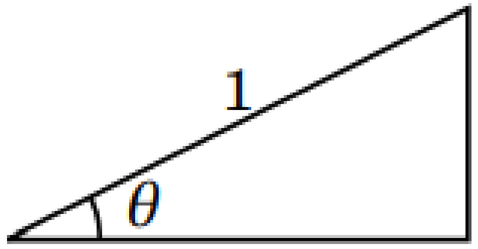
Στόχοι

Όταν ολοκληρώσετε αυτή την ενότητα, θα πρέπει να είστε σε θέση:

- Να εργάζεστε με τις ιδιότητες τριγωνομετρικών συναρτήσεων
- Να λύνετε τριγωνομετρικές εξισώσεις
- Να σχεδιάζετε γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

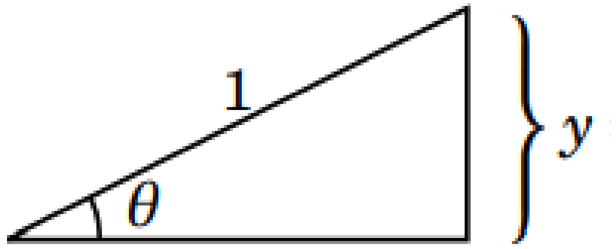
Κύρια ιδέα

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέουν **γωνίες** ορθογωνίων τριγώνων με **πλευρές**
- **Είσοδος**: γωνία
- **Έξοδος**: μήκος πλευράς



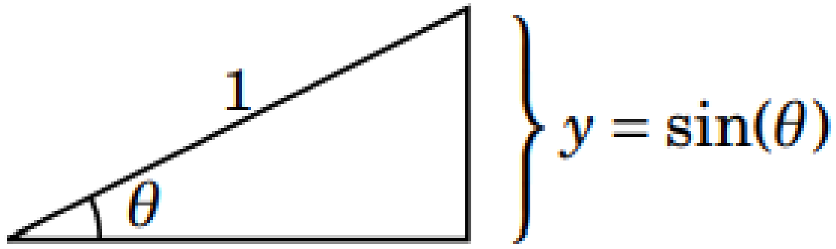
Κύρια ιδέα

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέουν **γωνίες** ορθογωνίων τριγώνων με **πλευρές**
- **Είσοδος**: γωνία
- **Έξοδος**: μήκος πλευράς



Κύρια ιδέα

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνδέουν **γωνίες** ορθογωνίων τριγώνων με **πλευρές**
- **Είσοδος**: γωνία
- **Έξοδος**: μήκος πλευράς



Περιεχόμενα

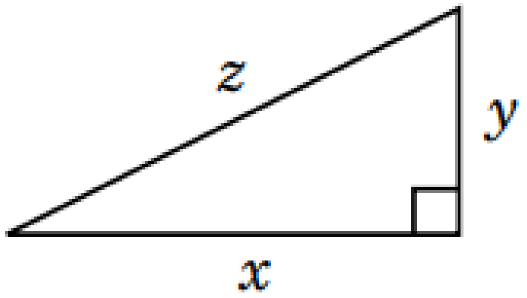
- Σύστημα μέτρησης γωνιών σε ακτίνια
- Επισκόπηση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων
  - ✓Ημίτονο: sin,
  - ✓Συνημίτονο: cos,
  - ✓Εφαπτομένη: tan,
  - ✓Συνεφαπτομένη: cot,
  - ✓Τέμνουσα: sec,
  - ✓Συντέμνουσα: csc

Οι τριγ. συναρτήσεις έχουν 2 συστατικά

Οι τριγ. συναρτήσεις έχουν 2 συστατικά

- **Πυθαγόρειο θεώρημα**

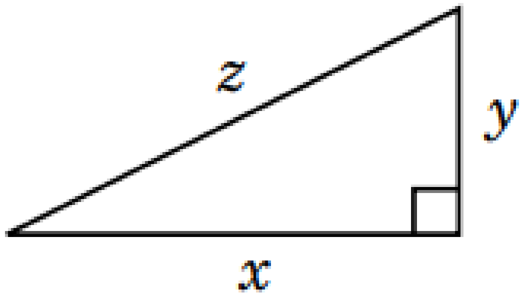
  Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές μήκους x και y και υποτείνουσα μήκους z, τότε
  $x^2 + y^2 = z^2$



Οι τριγ. συναρτήσεις έχουν 2 συστατικά

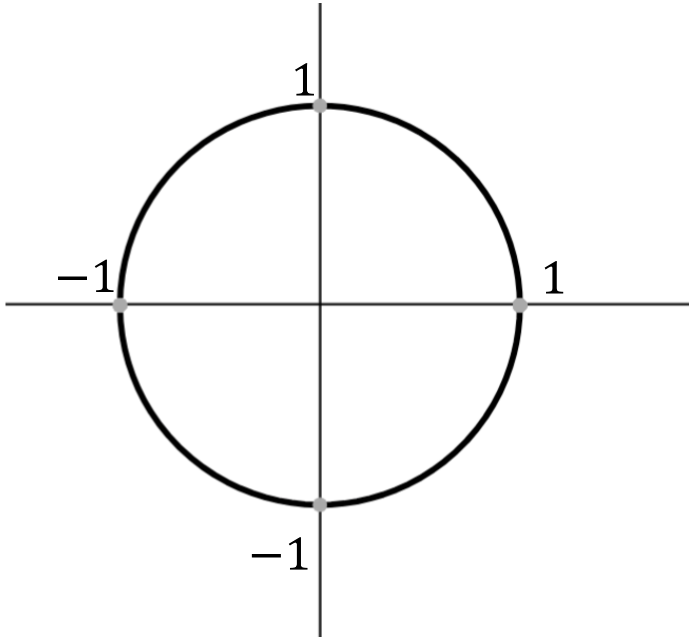
- **Πυθαγόρειο θεώρημα**

  Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές μήκους x και y και υποτείνουσα μήκους z, τότε $x^2 + y^2 = z^2$



- **Ο Τριγωνομετρικός Κύκλος**

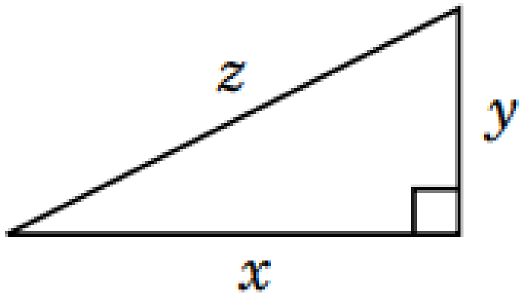
  Το γράφημα της εξίσωσης $x^2 + y^2 = 1$ είναι ένας κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο $(0,0)$



Οι τριγ. συναρτήσεις έχουν 2 συστατικά

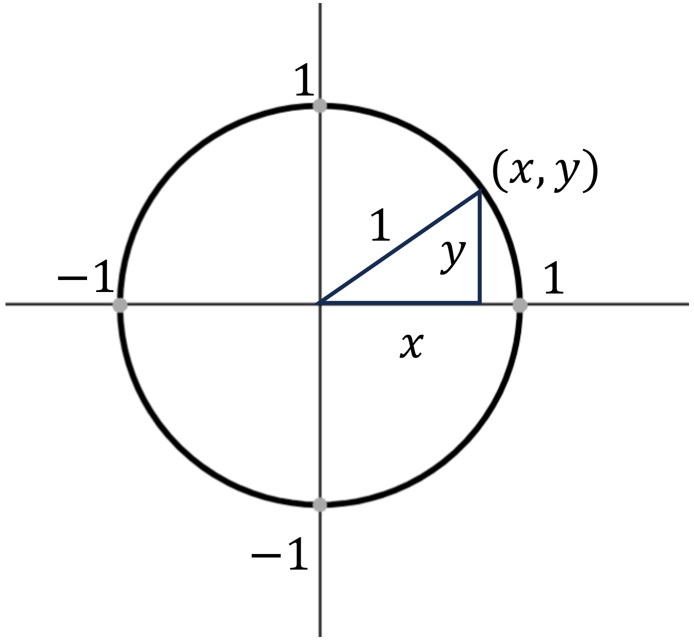
- **Πυθαγόρειο θεώρημα**

  Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές μήκους x και y και υποτείνουσα μήκους z, τότε $x^2 + y^2 = z^2$



- **Ο Τριγωνομετρικός Κύκλος**

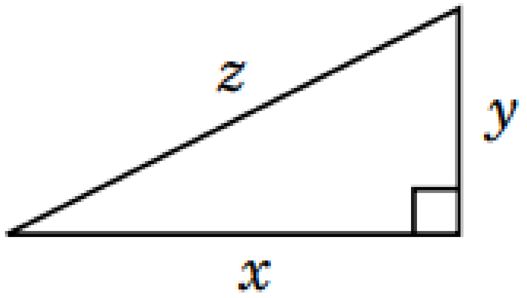
  Το γράφημα της εξίσωσης $x^2 + y^2 = 1$ είναι ένας κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο $(0,0)$



Οι τριγ. συναρτήσεις έχουν 2 συστατικά

- **Πυθαγόρειο θεώρημα**

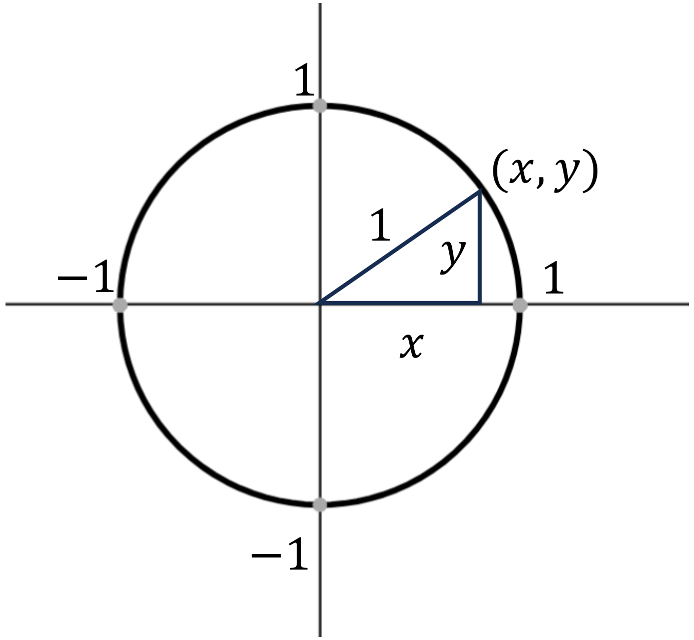
  Αν ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές μήκους x και y και υποτείνουσα μήκους z, τότε $x^2 + y^2 = z^2$



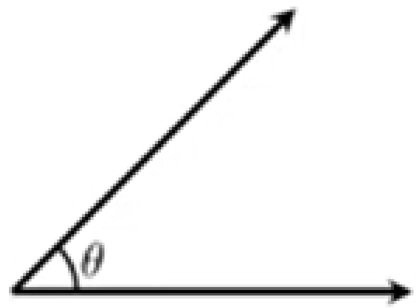
- **Ο Τριγωνομετρικός Κύκλος**

  Το γράφημα της εξίσωσης $x^2 + y^2 = 1$ είναι ένας κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο $(0,0)$

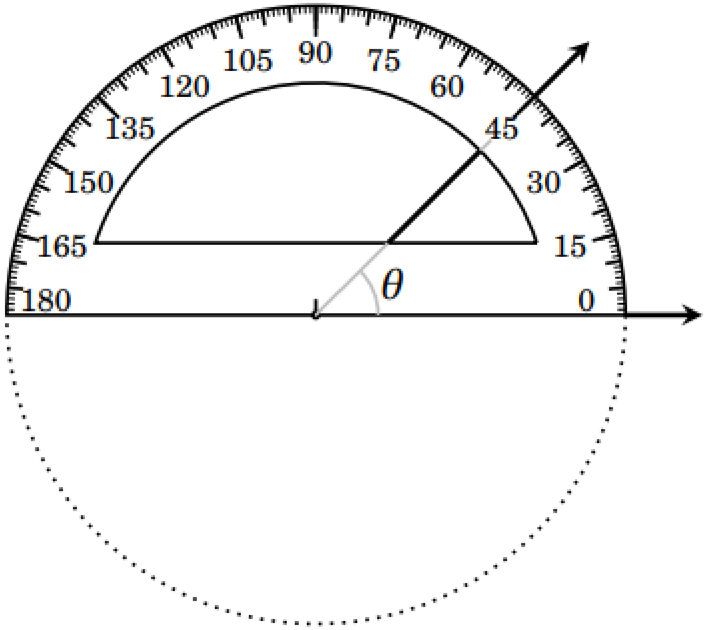
  Περιφέρεια μοναδιαίου κύκλου: 2π



Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο

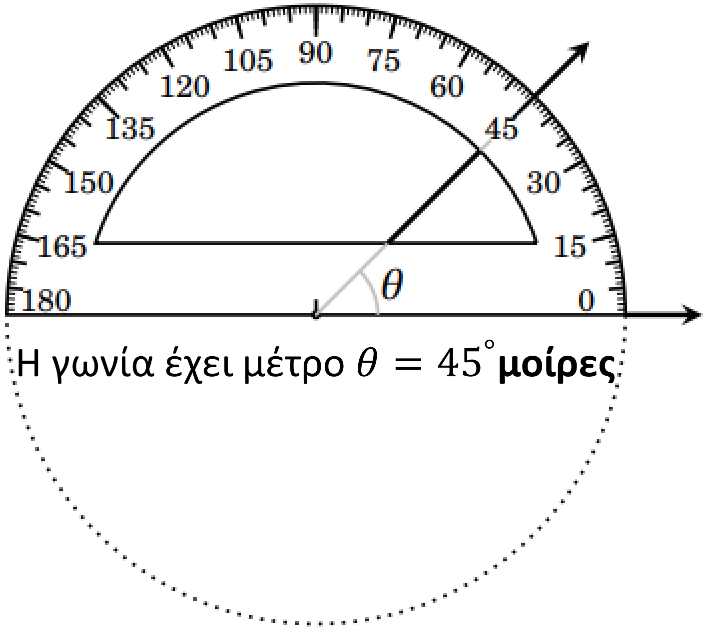


Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο



Μοιρογνωμόνιο

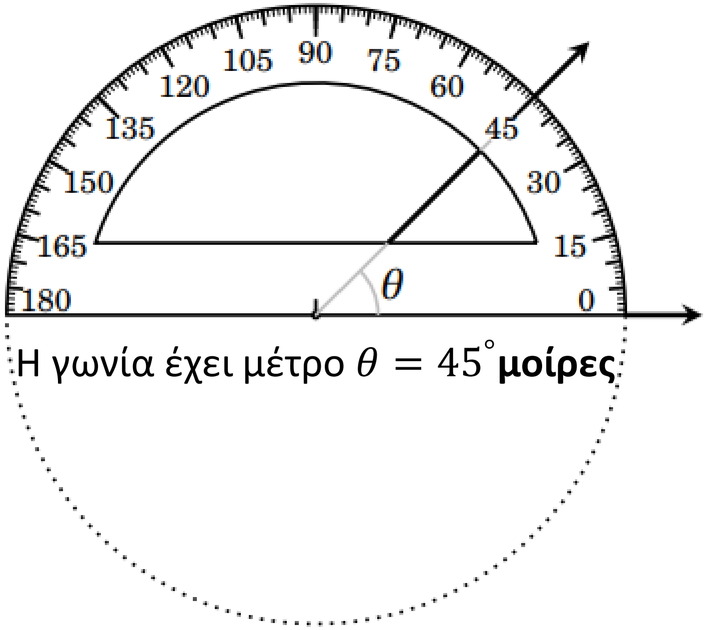
Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο



Η γωνία έχει μέτρο $\theta = 45^{\circ}$ **μοίρες**

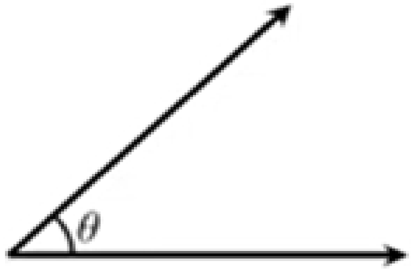
Μοιρογνωμόνιο

Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο

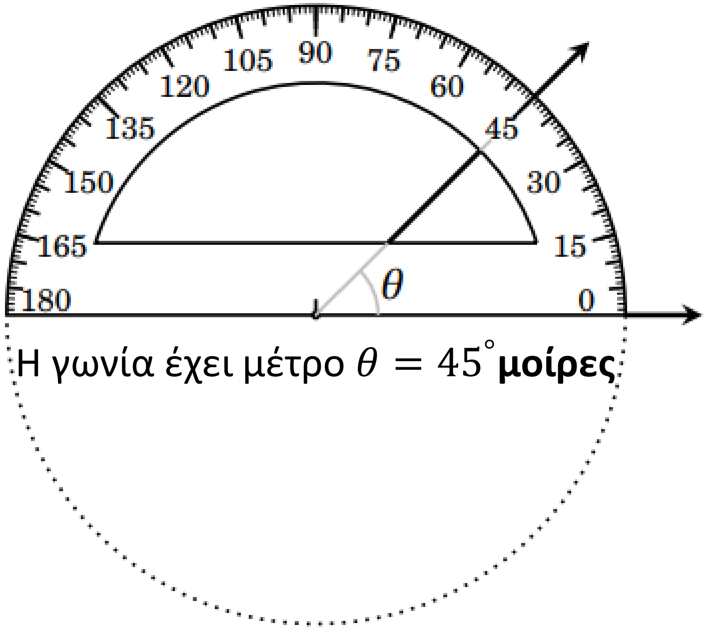


Η γωνία έχει μέτρο $\theta = 45^{\circ}$ **μοίρες**

Μοιρογνωμόνιο

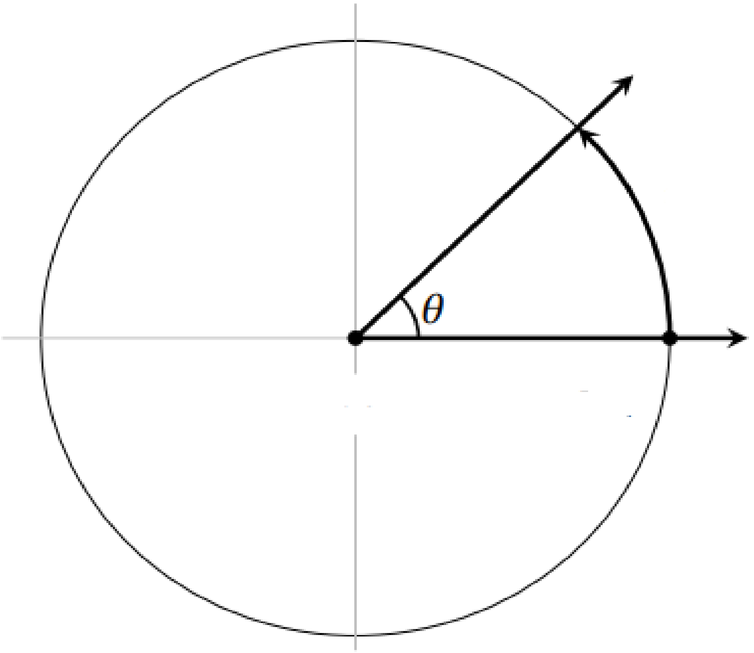


Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο



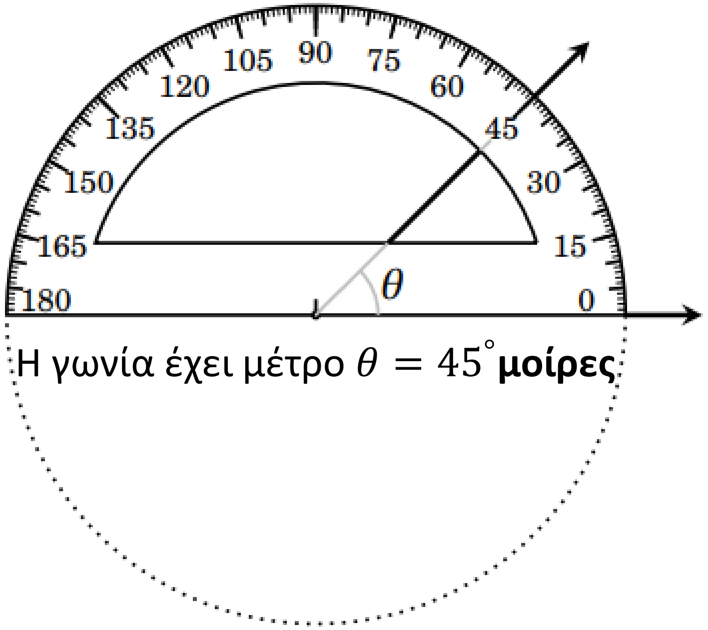
Η γωνία έχει μέτρο $\theta = 45^{\circ}$ **μοίρες**

Μοιρογνωμόνιο



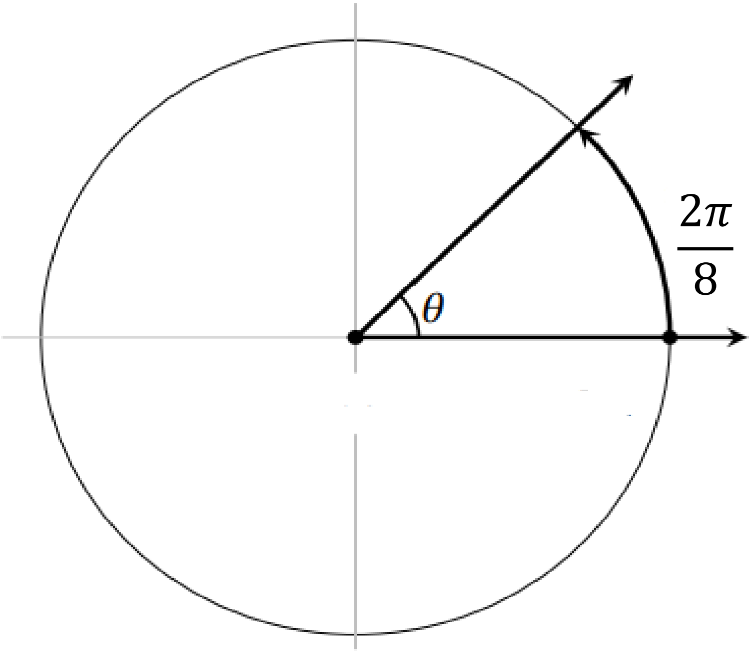
Μοναδιαίος Κύκλος

Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο



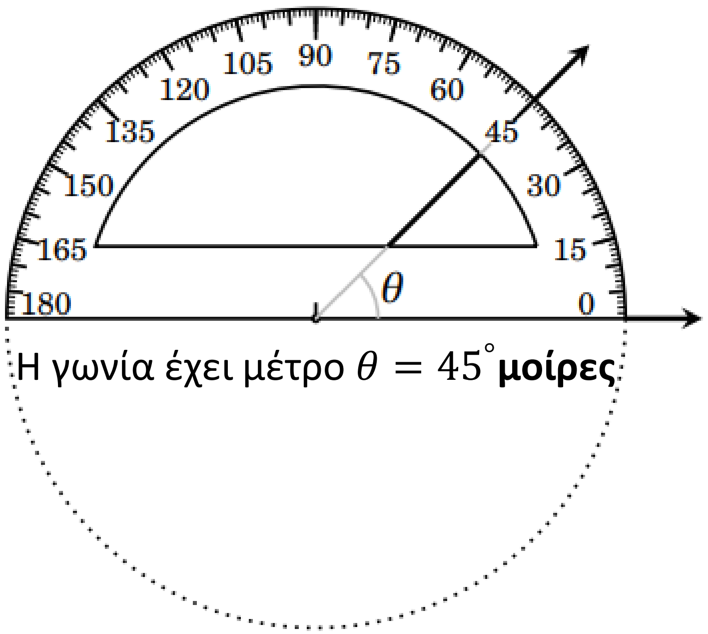
Η γωνία έχει μέτρο $\theta = 45^{\circ}$ **μοίρες**

Μοιρογνωμόνιο

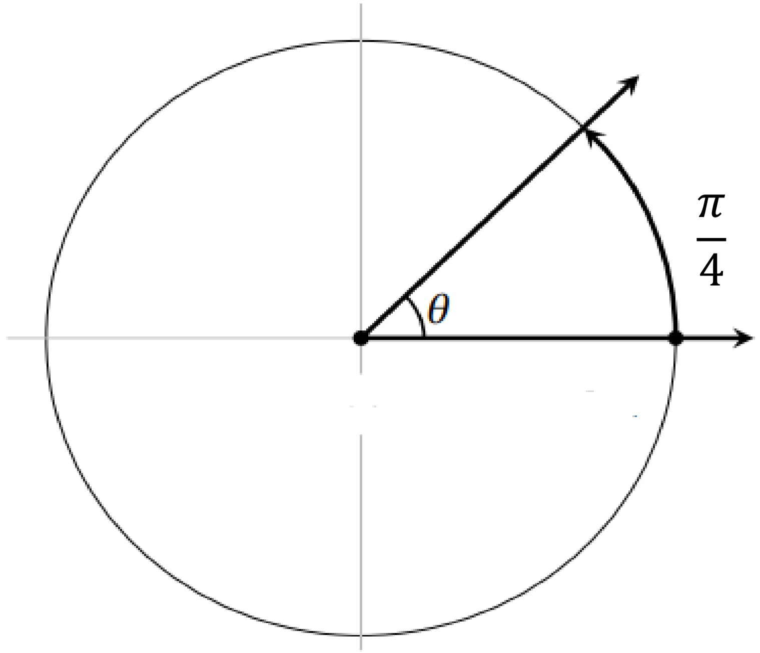


Μοναδιαίος Κύκλος

Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο

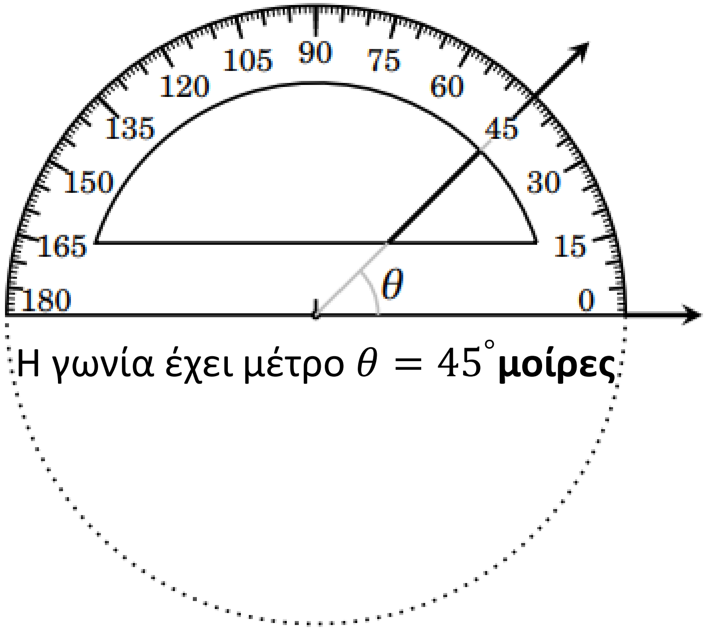


Μοιρογνωμόνιο



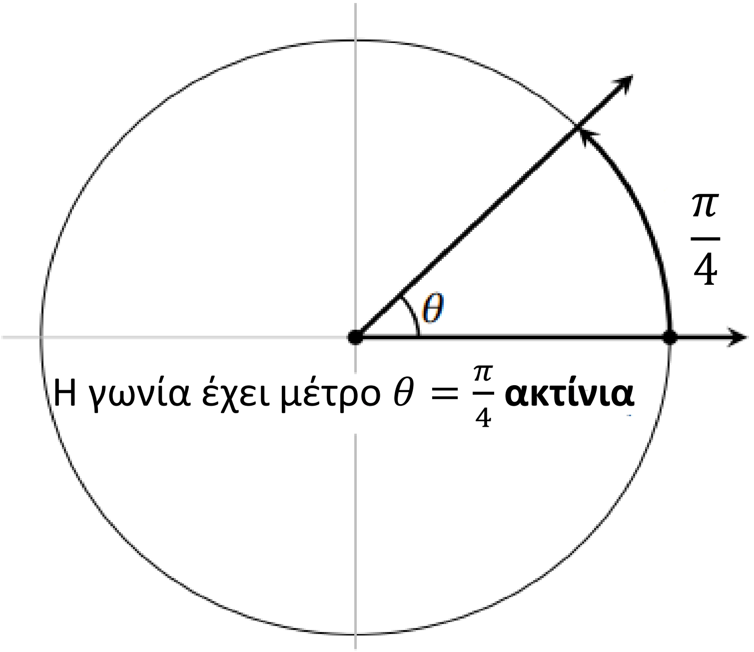
Μοναδιαίος Κύκλος

Ο τριγωνομετρικός κύκλος είναι ένα φυσικό μοιρογνωμόνιο



Η γωνία έχει μέτρο $\theta = 45^{\circ}$ **μοίρες**

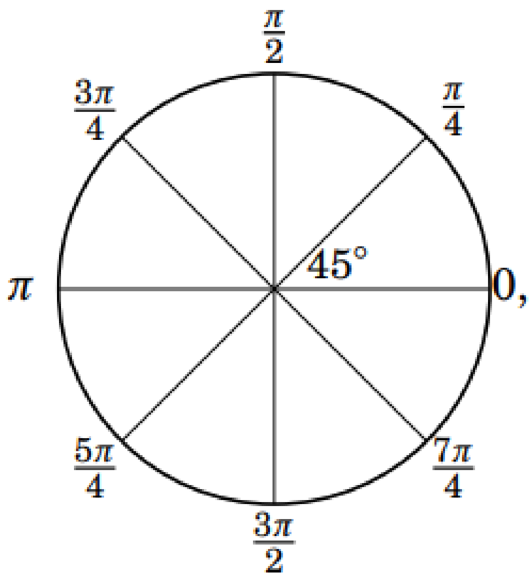
Μοιρογνωμόνιο



Η γωνία έχει μέτρο $\theta = \frac{\pi}{4}$ **ακτίνια**

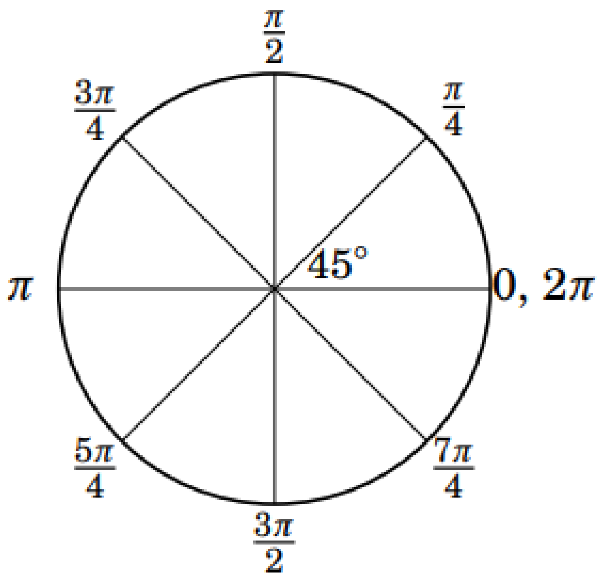
Μοναδιαίος Κύκλος

Ακτίνια



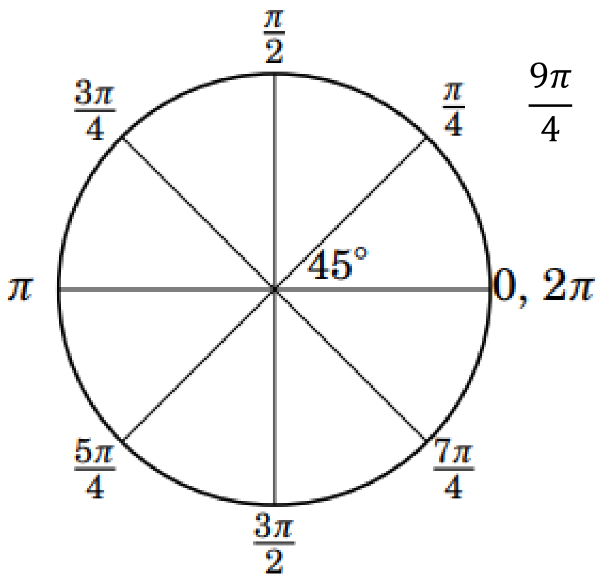
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$45°$
π
$0,$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

Ακτίνια



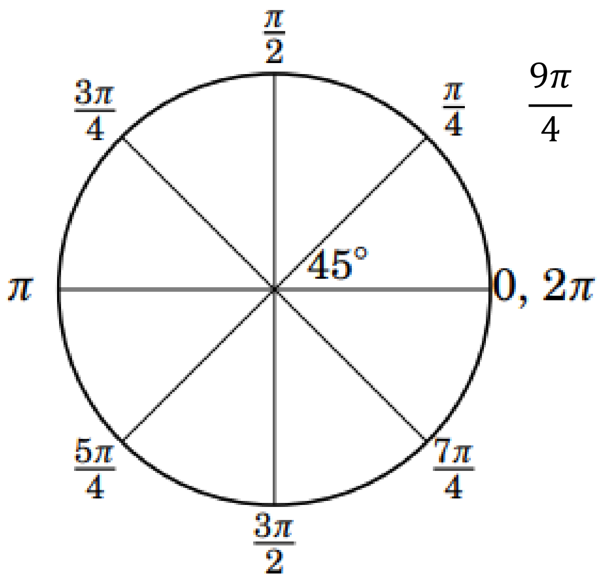
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$45°$
π
$0,\ 2\pi$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

Ακτίνια

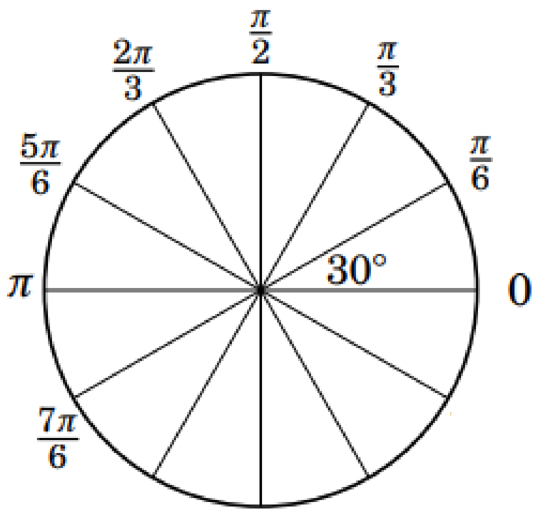


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
$45°$
π
$0,\ 2\pi$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

Ακτίνια

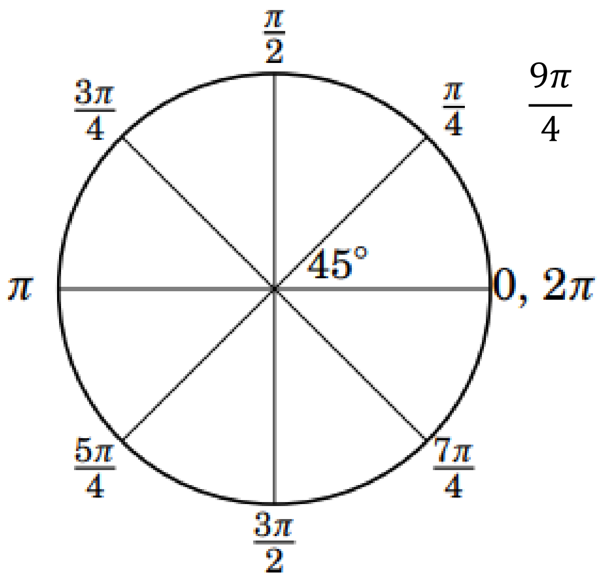


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
$45°$
π
$0, 2\pi$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

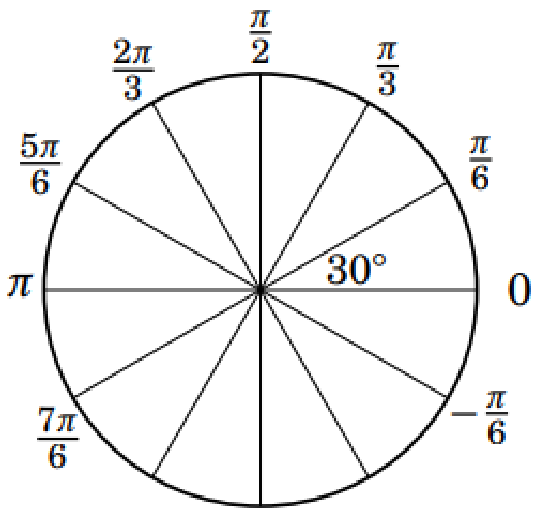


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$30°$
π
0
$\frac{7\pi}{6}$

Ακτίνια

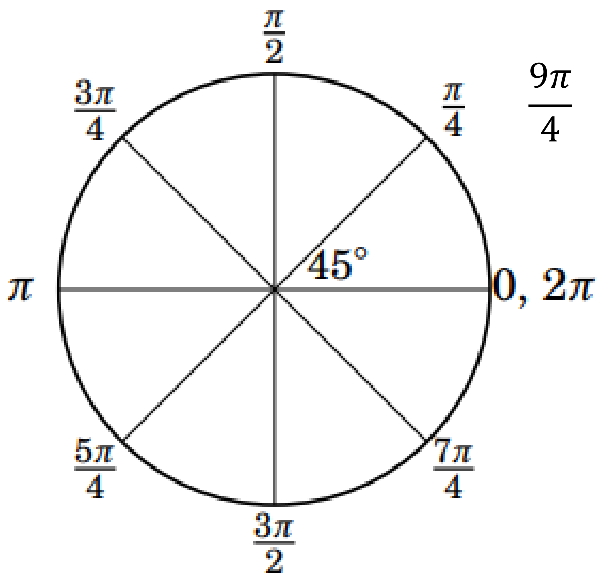


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
45°
π
$0, 2\pi$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

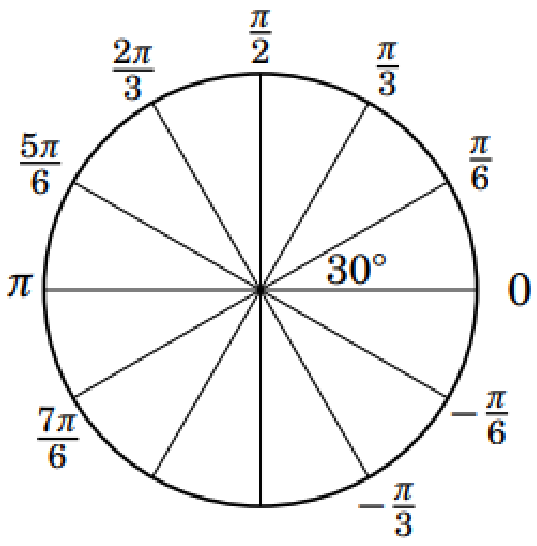


$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
30°
π
0
$\frac{7\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$

Ακτίνια

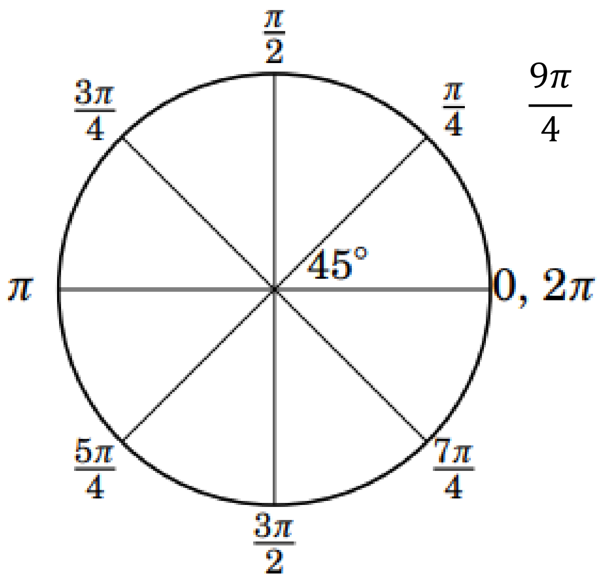


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
45°
π
0, 2π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

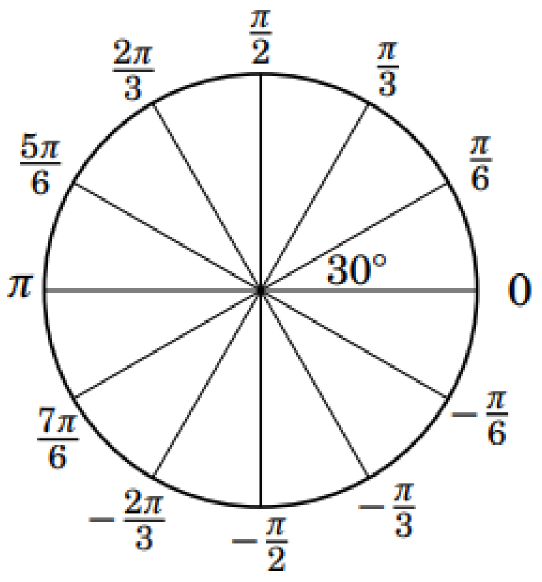


$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
30°
π
0
$\frac{7\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{3}$

Ακτίνια

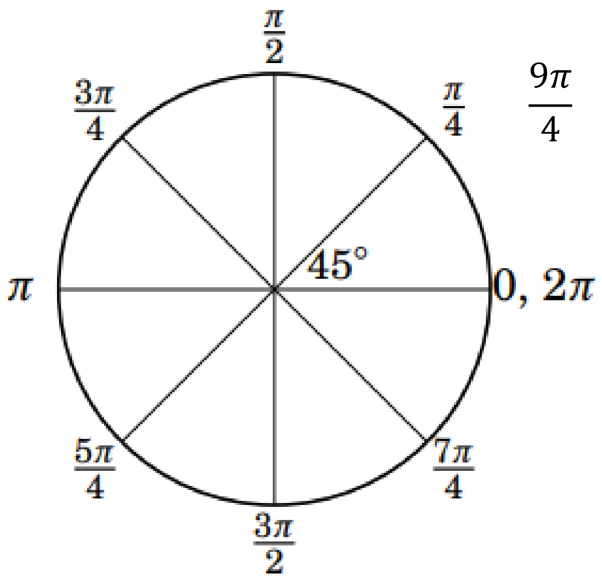


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
45°
π
0, 2π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

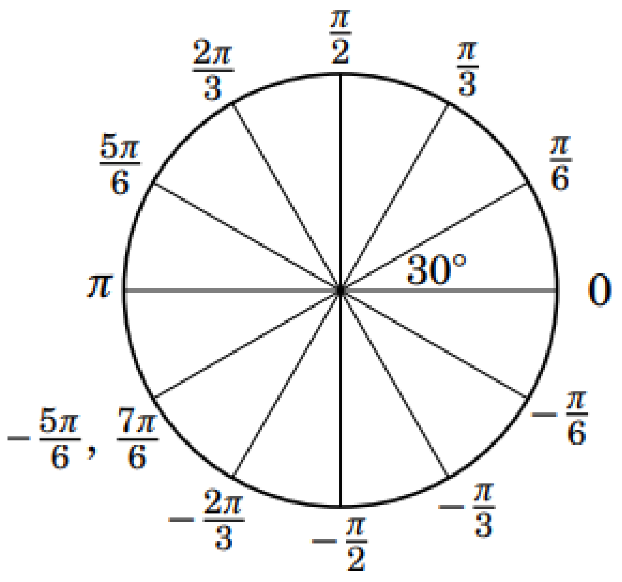


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
30°
π
0
$-\frac{\pi}{6}$
$\frac{7\pi}{6}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$

Ακτίνια

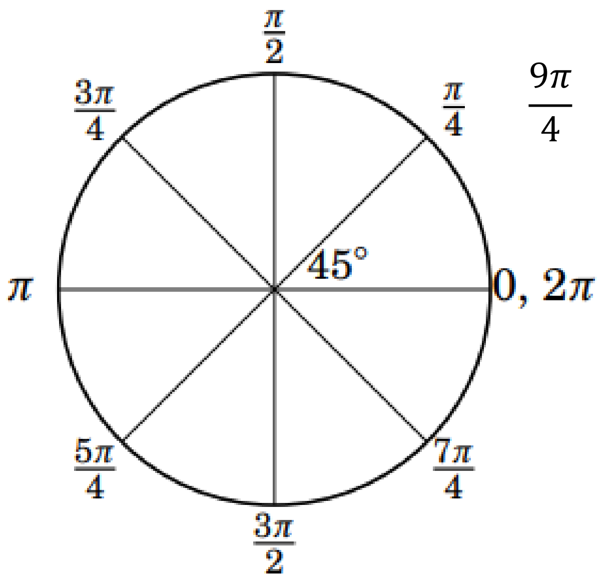


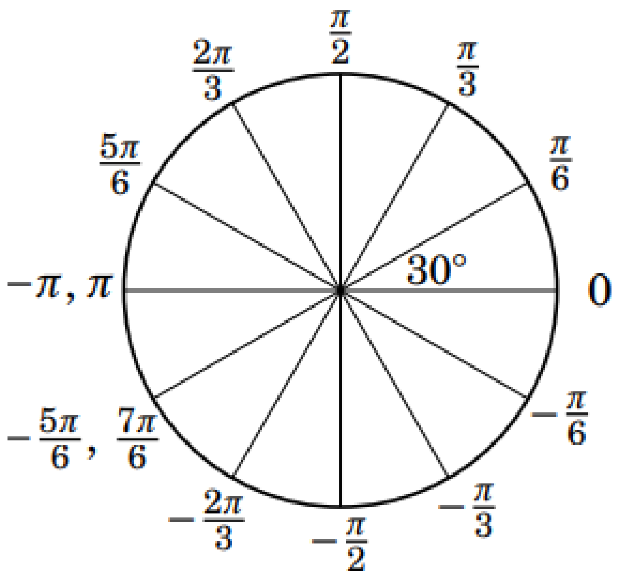
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
$45°$
π
$0,\ 2\pi$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$



$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$30°$
π
0
$-\frac{5\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$

Ακτίνια

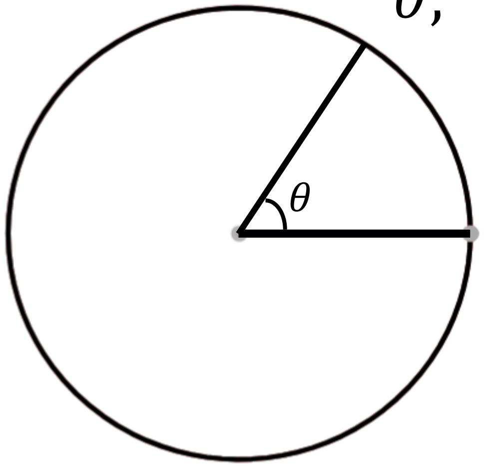

$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{9\pi}{4}$
$45°$
π
$0, 2\pi$
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$


$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{\pi}{6}$
$30°$
$-\pi, \pi$
0
$-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{6}$
$-\frac{2\pi}{3}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{3}$

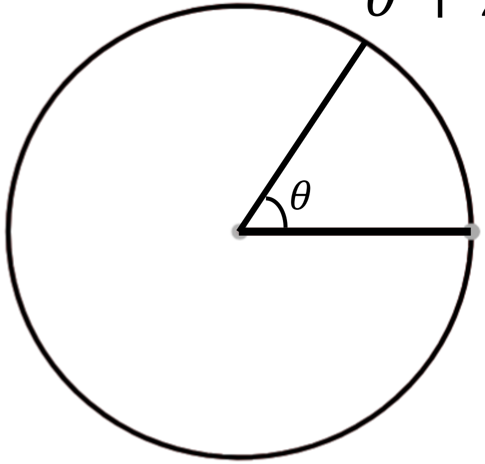
Ακτίνια

$\theta, \qquad \theta + 2\pi, \qquad \theta + 4\pi, \qquad \theta + 6\pi, \ldots, \qquad \theta + k2\pi, \ldots$

$\theta - 2\pi, \qquad \theta - 4\pi, \qquad \theta - 6\pi, \ldots, \qquad \theta - k2\pi, \ldots$

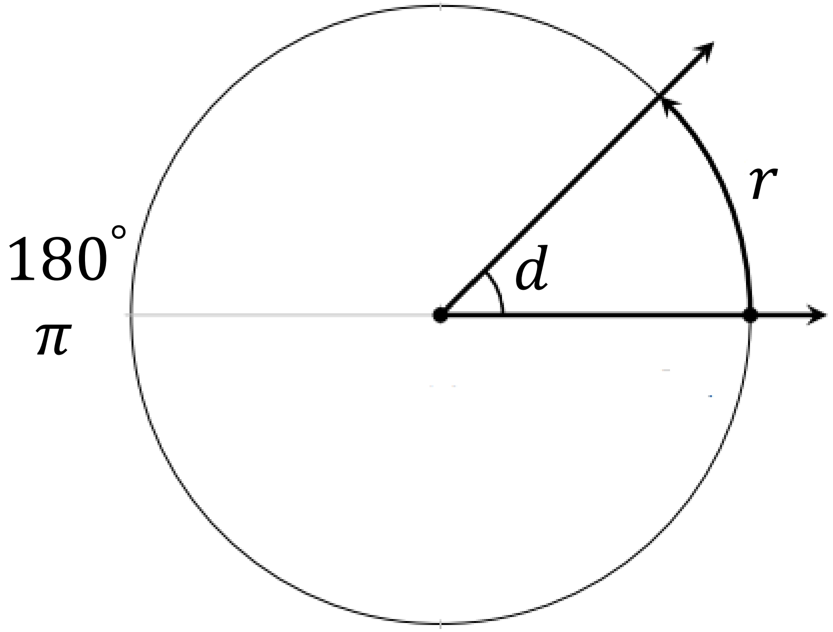


$\theta + 2k\pi$, για $k \in \mathbb{Z}$



Αν κάποιο σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο βρίσκεται στα θ ακτίνια, τότε είναι και στα $\theta + 2k\pi$ ακτίνια για $k \in \mathbb{Z}$

Μετατροπή από μοίρες d σε ακτίνια r



$$\boxed{\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{\pi}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\mathbf{180}}}$$

Λύνοντας ως προς r:

$$r = d\,\frac{\pi}{180}$$

Λύνοντας ως προς d:

$$d = r\,\frac{180}{\pi}$$

Παράδειγμα

- Ποιο θα είναι το μέτρο σε ακτίνια μιας γωνίας 75°;

$$\frac{r}{\pi} = \frac{d}{180} \rightarrow r = 75\,\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}\ rads$$

- Ποιο θα είναι το μέτρο σε μοίρες μιας γωνίας $\frac{2\pi}{3}$ rads;

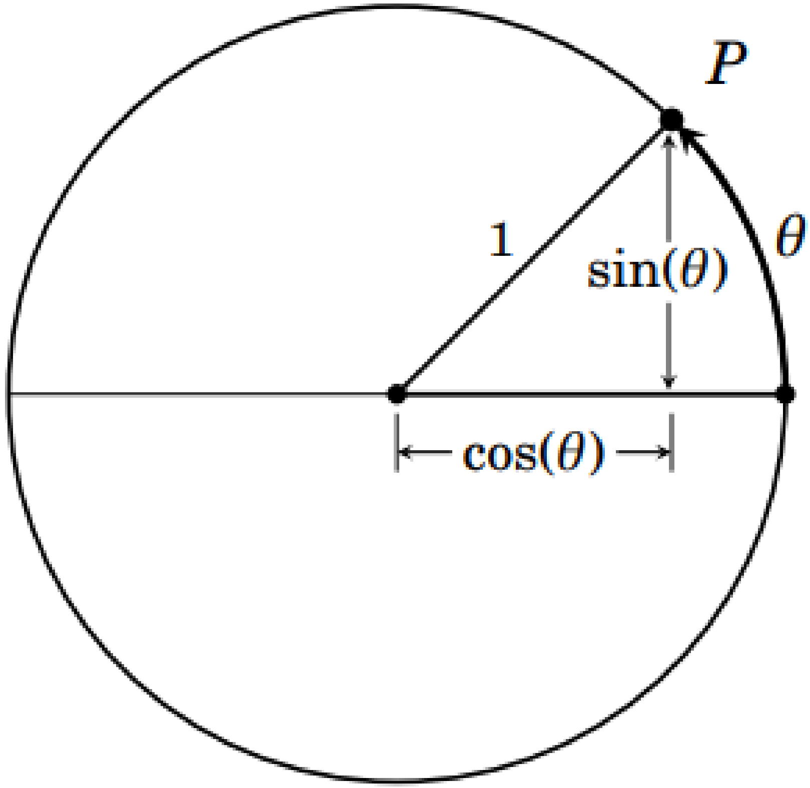
$$\frac{r}{\pi} = \frac{d}{180} \rightarrow d = \frac{2\pi}{3}\frac{180}{\pi} = 120^{o}$$

Οι συναρτήσεις sin και cos

Ορισμός: Έστω ένας πραγματικός αριθμός θ και έστω P το σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο σε απόσταση θ ακτίνια. Ορίζουμε το **ημίτονο** $\sin(\theta)$ και το **συνημίτονο** $\cos(\theta)$ της γωνίας θ ως

$\sin(\theta) =$ η τεταγμένη y του σημείου P

$\cos(\theta)$= η τετμημένη x του σημείου P.

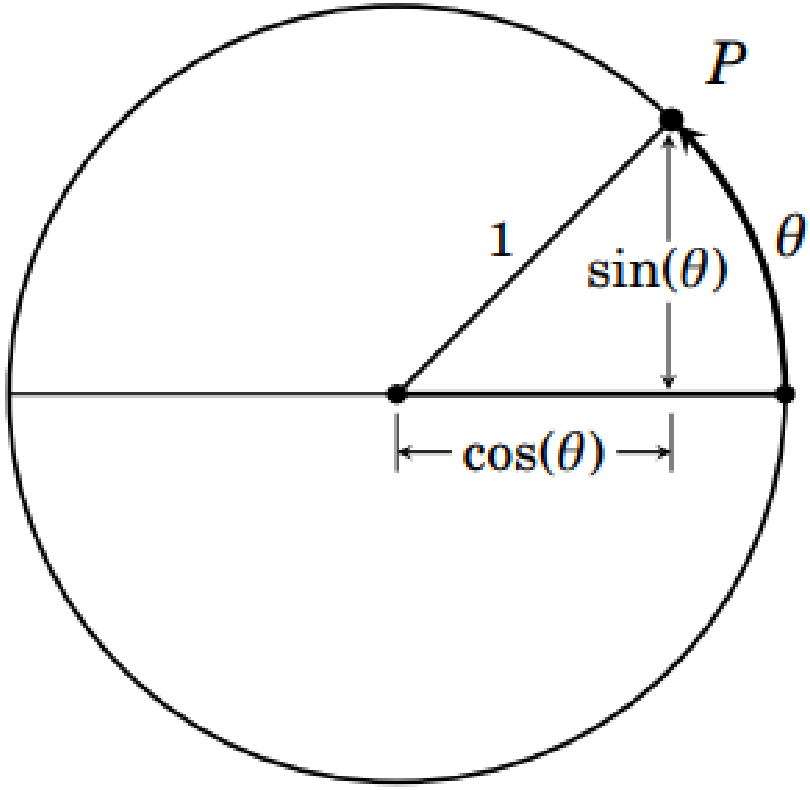


Οι συναρτήσεις sin και cos

Ορισμός: Έστω ένας πραγματικός αριθμός θ και έστω P το σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο σε απόσταση θ ακτίνια. Ορίζουμε το **ημίτονο** $\sin(\theta)$ και το **συνημίτονο** $\cos(\theta)$ της γωνίας θ ως

$\sin(\theta) =$ η τεταγμένη y του σημείου P

$\cos(\theta)$= η τετμημένη x του σημείου P.



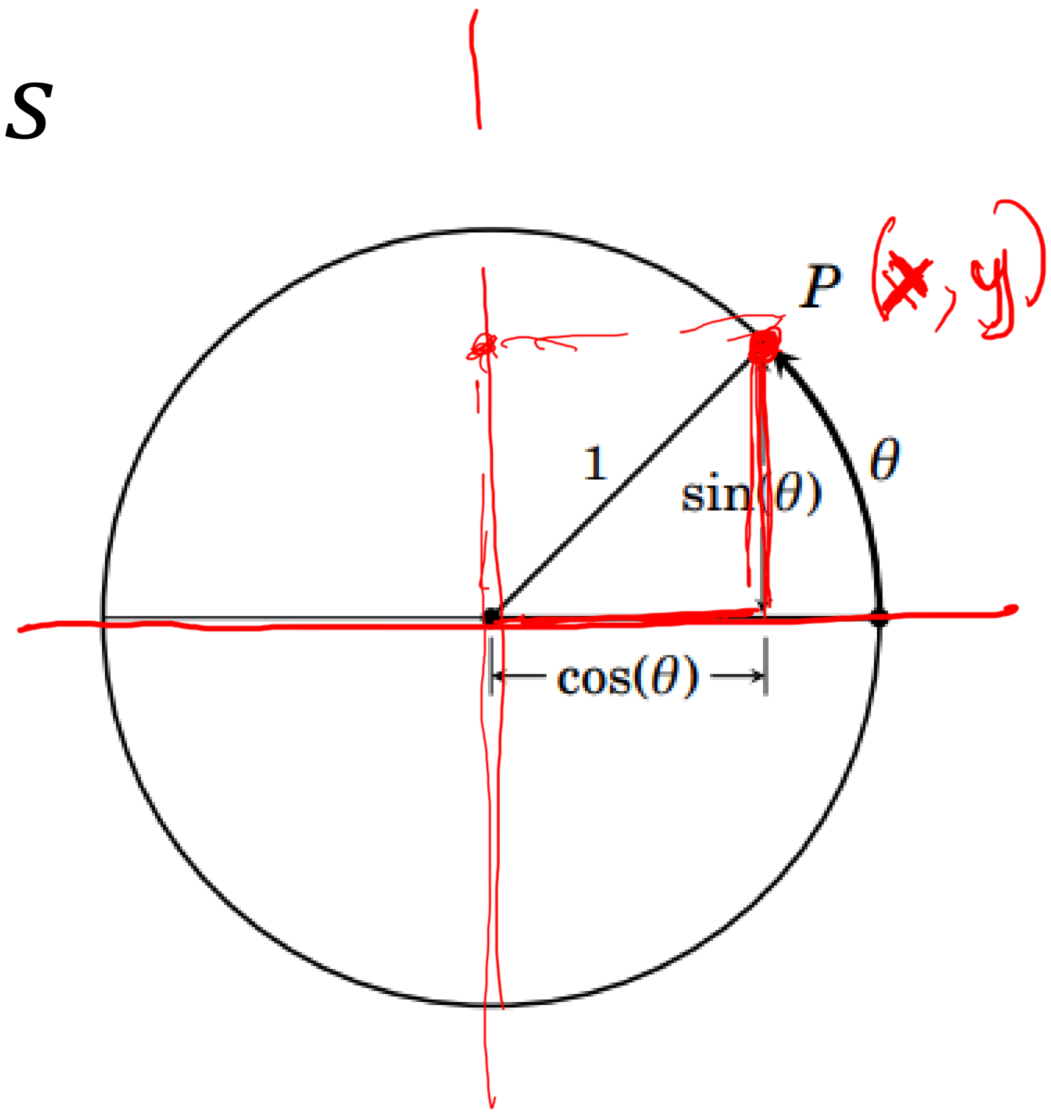
Αφού ο θ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων sin και cos είναι όλο το $\mathbb{R}$

Οι συναρτήσεις sin και cos

Ορισμός: Έστω ένας πραγματικός αριθμός θ και έστω P το σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο σε απόσταση θ ακτίνια. Ορίζουμε το **ημίτονο** $\sin(\theta)$ και το **συνημίτονο** $\cos(\theta)$ της γωνίας θ ως

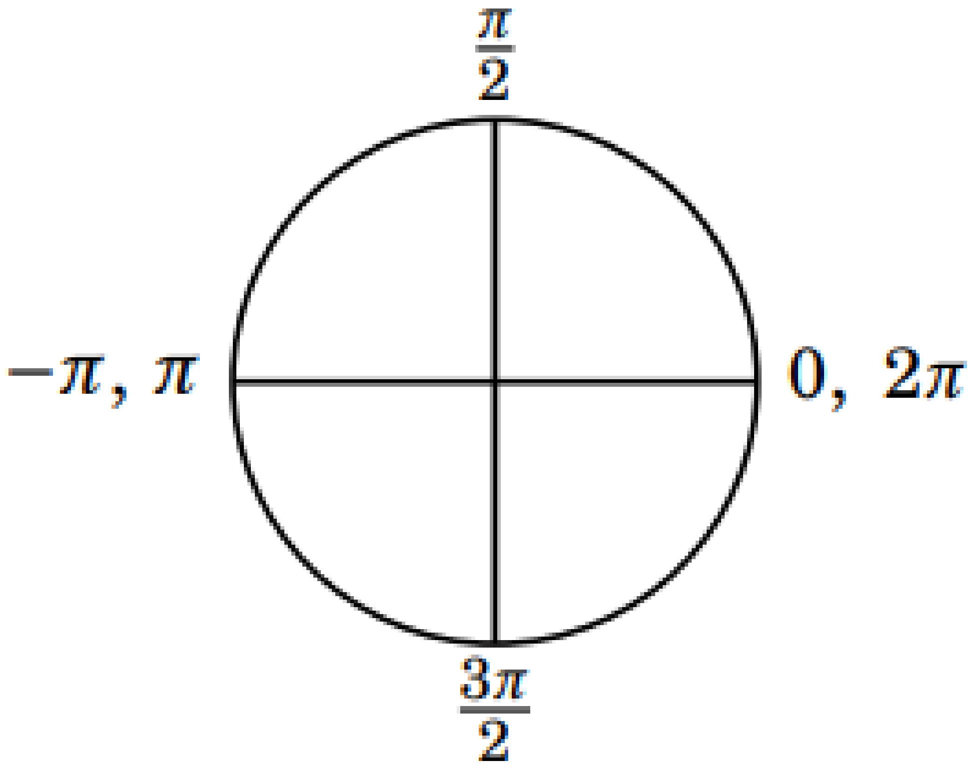
$\sin(\theta)$ = η τεταγμένη y του σημείου P

$\cos(\theta)$= η τετμημένη x του σημείου P.



Αφού ο θ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων sin και cos είναι όλο το $\mathbb{R}$

Παραδείγματα



$\cos(0) = 1, \qquad \sin(0) = 0$

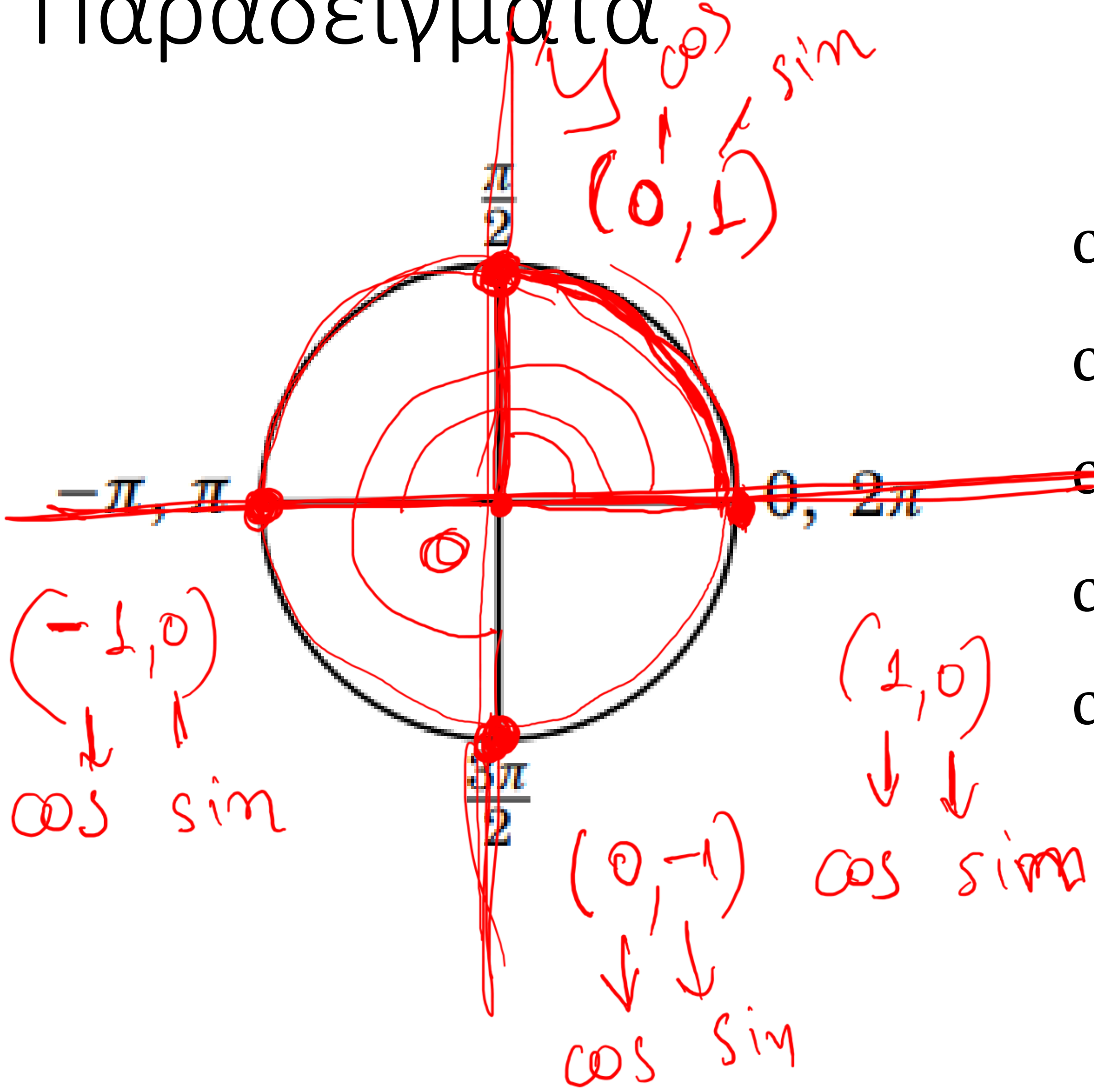
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0$

$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$\cos(2\pi) = 1, \qquad \sin(2\pi) = 0$

Παραδείγματα



$$\cos(0) = 1, \qquad \sin(0) = 0$$

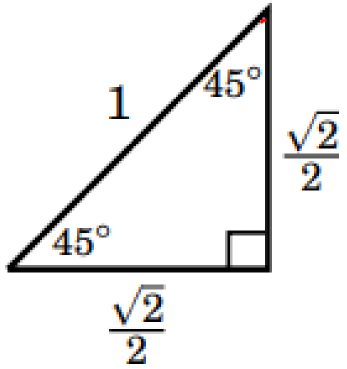
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

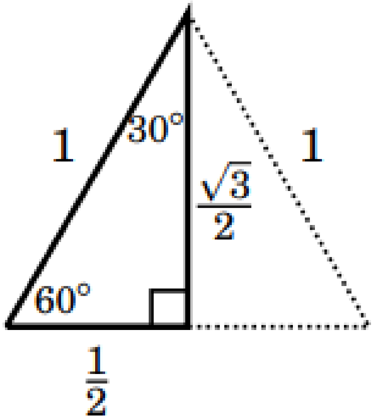
$$\cos(\pi) = -1, \qquad \sin(\pi) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

$$\cos(2\pi) = 1, \qquad \sin(2\pi) = 0$$

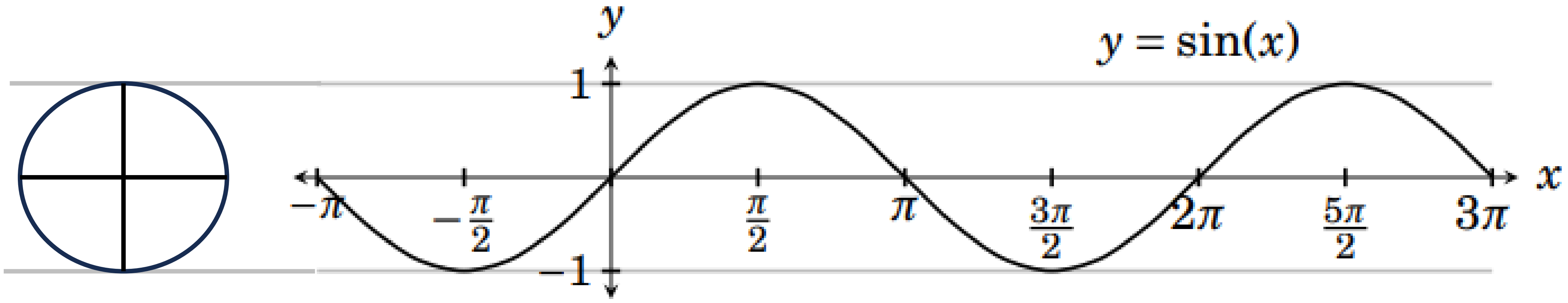
Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών τόξων





Μοίρες	Ακτίνια	Ημίτονο	Συνημίτονο
$0°$	0	0	1
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0

Γραφική παράσταση της συνάρτησης sin

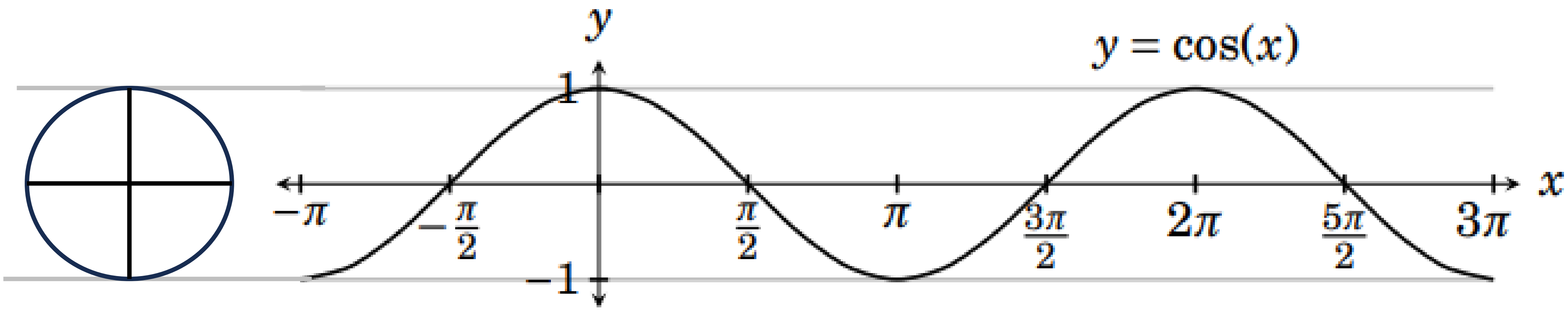


Πεδίο Ορισμού: $-\infty < x < +\infty$

Σύνολο τιμών: $-1 \leq y \leq 1$

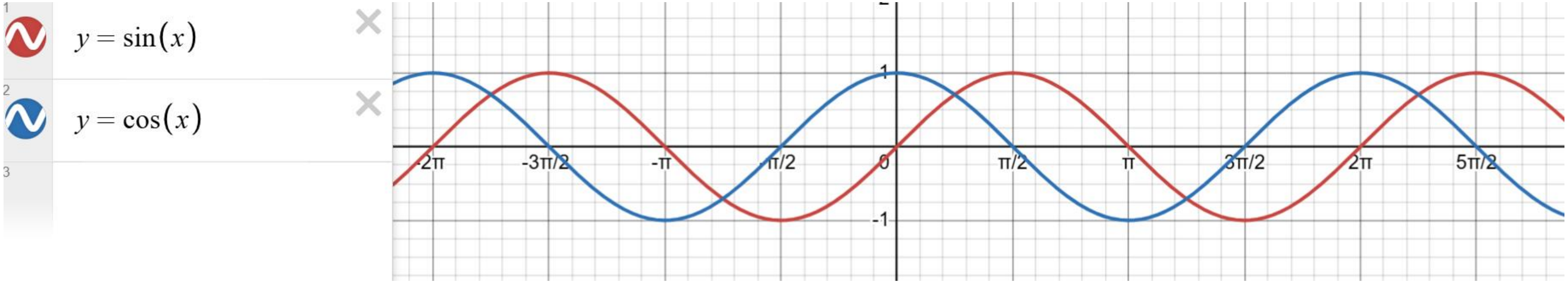
Περίοδος: 2π

Γραφική παράσταση της συνάρτησης cos



Πεδίο Ορισμού: $-\infty < x < +\infty$
Σύνολο τιμών: $-1 \leq y \leq 1$
Περίοδος: 2π

Σχέση μεταξύ cos, sin



$$\boxed{\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Οι έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ημίτονο: $\sin(x)$,

Συνημίτονο: $\cos(x)$,

Τέμνουσα: $sec = \frac{1}{\cos(x)}$,

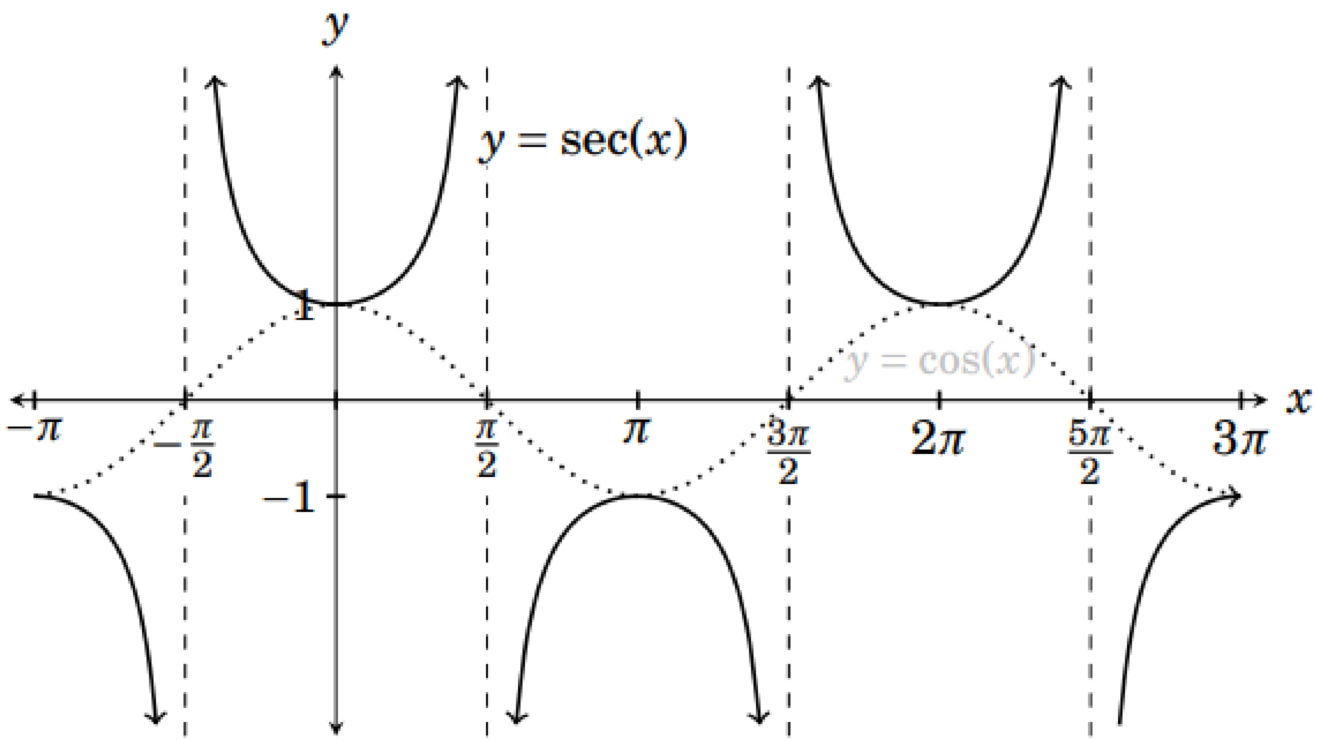
Συντέμνουσα: $csc = \frac{1}{\sin(x)}$,

Εφαπτομένη: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

Συνεφαπτομένη: $cot = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Γραφικές Παραστάσεις

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$



Πεδίο Ορισμού: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}. \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Σύνολο τιμών: $y \leq -1$ και $y \geq 1$

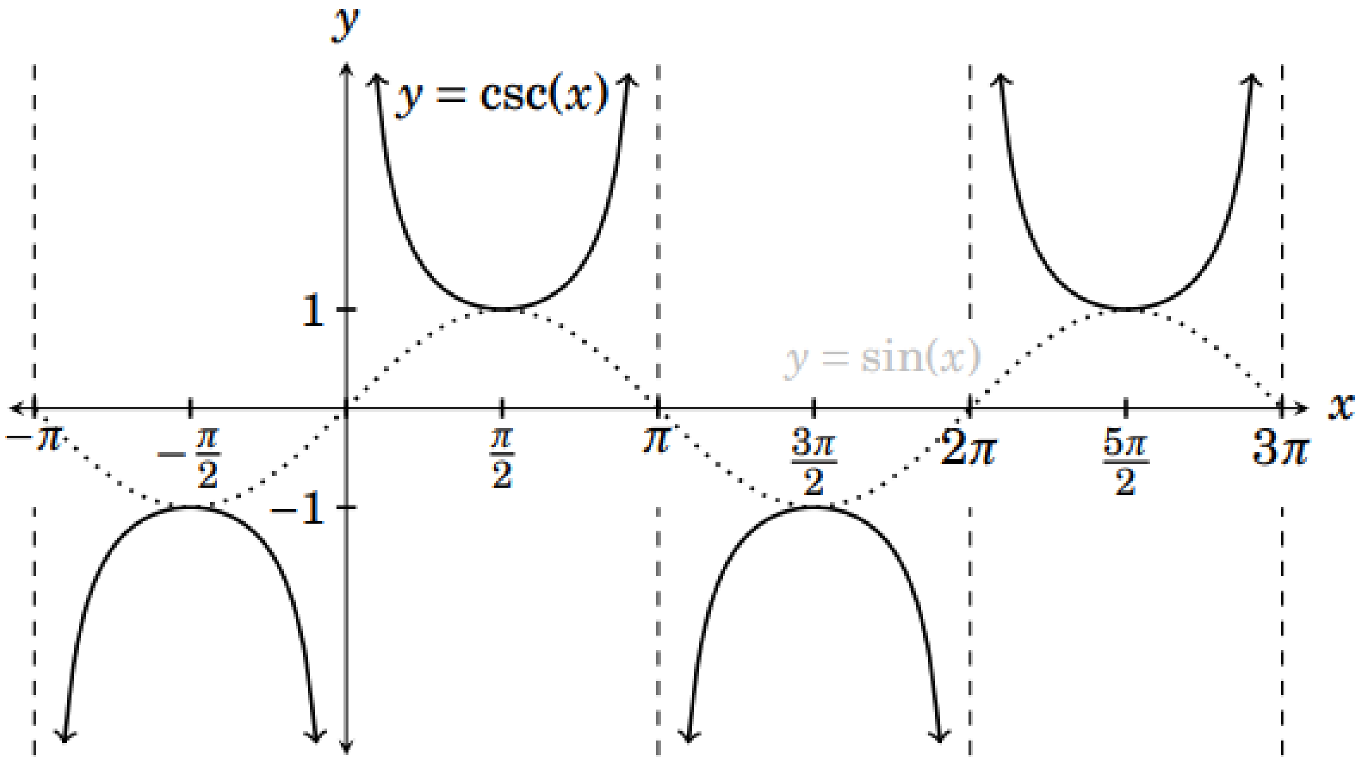
Περίοδος: 2π

Κατακόρυφες ασυμπτωτες:

$x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}^*$

Γραφικές Παραστάσεις

$$csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$$

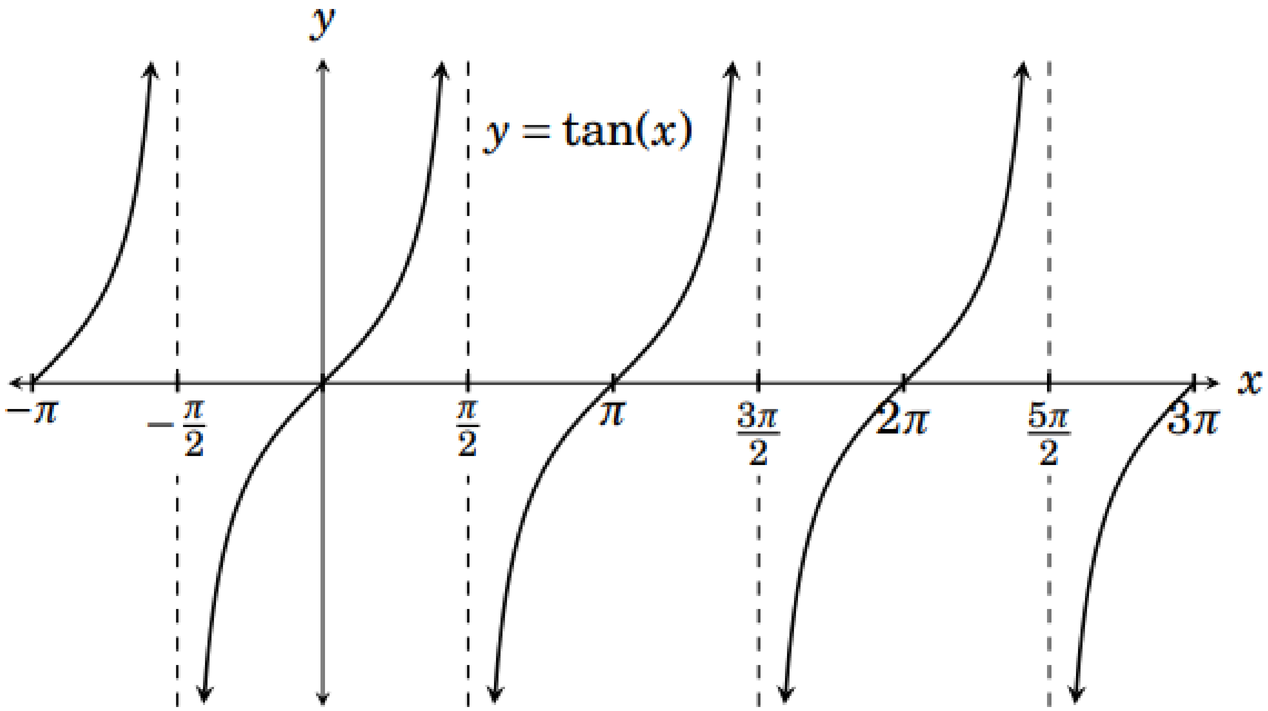


Πεδίο Ορισμού: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Σύνολο τιμών: $y \leq -1$ και $y \geq 1$
Περίοδος: 2π

Κατακόρυφες ασυμπτωτες: $x = k\pi$

Η συνάρτηση εφαπτομένη $\tan x$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Πεδίο Ορισμού: $x \neq \pm\frac{\pi}{2}.\pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

Σύνολο τιμών: $-\infty < y < +\infty$

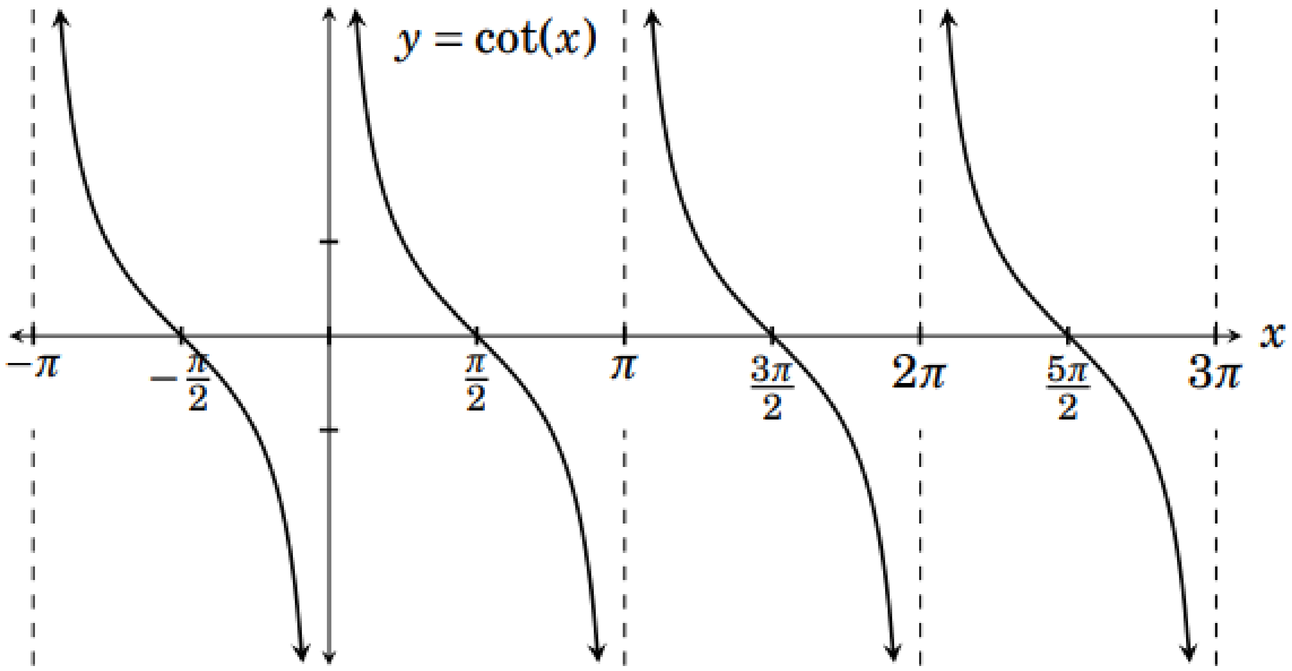
Περίοδος: π

Κατακόρυφες ασυμπτωτες:

$x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}^*$

Η συνάρτηση συνεφαπτομένη $\cot x$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$



Πεδίο Ορισμού: $x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$
Σύνολο τιμών: $-\infty < y < +\infty$
Περίοδος: π

Κατακόρυφες ασυμπτωτες: $x = k\pi$

Ιδιότητες άρτιων και περιττών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- Οι συναρτήσεις **ημιτόνου, εφαπτομένης, συνεφαπτομένης** και **συντέμνουσας** είναι **περιττές** και συνεπώς η γραφική τους παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
- Οι συναρτήσεις **συνημίτονου** και **τέμνουσας** είναι **άρτιες** και συνεπώς η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα yy'

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

- **Τριγωνομετρική** είναι μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος βρίσκεται μέσα σε τριγωνομετρική συνάρτηση
- Η εξίσωση

$$3\tan x = -2$$

είναι τριγωνομετρική εξίσωση

- Ενώ η εξίσωση

$$x + 2 = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

δεν είναι τριγωνομετρική εξίσωση

Επίλυση απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων

Εξίσωση	Λύσεις
$\sin x = \sin\theta$	$x = 2k\pi + \theta$ ή $x = (2k+1)\pi - \theta$
$\cos x = \cos\theta$	$x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta$
$\tan x = \tan\theta$	$x = k\pi + \theta, \qquad k \in \mathbb{Z}$
$\cot x = \cot\theta$	$x = k\pi + \theta, \qquad k \in \mathbb{Z}$

Επίλυση απλών τριγωνομετρικών εξισώσεων

Βήματα επίλυσης τριγωνομετρικής εξίσωσης

1. Απομόνωση της τριγωνομετρικής συνάρτησης που περιέχει τον άγνωστο στο ένα μέλος
2. Εντοπισμός λύσης που ικανοποιεί την εξίσωση στο διάστημα 0 έως 2π
3. Χρήση των τύπων του παραπάνω πίνακα

Παράδειγμα:

$$2\cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$