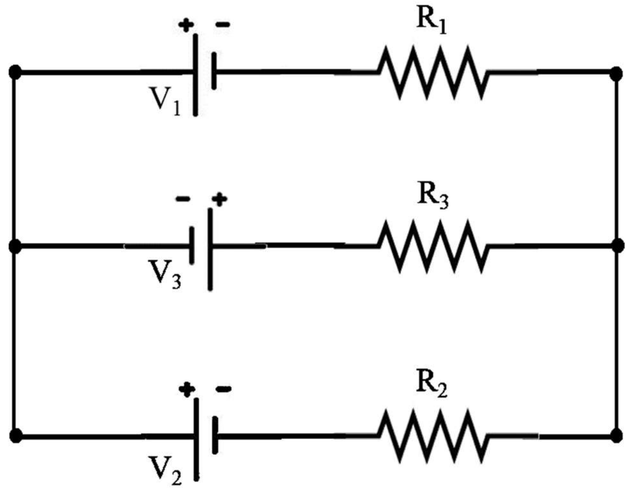
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
& ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Άσκηση Πράξης: Ηλεκτρονική
Εξάμηνο: Χειμερινό 2020-2021

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων
(Κανόνες Kirchhoff – Θεωρήματα Thevenin/Norton)

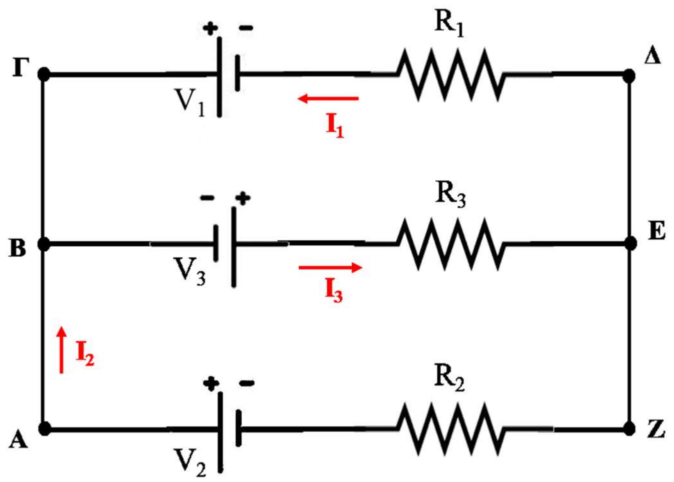
Άσκηση 1

Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογίσετε τα ρεύματα τα οποία διαρρέουν κάθε κλάδο του. Οι πηγές V_1, V_2 και V_3, δεν είναι ιδανικές και έχουν εσωτερικές αντιστάσεις.
Δίνονται: $V_1 = 20V$, $V_2 = 20V$, $V_3 = 10V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $r_1 = 1\Omega$, $r_2 = 2\Omega$, $r_3 = 2\Omega$



Λύση

Αρχικά θα πρέπει να σχεδιάσουμε τα ρεύματα στο κύκλωμα. Καλό είναι να ορίσουμε την φορά τους σύμφωνα με την συμβατική φορά που προκύπτει από την πολικότητα των πηγών σε κάθε κλάδο. Δεν είναι απόλυτα σίγουρο ότι η φορά η οποία θα ορίσουμε θα είναι η σωστή φορά. Αν αυτό όμως δεν ισχύει απλώς στους υπολογισμού που θα κάνουμε θα προκύψει αρνητική η τιμή του ρεύματος που έχουμε κάνει λάθος. Θα ονοματίσουμε και ορισμένα σημεία επάνω στο κύκλωμα για να μας βοηθήσουν στην επίλυση.



Όπως φαίνεται και στο σχήμα πρέπει να υπολογιστούν 3 τιμές εντάσεων ρευμάτων, επομένως χρειαζόμαστε 3 ανεξάρτητες εξισώσεις. Η μια μπορεί να προκύψει από τον 1ο κΚ στον κόμβο Β. Ο έτερος κόμβος του κυκλώματος Ε δεν μπορεί να παράσχει νέα ανεξάρτητη εξίσωση. Η εξίσωση που θα προκύψει από το κόμβο Ε θα είναι ακριβώς η ίδια με την εξίσωση από τον κόμβο Β.

1ος κΚ στον κόμβο Β:

$$\sum I_B = 0 \Rightarrow I_2 - I_3 + I_1 = 0 \quad (1)$$

2ος κΚ στον απλό βρόχο ΖΑΒΕΖ

$$\sum V_{ZABEZ} = 0 \Rightarrow -I_2R_2 + V_2 - \mathrm{I}_2r_2 - I_3R_3 + V_3 - \mathrm{I}_3r_3 = 0 \quad (2)$$

2ος κΚ στον σύνθετο βρόχο ΖΑΒΓΔΕΖ

$$\sum V_{\text{ΖΑΒΓΔΕΖ}} = 0 \Rightarrow -I_2R_2 + V_2 - I_2r_2 + I_1R_1 - V_1 + I_1r_1 = 0 \quad (3)$$

Αρκεί να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές

$$(2) \Rightarrow -3I_2 + 20 - 2I_2 - 3I_3 + 10 - 2I_3 = 0$$
$$\Rightarrow -5I_2 - 5I_3 + 30 = 0 \Rightarrow 5I_2 + 5I_3 = 30 \Rightarrow I_2 + I_3 = 6 \Rightarrow I_3 = 6 - I_2$$

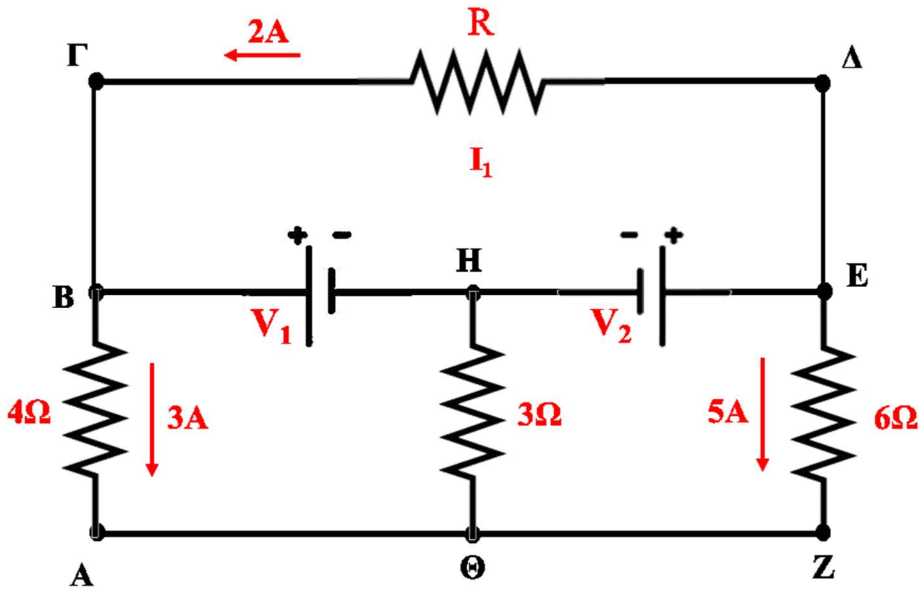
$$(3) \Rightarrow -3I_2 + 20 - 2I_2 + 4I_1 - 20 + I_1 = 0$$
$$\Rightarrow -5I_2 + 5I_1 = 0 \Rightarrow I_2 = I_1$$

$$(1) \Rightarrow I_2 - (6 - I_2) + I_2 = 0 \Rightarrow I_2 - 6 + I_2 + I_2 = 0 \Rightarrow 3I_2 = 6 \Rightarrow I_2 = \frac{6}{3} = 2A$$

Άρα και I_1 = 2 A
Ενώ I_3 = 6 – I_2 = 6 - 2 = 4 A

Άσκηση 2

Στο παρακάτω κύκλωμα να βρεθούν:
(α) Το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 3Ω
(β) Τις τάσεις V_1 και V_2
(γ) Την αντίσταση R



Λύση

(α) Για να βρούμε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση των 3Ω αρκεί να εφαρμόσουμε 1ο κΚ στον κόμβο Θ.

1ος κΚ στον Θ

$$\sum I_{\Theta} = 0 \Rightarrow +3A + 5A - I = 0 \Rightarrow I = 8A$$

(β) Για τον υπολογισμό των τάσεων V_1 και V_2 αρκεί για την κάθε μια να εφαρμόσουμε 2ο κΚ στους απλούς βρόχους που ανήκουν ΑΒΗΘΑ και ΘΗΕΖΘ αντιστοίχως.

2ος κΚ στον ΑΒΗΘΑ

$$\sum V_{\text{ΑΒΗΘΑ}} = 0 \Rightarrow +3 \cdot 4 - V_1 + 8 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_1 = 12 + 24 = 36V$$

2ος κΚ στον ΘΗΕΖΘ

$$\sum V_{\text{ΘΗΕΖΘ}} = 0 \Rightarrow -8 \cdot 3 + V_2 - 5 \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_2 = 24 + 30 = 54V$$

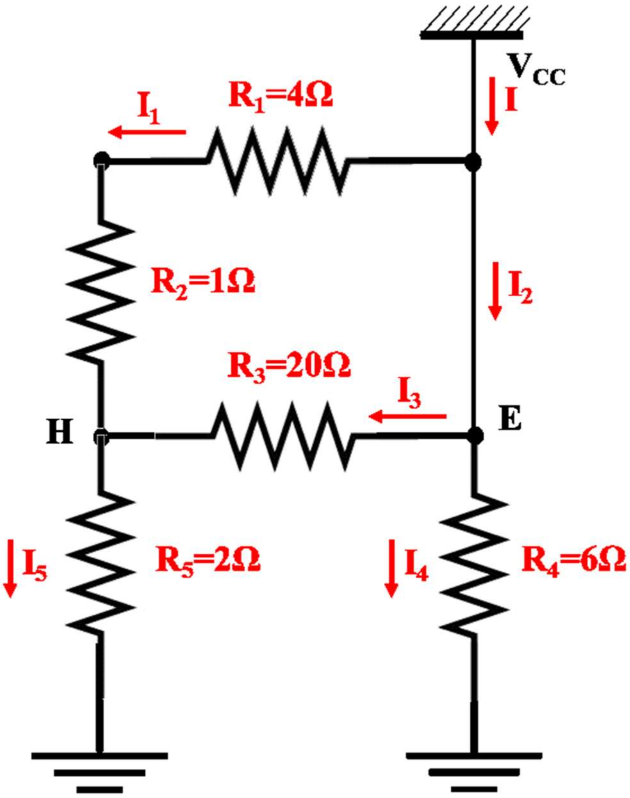
(γ) Για τον υπολογισμό της αντίστασης R υπάρχουν πολλές επιλογές βρόχων που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Θα εφαρμόσουμε τον 2ο κΚ στον βρόχο ΒΓΔΕΒ

2ο κΚ στον ΒΓΔΕΒ

$$\sum V_{\text{ΒΓΔΕΒ}} = 0 \Rightarrow 2R - V_2 + V_1 = 0 \Rightarrow 2R = V_2 - V_1 \Rightarrow R = \frac{54V - 36V}{2A} = \frac{18}{2} = 9\Omega$$

Άσκηση 3

Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογιστούν τα ρεύματα I_1, I_3, I_4, I_5.



Λύση

Εξάγουμε πρώτα εξίσωση από τον 1ο κΚ στον κόμβο Η. Εφόσον δεν μου ζητάει η άσκηση τα ρεύματα Ι και Ι2, δεν λαμβάνω 1ο κΚ από το κόμβο Ε.

Εφαρμογή 1ου κΚ στον κόμβο Η:

$$\sum I_E = 0 \Rightarrow +I_1 + I_3 - I_5 = 0 \qquad (1)$$

Εφαρμογή 2ου κΚ στον βρόχο $V_{cc} \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_5$

$$\sum V_{\beta\rho o\chi o\upsilon 1} = 0 \Rightarrow V_{cc} - I_1\left(R_1 + R_2\right) - I_5 R_5 = 0 \qquad (2)$$

Εφαρμογή 2ου κΚ στον βρόχο $V_{cc} \rightarrow E \rightarrow R_4$

$$\sum V_{\beta\rho o\chi o\upsilon 2} = 0 \Rightarrow V_{cc} - I_4 R_4 = 0 \qquad (3)$$

Εφαρμογή 2ου κΚ στον βρόχο $V_{cc} \rightarrow R_3 \rightarrow R_5$

$$\sum V_{\beta\rho o\chi o\upsilon 3} = 0 \Rightarrow V_{cc} - I_3 R_3 - I_5 R_5 = 0 \qquad (4)$$

Η εξίσωση (3) έχει τους λιγότερους αγνώστους και άρα ξεκινάω από αυτήν

$$(3) \Rightarrow I_4 R_4 = V_{cc} \Rightarrow I_4 = \frac{V_{cc}}{R_4} = \frac{30V}{6V} = 5A$$

Στην συνέχεια παρατηρώ ότι δεν υπάρχει εξίσωση μόνο με 1 άγνωστο. Πρέπει από κάποια εξίσωση να βρω σχέση που συνδέει δύο αγνώστους.

$$(4) \Rightarrow 30 - 20\mathrm{I}_3 - 2\mathrm{I}_5 = 0 \Rightarrow \mathrm{I}_5 = \frac{30-20\mathrm{I}_3}{2} = 15 - 10\mathrm{I}_3$$

Αντικαθιστώ στην εξίσωση (2) το I_5 όπως αυτό υπολογίστηκε

$$(1) \Rightarrow \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_3 - 15 + 10\mathrm{I}_3 = 0 \Rightarrow \mathrm{I}_1 = 15 - 11 \cdot \mathrm{I}_3$$

$$(2) \Rightarrow V_{cc} - (15 - 11I_3)(R_1 + R_2) - (15 - 10I_3)R_5 = 0 \Rightarrow \cancel{30} - 75 + 55I_3 - \cancel{30} + 20\mathrm{I}_3 = 0$$
$$\Rightarrow -75 + 75I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = 1\mathrm{A}$$

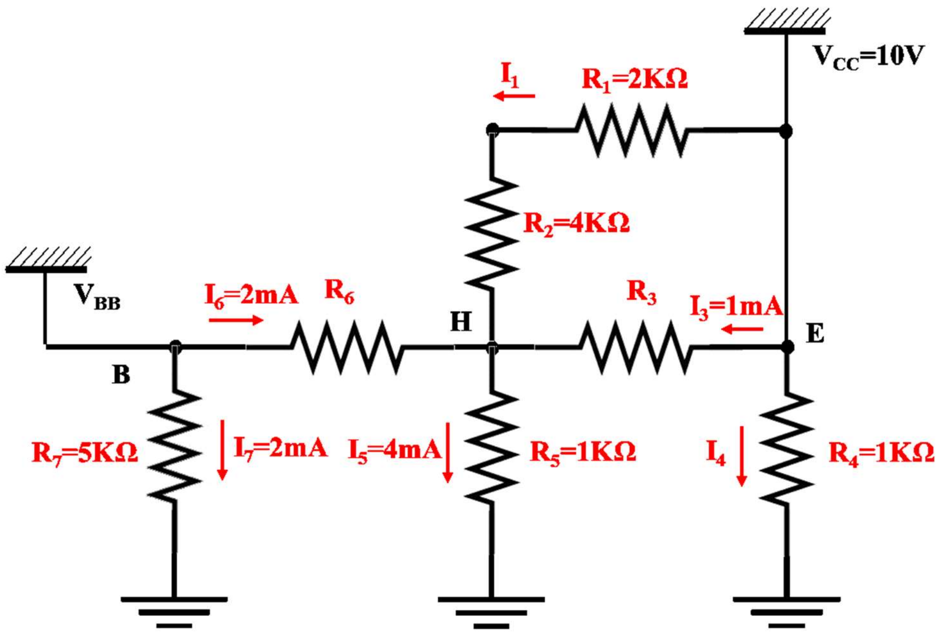
Άρα και

$$\mathrm{I}_1 = 15 - 11 = 4\mathrm{A}$$
$$\mathrm{I}_5 = 15 - 10 = 5\mathrm{A}$$

Παρατήρηση: Τι «καινούργιο» συναντήσαμε σε αυτήν την άσκηση;
(α) Συνδεσμολογία κυκλώματος με γειώσεις
(β) Κατά την επίλυση δεν προκύπτουν πάντα εξισώσεις με μόνο έναν άγνωστο. Πρέπει να επιλύσω έναν άγνωστο ως προς έναν άλλο και να πάω σε μία άλλη εξίσωση όπου υπάρχουν και οι δύο και να αντικαταστήσω τον πρώτο.

Άσκηση 4

Στο παρακάτω κύκλωμα να υπολογιστούν τα εξής:
(α) Η τάση V_{bb}
(b) Οι αντιστάσεις R_3 και R_6
(c) Οι εντάσεις των ρευμάτων I_1 και I_4



Λύση

(α) Για τον υπολογισμό της τάσης V_{BB} αρκεί να εφαρμόσουμε 2ο κΚ από την τάσης V_{BB} έως την γείωση της αντίστασης R_7

Εφαρμογή 2ου κΚ στο βρόχο $V_{BB} \to R_7 \to$ GND

$$\sum V_{V_{BB}\to R_7} = 0 \Rightarrow V_{BB} - I_7 R_7 = 0 \Rightarrow V_{BB} = I_7 R_7 = 5K\Omega \cdot 2m\text{A} = 5\cdot 10^3 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,\text{A} = 10V$$

(β) Για τον υπολογισμό των αντιστάσεων R3 και R6 πάλι ακολουθούμε έναν βρόχο που μας βολεύει και εφαρμόζουμε 2ο κΚ

Εφαρμογή 2ου κΚ στο βρόχο $V_{BB} \to R_6 \to R_5 \to$ GND

$$\sum V_{V_{BB}\to R_6 \to R_5} = 0 \Rightarrow V_{BB} - I_6 R_6 - I_5 R_5 = 0 \Rightarrow 10 - I_6 R_6 - I_5 R_5 = 10V - 2m\text{A} \cdot R_6 - 1K\Omega \cdot 4m\text{A} \Rightarrow R_6 = \frac{10-4}{2} = 3K\Omega$$

$$\sum V_{V_{cc}\to R_3 \to R_5} = 0 \Rightarrow V_{cc} - I_3 R_3 - I_5 R_5 = 0 \Rightarrow 10 - I_3 R_3 - I_5 R_5 = 10V - R_3 - 1K\Omega \cdot 4m\text{A} \Rightarrow R_3 = 10 - 4 = 6K\Omega$$

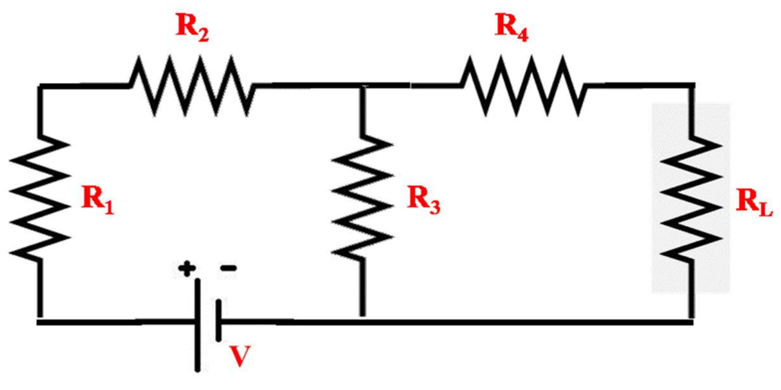
(γ) Για τον υπολογισμό του ρεύματος I_1 μπορώ να χρησιμοποιήσω τον 1ο κΚ στον κόμβο Η. Για τον υπολογισμό του I_4 πρέπει να εφαρμόσω 2ο κΚ στον βρόχο από την Vcc $\to R_4$

$$\sum \text{I}_H = 0 \Rightarrow +\text{I}_1 + \text{I}_6 + I_3 - \text{I}_5 = 0 \Rightarrow I_1 = I_5 - I_6 - I_3 = 4mA - 2mA - 1mA = 1mA$$

$$\sum V_{V_{cc}\to R_7} = 0 \Rightarrow V_{CC} - I_4 R_4 = 0 \Rightarrow 10 - I_4 = 0 \Rightarrow I_4 = 10mA$$

Άσκηση 5 (Θεωρήματα Thevenin/Norton)

Να βρεθούν τα ισοδύναμα κυκλώματα με το παρακάτω κύκλωμα, σύμφωνα με τα θεωρήματα Thevenin και Norton. V = 30V, R_1 = 3KΩ, R_2 = 2KΩ, R_3 = 5 KΩ, R_4 = 5KΩ.



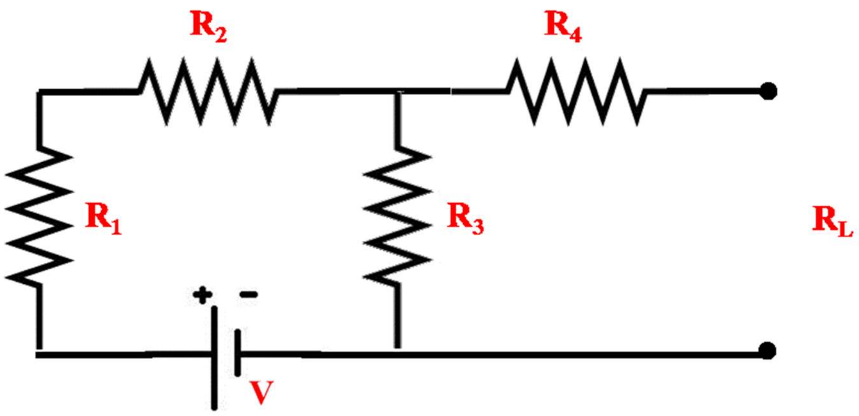
Λύση

(a) Ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin

Σύμφωνα με το θεώρημα Thevenin, κάθε κύκλωμα το οποίο περιέχει πηγές και αντιστάσεις και το οποίο καταλήγει σε ένα φόρτο R_L, μπορεί να αντικατασταθεί με ένα κύκλωμα που περιέχει σε σειρά μια πηγή τάσης V_{th}, και μία αντίσταση R_{th}.

Υπάρχει συγκεκριμένη μεθοδολογία για τον υπολογισμό της τάσης Thevenin V_{th}, και της αντίστασης Thevenin R_{th}:

Για τον υπολογισμό της τάσης Thevenin πρέπει να ανοίξουμε το κύκλωμα στο σημείο (ανοιχτοκυκλώνουμε) που βρίσκεται ο φόρτος. Δηλαδή η αντίσταση R_L αντικαθίσταται από έναν ανοιχτό διακόπτη. Στην συνέχεια υπολογίζουμε την τάση στα άκρα το διακόπτη αυτού. Το κύκλωμα γίνεται ως εξής:



Η τάση στα άκρα του σημείου που βρισκόταν ο φόρτος μπορεί να υπολογιστεί, δεδομένου ότι η αντίσταση R_4 βρίσκεται σε ένα ανοιχτό κλάδο του κυκλώματος ο οποίος δεν διαρρέεται από ρεύμα. Άρα η πτώση τάσης στα άκρα της R_4 είναι μηδέν. Επομένως η τάση στον ανοιχτό διακόπτη ισούται με την τάση στα άκρα της R_3. Στο ανωτέρω κύκλωμα υπάρχει μόνο ένα ρεύμα, το οποίο και μπορεί να υπολογιστεί δεδομένου ότι ο βρόχος αυτός έχει 3 αντιστάσεις σε σειρά και μια πηγή.

$$R_{ολ} = R_1 + R_2 + R_3 = 3K\Omega + 2\text{K}\Omega + 5\text{K}\Omega = 10\text{K}\Omega$$

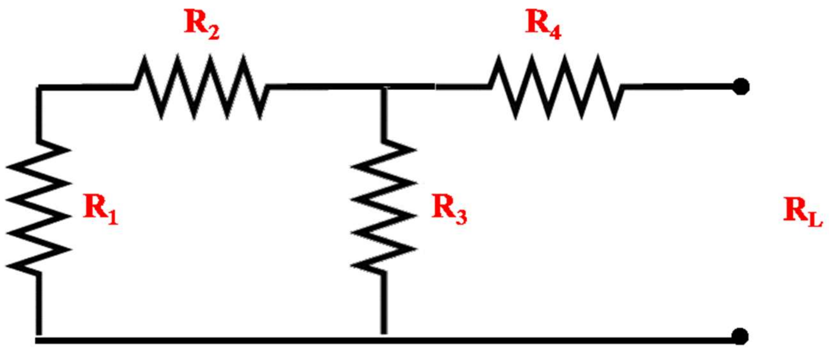
Από τον νόμο του Ohm έχουμε ότι:

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{30V}{10K\Omega} = 3mA$$

Επομένως τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την τάση V_3 η οποία είναι η τάση Thevenin V_{th}.

$$V_{th} = V_3 = I \cdot R_3 = 3mA \cdot 5K\Omega = 3 \cdot 10^{-3}\,\text{A} \cdot 5 \cdot 10^3\,\Omega = 15V$$

Για τον υπολογισμό της αντίστασης Thevenin η θεωρία μας λέει ότι πρέπει να βραχυκυκλωθούν όλες οι πηγές τάσης του κυκλώματος και να «ανοιχτοκυκλωθούν» όλες οι πηγές ρεύματος (στην προκειμένη άσκηση δεν υπάρχουν). Την ολική αυτή αντίσταση υπολογίσουμε με τους γνωστούς τύπους των συνδεσμολογιών των αντιστάσεων,



Η αντίσταση Thevenin Θα είναι ίση με:

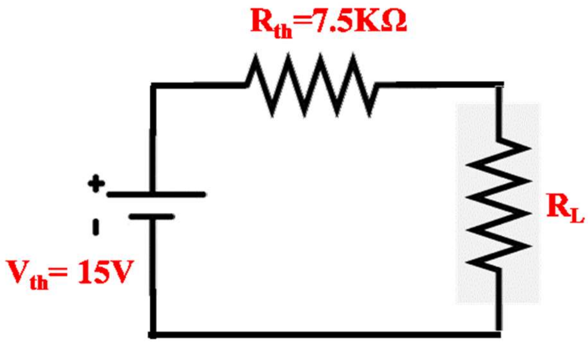
$$R_{th} = \left(\left(R_1 + R_2\right) \| R_3\right) + R_4$$

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 3\text{K}\Omega + 2\text{K}\Omega = 5\text{K}\Omega$$

$$R_{123} = \frac{R_{12} \cdot R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{25K\Omega^2}{10\text{K}\Omega} = 2.5\text{K}\Omega$$

$$R_{th} = R_{123} + R_4 = 2.5K\Omega + 5\text{K}\Omega = 7.5\text{K}\Omega$$

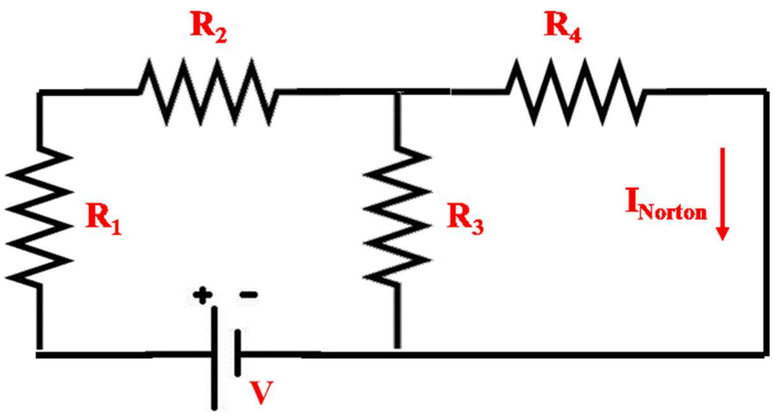
Τελικά το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin θα είναι το παρακάτω:



(b) Ισοδύναμο κύκλωμα Norton

Όπως γνωρίσουμε από την θεωρία, η αντίσταση Thevenin είναι ίση με την αντίσταση Norton. Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε μόνο το ρεύμα Norton με σκοπό να δημιουργήσουμε το ισοδύναμο κύκλωμα Norton.

Σύμφωνα με την θεωρία θα πρέπει να βραχυκυκλώσουμε την αντίσταση φόρτου και να υπολογίσουμε το ρεύμα που διαρρέει τον κλάδο αυτό.



Οι αντιστάσεις R_3 και R_4 είναι παράλληλα συνδεδεμένες γεγονός το οποίο σημαίνει ότι έχουν ίδια τάση στα άκρα τους. Η αντίσταση R_{34} είναι ίση με:

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{5K\Omega \cdot 5\text{K}\Omega}{5K\Omega + 5\text{K}\Omega} = \frac{25\text{K}\Omega^2}{10\text{K}\Omega} = 2.5\text{K}\Omega$$

$$R_{o\lambda} = R_1 + R_2 + R_{14} = 2 + 3 + 2.5 = 7.5K\Omega$$

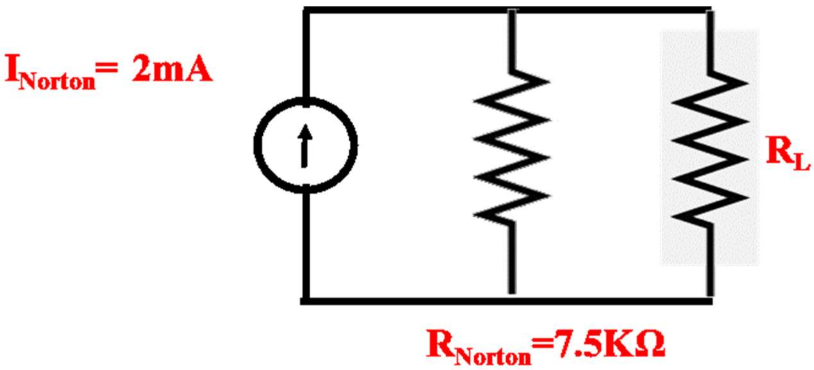
Η τάση αυτή είναι η τάση της πηγής μείον την πτώσης τάσεις στα άκρα της R_{12}. Θυμηθείτε τον διαιρέτη τάσης από τους τύπους του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε την V_{34}.

$$V_{34} = \frac{R_{34}}{R_{12} + R_{34}} V = \frac{2.5\,\cancel{K\Omega}}{7.5\,\cancel{K\Omega}} \cdot 30V = 10V$$

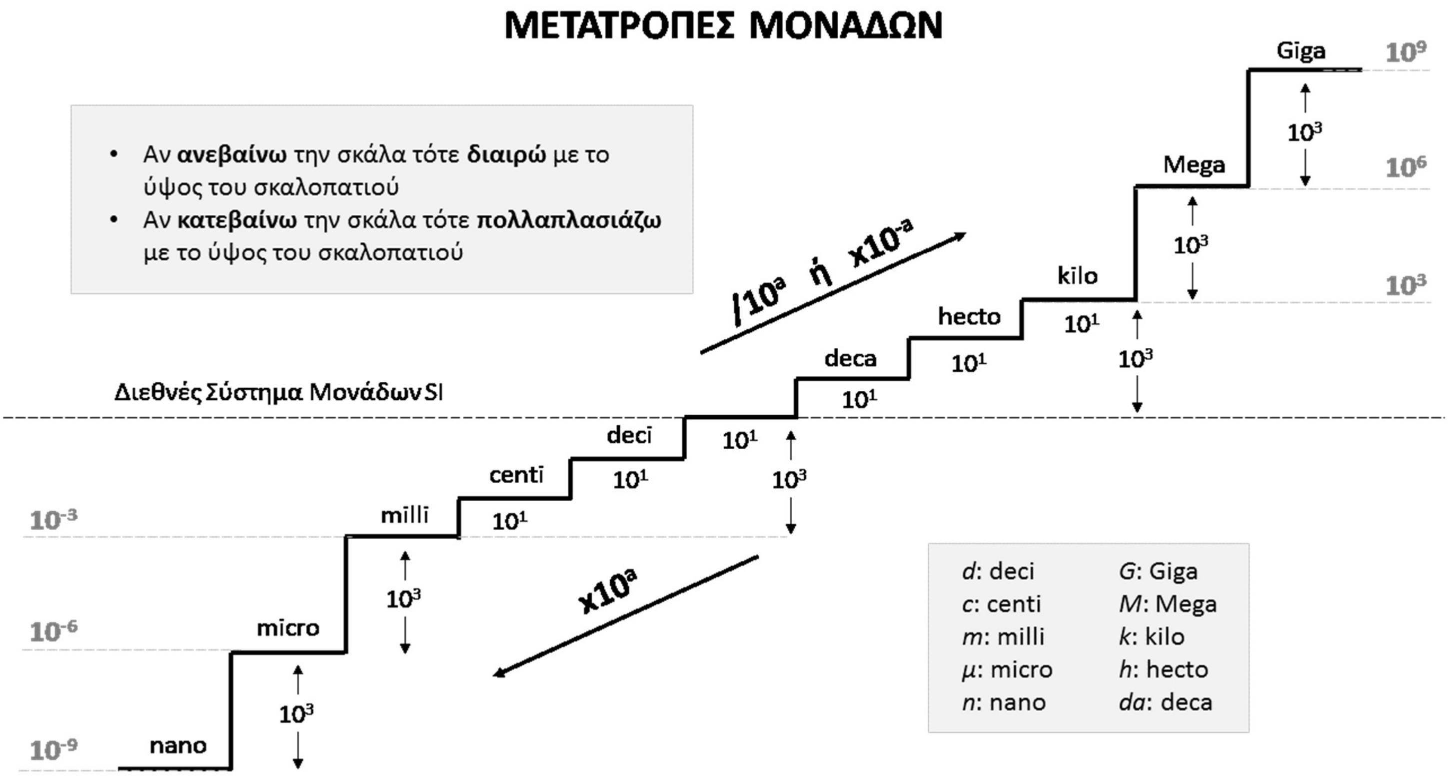
Επομένως η ένταση του ρεύματος το οποίο διαρρέει την αντίσταση R_4 είναι ίσο με:

$$\mathrm{I}_{Norton} = I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{10V}{5K\Omega} = 2mA$$

Τελικά το ισοδύναμο κατά Norton κύκλωμα θα είναι ως εξής



Παράρτημα



Π.χ.1: Μετατρέψτε τα 350 ΚΩ σε Ω
Λύση: για να πάω από ΚΩ σε Ω πρέπει να κατέβω την σκάλα άρα θα πολλαπλασιάσω. Η υψομετρική του ΚΩ με το Ω είναι 10^3. Άρα πολλαπλασιάζω με 10^3.

350 ΚΩ = 350 x 10^3 Ω = 350000 Ω

Π.χ.2: Μετατρέψτε τα 350 Ω σε ΚΩ
Λύση: για να πάω από ΚΩ σε Ω πρέπει να ανέβω την σκάλα άρα θα διαιρέσω. Η υψομετρική του ΚΩ με το Ω είναι 10^3. Άρα διαιρώ με 10^3(ή πολλαπλασιάζω με 10^{-3})

350 Ω = 350 x 10^{-3} Ω = 350 x 0,001 = 0,350 ΚΩ