Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2024-2025

Ολοκληρωτικός λογισμός

Αόριστο ολοκλήρωμα

Προβλήματα που η λύση απαιτεί αντίστροφη πορεία της παραγώγισης

- Εύρεση της θέσης $S(t)$ ενός κινητού τη χρονική στιγμή t αν είναι γνωστή η ταχύτητά του $v(t) = S'(t)$
- Εύρεση του πληθυσμού $N(t)$ βακτηριδίων τη χρονική στιγμή t αν είναι γνωστός ο ρυθμός αύξησης $N'(t)$ του πληθυσμού

κοινό χαρακτηριστικό: Δίνεται μια συνάρτηση f και ζητείται να βρεθεί μια άλλη συνάρτηση F για την οποία να ισχύει $F'(x) = f(x)$ σε ένα διάστημα Δ

Εισαγωγή

Δοθέντος μιας συνάρτησης f γνωρίζουμε πως βρίσκουμε την παράγωγό της

παραγώγιση

αντιπαραγώγιση
ολοκλήρωση

Στόχος: Δοθέντος $f'(x)$ να βρούμε την $f(x)$

Παράγουσα συνάρτηση (antiderivative)

Ορισμός:

Μια συνάρτηση F είναι μια **αντιπαράγωγος** της f αν $\boxed{F' = f}$

$$F(x) \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} f(x)$$

Αντιπαράγωγος της $f(x)$

Παράγωγος της $F(x)$

Παράγουσα συνάρτηση (antiderivative)

Ορισμός:

Μια συνάρτηση F είναι μια **αντιπαράγωγος** της f αν $\boxed{F' = f}$

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\text{παραγώγιση}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\text{ολοκλήρωση}"] \end{tikzcd}$$

<u>**Αντιπαράγωγος**</u> της $f(x)$

Παράγωγος της $F(x)$

Παράδειγμα 1

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = 2x$

Παράδειγμα 1

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = 2x$

Λύση:

$$? \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} 2x$$

$F(x) = x^2$

$F(x) = x^2 + 1$

$F(x) = x^2 + 5$

κοκ

Παράδειγμα 1

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = 2x$

Λύση:

$$F(x) = x^2 + C \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} 2x$$

$F(x) = x^2$

$F(x) = x^2 + 1$

$F(x) = x^2 + 5$

κοκ

Παράδειγμα 2

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = x^2 + 5\cos(x)$

Λύση:

$$? \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} x^2 + 5\cos(x)$$

Παράδειγμα 2

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = x^2 + 5\cos(x)$

Λύση:

$$F(x) = \quad x^3 \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} x^2+5\cos(x)$$

Παράδειγμα 2

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = x^2 + 5\cos(x)$

Λύση:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} x^2 + 5\cos(x)$$

Παράδειγμα 2

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = x^2 + 5\cos(x)$

Λύση:

$$\underbrace{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5\sin(x)}_{} \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} x^2 + 5\cos(x)$$

Παράδειγμα 2

Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $f(x) = x^2 + 5\cos(x)$

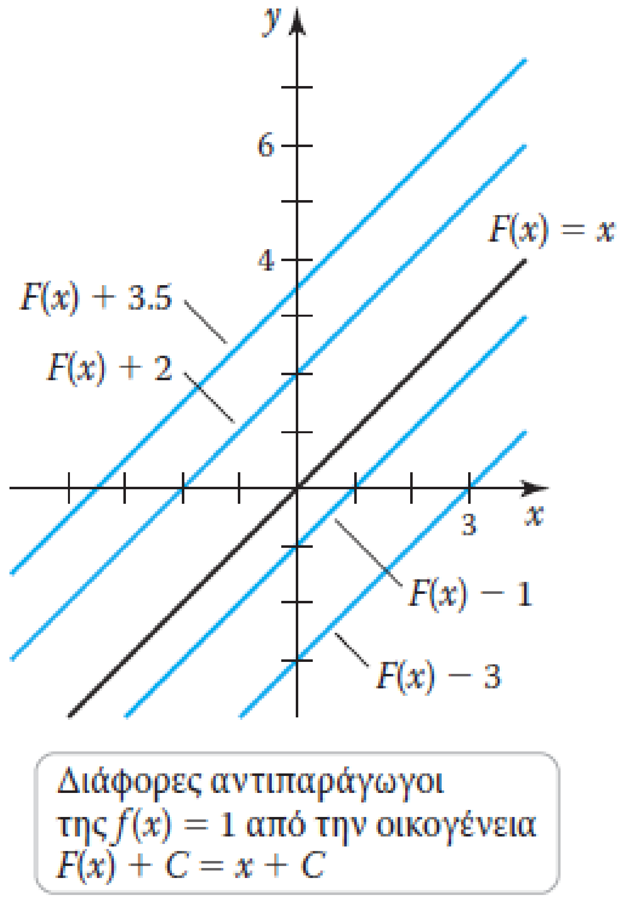
Λύση:

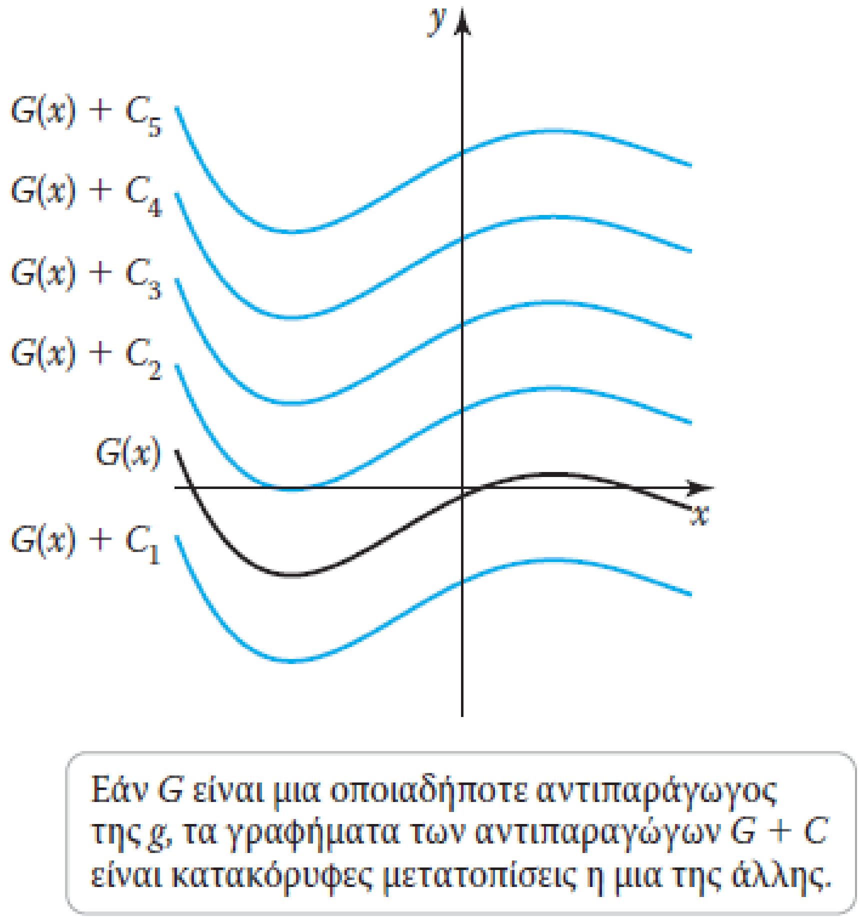
$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5\sin(x) + C \xrightarrow{\text{παραγώγιση}} x^2 + 5\cos(x)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.15 **Η οικογένεια των αντιπαραγώγων**

Έστω ότι η F είναι μια αντιπαράγωγος της f σε ένα διάστημα I. Τότε *όλες* οι αντιπαράγωγοι της f στο I έχουν τη μορφή $F + C$, όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Οι αντιπαράγωγοι είναι κατακόρυφες μετατοπίσεις η μια της άλλης





Αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral)

Ορισμός:

Αν $(F(x)+c)' = f(x)$, τότε η $F(x)+C$ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα της $\boldsymbol{f}$**

Συμβολισμός:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Παράδειγμα:

$$\int 2\,x\,dx = x^2 + c$$

$$\int (x^2 + 5\cos(x))dx = \frac{1}{3}x^3 + 5\sin(x) + C$$

Αόριστο ολοκλήρωμα (indefinite integral)

Η διαδικασία εύρεσης του αόριστου ολοκληρώματος είναι αντίστροφη πορεία της παραγώγισης και λέγεται **ολοκλήρωση**. Η δε σταθερά c λέγεται **σταθερά ολοκλήρωσης**

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Πίνακας αορίστων ολοκληρωμάτων

1.	$\int 0\,dx = c$	6.	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
2.	$\int 1\,dx = x + c$	7.	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$
3.	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x \rvert + c$	8.	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$
4.	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$	9.	$\int e^x dx = e^x + c$
5.	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$	10.	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$

Εύρεση αντιπαραγώγων συνάρτησης

Η εύρεση των αντιπαραγώγων μιας συνάρτησης f είναι **αντίστροφη** από τη διαδικασία παραγώγισης και συνεπώς πρέπει να γνωρίζουμε καλά τους κανόνες παραγώγισης

Συνάρτηση	**Παράγουσες ($c \in \mathbb{R}$)**
$h(x) = f'(x) + g'(x)$	$H(x) = f(x) + g(x) + c$
$h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	$H(x) = f(x)g(x) + c$
$h(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} + c$
$h(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$	$H(x) = f\big(g(x)\big) + c$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι παράγουσες της συνάρτησης $h(x) = e^x + xe^x$

Ισχύει ότι $h(x) = e^x + xe^x = 1e^x + xe^x = (x')e^x + x(e^x)' = (xe^x)'$

Άρα παράγουσες της συνάρτησης $h(x) = e^x + xe^x$ είναι οι συναρτήσεις

$$H(x) = xe^x + c, c \in \mathbb{R}$$

Ιδιότητες

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σε ένα διάστημα Δ τότε

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων με βάση τον πίνακα των γνωστών αορίστων ολοκληρωμάτων και τις ιδιότητες των ολοκληρωμάτων

- $\int 4x^2dx = 4\int x^2dx = 4\frac{x^3}{3} + c$
- $\int (3\sin x - 2e^x)dx =$

$$= \int 3\sin x\, dx - \int 2e^x dx$$

$$= -3\cos x - 2e^x + c$$

Άσκηση 1

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int (2\sqrt{x} + cosx - e^{x})dx$$

Άσκηση 1

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int (2\sqrt{x} + cosx - e^x)dx$$

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

$$\sqrt[2]{x^1} = x^{1/2}$$

$$x^a$$

Λύση:

$$I = \int 2\sqrt{x}\,dx + \int cosx\,dx - \int e^x dx$$

$$= 2\int x^{1/2} + \int cosx\,dx - \int e^x dx$$

$$= 2\,\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + sinx - e^x + C \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$= 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \sin(x) - e^x + C$$

$$= 2\,\frac{2}{3}\,x^{3/2} + \sin(x) - e^x + C$$

$$= \frac{4}{3}\,x^{3/2} + \sin(x) - e^x + C$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \sin(x) - e^x + C$$

Άσκηση 2

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int 3x\sqrt{x}dx$$

$$x^{\alpha} \cdot x^{\beta} = x^{\alpha+\beta}$$

Άσκηση 2

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int 3x\sqrt{x}dx$$

Λύση:

$$I = 3\int x\sqrt{x}\,dx = 3\int x^{1}\,x^{1/2}\,dx =$$

$$= 3\int x^{1+1/2}\,dx = 3\int x^{3/2}\,dx = 3\,\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + C$$

$$= 3 \frac{x^{5/2}}{5/2} + C = 3 \, \frac{2}{5} \, x^{5/2} + C$$

$$= \frac{6}{5} x^{5/2} + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}$$

Άσκηση 3

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx$$

Άσκηση 3

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx$$

Λύση:

$$I = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \int \left(x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx = \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + C$$

Άσκηση 4

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int (\sqrt{x} - 1)^2 \ \sqrt[3]{x} dx$$

Άσκηση 4

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int (\sqrt{x} - 1)^2 \sqrt[3]{x} dx$$

Λύση:

$$I = \int \left(\cancel{\sqrt{x}}^{\cancel{2}} - 2\sqrt{x} + 1^2 \right) x^{1/3} dx =$$

$$= \int \left(x - 2x^{1/2} + 1 \right) x^{1/3} dx = \int \left(x \cdot x^{1/3} - 2x^{1/2} \cdot x^{1/3} + x^{1/3} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{1+\frac{1}{3}} - x^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx =$$

$$= \int \left(x^{4/3} - x^{5/6} + x^{1/3} \right) dx$$

$$= \int x^{4/3} dx - \int x^{5/6} dx + \int x^{1/3} dx \longrightarrow \boxed{\int x^{a} dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C}$$

$$= \frac{x^{4/3+1}}{4/3+1} - \frac{x^{5/6+1}}{5/6+1} + \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + C$$

$$= \frac{x^{7/3}}{7/3} - \frac{x^{11/6}}{11/6} + \frac{x^{4/3}}{4/3} + C$$

$$= \frac{3}{7}x^{7/3} + \frac{6}{11}x^{11/6} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

Άσκηση 5

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}\,dx$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Άσκηση 6

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{e^{2x} + 4}{e^{-x}} dx$$

Λύση:

$$I = \int \left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}} + \frac{4}{e^{-x}} \right) dx =$$

$$= \int \left(e^{2x-(-x)} + 4e^{x} \right) dx = \int \left(e^{3x} + 4e^{x} \right) dx =$$

$$= \int e^{3x}\,dx + 4\int e^{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} + 4e^{x} + C$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$$

$$\left(e^{3x}\right)' = e^{3x}(3x)' = 3e^{3x}$$

Άσκηση 7

Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{xsinx + 2}{x} dx$$

Ολοκλήρωση στο Octave

- Εντολή **int**
- Για την ολοκλήρωση της $f(x) = x^3 - xe^x$ πληκτρολογούμε

```
>> pkg load symbolic
>> syms x
>> y=x^3-x*exp(x)
y = (sym)

   3      x
  x  - x*e

>> int(y,x)
ans = (sym)

   4
  x             x
  -- + (1 - x)*e
  4
```

Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες (παραγοντική ολοκλήρωση)

Η μέθοδος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες εκφράζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int x\, e^x dx$

$$\int x\, e^x dx = \int x\, (e^x)' dx = xe^x - \int x'\, e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I} = \int x \sin x \, dx$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I} = \int x^2 e^x dx$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\mathrm{I} = \int (4x^3 + 1) \ln x \, dx$$

Μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση

Με τη μέθοδο ολοκλήρωσης με αντικατάσταση υπολογίζουμε ολοκληρώματα που έχουν ή μπορούν να πάρουν τη μορφή

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx$$

Η μέθοδος ολοκλήρωσης με αντικατάσταση εκφράζεται με τον ακόλουθο τύπο

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du \,,$$

$$u = g(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad du = g'(x)dx$$

Παράδειγμα

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

- Θέτουμε $u = x^2 + 1$ και $du = (x^2+1)'dx = 2xdx$

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{1/2}du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$$

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι **ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ** **(ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ)**	**ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ** **ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**
$\int 0dx = c$	
$\int 1dx = x + c$	$\int f'(x)dx = f(x) + c$
$\int \lambda dx = \lambda x + c$	$\int \lambda f'(x)dx = \lambda f(x) + c$
$\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$	$\int f(x)f'(x)dx = \frac{1}{2}f^2(x) + c$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\int f^\alpha(x)f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
$\int \sin xdx = -\cos x + c$	$\int \sin[f(x)]\, f'(x)dx = -\cos[f(x)] + c$
$\int \cos xdx = \sin x + c$	$\int \cos[f(x)]\, f'(x)dx = \sin[f(x)] + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = =\tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 f(x)}\, f'(x)dx = = \tan\left[f(x)\right] + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = =-\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 f(x)}\, f'(x)dx = = -\cot\left[f(x)\right] + c$
$\int e^x\,dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)}\, f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int \frac{1}{x^{\nu}}dx = \frac{x^{-\nu+1}}{-\nu+1} + c$	$\int \frac{1}{f^{\nu}(x)}\, f'(x)dx = \frac{1}{-\nu+1} f^{-\nu+1}(x) + c$
$\int \sqrt[\nu]{x^{\mu}}\,dx = \int x^{\frac{\mu}{\nu}}\,dx = \frac{x^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{\frac{\mu}{\nu}+1} + c$	$\int \sqrt[\nu]{f^{\mu}(x)}\, f'(x)dx = \int f^{\frac{\mu}{\nu}}(x)\, f'(x)dx = \frac{f^{\frac{\mu}{\nu}+1}(x)}{\frac{\mu}{\nu}+1} + c$
$\int \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$	$\int \alpha^{f(x)}\, f'(x)dx = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha} + c$
$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$ (άσκηση)	$\int \ln f(x)\, f'(x)dx = f(x)\ln f(x) - f(x) + c$
$\int \frac{1}{x\ln 10}\,dx = \log x + c$ (άσκηση)	$\int \frac{1}{f(x)\ln 10}\, f'(x)dx = \log f(x) + c$

Αόριστα ολοκληρώματα: ολοκλήρωση με αντικατάσταση

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

   II) $\mathrm{I}_2 = \int \frac{1}{1-2x} dx$

Αόριστα ολοκληρώματα: ολοκλήρωση με αντικατάσταση

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

III) $\mathrm{I}_3 = \int \frac{x+3}{(x^2+6x)^4} dx$

IV) $\mathrm{I}_4 = \int \frac{dx}{x(lnx)^3}$