Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
2024-2025

Μιγαδικοί Αριθμοί

Εισαγωγή

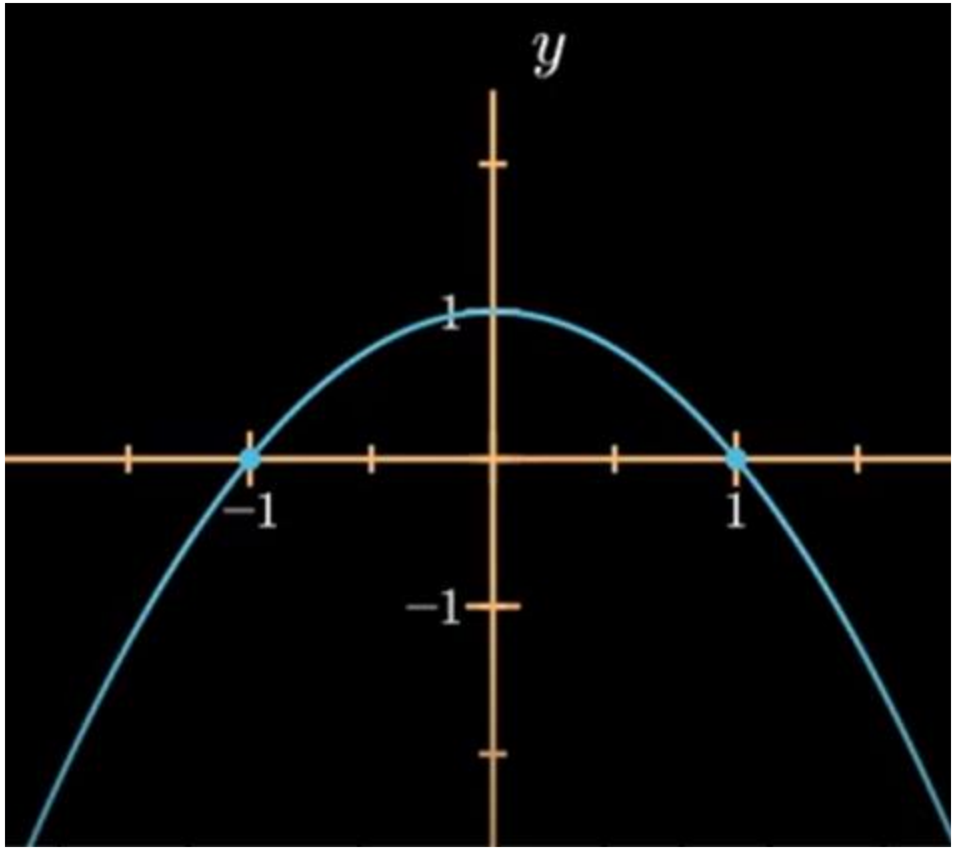
Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας:

Κάθε πολυώνυμο n βαθμού έχει ακριβώς n ρίζες

Εισαγωγή

$f(x) = 1 - x^2$

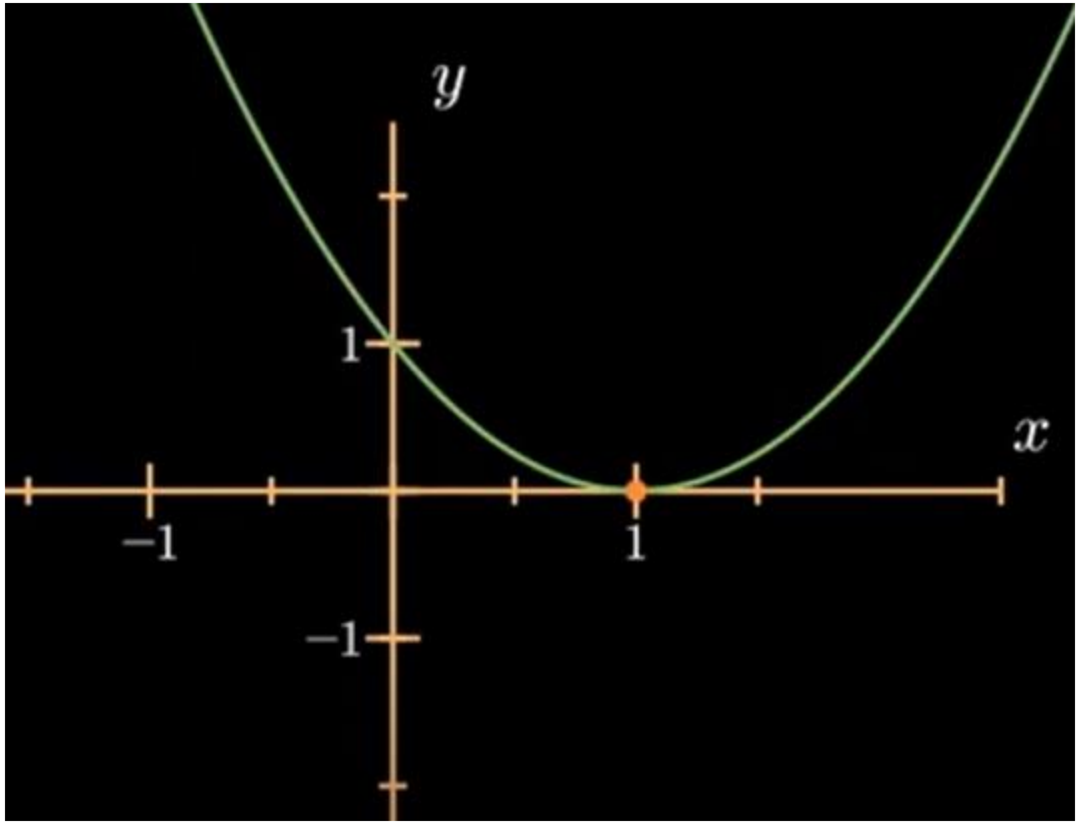
Ρίζες: $-1,\ 1$



Εισαγωγή

$f(x) = (x-1)^2$

Ρίζες: 1 (διπλή)



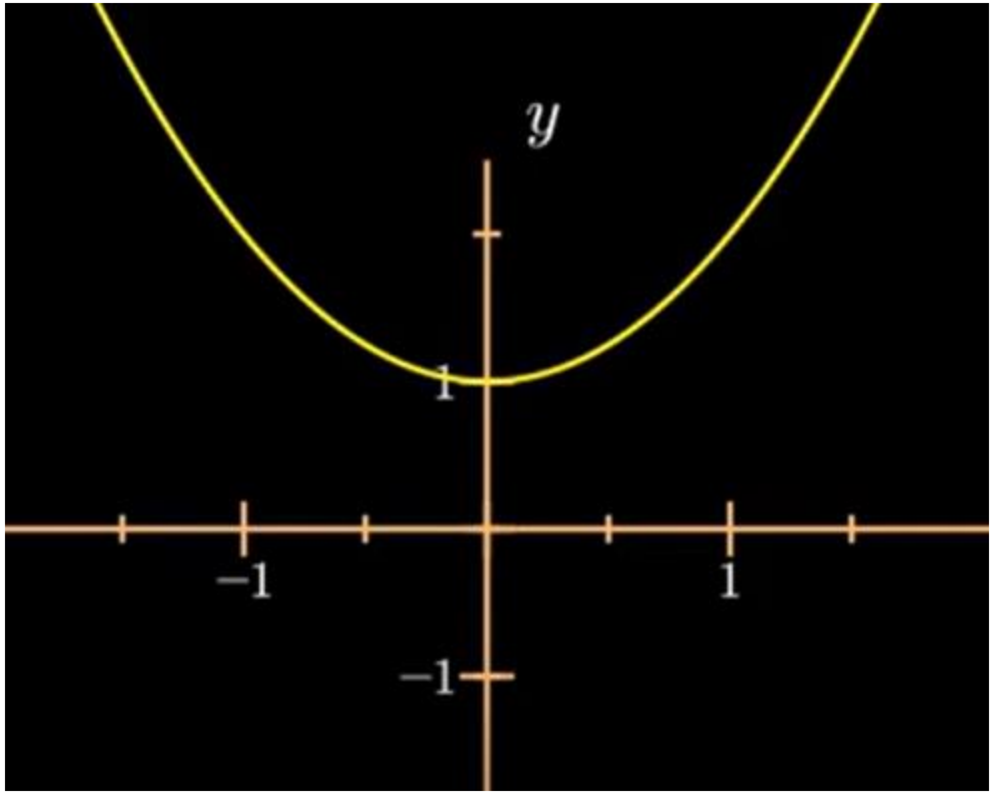
Εισαγωγή

$f(x) = x^2 + 1$

Δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός:

$$x^2 + 1 = 0$$

Αντίφαση με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας



Εισαγωγή

Χρειαζόμαστε ένα μεγαλύτερο σύνολο αριθμών

Χρειάζεται να περιλαμβάνει $i = \sqrt{-1}$

Ο αριθμός i

- Η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ "δεν" μπορεί να επιλυθεί καθώς θα έπρεπε να ισχύει ότι $x^2 = -1$

- Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ειδικός αριθμός ο οποίος όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει ως αποτέλεσμα τον αριθμό -1.

- Ο αριθμός αυτός συμβολίζεται με i (imaginary) ονομάζεται **φανταστική μονάδα** και ισχύει ότι:

$$i = \sqrt{-1}, \qquad i^2 = -1$$

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25 * (-1)} = \sqrt{25} * \sqrt{-1} = 5 * i$$

Δυνάμεις του i

- $\boldsymbol{i^0 = 1}$
- $\boldsymbol{i^1 = i}$
- $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- $\boldsymbol{i^3 = i^2 \cdot i = -i}$
- $\boldsymbol{i^4 = i^2 \cdot i^2} = (-1)(-1) = 1$
- $i^5 = i$
- $i^6 = -1$
- $i^7 = -i$
- $i^8 = 1$
- $i^9 = i$
- …

- Οι ίδιες 4 τιμές επαναλαμβάνονται:

  $1, \qquad i, \qquad -1, \qquad -i$

Η δύναμη i^n

Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Για να βρεθεί η δύναμη i^n, εκτελούμε τη διαίρεση $n/4$.

Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μοναδικά $\pi \in \mathbb{Z}$ και $\upsilon \in \{0,1,2,3\}$:

$$n = 4\pi + \upsilon$$

Άρα

$$i^n = i^{4\pi+\upsilon} = (i^4)^\pi i^\upsilon = 1^\pi i^\upsilon = i^\upsilon = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \upsilon = 0 \\ i, & \alpha\nu\ \upsilon = 1 \\ -1, & \alpha\nu\ \upsilon = 2 \\ -i, & \alpha\nu\ \upsilon = 3 \end{cases}$$

Για παράδειγμα $i^{43} = i^{43 \bmod 4} = i^3 = -i$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η 102η δύναμη του i

Μιγαδικοί αριθμοί (complex numbers)

- Χρησιμοποιώντας τον ειδικό αριθμό i μπορούμε να δημιουργήσουμε δύο νέα σύνολα αριθμών:

  το **σύνολο των φανταστικών αριθμών** που συμβολίζεται με $\mathbb{I}$

  και το **σύνολο των μιγαδικών αριθμών** που συμβολίζεται με $\mathbb{C}$

- Ως **φανταστικός αριθμός** ορίζεται κάθε αριθμός της μορφής $\boldsymbol{z = bi}$, όπου $b \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα
- Ως **μιγαδικός αριθμός** ορίζεται κάθε αριθμός της μορφής $\boldsymbol{z = a + bi}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και i η φανταστική μονάδα

Μιγαδικοί αριθμοί (συνέχεια)

Κάθε πραγματικός αριθμός a μπορεί να γραφεί στη μορφή $a + 0i$.

Άρα

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Μιγαδικοί αριθμοί (συνέχεια)

- Οι μιγαδικοί αριθμοί εμφανίζονται στη μοντελοποίηση φαινομένων του πραγματικού κόσμου και μας επιτρέπουν να κάνουμε ακριβείς προβλέψεις
- **Δεν ορίζεται διάταξη** μεταξύ των μιγαδικών αριθμών, δηλαδή ο μιγαδικός αριθμός $3 + 4i$ δεν θεωρείται μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον μιγαδικό αριθμό $5 - 2i$
- Κάθε **μιγαδικός αριθμός** $\mathrm{z} = \alpha + bi$ έχει ένα πραγματικό και ένα φανταστικό μέρος:

$$Re(z) = a, \qquad Im(z) = b$$

- Δύο μιγαδικοί είναι **ίσοι** όταν τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη τους είναι ίσα

Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Η **πρόσθεση** και η **αφαίρεση** γίνεται προσθέτοντας/αφαιρώντας ξεχωριστά τα πραγματικά και τα φανταστικά τμήματα

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Παραδείγματα

Πρόσθεση: $u=2+4i,\ v=1+5i$

$$u+v=(2+4i)+(1+5i)=(2+1)+(4+5)i=3+9i$$

Αφαίρεση: $u=1-4i,\ v=2+6i$

$$u-v=(1-4i)-(2+6i)=1-4i-2-6i=-1-10i$$

Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

- Ο μιγαδικός $0 + 0i$ ονομάζεται **ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης
- Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\mathrm{z} = a + bi$ υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος αριθμός $\mathrm{z}' = (-a) + (-b)i$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$z + z' = 0$$

Ο μιγαδικός z' λέγεται **αντίθετο στοιχείο** του z για την πρόσθεση στο $\mathbb{C}$

Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

- **Πολλαπλασιασμός** (επιμεριστική ιδιότητα)
  $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad$
- Υπάρχει ένας μονοσήμαντα ορισμένος μιγαδικός αριθμός
  $\mathrm{z}^* = 1 + 0i$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$zz^* = z$$

  Ο μιγαδικός $1 + 0i$ ονομάζεται **ουδέτερο στοιχείο** του πολ/σμού

Πολλαπλασιασμός: $u = 2 + 3i, \;\; v = 2 - 5\mathrm{i}$

$$u \cdot v = (2+3i)\cdot(2-5i) = 2\cdot 2 - 2\cdot 5\cdot i + 3\cdot 2\cdot i - 3\cdot 5\cdot i^2$$
$$= 4 - 10i + 6i + 15 = 19 - 4i$$

Συζυγής (conjugate) μιγαδικός

Ο **συζυγής** του μιγαδικού $a + bi$ είναι ο $a - bi$ και αντίστροφα ο συζυγής του μιγαδικού $a - bi$ είναι ο $a + bi$

Ο συζυγής του μιγαδικού $\mathrm{z} = a + bi$ συμβολίζεται με $\bar{z}$

Δηλ.

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Συζυγής (conjugate) μιγαδικός-Ιδιότητες

Ο πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού με τον συζυγή του είναι ένας πραγματικός αριθμός

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{z\bar{z} = a^2 + b^2}$$

Για παράδειγμα αν $z = 3 + 2i$

$$z\bar{z} = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

Συζυγής (conjugate) μιγαδικός-Ιδιότητες

1. $$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
2. $$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$
3. $$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$
4. $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Διαίρεση Μιγαδικών Αριθμών

- **Διαίρεση** (πολλαπλασιασμός του παρονομαστή και του αριθμητή με τον συζυγή του παρονομαστή)

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}\frac{(c-di)}{(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

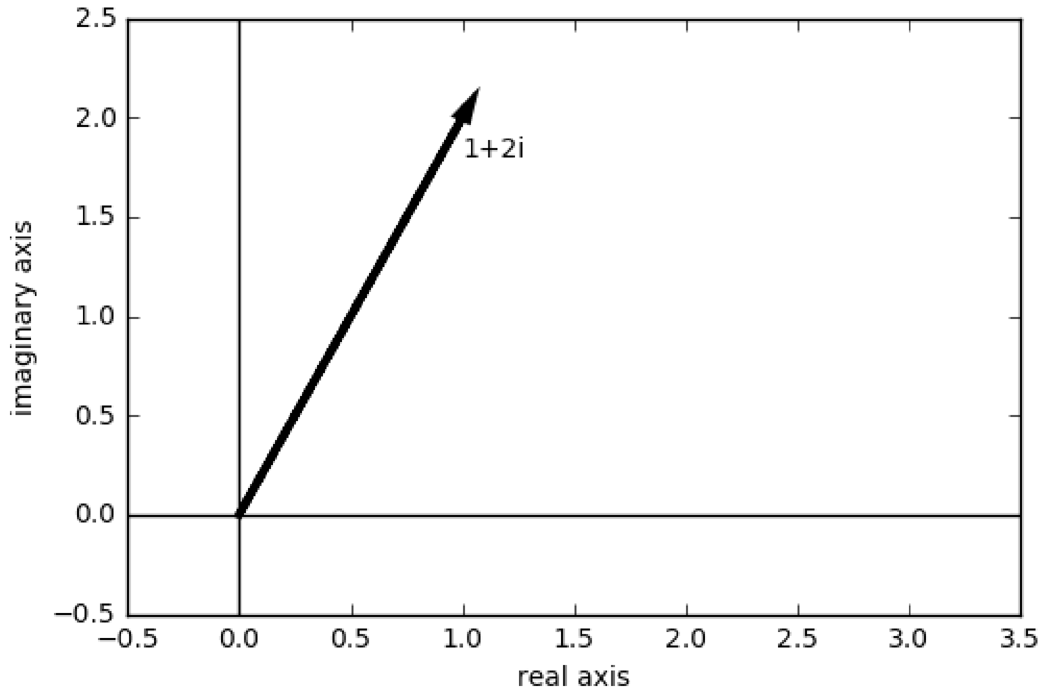
$$=\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

Διαίρεση:

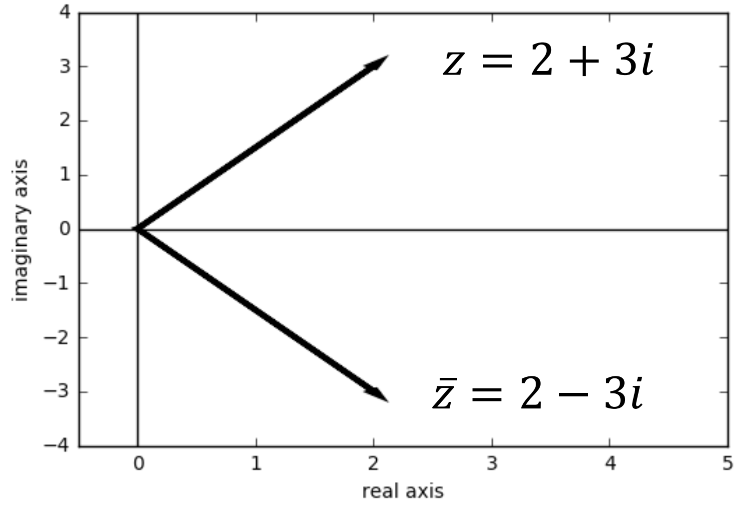
$$\frac{3+2i}{1+2i}=\frac{(3+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-6i+2i-4i^2}{1^2+2^2}=\frac{7-4i}{5}=\frac{7}{5}-\frac{4}{5}i$$

Γεωμετρική παράσταση μιγαδικών αριθμών

$z = 1 + 2i$



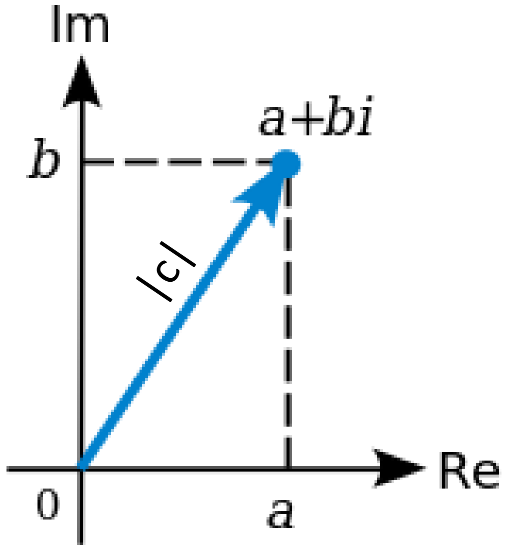
- Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες $\mathrm{M}(a, b)$ και $\mathrm{M}(a, -b)$ δύο συζυγών μιγαδικών $a + bi$ και $a - bi$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα



Μέτρο μιγαδικού αριθμού

- Έστω $M(a,b)$ η εικόνα του μιγαδικού $c = a + bi$ στο μιγαδικό επίπεδο. **Μέτρο** του c είναι η απόσταση του M από την αρχή του μιγαδικού επιπέδου:

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$$c = 2 + 3i$$

$$|c| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Παραγοντοποίηση τετραγωνικής συνάρτησης

- $x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x+i)(x-i)$
- Αν $\Delta = b^2 - 4ac > 0$,

  Ρίζες τριωνύμου $ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Παραγοντοποίηση τετραγωνικής συνάρτησης

- Αν το $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ τότε υπάρχουν μιγαδικές ρίζες οι οποίες εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \boldsymbol{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Παράδειγμα

$$x^2 - x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 20 = -19 < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{i^2 19}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2} i, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2} i$$

Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας

- Κάθε πολυωνυμική εξίσωση **ν βαθμού** έχει στο σύνολο των μιγαδικών **ν ακριβώς ρίζες**

- Αν ο μιγαδικός αριθμός $a + bi$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε **και ο συζυγής του $\boldsymbol{a - bi}$ είναι ρίζα της ίδιας πολυωνυμικής εξίσωσης**

Command Window

```
>> c= [1,-3,5,-3]
c =

   1  -3   5  -3

>> roots(c)
ans =

   1.0000 + 1.4142i
   1.0000 - 1.4142i
   1.0000 + 0.0000i

>> c=[1,-1,-3,5,-3]
c =

   1  -1  -3   5  -3

>> roots(c)
ans =

  -2.03574 + 0.00000i
   1.64951 + 0.00000i
   0.69312 + 0.64264i
   0.69312 - 0.64264i
```

Οι μιγαδικοί αριθμοί στο Octave/Matlab

- Στο Octave τα στοιχεία των διανυσμάτων μπορούν να είναι είτε πραγματικοί είτε μιγαδικοί αριθμοί.
- Όπως έχουμε αναφέρει, το περιβάλλον χειρίζεται τις βαθμωτές ποσότητες (αριθμούς) ως διανύσματα με ένα στοιχείο.
- Στο Octave οι ποσότητες **i** και **j** είναι ίσες με τη φανταστική μονάδα, εκτός και αν τους αλλάξουμε τιμή.

```
>> i^2
ans = -1
>> j^2
ans = -1
```

Οι μιγαδικοί αριθμοί στο Octave/Matlab

- Μπορούμε να ορίσουμε μιγαδικούς αριθμούς και να κάνουμε τις βασικές πράξεις με αυτούς.
- Η φανταστική μονάδα θα πρέπει είτε να πολλαπλασιάζεται με τον τελεστή * είτε να πληκτρολογείται κολλητά στο φανταστικό μέρος.

```
>> z=3+2*i
z =  3 + 2i
>> w=5-4i
w =  5 - 4i
```

```
>> z+w
ans =  8 - 2i
>>
>> z*w
ans =  23 -  2i
>>
>> z/w
ans =  0.17073 + 0.53659i
```

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

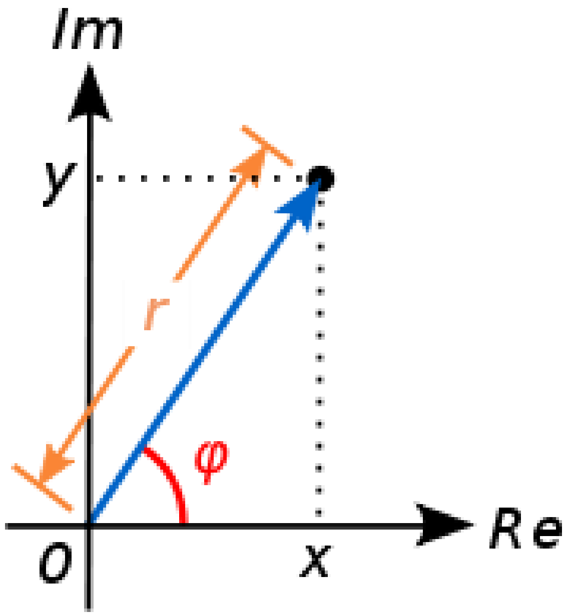
- Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν στη μορφή $\boldsymbol{z = x + yi}$
- Αλλά μπορούν να γραφούν και ως

$$\boldsymbol{z = re^{i\varphi}}$$

όπου

r είναι η απόσταση από την αρχή των αξόνων και

φ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα του μιγαδικού με το θετικό άξονα x



η γωνία φ λέγεται όρισμα του μιγαδικού

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

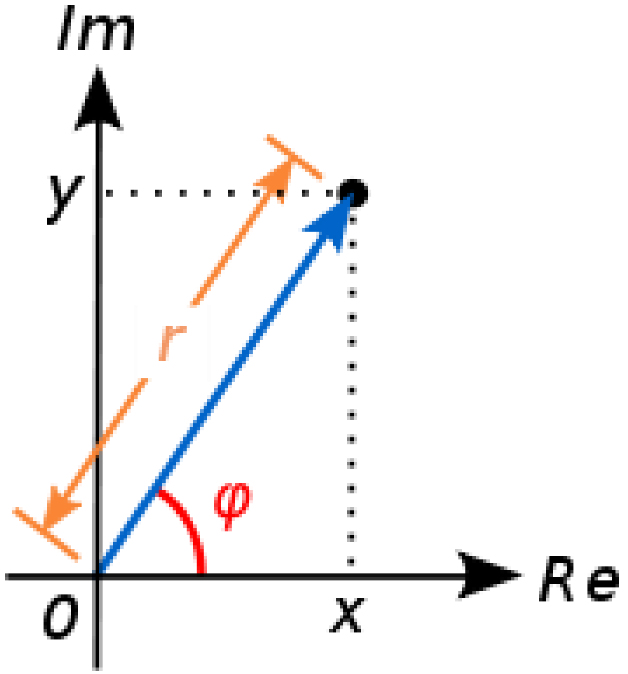
$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi \\ &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται όμως ότι:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

συνεπώς:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}}$$



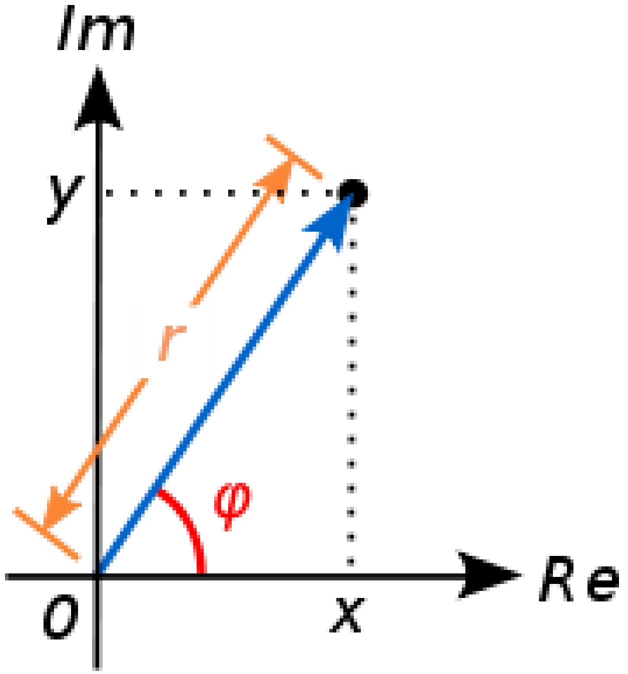
$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Ο **πολλαπλασιασμός** δύο μιγαδικών αριθμών στην τριγωνομετρική τους μορφή γίνεται πολύ εύκολα

$$z = r_1 e^{i\varphi_1}, \qquad w = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z \cdot \ w = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$



$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Μετατροπή μιγαδικού σε τριγωνομετρική μορφή

Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\mathrm{z} = x + yi$ ισχύει ότι:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \alpha\nu\ (x > 0)$$

$$\varphi = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \alpha\nu\ (x < 0)$$

$$z = re^{i\varphi}$$

$\tan^{-1} x = \arctan x$ είναι η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης και είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης δηλαδή δέχεται ως όρισμα μια τιμή x και επιστρέφει τη γωνία $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ της οποίας η εφαπτομένη έχει την τιμή x

$$\tan\varphi = x \Leftrightarrow \tan^{-1} x = \varphi$$

Μετατροπή μιγαδικού σε τριγωνομετρική μορφή

Παράδειγμα: να μετατραπεί ο μιγαδικός αριθμός $\mathrm{z} = -\sqrt{3} + i$ σε γεωμετρική μορφή

$$x = -\sqrt{3}, \qquad y = 1$$

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$$

άρα

$$z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Μετατροπή μιγαδικού αριθμού από τριγωνομετρική σε καρτεσιανή μορφή

- Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = re^{i\varphi}$ ισχύει ότι:

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Με απλή αντικατάσταση και εκτέλεση των πράξεων προκύπτει η καρτεσιανή μορφή του μιγαδικού αριθμού

Μετατροπή μιγαδικού αριθμού από τριγωνομετρική σε καρτεσιανή μορφή

Παράδειγμα: να μετατραπεί ο μιγαδικός αριθμός $z = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ από γεωμετρική σε καρτεσιανή μορφή

$$z = 4e^{i\frac{-2\pi}{3}} = 4\left(\cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})\right)$$

$$\cos(\frac{-2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}, \qquad \sin(\frac{-2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = -2 - 2\sqrt{3}i$$

Θεώρημα του De Moivre

Αν $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

είναι ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική μορφή και n είναι ένας θετικός ακέραιος τότε:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$
$$= r^n\ (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Παράδειγμα: να υπολογιστεί η δύναμη

$$\left[3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^8$$

Λύση:

$$\left[3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^8 =$$
$$3^8\left(\cos\frac{40\pi}{4} + i\sin\frac{40\pi}{4}\right) =$$
$$6561(\cos 10\pi + i\sin 10\pi) =$$
$$6561(1 + i\ 0) = 6561$$