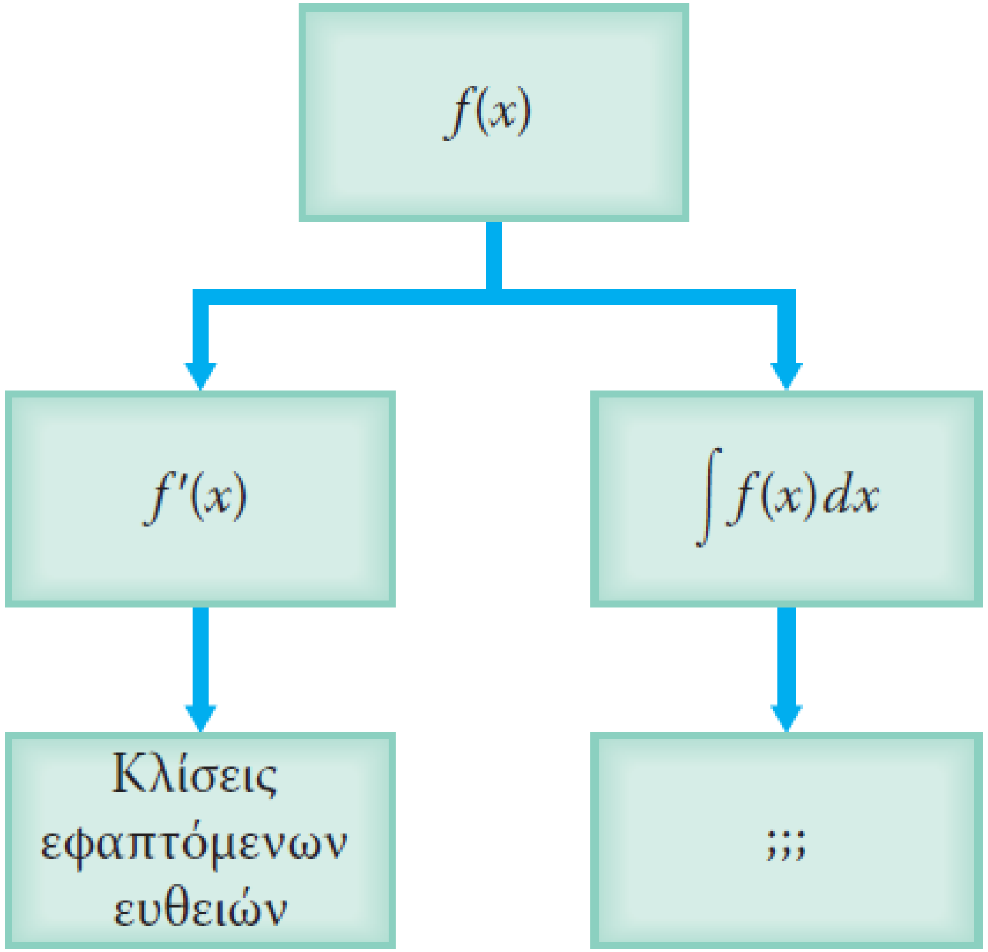
Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2024-2025

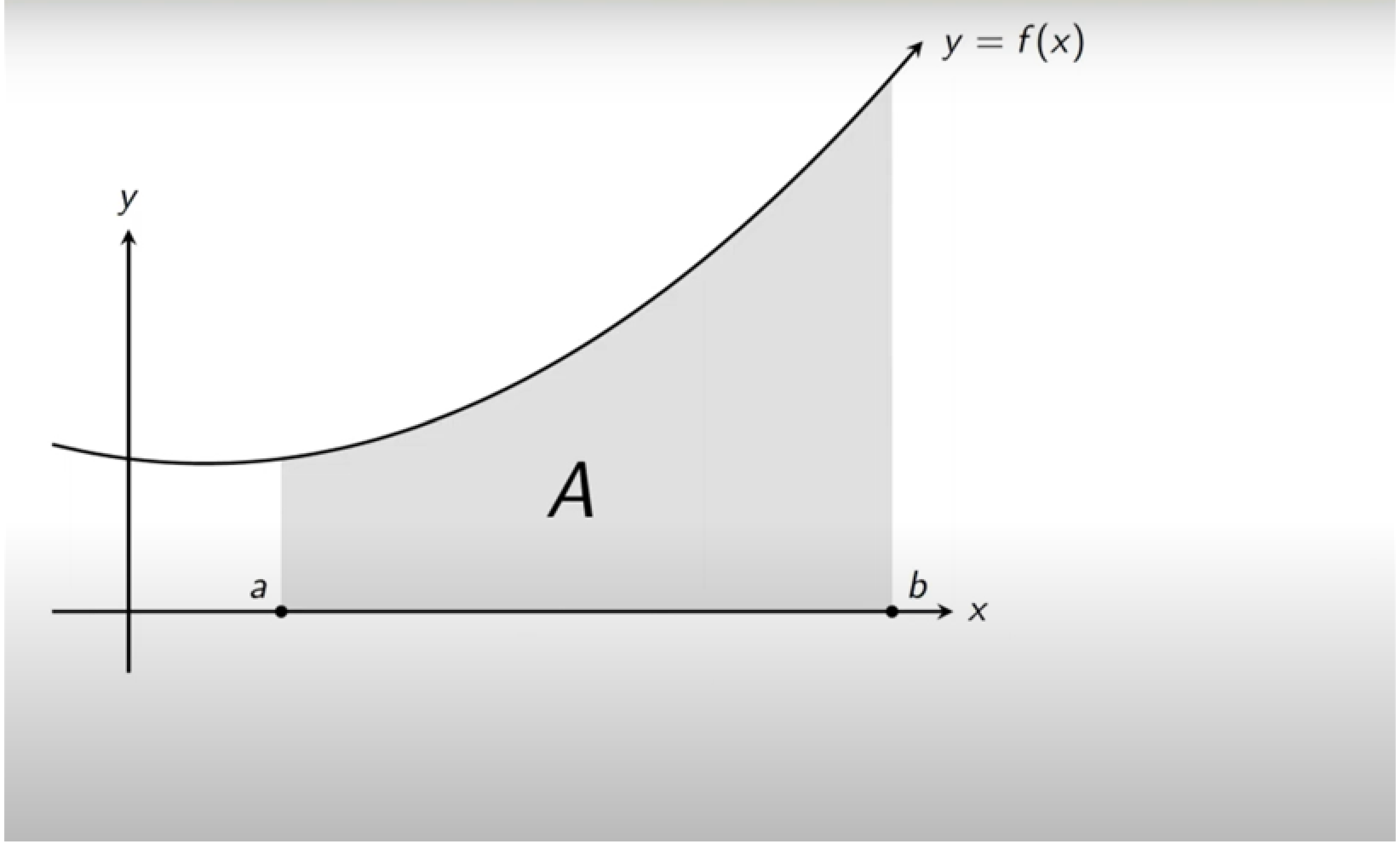
Ολοκληρωτικός λογισμός

Ορισμένο ολοκλήρωμα

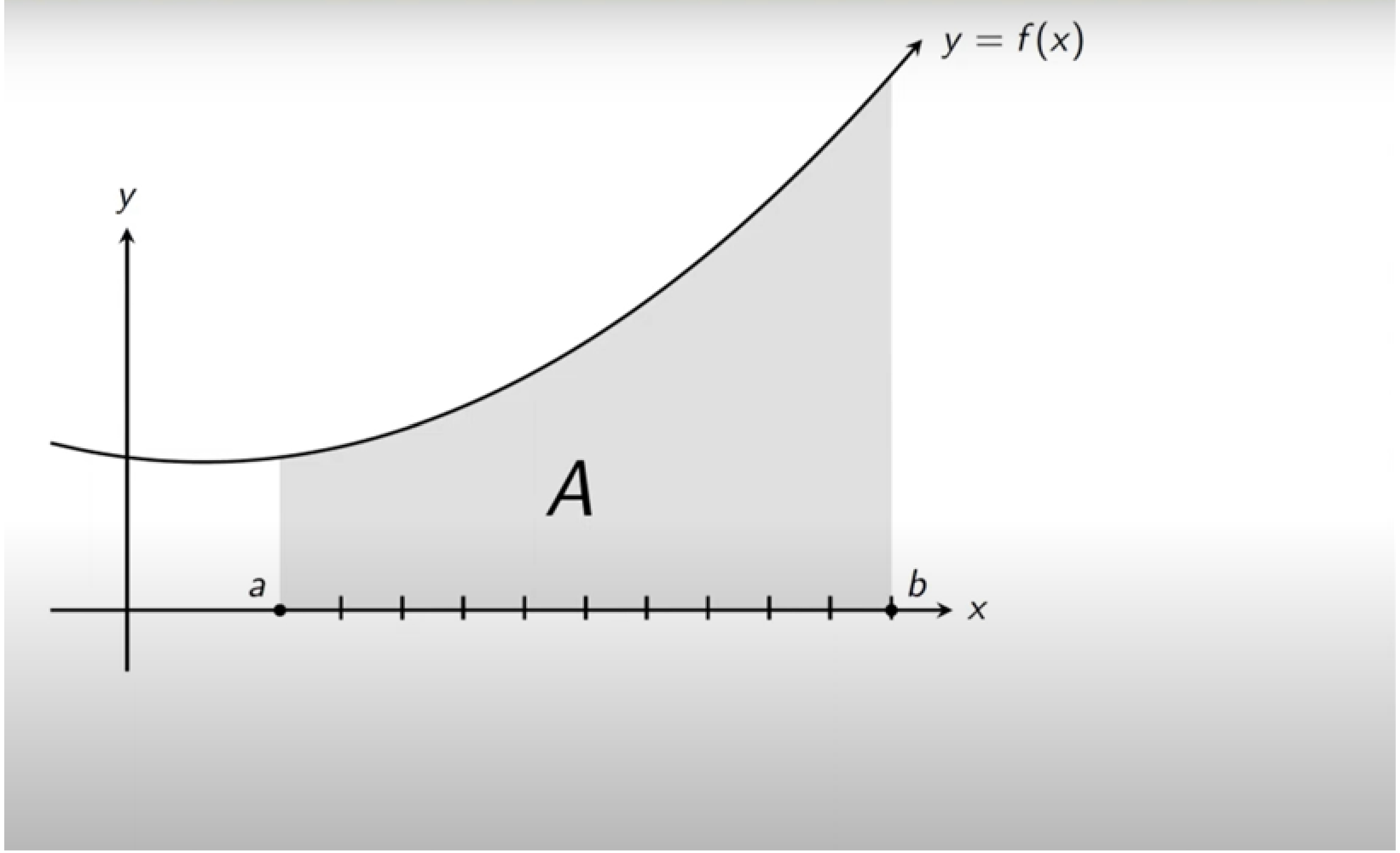
Γεωμετρική Ερμηνεία του Ολοκληρώματος?



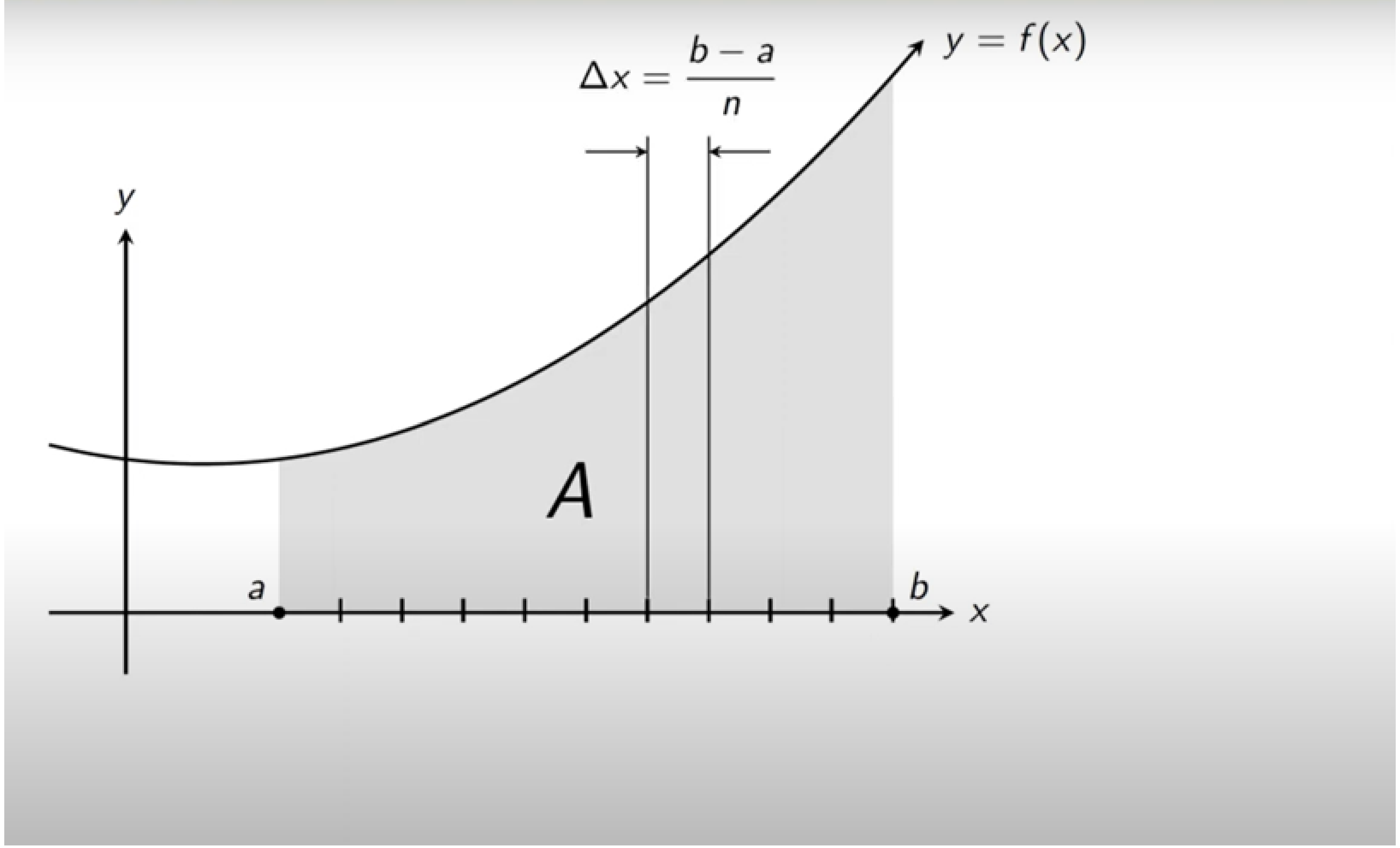
Εμβαδόν χωρίου



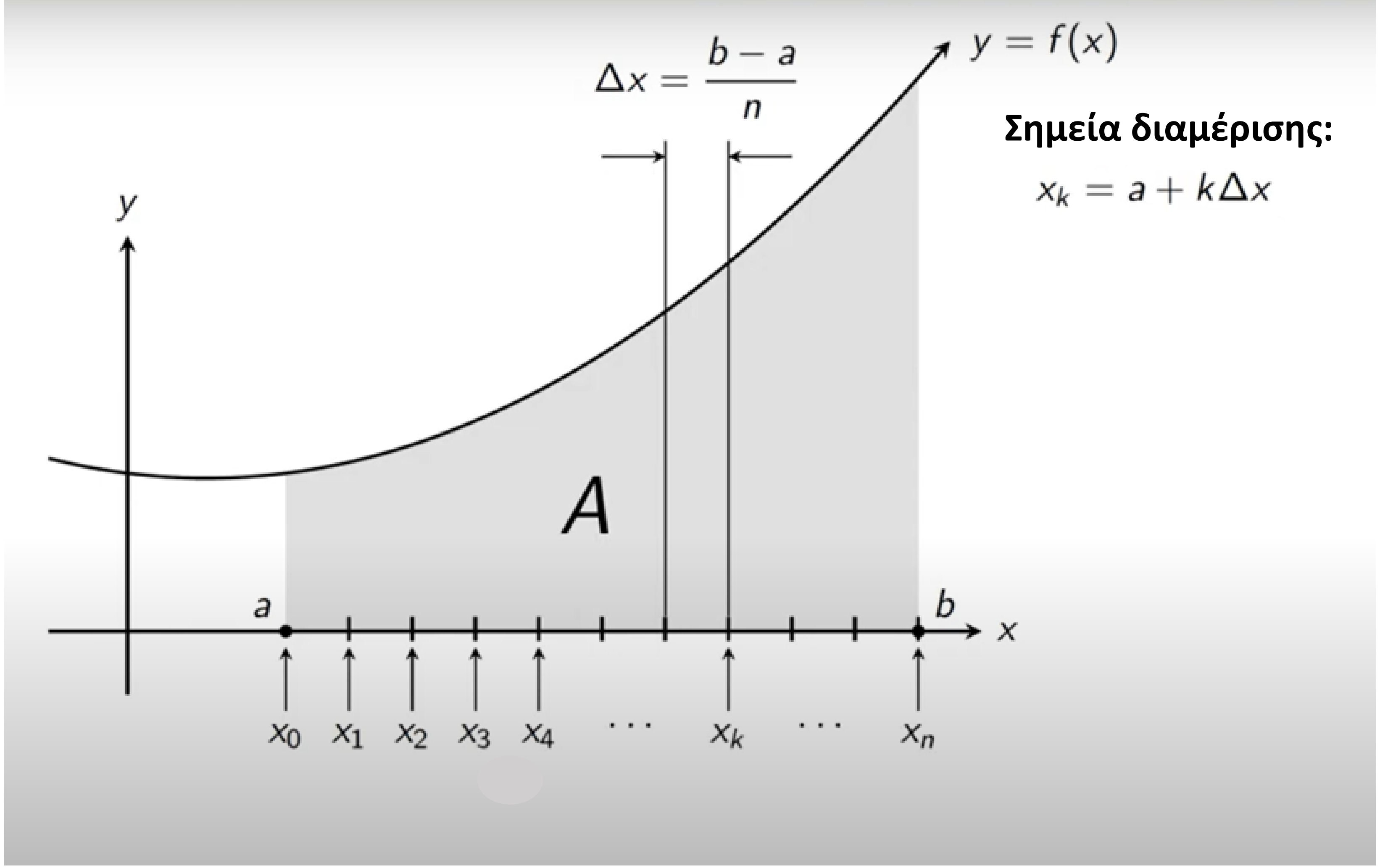
Εμβαδόν χωρίου



Εμβαδόν χωρίου



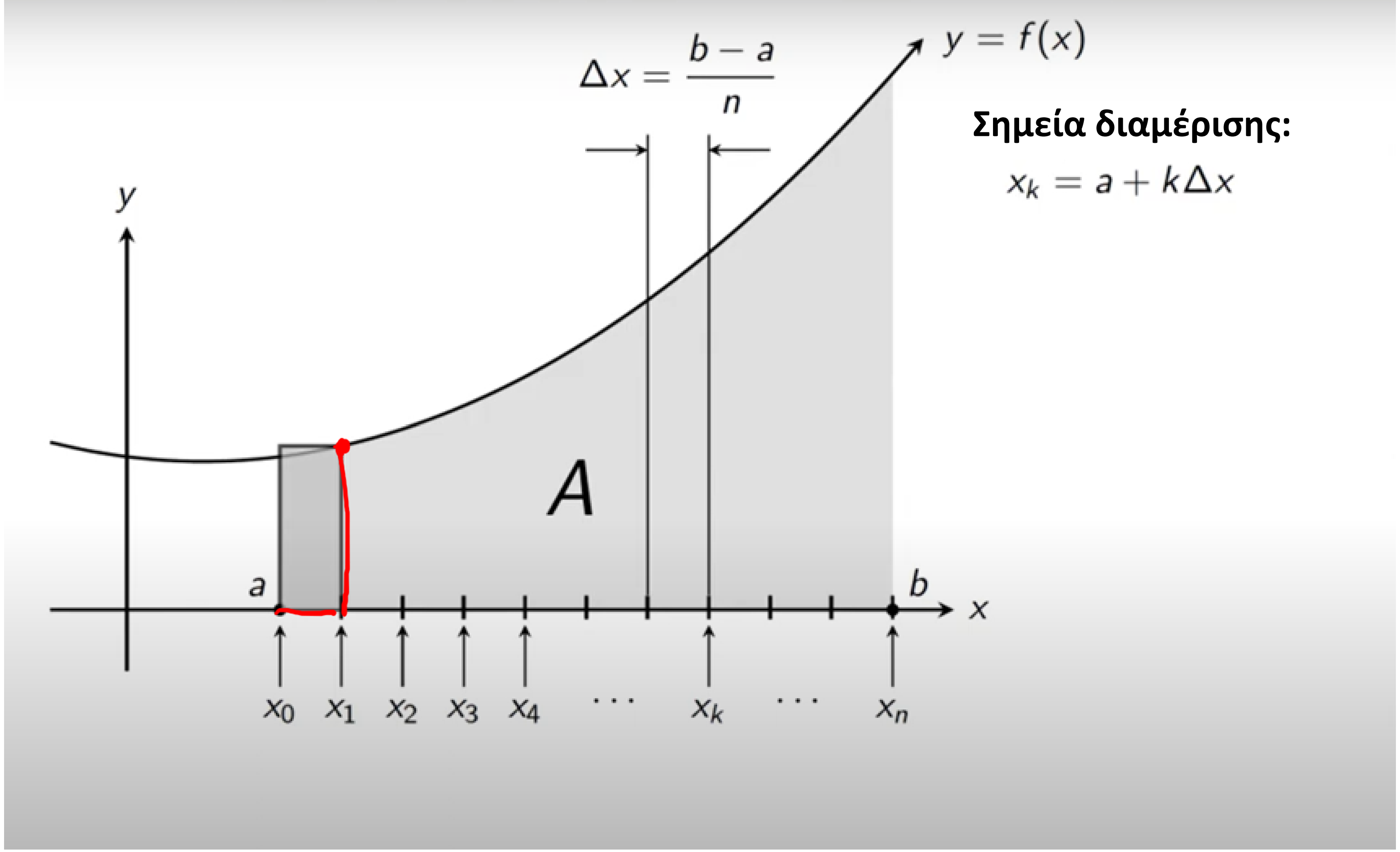
Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$$x_k = a + k\Delta x$$

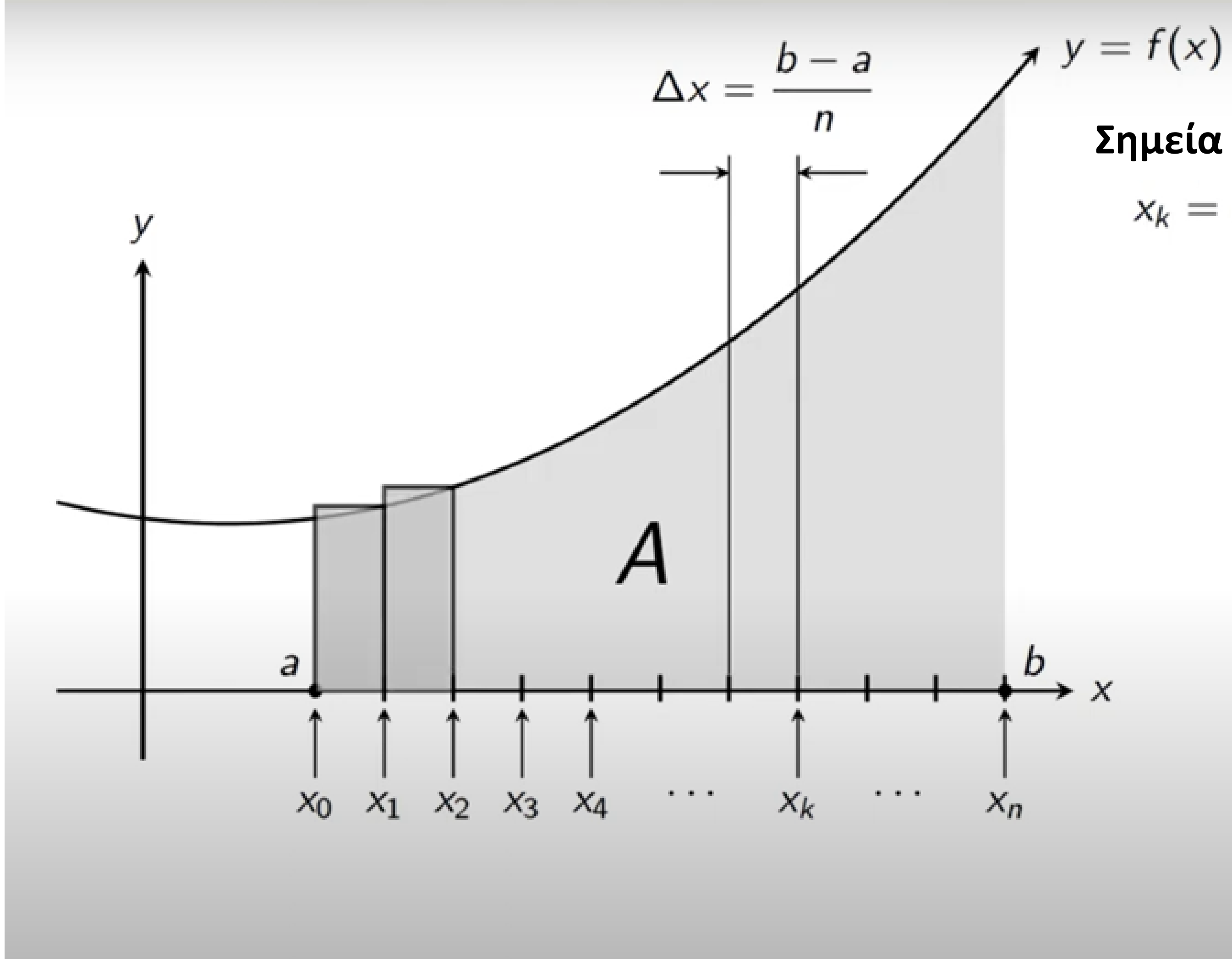
Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$$x_k = a + k\Delta x$$

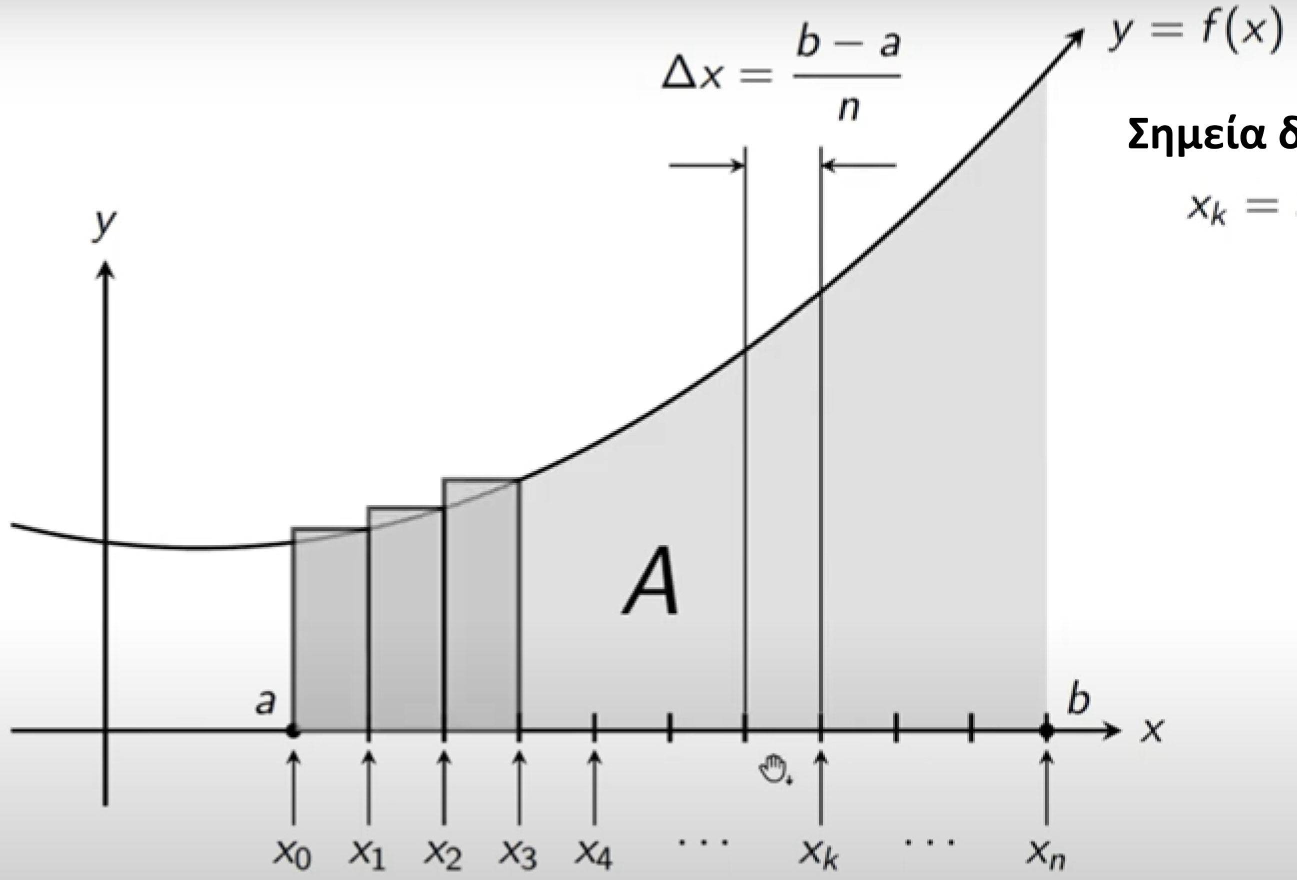
Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$x_k = a + k\Delta x$

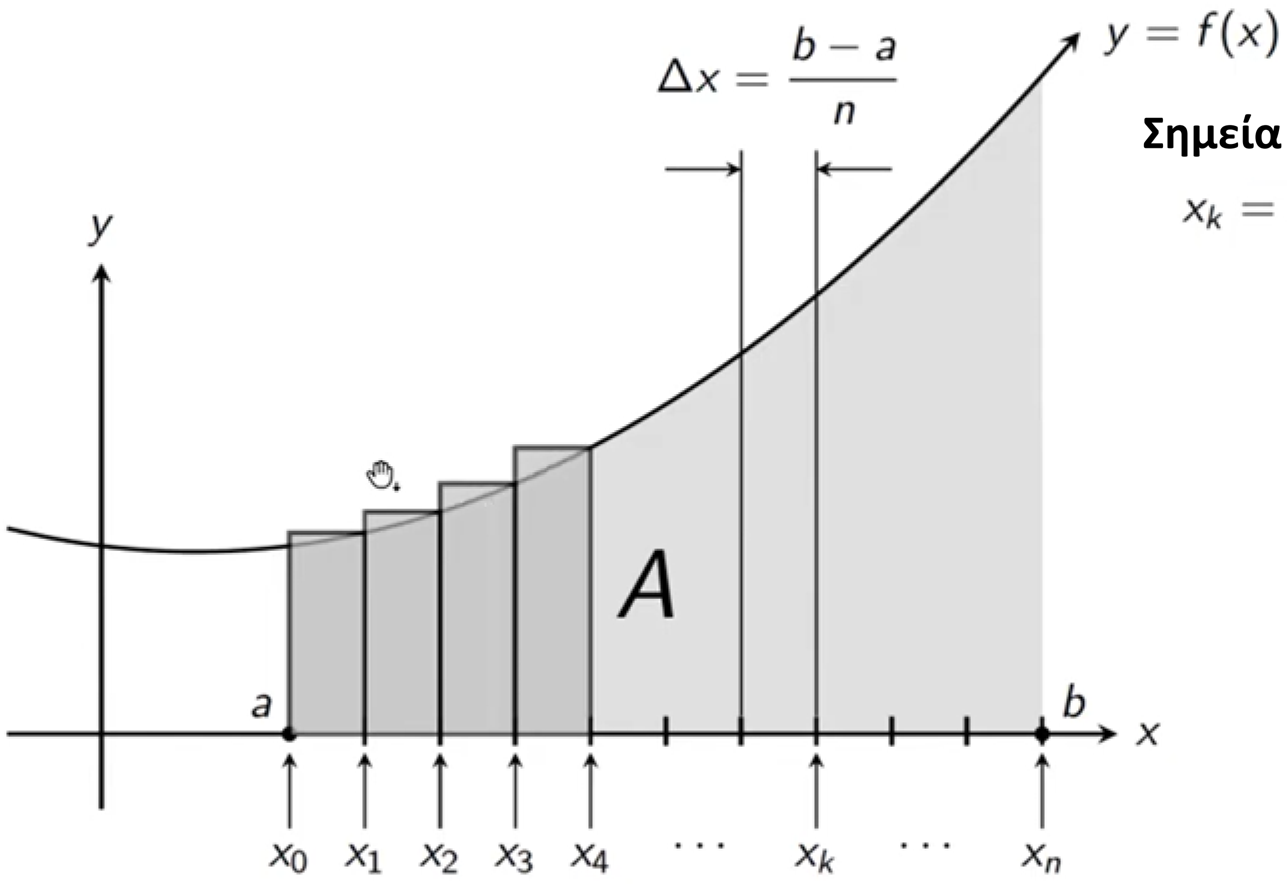
Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$$x_k = a + k\Delta x$$

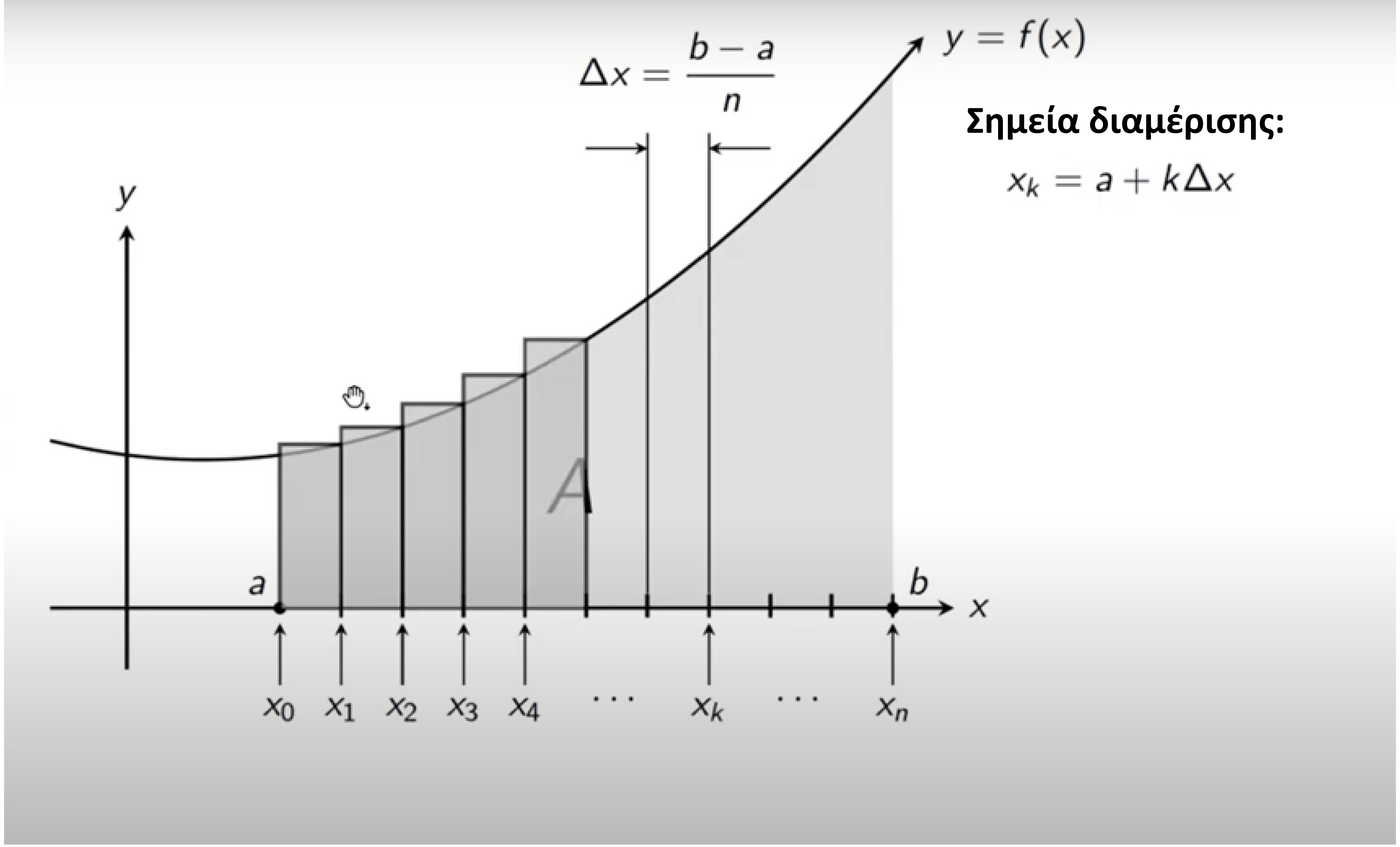
Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$$x_k = a + k\Delta x$$

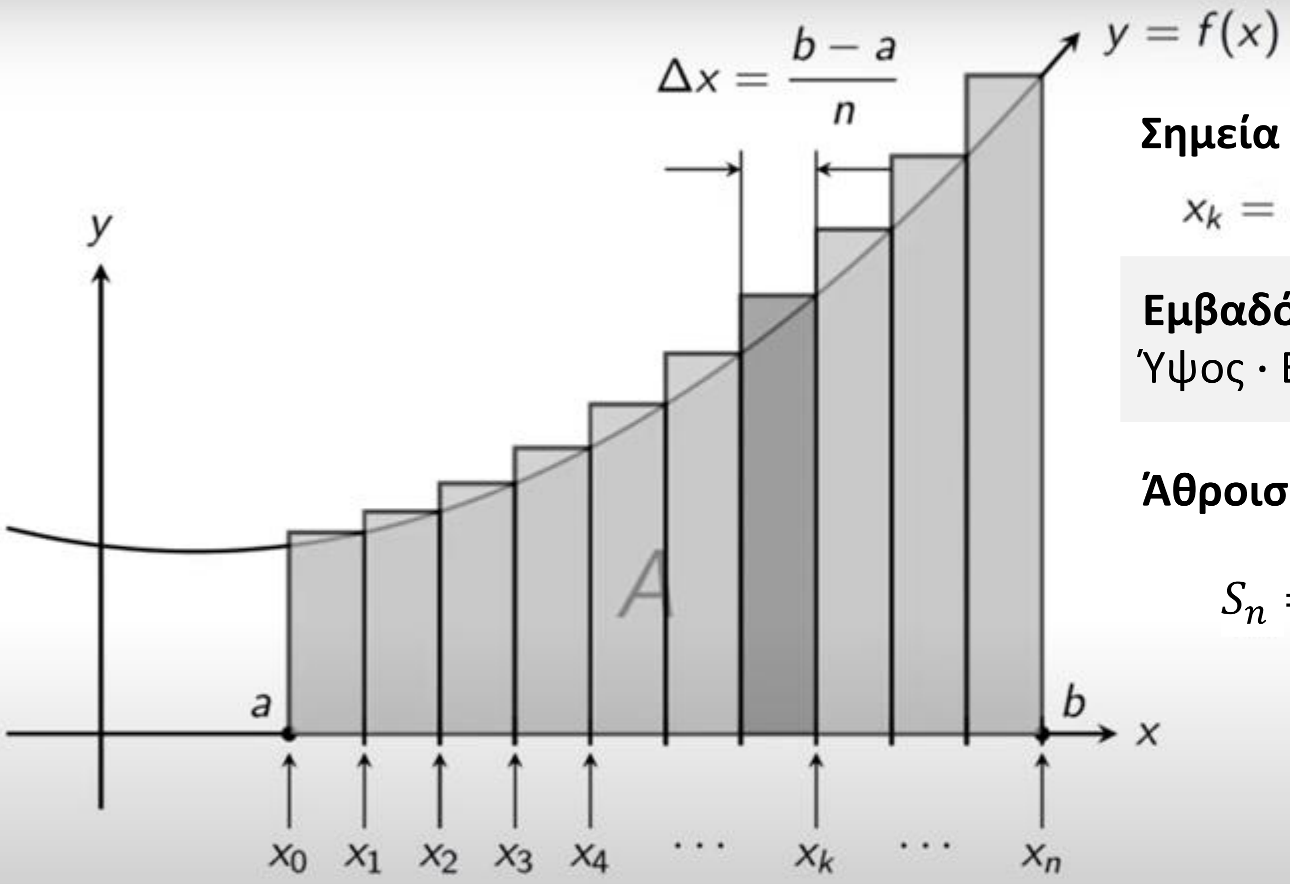
Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$$x_k = a + k\Delta x$$

Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$$x_k = a + k\Delta x$$

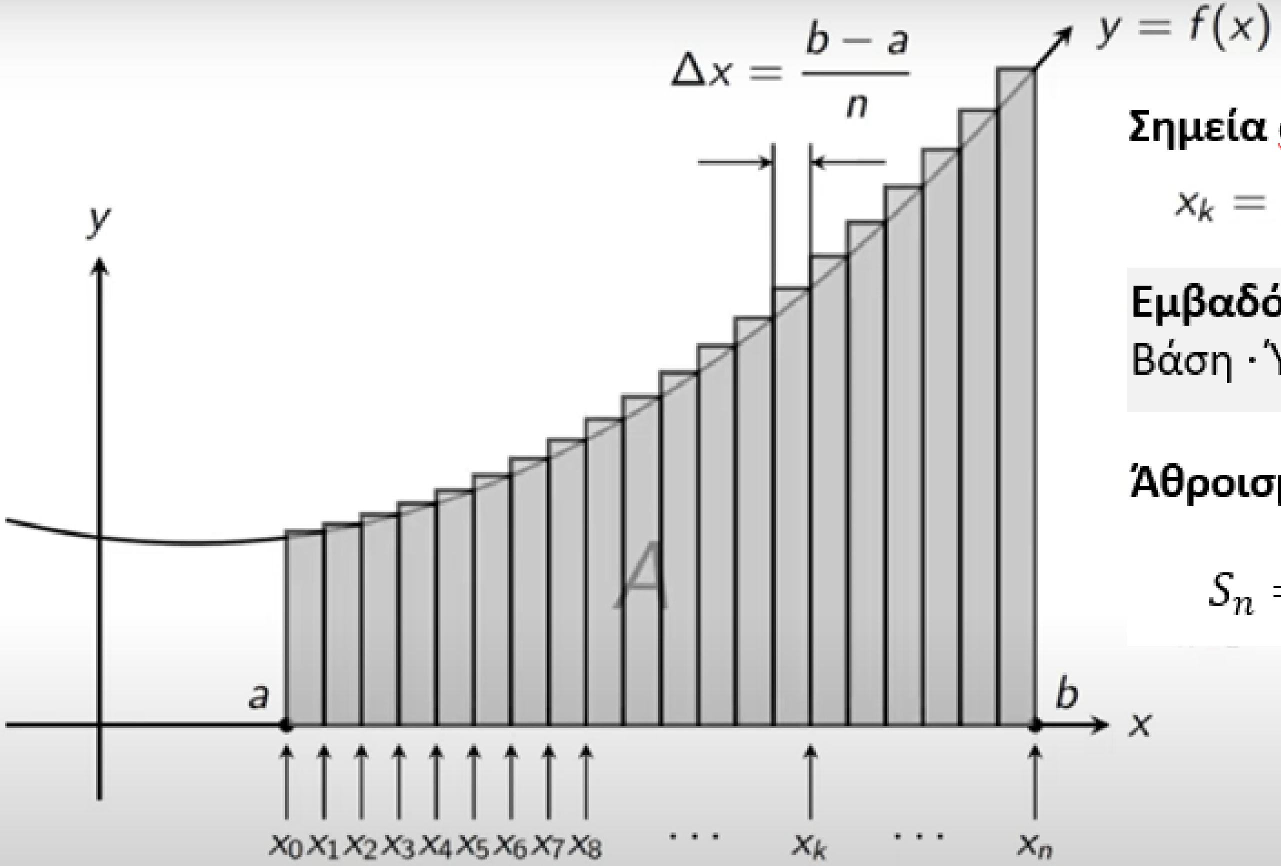
Εμβαδόν ορθογωνίου #k:

Ύψος · Βάση $= f(x_k)\Delta x$

Άθροισμα Ορθογωνίων:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

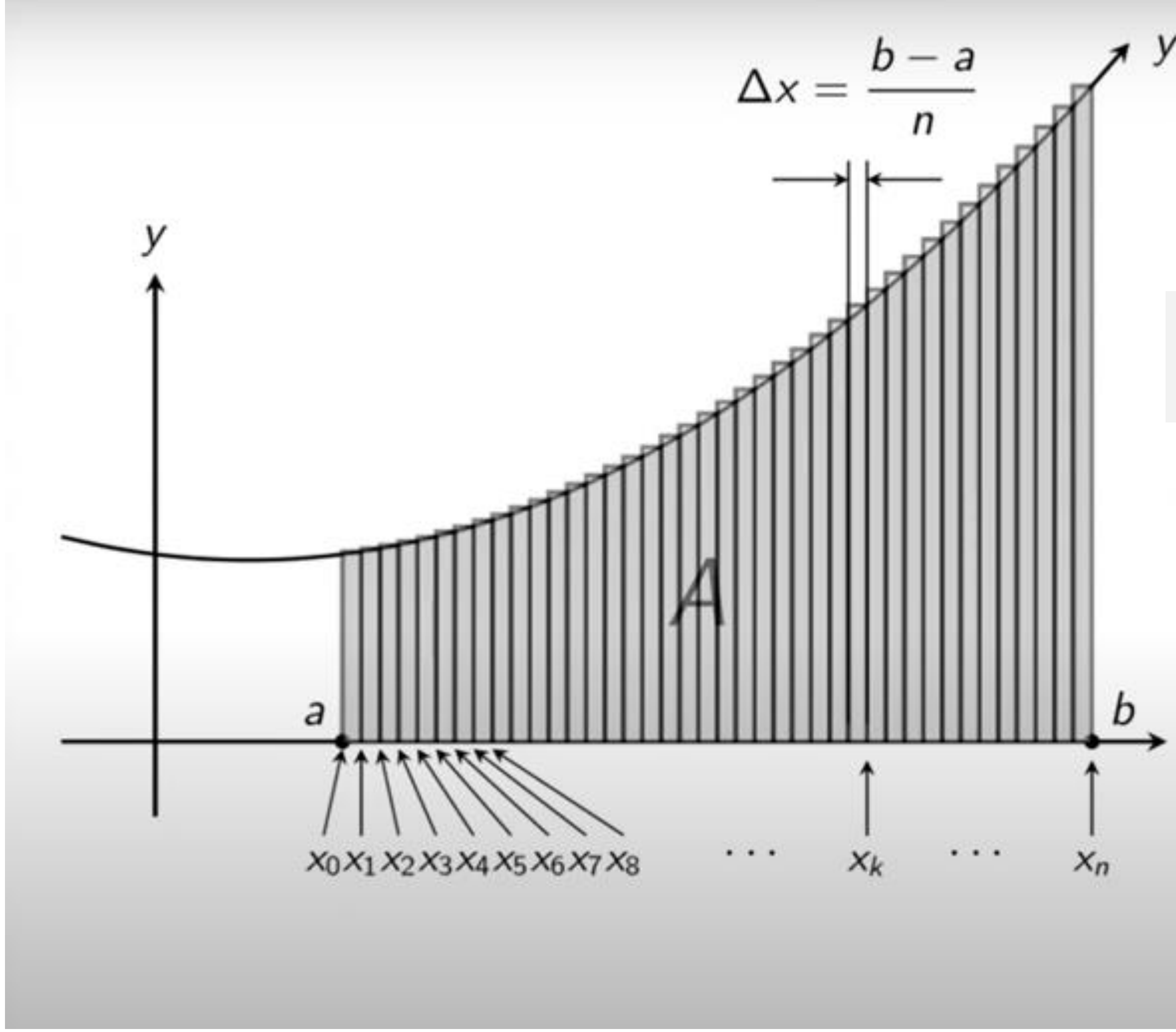
$x_k = a + k\Delta x$

Εμβαδόν ορθογωνίου #k:
Βάση ·Ύψος$= f(x_k)\Delta x$

Άθροισμα Ορθογωνίων:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

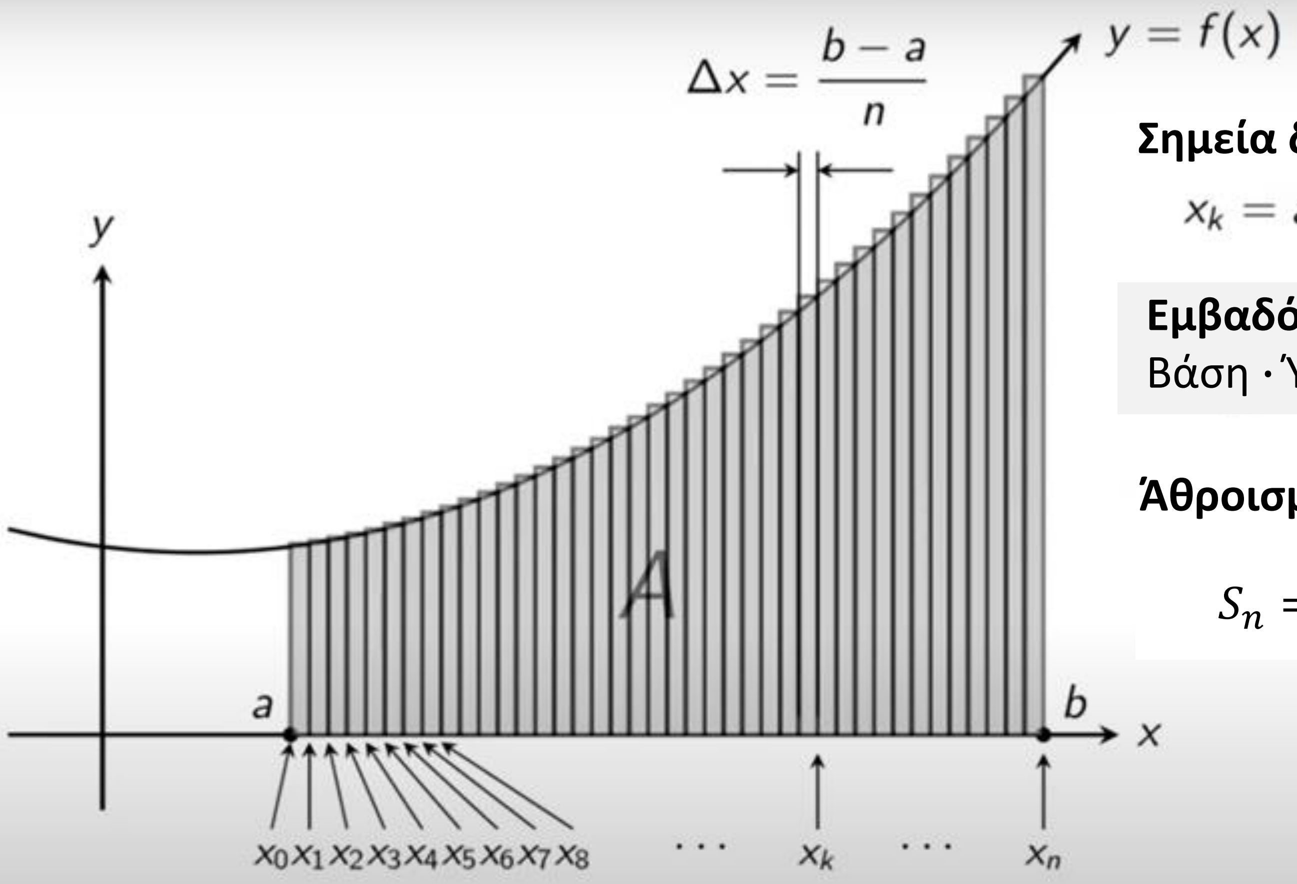
$$x_k = a + k\Delta x$$

Εμβαδόν ορθογωνίου #k:
Βάση ⋅ Ύψος $= f(x_k)\Delta x$

Άθροισμα Ορθογωνίων:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Εμβαδόν χωρίου



Σημεία διαμέρισης:

$x_k = a + k\Delta x$

Εμβαδόν ορθογωνίου #k:
Βάση ·Ύψος= $f(x_k)\Delta x$

Άθροισμα Ορθογωνίων:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

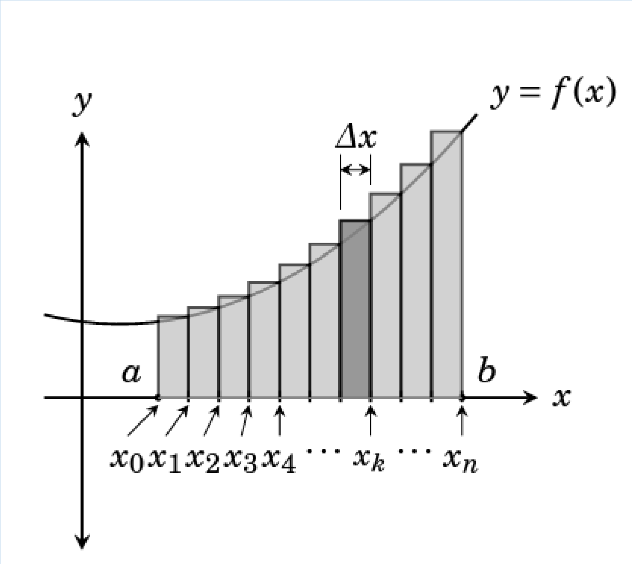
Εμβαδόν χωρίου

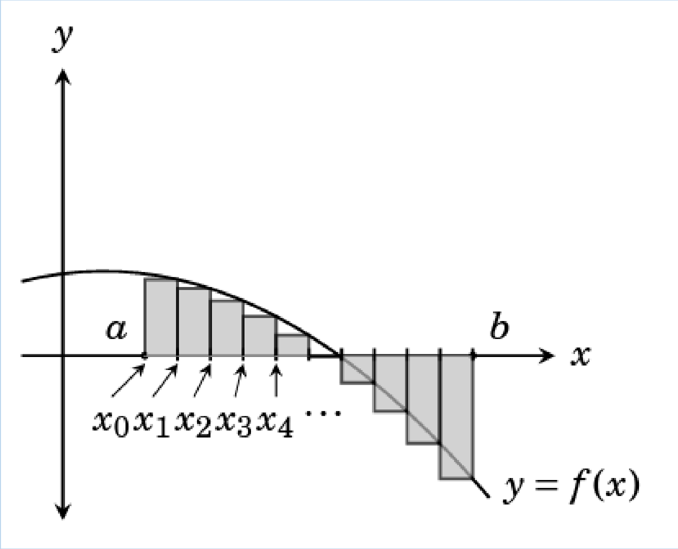
$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Αθροίσματα Riemann

Ορισμός: Έστω η $f(x)$ που ορίζεται στο $[a,b]$.

Έστω n ένας θετικός ακέραιος και έστω $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ και $x_k = a + k\Delta x$





Το $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x}$ ονομάζεται **άθροισμα Riemann**

Δεν είναι πάντα θετικό!

Αν $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$ τότε Εμβαδόν $= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

ΟΡΙΣΜΟΣ Άθροισμα Riemann

Ας υποθέσουμε ότι η f ορίζεται σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, το οποίο διαιρείται σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους Δx. Εάν x_k^* είναι οποιοδήποτε σημείο στο k-οστό υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, για $k = 1, 2, \ldots, n$, τότε το

$$f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της f στο $[a, b]$. Το άθροισμα αυτό ονομάζεται

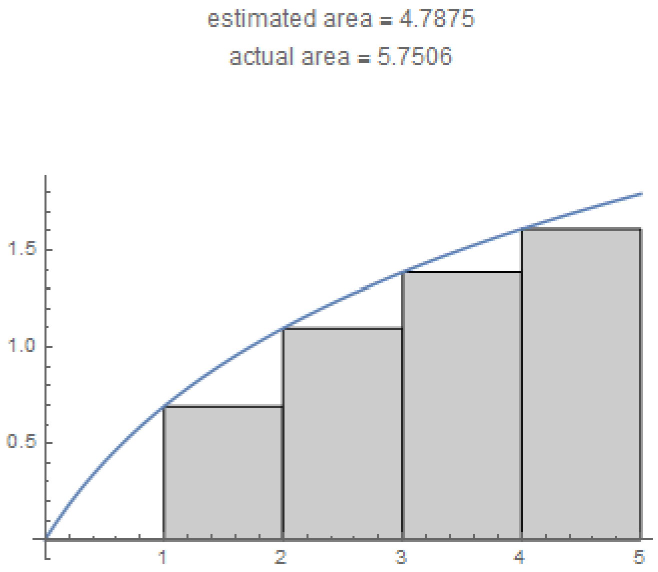
- **κάτω άθροισμα Riemann**, εάν το x_k^* είναι το αριστερό άκρο του $[x_{k-1}, x_k]$

- **άνω άθροισμα Riemann**, εάν το x_k^* είναι το δεξί άκρο του $[x_{k-1}, x_k]$

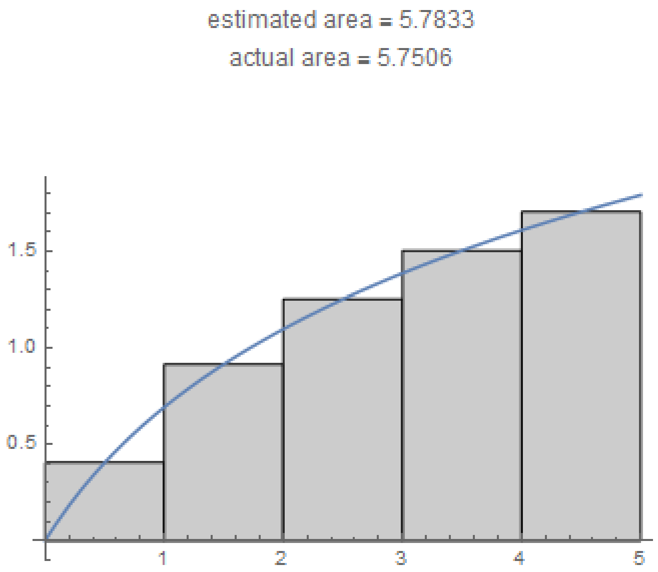
- **άθροισμα Riemann με κεντρικά σημεία**, εάν το x_k^* είναι το μέσο του $[x_{k-1}, x_k]$

  για $k = 1, 2, \ldots, n$.

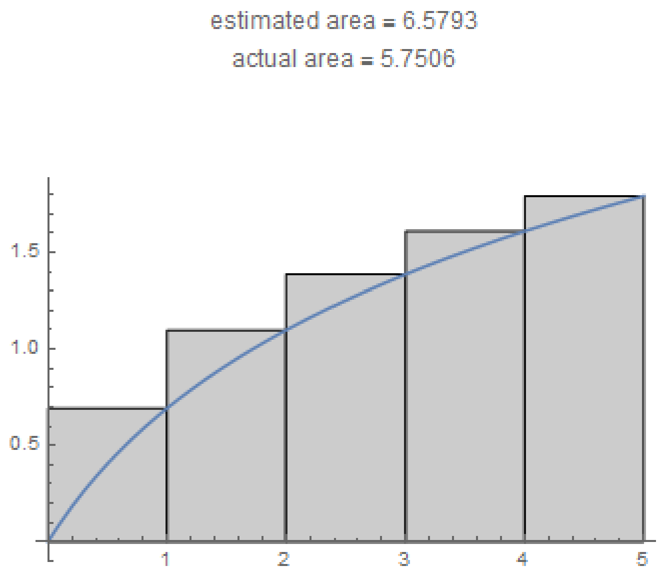
Προσέγγιση εμβαδών με αθροίσματα Riemann



το ύψος του κάθε ορθογωνίου ορίζεται από το **αριστερότερο** σημείο του κάθε διαστήματος



το ύψος του κάθε ορθογωνίου ορίζεται από το **μεσαίο** σημείο του κάθε διαστήματος



το ύψος του κάθε ορθογωνίου ορίζεται από το **δεξιότερο** σημείο του κάθε διαστήματος

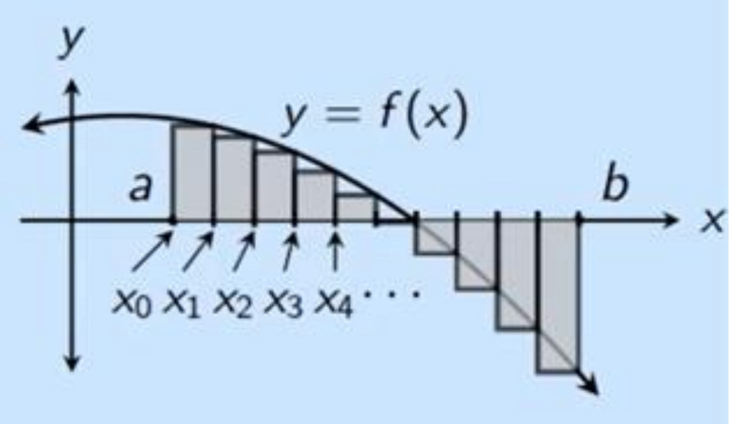
http://demonstrations.wolfram.com/RiemannSums/

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός. Έστω μια συνάρτηση f που ορίζεται στο $[a, b]$. Το **ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a στο b**, είναι ο αριθμός

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

όπου $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ και $x_k = a + k\Delta x$

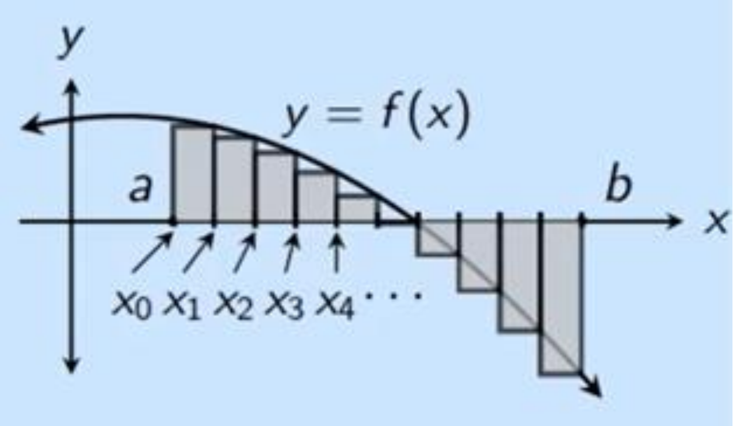


Ορισμένο Ολοκλήρωμα

Ορισμός. Έστω μια συνάρτηση f που ορίζεται στο $[a, b]$. Το **ορισμένο ολοκλήρωμα της f από το a στο b**, είναι ο αριθμός

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

όπου $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ και $x_k = a + k\Delta x$



Ορισμένο Ολοκλήρωμα

άνω όριο ολοκλήρωσης

άνω όριο αθροίσματος

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{ολοκληρωτέα}}\,dx = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

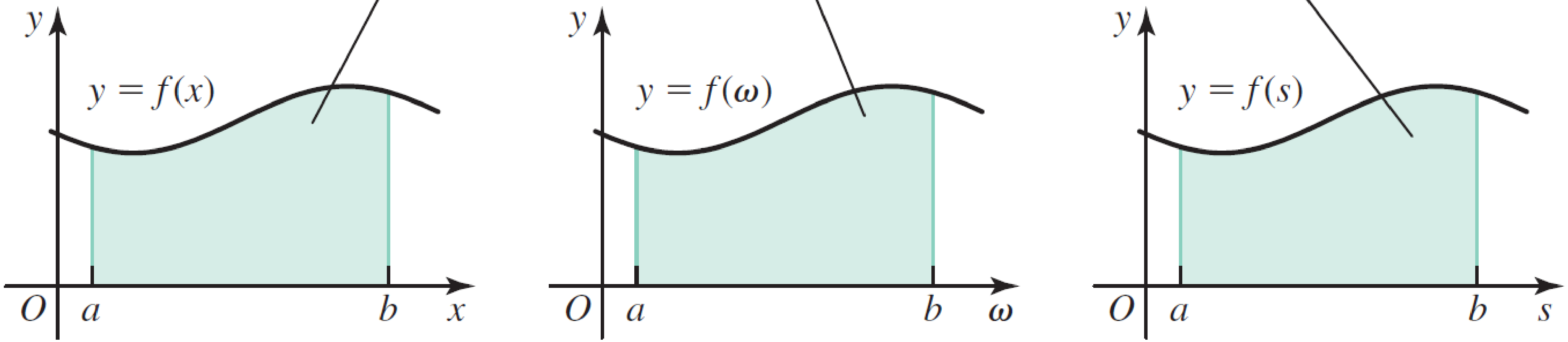
κάτω όριο ολοκλήρωσης

κάτω όριο αθροίσματος

Η x είναι η μεταβλητή της ολοκλήρωσης.

Μεταβλητή ολοκλήρωσης

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\omega)\,d\omega = \int_a^b f(s)\,ds$$



ΟΡΙΣΜΟΣ Καθαρό εμβαδόν

Θεωρούμε το εμβαδόν R που οριοθετείται από το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης f και του άξονα x μεταξύ $x = a$ και $x = b$. Το **καθαρό εμβαδόν** του R είναι το άθροισμα των εμβαδών των τμημάτων του R που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x *μείον* το άθροισμα των εμβαδών των τμημάτων του R που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x στο $[a, b]$.

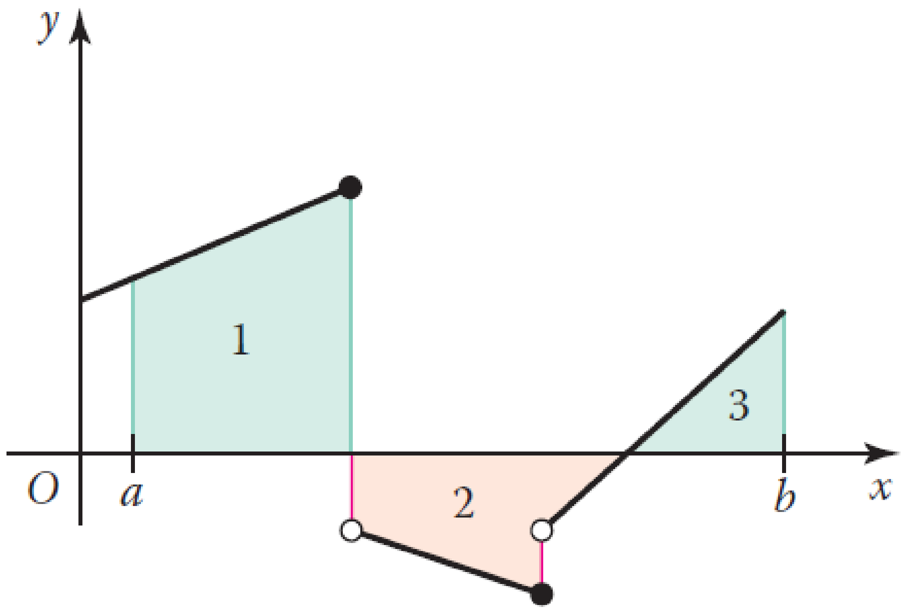
$$\text{Καθαρό εμβαδόν} = \int_a^b |f(x)|dx$$

Παράδειγμα

Καθαρό εμβαδόν $= \int_a^b f(x)\,dx$

$=$ εμβαδόν πάνω από τον άξονα x (Περιοχές 1 και 3)

$-$ εμβαδόν κάτω από τον άξονα x (Περιοχή 2)



Μια φραγμένη, κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη.

ΘΕΩΡΗΜΑ **Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις**

Εάν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ ή φραγμένη στο $[a, b]$ με έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος (1/3)

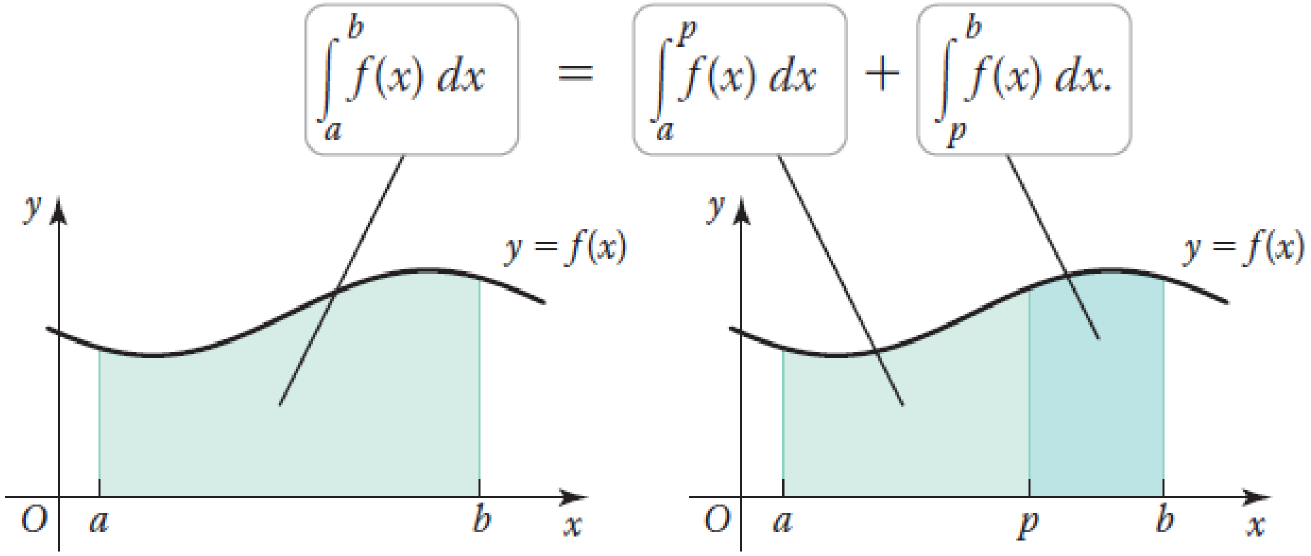
Έστω f, g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$,
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$,
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

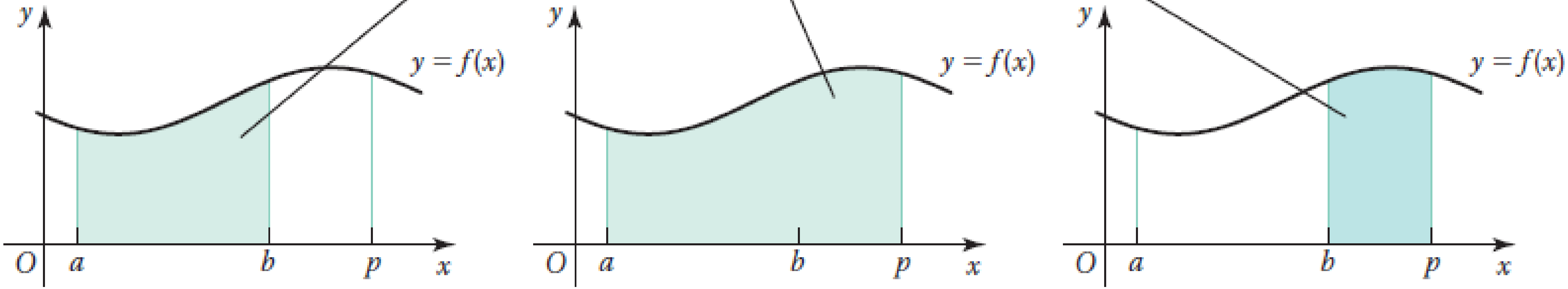
Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος (2/3)

5. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε διάστημα Δ και $a, b, p \in \Delta$ τότε ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^p f(x)dx + \int_p^b f(x)dx$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^p f(x)\,dx - \int_b^p f(x)\,dx.$$



Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος (3/3)

6. Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο διάστημα $[a, b]$, δηλ. $F'(x) = f(x)$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Η έκφραση $F(b) - F(a)$ συμβολίζεται και ως $[F(x)]_a^b$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> int((x+1)/sqrt(x),1,4)
ans = (sym) 20/3
```

$$\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx =$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_1^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 + \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4 =$$

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_1^4 + [2\sqrt{x}]_1^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right] + 2\left[\sqrt{4} - \sqrt{1}\right] = \cdots = \frac{20}{3}$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

I. $\int_1^3 x dx$

II. $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

III. $\int_1^2 \frac{x^2+x-1}{x} dx$

IV. $\int_1^e \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}} dx$

V. $\int_4^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$ VI. $\int_0^2 (3x-1)^3 dx$