 σφαιριδίων ισοδυναμεί με το πείραμα της τυχαίας επιλογής 12 ομάδων με επανατοποθέτηση. Άρα $|U| = 4^{12}$. Το ζητούμενο γεγονός Z είναι το γεγονός όλων των ενδεχομένων που είναι τέτοια ώστε κάθε ομάδα επιλέχθηκε 3 φορές. Άρα $|Z| = \dfrac{P(12,12)}{3!3!3!3!}$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(Z) = \dfrac{|Z|}{|U|} = \dfrac{P(12,12)}{3!3!3!3!4^{12}} \approx 0.02$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός υπό την προϋπόθεση ότι έχει συμβεί ένα άλλο καλείται δεσμευμένη πιθανότητα. Έστω δύο γεγονότα A, B τέτοια ώστε $P(B) > 0$. Τότε η πιθανότητα να συμβεί το A υπό την προϋπόθεση ότι έχει συμβεί το B είναι:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Το σύμβολο $P(A \mid B)$ διαβάζεται «P του A δεδομένου (ή αλλιώς δοθέντος) B».

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης πρώτου αριθμού ως το αποτέλεσμα της ρίψης ενός αμερόληπτου ζαριού αν γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος αριθμός.

Ο δειγματοχώρος είναι $U = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Το γεγονός να εμφανιστεί πρώτος είναι το $A = \{2, 3, 5\}$. Το γεγονός να εμφανιστεί άρτιος είναι το $B = \{2, 4, 6\}$. Άρα $A \cap B = \{2\}$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3} = 0.\overline{3}$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης δύο αριθμών που αθροίζουν στο 6 ως το αποτέλεσμα της ρίψης δύο διακεκριμένων αμερόληπτων ζαριών αν γνωρίζουμε ότι και οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι.

Ο δειγματοχώρος είναι $U = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$. Για κάθε ενδεχόμενο $u \in U$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί είναι $P(\{u\}) = 1/6^2 = 1/36$. Το γεγονός να εμφανιστούν δύο αριθμοί που αθροίζουν στο 6 είναι το $A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Το γεγονός να εμφανιστούν δύο άρτιοι αριθμοί είναι το $B = \{2,4,6\}^2$. Άρα $A \cap B = \{(2,4),(4,2)\}$ και η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9} = 0.\overline{2}$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Παράδειγμα: Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης ακριβώς ενός 6 μεταξύ των αριθμών του αποτελέσματος της ρίψης τριών διακεκριμένων αμερόληπτων ζαριών αν γνωρίζουμε ότι εμφανίστηκαν τρεις διαφορετικοί αριθμοί.

Ο δειγματοχώρος είναι $U = \{1, 2, \ldots, 6\}^3$, άρα $|U| = 6^3 = 216$. Έστω A το γεγονός να εμφανιστεί ακριβώς ένα 6 και B το γεγονός να εμφανιστούν τρείς διαφορετικοί αριθμοί.

$$\begin{aligned} |B| &= P(6,3) = 6 \times 5 \times 4 = 120 \\ |A| &= 3(1 \times 5 \times 5) = 75 \\ |A \cap B| &= 3(1 \times 5 \times 4) = 60 \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2} = 0.5 = 50\%$.

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Παράδειγμα: Από μία τράπουλα τραβούμε στην τύχη δύο φύλλα χωρίς επανατοποθέτηση. Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι και τα δύο άσσοι.

Πρώτος Τρόπος

Τα ενδεχόμενα είναι όλες οι δυνατές διατάξεις 2 φύλλων από τα 52 φύλλα της τράπουλας, άρα $|U| = P(52, 2) = 52 \times 51 = 2652$. Τα επιθυμητά ενδεχόμενα είναι όλες οι δυνατές διατάξεις 2 φύλλων από τους 4 άσσους της τράπουλας, άρα $|Z| = P(4, 2) = 4 \times 3 = 12$.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(Z) = \dfrac{|Z|}{|U|} = \dfrac{12}{2652} = \dfrac{1}{221}$.

Δεύτερος Τρόπος

Έστω A_1 και A_2 τα γεγονότα το πρώτο και το δεύτερο φύλλο να είναι άσσος αντίστοιχα. Θεωρούμε τα δύο τραβήγματα ως δύο εξαρτημένα υποπειράματα με δειγματοχώρους U_1 και U_2 αντίστοιχα. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(Z) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) = \frac{|A_2|}{|U_2|}\frac{|A_1|}{|U_1|} = \frac{3}{51}\frac{4}{52} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}.$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Παράδειγμα: Από μία τράπουλα τραβούμε στην τύχη δύο φύλλα με επανατοποθέτηση. Υπολογίστε την πιθανότητα να είναι και τα δύο άσσοι.

Πρώτος Τρόπος

Τα ενδεχόμενα είναι όλες οι δυνατές διατάξεις 2 φύλλων από τα 52 φύλλα της τράπουλας, άρα $|U| = 52^2 = 2704$. Τα επιθυμητά ενδεχόμενα είναι όλες οι δυνατές διατάξεις 2 φύλλων από τους 4 άσσους της τράπουλας, άρα $|Z| = 4^2 = 16$.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(Z) = \dfrac{|Z|}{|U|} = \dfrac{16}{2704} = \dfrac{1}{169}$.

Δεύτερος Τρόπος

Έστω A_1 και A_2 τα γεγονότα το πρώτο και το δεύτερο φύλλο να είναι άσσος αντίστοιχα. Θεωρούμε τα δύο τραβήγματα ως δύο εξαρτημένα υποπειράματα με δειγματοχώρους U_1 και U_2 αντίστοιχα. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(Z) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \mid A_1)P(A_1) = \frac{|A_2|}{|U_2|}\frac{|A_1|}{|U_1|} = \frac{4}{52}\frac{4}{52} = \frac{16}{2704} = \frac{1}{169}.$$

Ανεξαρτησία

Δύο γεγονότα A, B καλούνται ανεξάρτητα αν $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Παρατήρηση: Επειδή $P(A \mid B)P(B) = P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A)$, η ανεξαρτησία συνεπάγεται ότι $P(A \mid B) = P(A)$ και $P(B \mid A) = P(B)$. Δηλαδή δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα όταν το να συμβεί το ένα δεν επηρεάζει την πιθανότητα να συμβεί το άλλο.

Παράδειγμα: Έστω ότι η οποιαδήποτε έγκυος είναι ισοπίθανο να γεννήσει αγόρι ή κορίτσι. Μία οικογένεια μας λέει ότι έχει δύο παιδιά. Ποιά η πιθανότητα τα παιδιά να είναι:

1. Δύο αγόρια.
2. Ένα αγόρι και ένα κορίτσι.

Έστω A_1 και A_2 (K_1 και K_2) τα γεγονότα τα πρώτο και το δεύτερο παιδί να είναι αγόρι (κορίτσι) αντίστοιχα. Τότε $P(A_1) = P(K_1) = P(A_2) = P(K_2) = 1/2$. Παρατηρούμε ότι το αν θα είναι αγόρι ή κοριτσί το πρώτο και το δεύτερο παιδί είναι ανεξάρτητα γεγονότα.

1. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$
2. $P((A_1 \cap K_2) \cup (K_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cap K_2) + P(K_1 \cap A_2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

Άσκηση: Για ένα εργαστήριο του $1^{ου}$ έτους, χωρίζουμε τυχαία τους φοιτητές σε ομάδες των δύο ατόμων τέτοιες ώστε ο ένας είναι πρωτοετής και ο άλλος μεγαλύτερου έτους φοίτησης. Έστω ότι το $1/2$ των πρωτοετών και το $1/3$ των υπολοίπων είναι γυναίκες. Υπολογίστε την πιθανότητα η οποιαδήποτε ομάδα από αυτές που σχηματίσαμε να αποτελείται από δύο γυναίκες αν γνωρίζουμε ήδη πως συμμετέχει τουλάχιστον μία.

Λύση: Έστω A_1 και A_2 (Γ_1 και Γ_2) τα γεγονότα ο/η πρωτοετής και ο/η μη πρωτοετής να είναι άντρας (γυναίκα) αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι το αν θα είναι άντρας ή γυναίκα ο/η πρωτοετής και ο/η μη πρωτοετής είναι ανεξάρτητα γεγονότα.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \qquad P(A_1 \cap \Gamma_2) = P(A_1)P(\Gamma_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P(\Gamma_1 \cap A_2) = P(\Gamma_1)P(A_2) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \qquad P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = P(\Gamma_1)P(\Gamma_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(\Gamma_1) = P((\Gamma_1 \cap A_2) \cup (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)) = P(\Gamma_1 \cap A_2) + P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(\Gamma_2) = P((A_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)) = P(A_1 \cap \Gamma_2) + P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = P(\Gamma_1) + P(\Gamma_2) - P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$
$$P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \mid \Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \frac{P((\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2))}{P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} = \frac{P(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)}{P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)} = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$$

Ολική Πιθανότητα

Έστω διαμέριση $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ενός γεγονότος B. Τότε:

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + \cdots + P(B \mid A_n)P(A_n)$$

Ολική Πιθανότητα

Άσκηση: Ένα εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρονικών συσκευών παράγει σε ημερήσια βάση 4000, 3000, 2000 και 1000 κομμάτια από τα προϊόντα A_1, A_2, A_3 και A_4 αντίστοιχα. Η γραμμή παραγωγής για το προϊόν A_1 παράγει 10% ελαττωματικά κομμάτια, για το A_2 5%, για το A_3 2% και για το A_4 1%. Υπολογίστε την πιθανότητα σε έναν δειγματοληπτικό έλεγχο από το σύνολο της ημερήσιας παραγωγής να βρούμε μία ελαττωματική συσκευή.

Λύση: Ο δειγματοχώρος U είναι το σύνολο των συσκευών που παράγονται ημερησίως, άρα $|U| = 10000$. Έστω E το γεγονός να είναι ελαττωματικό το δείγμα. Επειδή το $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ αποτελεί διαμέριση του U, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\begin{aligned}
P(E) &= P(E \mid A_1)P(A_1) + P(E \mid A_2)P(A_2) + P(E \mid A_3)P(A_3) + P(E \mid A_4)P(A_4) \\
&= \frac{10}{100}\frac{4000}{10000} + \frac{5}{100}\frac{3000}{10000} + \frac{2}{100}\frac{2000}{10000} + \frac{1}{100}\frac{1000}{10000} \\
&= \frac{4}{100} + \frac{15}{1000} + \frac{4}{1000} + \frac{1}{1000} = \frac{4}{100} + \frac{20}{1000} = \frac{6}{100} = 6\%
\end{aligned}$$

Θεώρημα του Bayes

Έστω δύο γεγονότα A, B τέτοια ώστε $P(A) > 0$ και $P(B) > 0$. Τότε:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

Θεώρημα του Bayes

Άσκηση: Ένα εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρονικών συσκευών παράγει σε ημερήσια βάση 4000, 3000, 2000 και 1000 κομμάτια από τα προϊόντα A_1, A_2, A_3 και A_4 αντίστοιχα. Η γραμμή παραγωγής για το προϊόν A_1 παράγει 10% ελαττωματικά κομμάτια, για το A_2 5%, για το A_3 2% και για το A_4 1%.

- Υπολογίστε την πιθανότητα σε έναν δειγματοληπτικό έλεγχο από το σύνολο της ημερήσιας παραγωγής να βρούμε μία ελαττωματική συσκευή.
- Αν η συσκευή που βρήκαμε στον δειγματοληπτικό έλεγχο είναι ελαττωματική, υπολογίστε την πιθανότητα να είναι από το προϊόν A_1.

Λύση: Ο δειγματοχώρος U είναι το σύνολο των συσκευών που παράγονται ημερησίως, άρα $|U| = 10000$. Έστω E το γεγονός να είναι ελαττωματικό το δείγμα.

- Επειδή το $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ αποτελεί διαμέριση του U, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(E) = 6\%$.
- Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(A_1 \mid E) = \dfrac{P(E \mid A_1)P(A_1)}{P(E)} = \dfrac{10\% \frac{4000}{10000}}{6\%} = \dfrac{2}{3} = 0.\overline{6}$