Π α ν ε π ι σ τ ή μ ι ο Ι ω α ν ν ί ν ω ν 1/2025
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
Εξάμηνο Α, **Τμήμα Α**
Μάθημα: **Λογική Σχεδίαση**

Θέμα 1ο (3 μονάδες)
Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=232_{10}$, $\beta=144_{10}$, $\gamma=115_{10}$.
Α. Να γραφούν οι αριθμοί α, β, γ, σε δυαδική αναπαράσταση με 12 ψηφία και σε δεκαεξαδική αναπαράσταση με 3 ψηφία. Η μετατροπή να εξηγηθεί αναλυτικά μόνο για τον αριθμό α. (1 μονάδα)
Β. Να γραφούν οι αντίθετοί τους στο δυαδικό και στο δεκαεξαδικό σε μορφή συμπληρώματος του δύο και του δεκαέξι, διατηρώντας το μήκος λέξης των αριθμών σε κάθε περίπτωση, δηλαδή 12 δυαδικά ψηφία και 3 δεκαεξαδικά ψηφία. (1 μονάδα)
Γ. Να γίνουν αναλυτικά οι πράξεις α + β και β – γ στο δυαδικό και στο δεκαεξαδικό σύστημα χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του πρώτου ερωτήματος. Η διαφορά (β - γ) να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τα συμπληρώματα ως προς τις αντίστοιχες βάσεις από το ερώτημα Β. (1 μονάδα)

Θέμα 2ο (2.5 μονάδες)
Βρείτε τον πίνακα αληθείας των συναρτήσεων ***f, g*** και εκφράστε κάθε συνάρτηση ως άθροισμα ελαχιστόρων και ως γινόμενο μεγιστόρων:

$f(x, y, z) = xy+y'z'+xy'z'$ (1 μονάδα)

$g(a, b, c, d) = (cd + b'c + bd')(b + d)$ (1 μονάδα)

Να υπολογιστεί η τιμή της λογικής παράστασης:

$[f(0,0,0)+f(0,1,0)]\cdot f(1,1,0)$ (0,5 μονάδα)

Θέμα 3ο (2 μονάδες)
Δίνεται η λογική συνάρτηση:

$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$

Α. Να απλοποιηθεί με χρήση του χάρτη Karnaugh. (1 μονάδα)
Β. Να σχεδιαστεί το λογικό της κύκλωμα με τον **μικρότερο δυνατό αριθμό πυλών NAND**. (1 μονάδα)

Θέμα 4ο (2.5 μονάδες)
Σχεδιάστε ένα συνδυαστικό κύκλωμα με τρεις εισόδους x, y, z και τρεις εξόδους A, B και C. Όταν η δυαδική είσοδος είναι 0, 1, 2, ή 3, η δυαδική έξοδος πρέπει να είναι μεγαλύτερη κατά ένα (1) από την είσοδο. Όταν η δυαδική είσοδος είναι 4, 5, 6, ή 7, η δυαδική έξοδος πρέπει να είναι μικρότερη κατά δύο (2) από την είσοδο. Το λογικό κύκλωμα να σχεδιαστεί με χρήση αποκωδικοποιητή.

Καλή Επιτυχία

Θέμα 1ο

Α Ερώτημα:

Μετατροπή του 232 από δεκαδικό σε δυαδικό:

Διά 2	Πηλίκο	Υπόλοιπο (Ψηφίο)	Θέση Bit #
(232)/2	116	0	0
(116)/2	58	0	1
(58)/2	29	0	2
(29)/2	14	1	3
(14)/2	7	0	4
(7)/2	3	1	5
(3)/2	1	1	6
(1)/2	0	1	7

$= (11101000)_2$

Με 12 ψηφία (με κόκκινο τα ψηφία που προσθέτω για να γίνει 12-ψήφιος ο αριθμός):

$(0000\ 1110\ 1000)_2$

Μετατροπή του $(232)_{10}$ = **$(0000\ 1110\ 1000)_2$** από δυαδικό σε δεκαεξαδικό:

0000	1110	1000
0	**E**	**8**

$= (0E8)_{16}$

Με τον ίδιο τρόπο:

$(144)_{10} = (0000\ 1001\ 0000)_2 = (090)_{16}$

$(115)_{10} = (0000\ 0111\ 0011)_2 = (073)_{16}$

Συνολικά:

Δεκαδικό	Δυαδικό	Δεκαεξαδικό
232	0000 1110 1000	0E8
144	0000 1001 0000	090
115	0000 0111 0011	073

Β Ερώτημα:

Αντίθετος του $(232)_{10}$ ως συμπλήρωμα του 2:

Ξεκινώ από δεξιά στον δυαδικό αριθμό, αφήνω ως έχουν τα ψηφία μέχρι και το πρώτο ‘1’ και μετά συμπληρώνω τα υπόλοιπα ψηφία. Για το $(232)_{10} = (0000\ 1110\ 1000)_2$ το πρώτο ‘1’ το συναντάμε στη θέση 3, άρα

$(0000\ 1110\ 1000)'_2 = (1111\ 0001\ 1000)_2$

Με τον ίδιο τρόπο, για τους $(144)_{10}$ και $(115)_{10}$ αντίστοιχα, είναι:

$(0000\ 1001\ 0000)'_2 = (1111\ 0111\ 0000)_2$

$(0000\ 0111\ 0011)'_2 = (1111\ 1000\ 1101)_2$

Αντίθετος του 232 ως συμπλήρωμα του 16:

Υπολογίζω το συμπλήρωμα ως προς 15, και προθέτω μια μονάδα:

	F(15)	F(15)	F(15)
-	0	E	8
	F(15)	1	7
Προσθέτω το 1		+	1
	F	1	8

Ή

Από τον αντίθετο του $(232)_{10}$ στο δυαδικό:

1111	0001	1000
F	**1**	**8**

Με τον ίδιο τρόπο:
Αντίθετος του $(144)_{10}$ ως συμπλήρωμα του 16, είναι:

		F(15)	**F(15)**	**F(15)**
	-	0	9	0
		F(15)	6	F(15)
Προσθέτω το 1			+	1
		F	7	0

ή
Από τον αντίθετο του $(144)_{10}$ στο δυαδικό:

1111	0111	0000
F	**7**	**0**

Αντίθετος του $(115)_{10}$ ως συμπλήρωμα του 16, είναι:

		F(15)	**F(15)**	**F(15)**
	-	0	7	3
		F(15)	8	C(12)
Προσθέτω το 1			+	1
		F	8	D(13)

ή
Από τον αντίθετο του $(115)_{10}$ στο δυαδικό:

1111	1000	1101
F	**8**	**D(13)**

Συνολικά, τα συμπληρώματα είναι:

Δεκαδικός	Αντίθετος Δυαδικός (12 ψηφία)	Αντίθετος Δεκαεξαδικός (3 ψηφία)
232	1111 0001 1000	F18
144	1111 0111 0000	F70
115	1111 1000 1101	F8D

Γ Ερώτημα:
$\alpha + \beta = (232)_{10} + (144)_{10} = (376)_{10}$
Δυαδική πρόσθεση:

				1									**Κρατούμενα**
	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	$(232)_{10}$
+	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	$(144)_{10}$
	0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	$\mathbf{(376)_{10}}$

Δυαδική αφαίρεση (με χρήση συμπληρώματος του 2):
$\beta - \gamma = (144)_{10} - (115)_{10} = (29)_{10}$

	1	**1**	**1**	**1**									**Κρατούμενα**
	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	$(144)_{10}$
+	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	Συμπλήρωμα του 2 $(115)_{10}$
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	$\mathbf{(29)_{10}}$

Προσοχή, έχουμε κρατούμενο, άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό. Αγνοούμε το κρατούμενο και προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα. Δηλαδή, $(0000\ 0001\ 1101)_2 = (29)_{10}$.

Δεκαεξαδική πρόσθεση:

	1			**Κρατούμενα**
	0	E(14)	8	$(232)_{10}$
+	0	9	0	$(144)_{10}$
	1	7	8	$(376)_{10}$

Δεκαεξαδική αφαίρεση (με χρήση συμπληρώματος του 16):

1	**1**			**Κρατούμενα**
	0	9	0	$(144)_{10}$
+	F(15)	8	D	(Συμπλήρωμα του 2 $(115)_{10}$
1	0	1	D	$(29)_{10}$

Προσοχή, έχουμε κρατούμενο, άρα το αποτέλεσμα είναι θετικό. Αγνοούμε το κρατούμενο και προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα. Δηλαδή, $(01D)_{16} = (29)_{10}$.

Θέμα 2ο

f(x, y , z) = xy+y'z+xy'z'

m_i / M_i	x	y	z	xy	y'z'	xy'z'	f
0	0	0	0	**0**	**1**	**0**	**1**
1	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**
2	0	1	0	**0**	**0**	**0**	**0**
3	0	1	1	**0**	**0**	**0**	**0**
4	1	0	0	**0**	**1**	**1**	**1**
5	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**
6	1	1	0	**1**	**0**	**0**	**1**
7	1	1	1	**1**	**0**	**0**	**1**

Με βάση τον πίνακα αληθείας έχουμε:

- Ελαχιστόροι: ***f(x, y, z) = Σ (0, 4, 6, 7)***
- Μεγιστόροι: ***f(x, y, z) = Π (1, 2, 3, 5)***

g((a, b , c, d) = (cd + b'c + bd')(b + d)

m_i / M_i	a	b	c	d	cd	b'c	bd'	cd + b'c + bd'	b + d	g
0	0	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	0	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
2	0	0	1	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
3	0	0	1	1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
4	0	1	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
5	0	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
6	0	1	1	0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
7	0	1	1	1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**
8	1	0	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
9	1	0	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
10	1	0	1	0	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**

11	1	0	1	1	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
12	1	1	0	0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
13	1	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**
14	1	1	1	0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
15	1	1	1	1	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

Με βάση τον πίνακα αληθείας έχουμε:

- Ελαχιστόροι: g***(a, b, c, d) = Σ (3, 4, 6, 7, 11, 12, 14, 15)***
- Μεγιστόροι: g***(a, b, c, d) = Π (0, 1, 2, 5, 8, 9, 10, 13)***

Με βάση τον πίνακα αληθείας της f:

$[f(0,0,0)+f(0,1,0)]\cdot f(1,1,0) = [f(m_0)+f(m_2)]f(m_6)=[1+0]1 = 1$

Θέμα 3ο

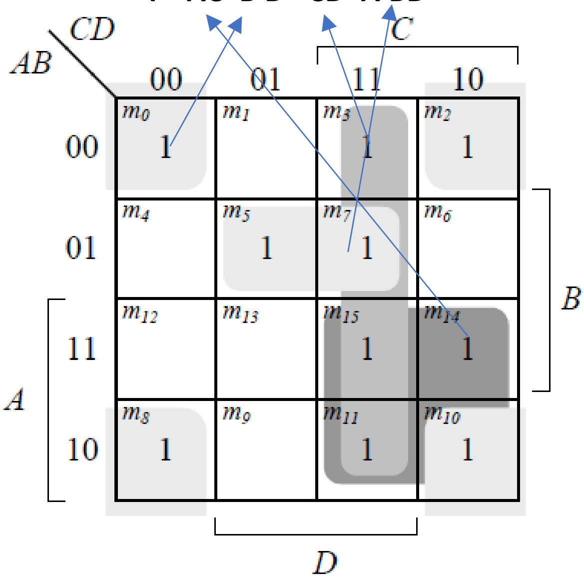
Α Ερώτημα:

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

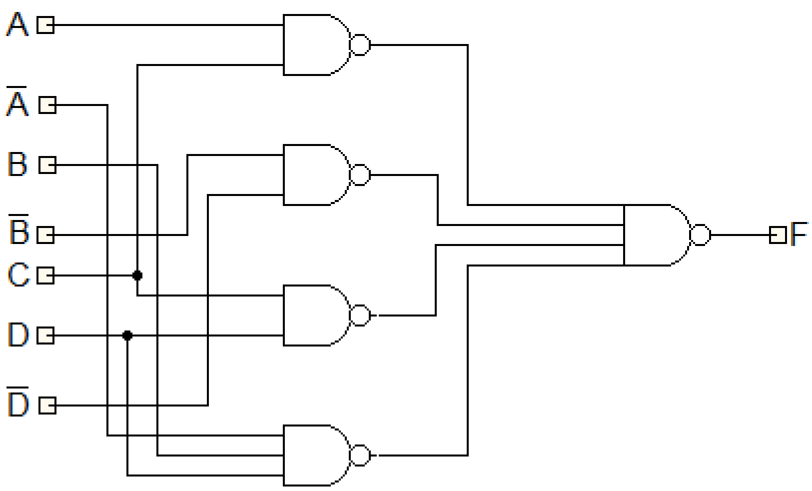
$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 14, 15)$$

Τοποθετούμε στον χάρτη *Karnaugh* το λογικό 1, στους ελαχιστόρους που δείχνει η παραπάνω συνάρτηση. Στη συνέχεια, εντοπίζουμε τις μεγαλύτερες δυνατές ομάδες (2, 4, 6, 8, 16) λογικών 1 ή αλλιώς τους θεμελιώδεις και απλούς πρωτεύοντες όρους, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Εξάγουμε την απλοποιημένη μορφή του όρου που προκύπτει από κάθε ομάδα. Τέλος, αθροίζουμε τους όρους και σχηματίζουμε την απλοποιημένη συνάρτηση που δίνεται παρακάτω:

F= AC+B'D'+CD+A’BD



Β Ερώτημα:



Θέμα 4ο

Α Ερώτημα:

Πίνακας Αληθείας του κυκλώματος:

m_i	x	y	z	A	B	C
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	1	0	0
4	1	0	0	0	1	0
5	1	0	1	0	1	1
6	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	1	0	1