Σήματα και Συστήματα

Ενότητα 6: Συνέλιξη

Εξάμηνο Διδασκαλίας: 3ο
Διδάσκων: Βασίλης Ασπιώτης
Email: v.aspiotis@uoi.gr

Στο προηγούμενο μάθημα...

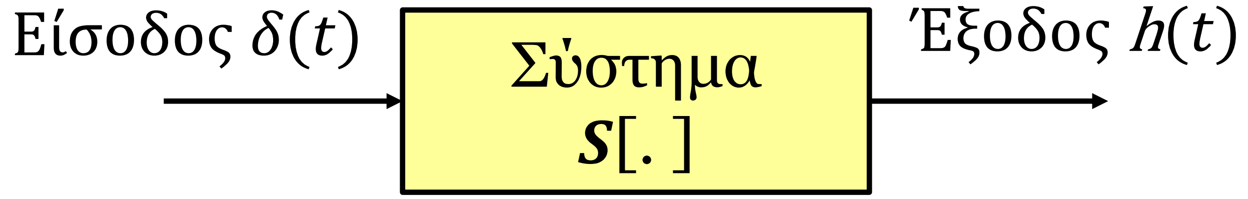
- Η Κρουστική Απόκριση των Γραμμικών και Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων
- Το Ολοκλήρωμα της Συνέλιξης σε Γραμμικά και Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα
- Αναλυτικός Υπολογισμός της Συνέλιξης
- Ιδιότητες της Συνέλιξης
  - Αντιμεταθετική ιδιότητα
  - Προσεταιριστική ιδιότητα
  - Επιμεριστική ιδιότητα
  - Ταυτοτική ιδιότητα
  - Ιδιότητα Ομογένειας
  - Ιδιότητα Εύρους
- Γραφικός Υπολογισμός της Συνέλιξης

Η κρουστική απόκριση

- **Κρουστική απόκριση** (impulse response) ονομάζεται η έξοδος που παράγει ένα σύστημα όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$.

- Αν το σύστημα είναι **Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο** (ΓΧΑ), η κρουστική απόκριση $h(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$h(t) = \boldsymbol{S}[\delta(t)]$$



Συνέλιξη σε ΓΧΑ Συστήματα

- Αποδεικνύεται ότι η έξοδος $y(t)$ ενός **ΓΧΑ συστήματος** που βρίσκεται σε αρχική ηρεμία και έχει κρουστική απόκριση $h(t)$, όταν στην είσοδό του εφαρμοστεί το σήμα $x(t)$, δίνεται από:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Το ολοκλήρωμα ονομάζεται ***συνέλιξη*** (convolution) ή δίπλωση ή συνελικτικό ολοκλήρωμα μεταξύ των συναρτήσεων x(t) και h(t) και συμβολικά γράφεται ως:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Η Συνέλιξη αναλυτικά

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- Το ολοκλήρωμα έχει ως μεταβλητή το τ ! ΌΧΙ το t. Το t το θεωρούμε σταθερό μέσα στο ολοκλήρωμα.
- Το ολοκλήρωμα περιέχει δυο σήματα : το $x(\tau)$ και το $h(t-\tau)$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας : *ανάκλαση* και *μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής :

$$h(t)\rightarrow h(\tau)\rightarrow h(-\tau)\rightarrow h(-\tau+t)=h(t-\tau)$$

- Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x(\tau)$ και ολοκληρώνεται ως προς τ.
- Συνήθως προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης.

Αναλυτικός Υπολογισμός Συνέλιξης

- Ο αναλυτικός υπολογισμός χρησιμοποιείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ μπορούν **να παρασταθούν από απλές αναλυτικές εκφράσεις**.

- Ιδιαίτερη **προσοχή** απαιτείται όταν οι συναρτήσεις $x(t)$ και $h(t)$ είναι **ασυνεχείς ή διαθέτουν διαφορετική αναλυτική παράσταση για διάφορα διαστήματα χρόνου**.

- Αν δοθούν δύο συναρτήσεις $x(\tau)$ και $h(t-\tau)$ που ορίζονται αντίστοιχα στα διαστήματα $\{L_1, U_1\}$ και $\{L_2, U_2\}$ επιλέγουμε σαν κάτω όριο ολοκλήρωσης το $max(L_1, L_2)$ και σαν άνω όριο ολοκλήρωσης το $max(U_1, U_2)$.

Αναλυτικός Υπολογισμός Συνέλιξης

- Τα όρια L και U της συνάρτησης $x(\tau)$ δεν μεταβάλλονται, ενώ αντίθετα τα όρια της συνάρτησης $h(t-\tau)$ μεταβάλλονται καθώς μεταβάλλεται το t.

- Η **γραφική απεικόνιση** των συναρτήσεων βοηθά στην εύρεση των σωστών ορίων ολοκλήρωσης.

Αντιμεταθετική Ιδιότητα

- Η αντιμεταθετική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

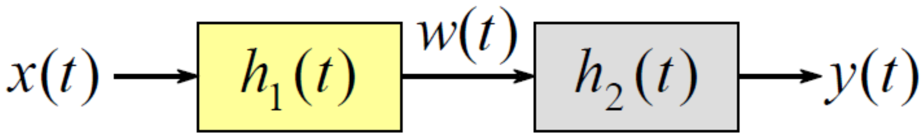
$$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t)$$

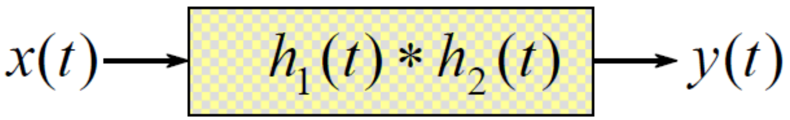
- Η φυσική σημασία της ιδιότητας φαίνεται στο σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως αν δύο συστήματα είναι συνδεδεμένα σε σειρά τότε μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά σύνδεσής τους χωρίς να αλλάξει η τελική έξοδος $y(t)$.

Προσεταιριστική Ιδιότητα

- Η προσεταιριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$h_2(t) * [h_1(t) * x(t)] = [h_2(t) * h_1(t)] * x(t)$$



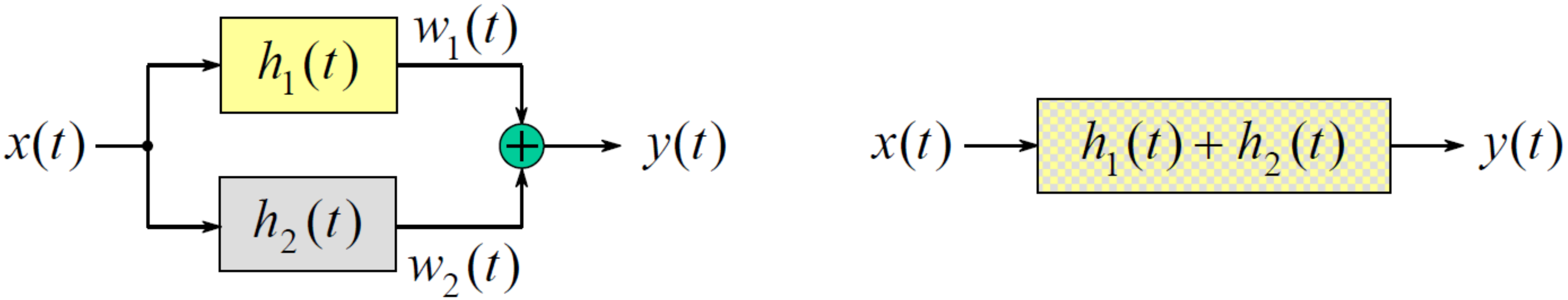


- Η φυσική σημασία της προσεταιριστικής ιδιότητας φαίνεται στο σχήμα, από το οποίο προκύπτει πως όταν δύο συστήματα συνδέονται σε σειρά μπορούν να αντικατασταθούν με ένα τρίτο σύστημα, το οποίο έχει κρουστική απόκριση ίση με τη συνέλιξη των κρουστικών αποκρίσεων των δύο σε σειρά συνδεμένων συστημάτων.

Επιμεριστική Ιδιότητα

- Η επιμεριστική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) = [h_1(t) + h_2(t)] * x(t)$$



- Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας φαίνεται στο σχήμα, από το οποίο προκύπτει αν δύο συστήματα συνδεθούν παράλληλα τότε μπορούν να αντικατασταθούν από ένα τρίτο σύστημα, του οποίου η κρουστική απόκριση είναι ίση με το άθροισμα των κρουστικών αποκρίσεων.

Ταυτοτική Ιδιότητα

- Η ταυτοτική ιδιότητα περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t)$$

- Η ταυτοτική ιδιότητα υποδηλώνει ότι η μοναδιαία κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ είναι το **ουδέτερο** στοιχείο της πράξης της συνέλιξης.
- Κατ' αναλογία, ισχύει και η ακόλουθη ιδιότητα, η οποία χρησιμοποιείται στη διαδικασία της διαμόρφωσης:

$$\boxed{x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)}$$

Λοιπές Ιδιότητες

- Η **ιδιότητα της ομογένειας** περιγράφεται από τη σχέση:

$$[\alpha x(t)] * h(t) = \alpha[x(t) * h(t)] = x(t) * [\alpha h(t)]$$

- Η **ιδιότητα του εύρους** αναφέρει ότι η χρονική διάρκεια της συνέλιξης $z(t) = x(t) * y(t)$ δύο σημάτων συνεχούς χρόνου $x(t)$ και $y(t)$ με διάρκεια T_1 και T_2, αντίστοιχα, ισούται με το άθροισμα των χρόνων $T_1 + T_2$.

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. **Ανάκλαση της $\boldsymbol{h(\tau)}$.** Αντιστρέφουμε την κρουστική απόκριση $h(\tau)$ και παράγουμε την $h(-\tau)$.

2. **Χρονική μετατόπιση της $\boldsymbol{h(-\tau)}$ κατά $\boldsymbol{t}$.** Μετατοπίζουμε την $h(-\tau)$ κατά t και έτσι προσδιορίζουμε την $h(t - \tau)$.

3. **Πολλαπλασιασμός της $\boldsymbol{h(t - \tau)}$ με την είσοδο $\boldsymbol{x(\tau)}$**, ώστε να υπολογίσουμε το γινόμενο $x(\tau)\, h(t - \tau)$.

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

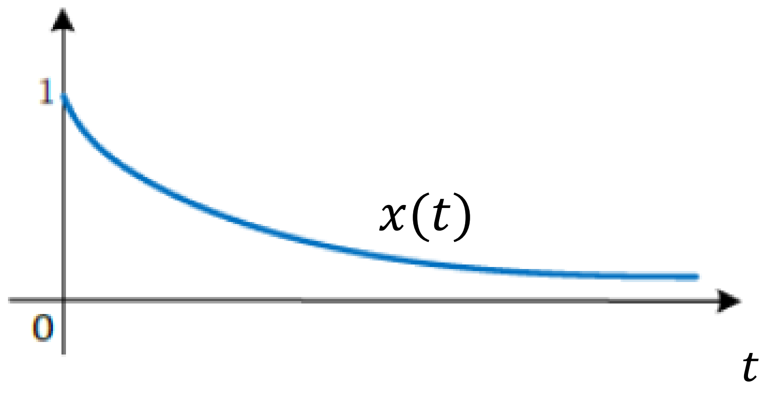
Για να υπολογίσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με τη βοήθεια της συνέλιξης $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

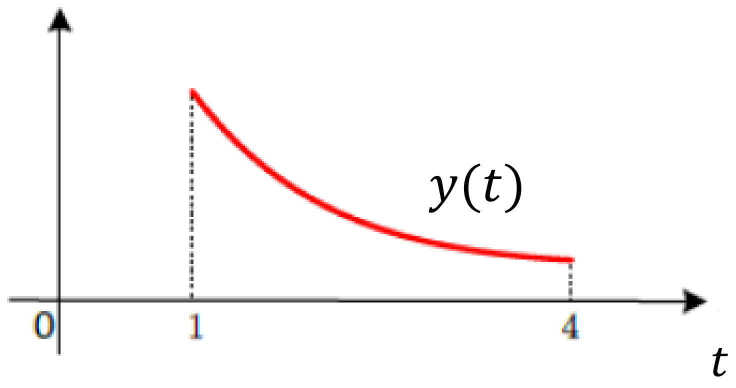
4. **Ολοκλήρωση** ή Εμβαδομέτρηση. Ολοκληρώνουμε το γινόμενο αυτό (ή υπολογίζουμε το εμβαδό του σήματος που δημιουργείται από τη γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου). Το αποτέλεσμα είναι ίσο με την έξοδο του συστήματος $y(t)$ κατά τη χρονική στιγμή t, δηλ. κατά την ποσότητα της μετατόπισης στο βήμα 2.

5. **Επανάληψη**. Τα βήματα αυτά επαναλαμβάνονται για τις διάφορες τιμές του χρόνου t, δηλ. $-\infty < t < +\infty$.

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Έστω ότι έχουμε τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$ των οποίων ζητάμε τη συνέλιξη $c(t)$





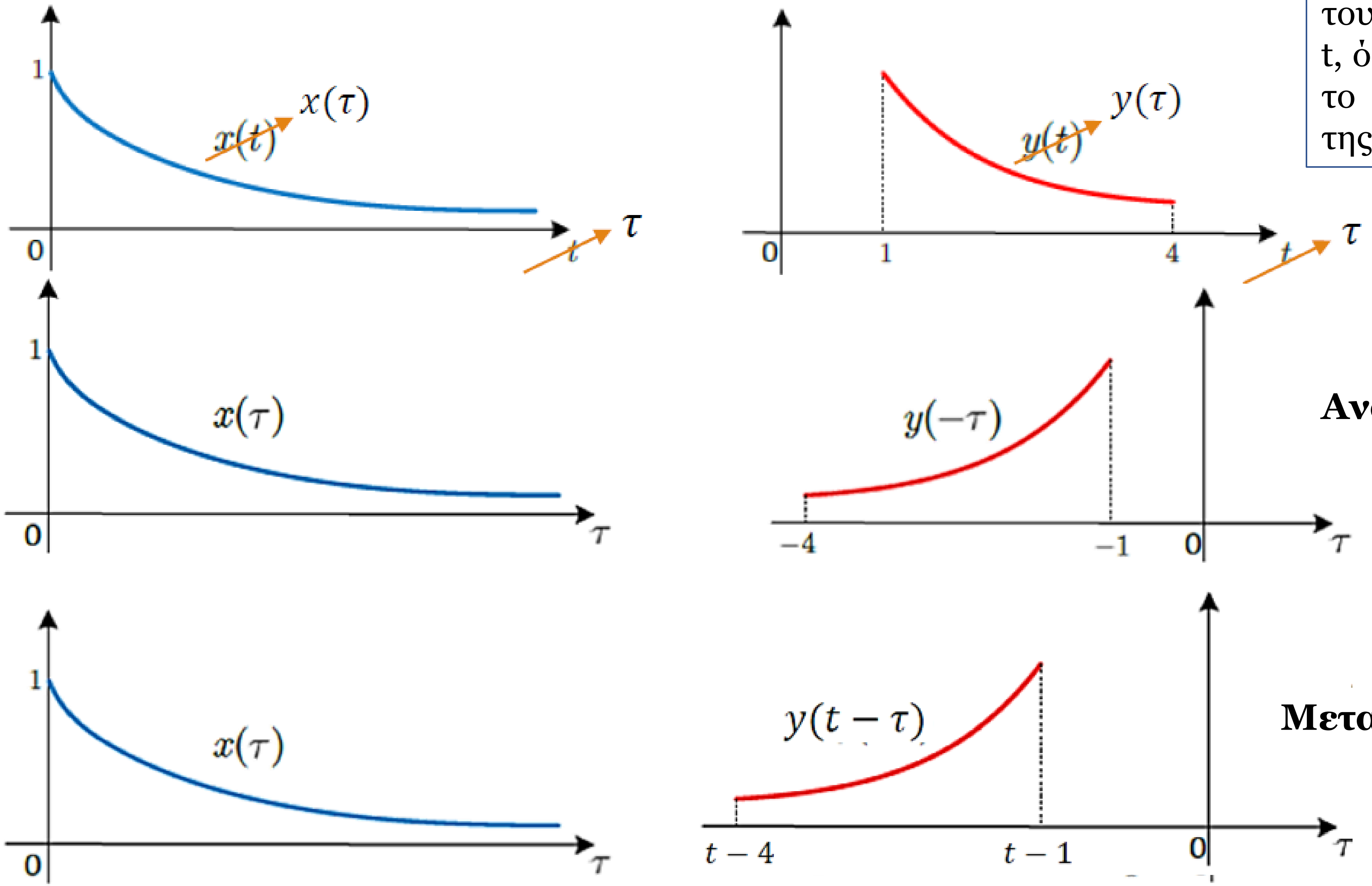
Η πράξη της συνέλιξης ζητά ένα εκ των δυο σημάτων να υποστεί χρονική αντιστροφή και στη συνέχεια χρονική μετατόπιση.

- Έστω ότι το $y(t)$ θα είναι αυτό το σήμα (επιλέγουμε πάντα το πιο εύκολο σήμα)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

τα δυο σήματα, είναι συναρτήσει του **τ** και όχι του t, όπως επιτάσσει το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

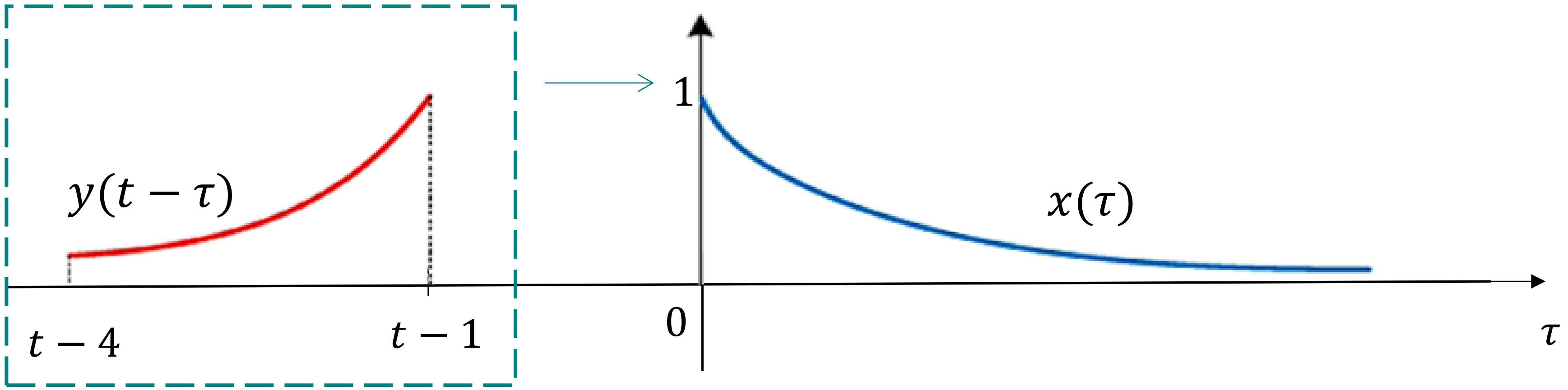


Ανάκλαση

Μετατόπιση

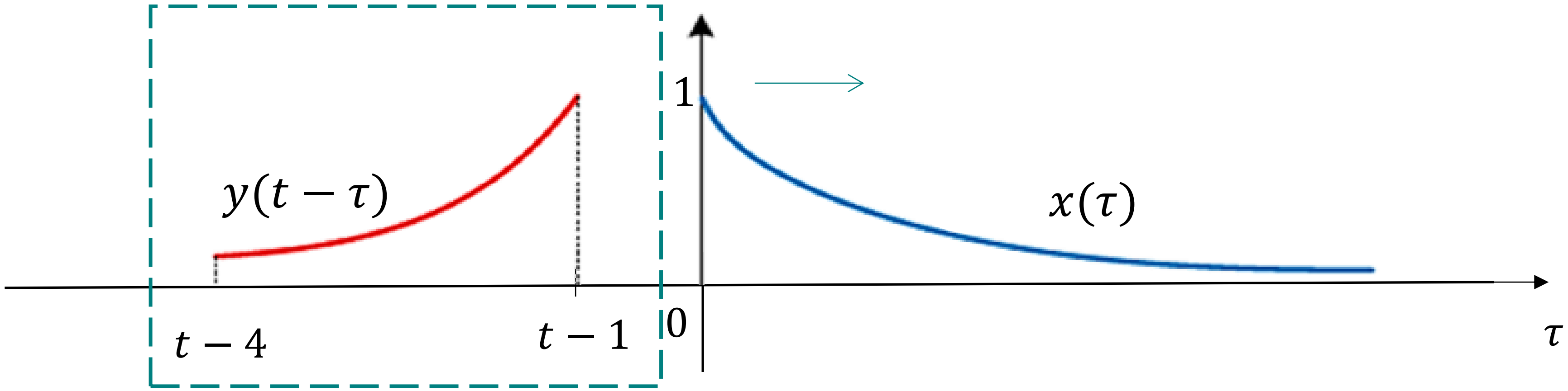
Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t{-}\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



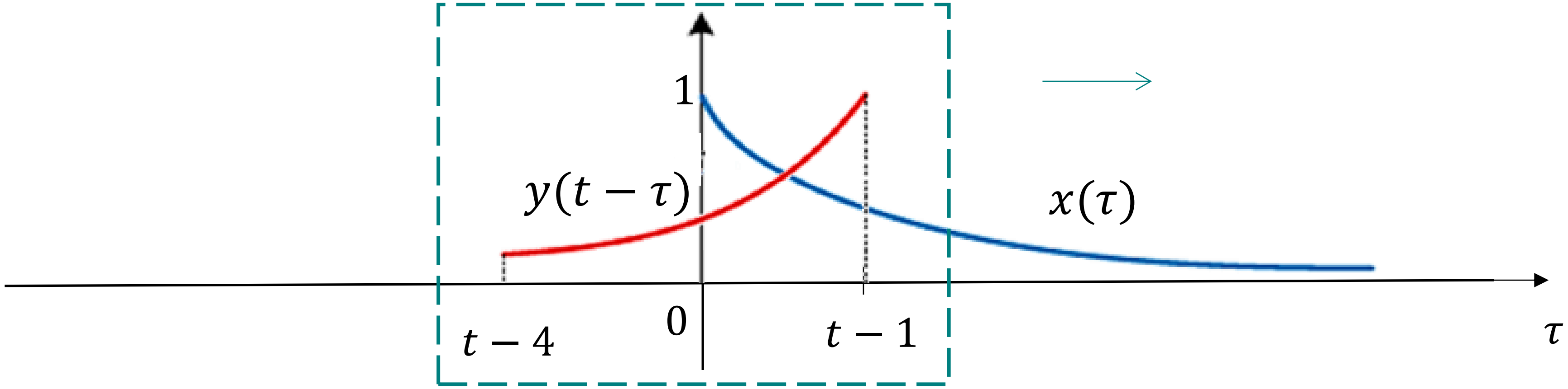
- Στην παραπάνω περίπτωση

$$t-1<0 \Rightarrow t<1 \text{ και } c(t)=0$$

αφού τα δυο σήματα δεν επικαλύπτονται σε κοινό διάστημα.

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

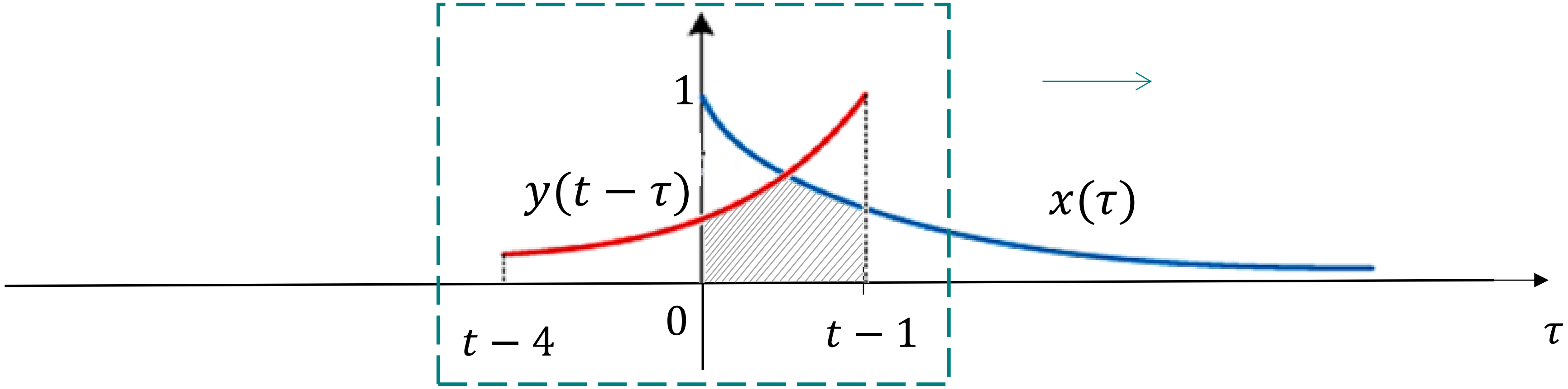
Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Στην πορεία το $y(t-\tau)$ συναντάει κάποια στιγμή το $x(\tau)$.
- Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης.

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t{-}\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$

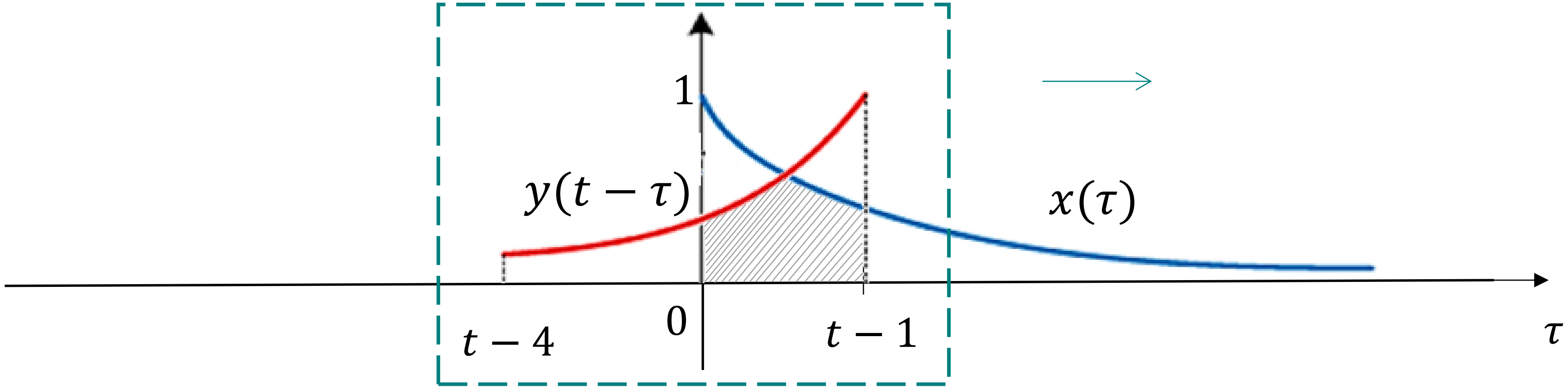


- Αυτές οι χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του $y(t-\tau)$ συναντά το αριστερό άκρο του $x(\tau)$ και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του $y(t-\tau)$ ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν

$$t-1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t \geq 1} \quad \text{και} \quad t-4 \leq 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{t \leq 4} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{1 < t < 4}$$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t{-}\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$

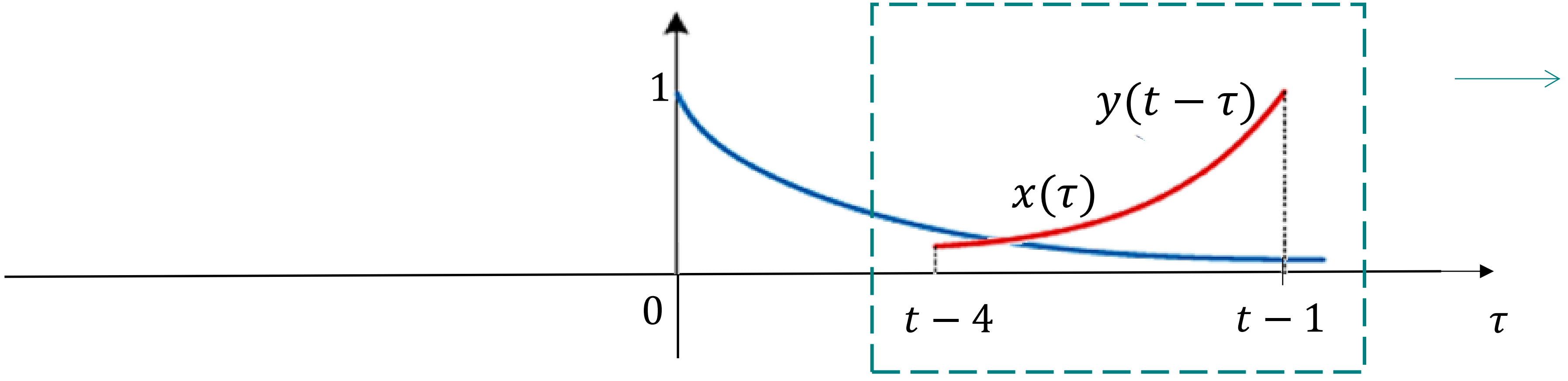


- Οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται **από 0 έως $t-1$**, εκεί δηλαδή που υπάρχει το γινόμενο μεταξύ των δύο σημάτων ως

$$c(t) = \int_{0}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \dots$$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t{-}\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$

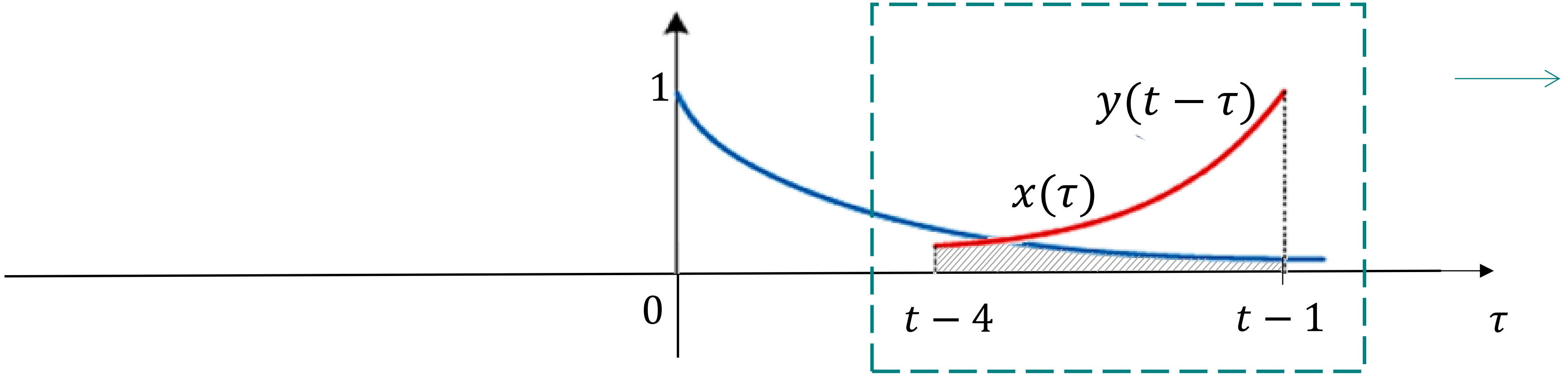


- Έπειτα το $y(t-\tau)$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $x(\tau)$, πράγμα που δεν έχει συμβεί μέχρι τώρα, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της $y(t-\tau)$ περάσει το 0, δηλαδή όταν

$$t-4>0\Rightarrow \boldsymbol{t>4}$$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau' \tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t{-}\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

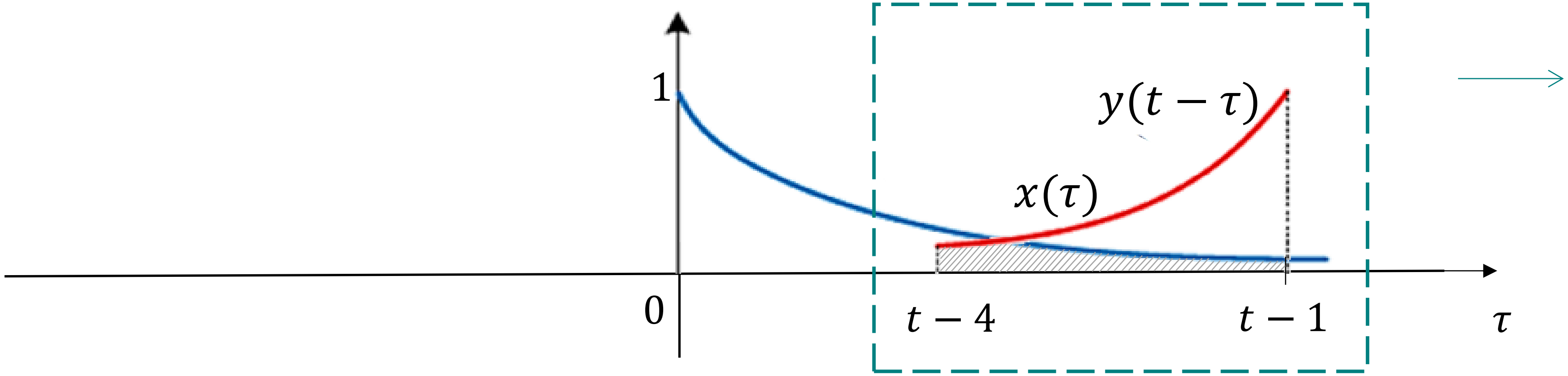
$$c(t) = \int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \dots$$

όπου αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις των σημάτων, και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα.

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης

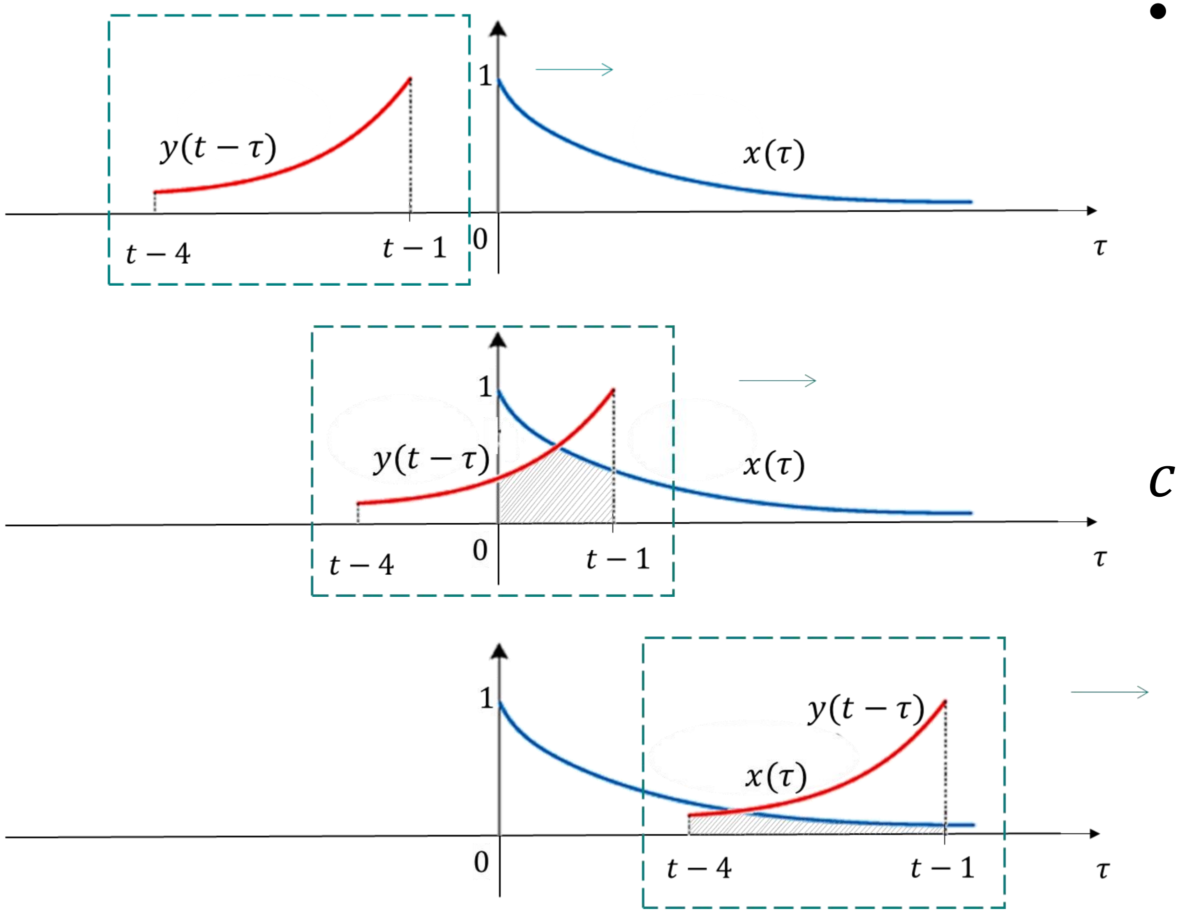
Τοποθετούμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα $\tau'\tau$ και ολισθαίνουμε το $y(t-\tau)$ από το $-\infty$ ως το $+\infty$



- Το αποτέλεσμα ισχύει μόνο στο διάστημα $t \in (4, +\infty)$
- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο t εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

$$c(t) = 0\ ,\ \ t < 1$$

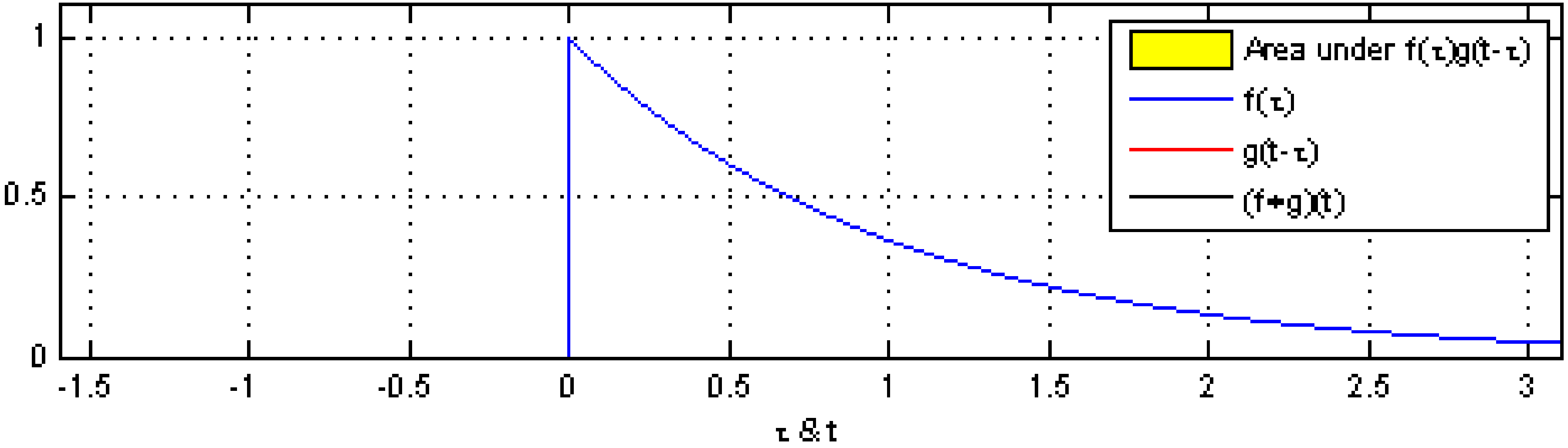
Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης



- Συνολικά, η συνέλιξη είναι:

$$c(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \displaystyle\int_{0}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau, & 1 < t < 4 \\ \displaystyle\int_{t-4}^{t-1} x(\tau)y(t-\tau)d\tau, & t > 4 \end{cases}$$

Γραφικός Υπολογισμός Συνέλιξης



Πίνακας Συνέλιξης

- Η διαδικασία της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από έτοιμους πίνακες συνέλιξης.
- Ο πίνακας αναφέρει διάφορα ζεύγη σημάτων και το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους και μπορεί να σας βοηθήσει για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων σας.

Χρήσιμα ζεύγη συνέλιξης

$\mathbf{x(t)}$	$\mathbf{y(t)}$	$\mathbf{x(t) * y(t)}$
$x(t)$	$\delta(t-T)$	$x(t-T)$
$e^{at}u(t)$	$u(t)$	$\frac{e^{at}-1}{a}u(t)$
$u(t)$	$u(t)$	$tu(t)$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}u(t),\ a \neq b$
$e^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$te^{at}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{2}t^2e^{at}u(t)$
$t^n u(t)$	$e^{at}u(t)$	$\frac{n!e^{at}}{a^{n+1}}u(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{n!t^{n-j}}{a^{j+1}(n-j)!}u(t)$
$t^m u(t)$	$t^n u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}u(t)$
$te^{at}u(t)$	$e^{bt}u(t)$	$\frac{e^{bt}-e^{at}+(a-b)te^{at}}{(a-b)^2}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{at}u(t)$	$\frac{m!n!}{(n+m+1)!}t^{m+n+1}e^{at}u(t)$
$t^m e^{at}u(t)$	$t^n e^{bt}u(t)$	$\sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j m!(n+j)!t^{m-j}e^{at}}{j!(m-j)!(a-b)^{n+j+1}}u(t)$
		$+\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!(m+k)!t^{n-k}e^{bt}}{k!(n-k)!(b-a)^{m+k+1}}u(t),\ a \neq b$
$e^{at}\cos(bt+\theta)u(t)$	$e^{\lambda t}u(t)$	$\frac{\cos(\theta-\phi)e^{\lambda t} - e^{-at}\cos(bt+\theta-\phi)}{\sqrt{(a+\lambda)^2+b^2}}u(t),$ $\phi = \tan^{-1}\frac{-b}{a+\lambda}$
$e^{at}u(t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}u(t)+e^{bt}u(-t)}{b-a},\ \mathrm{Re}\{b\} > \mathrm{Re}\{a\}$
$e^{at}u(-t)$	$e^{bt}u(-t)$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{b-a}u(-t)$

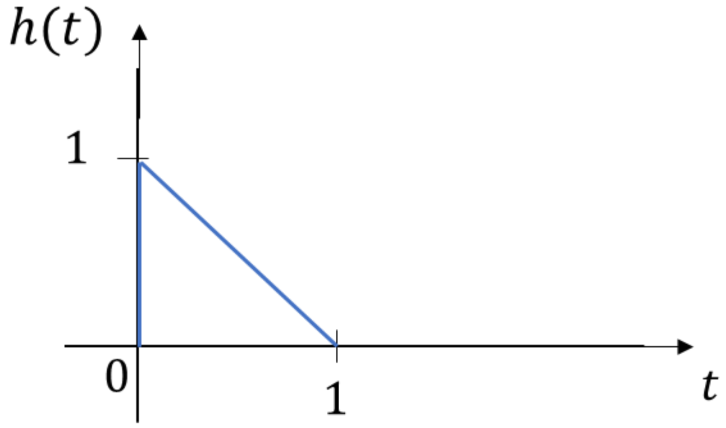
Βήματα Γραφικού Υπολογισμού Συνέλιξης

1. Επιλέγουμε ένα εκ των δύο σημάτων, έστω το $x(t)$, το οποίο το μετατρέπουμε σε $x(\tau)$
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το $x(t-\tau)$
3. Φέρουμε τα δύο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ, και σύρουμε το $x(t-\tau)$ από το -∞ προς το +∞
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου τ όπου τα δύο σήματα συνυπάρχουν, δηλ. όπου το γινόμενο $x(t-\tau)y(\tau)$ είναι μη μηδενικό
5. Σε αυτές τις περιοχές υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

Παράδειγμα 1

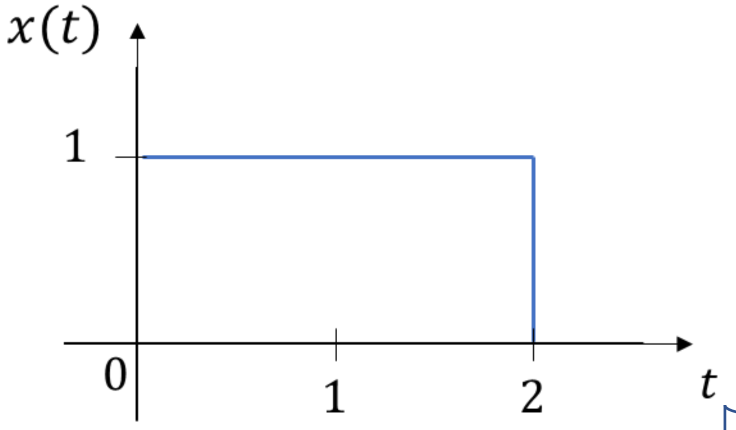
Να υπολογιστεί η έξοδος του ΓΧΑ συστήματος που έχει κρουστική απόκριση

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$



και είσοδο

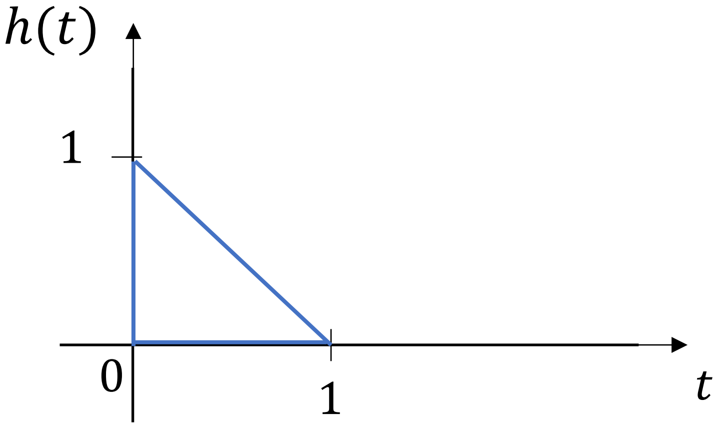
$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

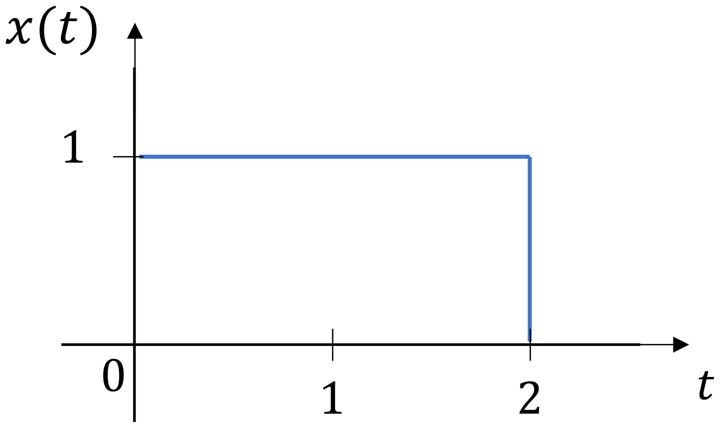


$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Παράδειγμα 1

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη $y(t) = h(t) * x(t)$



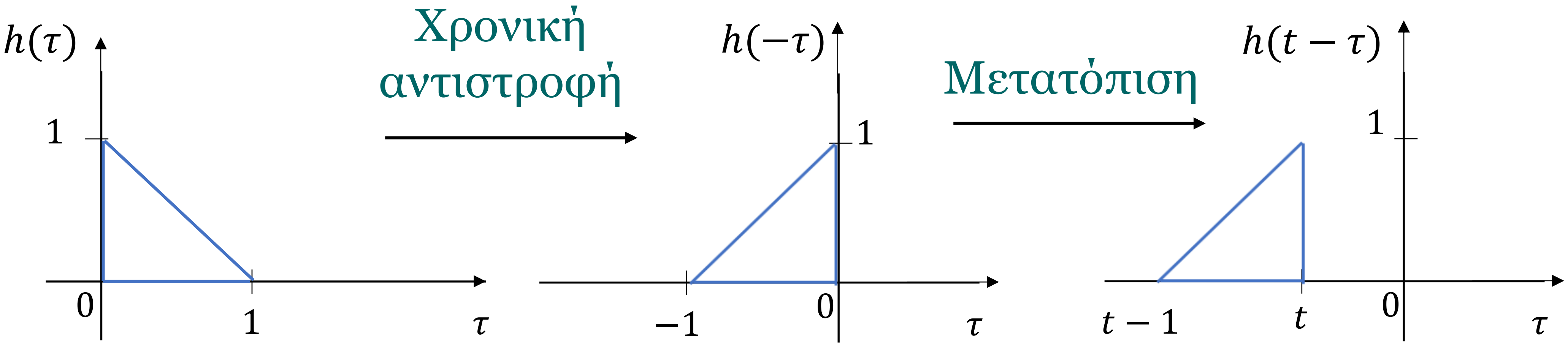


1. Επιλέγουμε ένα εκ των δύο σημάτων, έστω το $h(t)$ γιατί είναι πιο εύκολο σήμα, το οποίο το μετατρέπουμε σε $h(\tau)$

Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνέλιξη $y(t) = h(t) * x(t)$

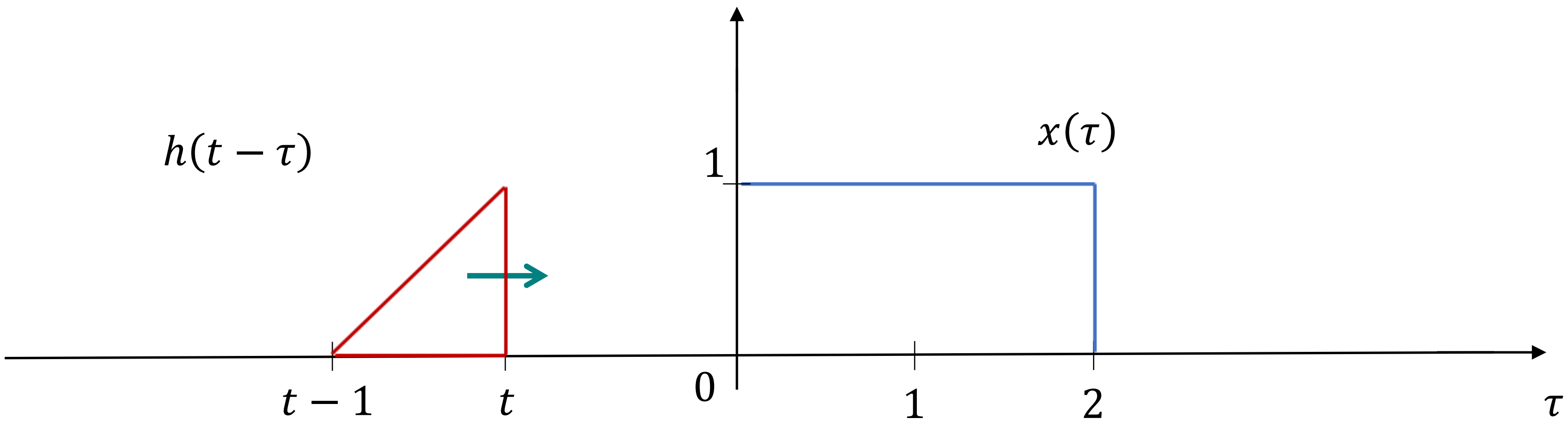


2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το $h(t-\tau)$

Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

3. Φέρουμε τα δύο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ, και σύρουμε το $h(t-\tau)$ από το -∞ προς το +∞

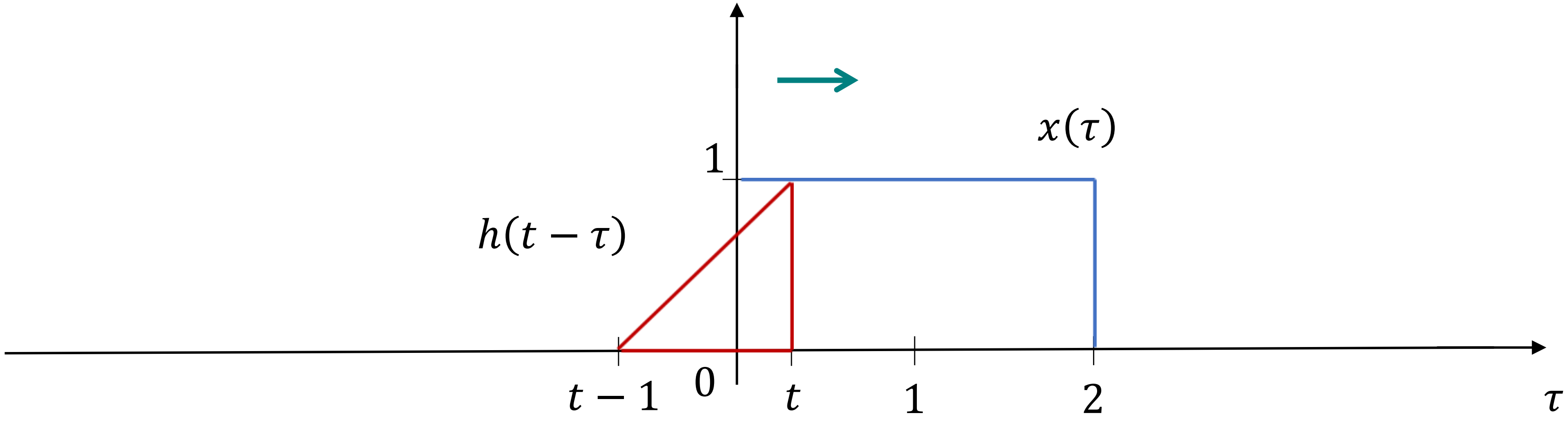


- Κοιτάω το δεξί άκρο του $h(t-\tau)$. Στην παραπάνω περίπτωση το δεξί άκρο του $h(t-\tau)$ δεν έχει πέσει πάνω στο αριστερό άκρο του $x(\tau)$
- Άρα για $t < 0$ έχουμε $\boldsymbol{y(t) = 0}$ αφού τα δυο σήματα δεν επικαλύπτονται σε κοινό διάστημα.

Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

3. Φέρουμε τα δύο σήματα σε κοινό άξονα ως προς τ, και σύρουμε το $h(t-\tau)$ από το -∞ προς το +∞

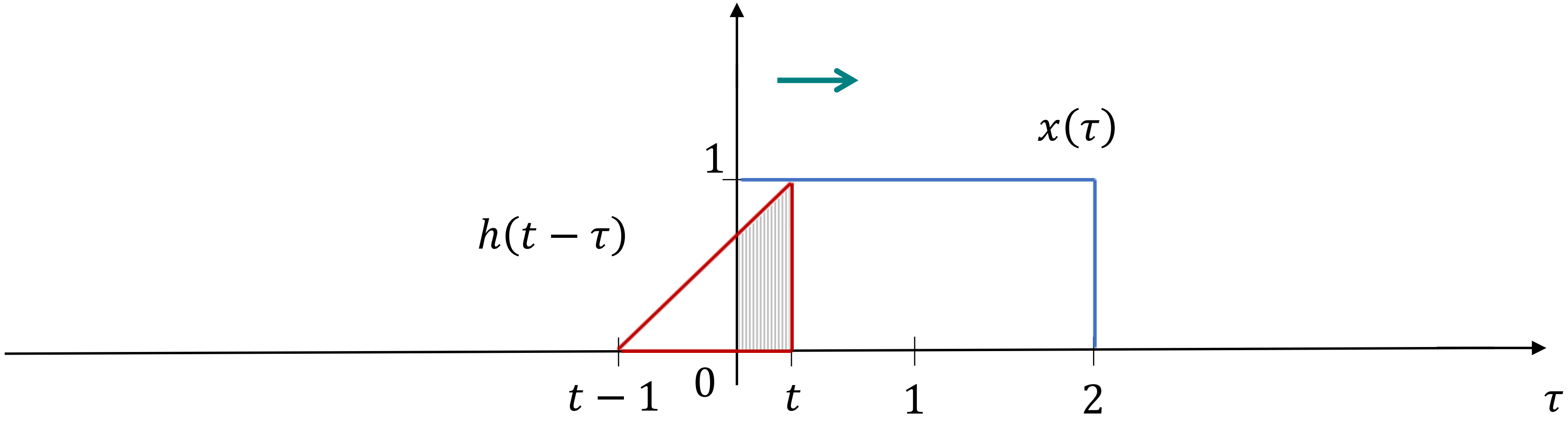


- Κοιτάω το δεξί άκρο του $h(t-\tau)$. Τώρα το δεξί άκρο του $h(t-\tau)$ έχει πέσει και έχει περάσει το αριστερό άκρο του $x(\tau)$ και τα σήματα επικαλύπτονται στο διάστημα $[0, t]$

Παράδειγμα 1

$$h(t)=\begin{cases}1-t & 0\le t\le 1\\ 0 & αλλού\end{cases} \qquad x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 2\\ 0 & αλλού\end{cases}$$

4. Καθορίζουμε τις περιοχές του χρόνου τ όπου τα δύο σήματα συνυπάρχουν, δηλ. $x(t-\tau)y(\tau)\neq 0$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα



- Άρα για $t\geq 0$ και $t-1<0 \rightarrow 0\leq t<1$ το ολοκλήρωμα της συνέλιξης είναι

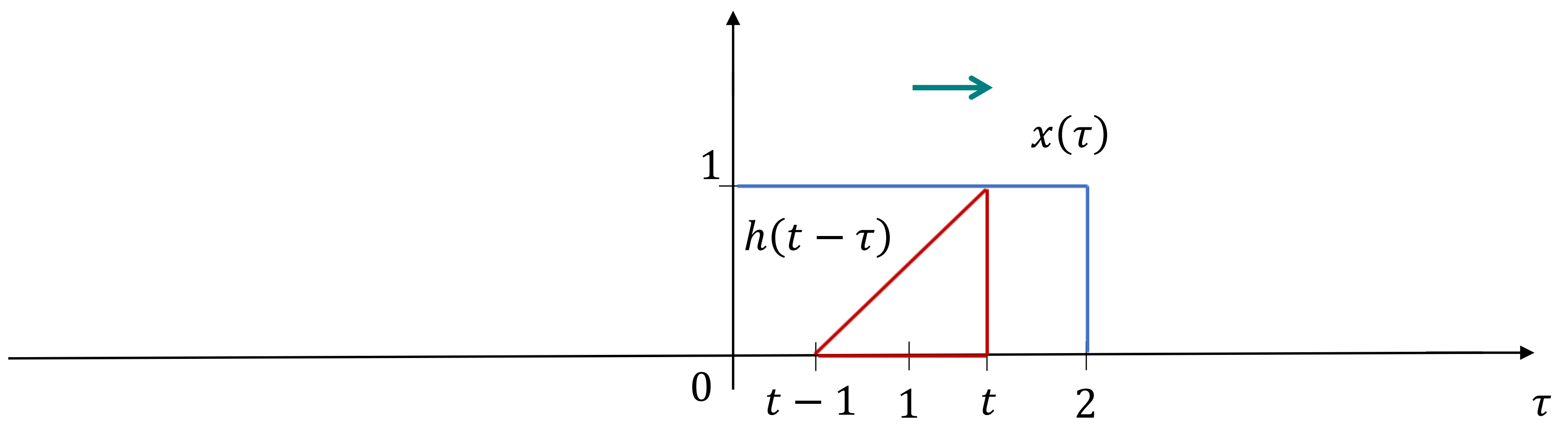
$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}1\cdot(1-t+\tau)d\tau=\tau\Big|_0^t-\tau t\Big|_0^t+\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t=t-t^2+\frac{t^2}{2}$$

$$y(t)=t-\frac{t^2}{2}\rightarrow\ 0\leq t<1$$

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & αλλού \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & αλλού \end{cases}$$

Παράδειγμα 1

3. Συνεχίζουμε να σέρνουμε το $h(t-\tau)$ προς το $+\infty$

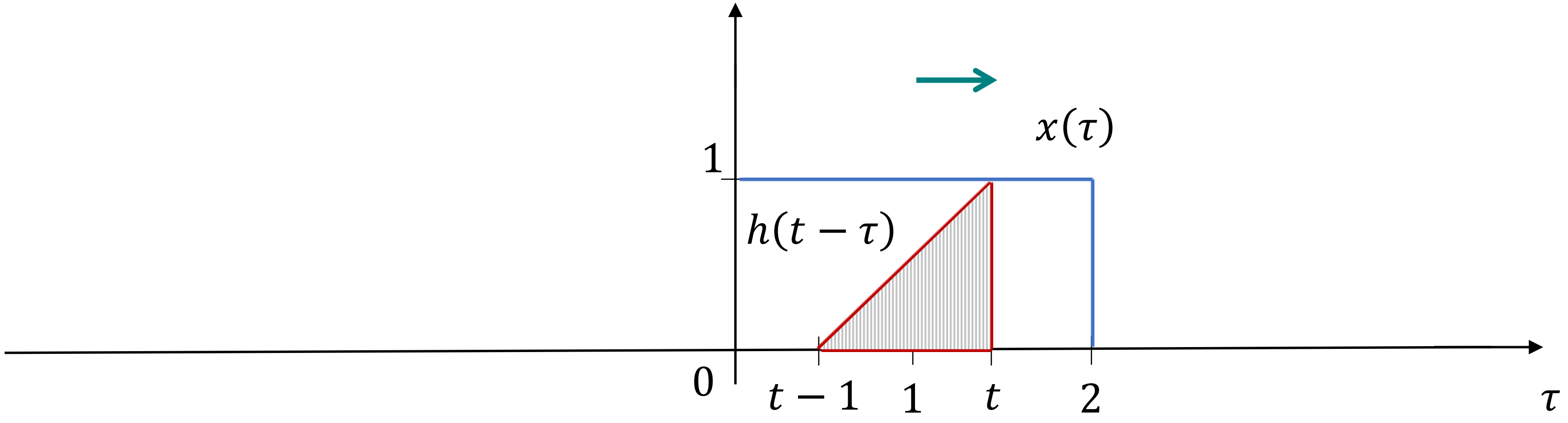


- Καθώς το $h(t-\tau)$ σέρνεται προς το $+\infty$, το αριστερό του άκρο περνάει το 0 και τα δύο σήματα επικαλύπτονται στο διάστημα $[t-1, t]$

Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \quad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

4. Καθορίζουμε τις περιοχές του χρόνου τ όπου τα δύο σήματα συνυπάρχουν, δηλ. $x(t-\tau)y(\tau) \neq 0$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα



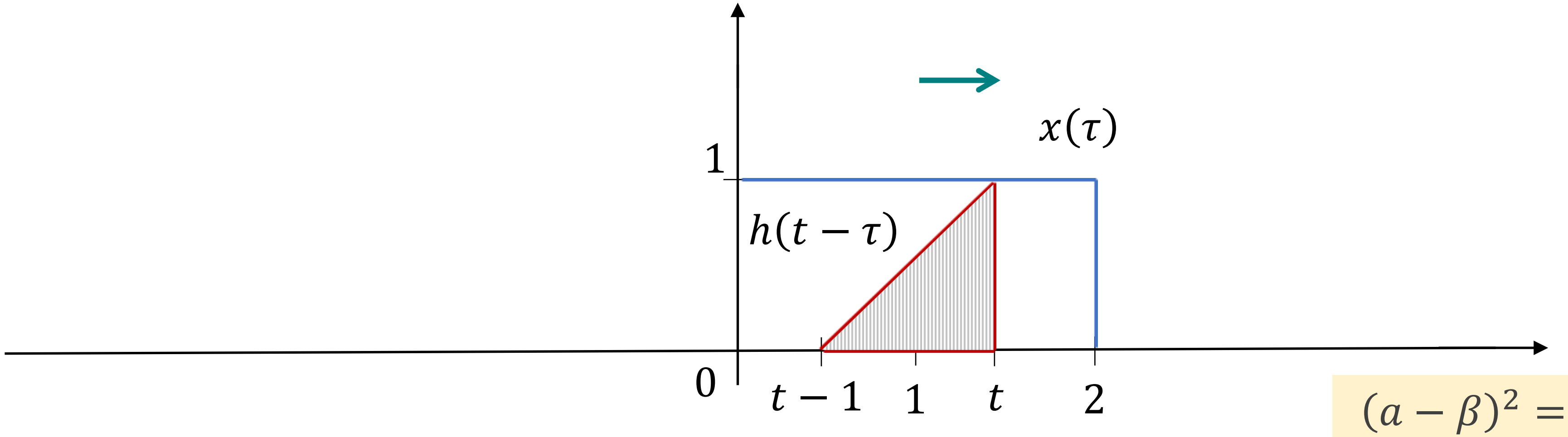
- Άρα για $t \geq 1$ και $t-1 < 1 \rightarrow t < 2 \rightarrow 1 \leq t < 2$ το ολοκλήρωμα της συνέλιξης είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-1}^{t} 1 \cdot (1-t+\tau)d\tau = \tau\Big|_{t-1}^{t} - \tau t\Big|_{t-1}^{t} + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^{t}$$

Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

4. Καθορίζουμε τις περιοχές του χρόνου τ όπου τα δύο σήματα συνυπάρχουν, δηλ. $x(t-\tau)y(\tau) \neq 0$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα



$$(a-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$y(t) = \tau\Big|_{t-1}^{t} - \tau t\Big|_{t-1}^{t} + \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^{t} = t - (t-1) - [t^2 - t(t-1)] + \frac{t^2}{2} - \frac{(t-1)^2}{2}$$

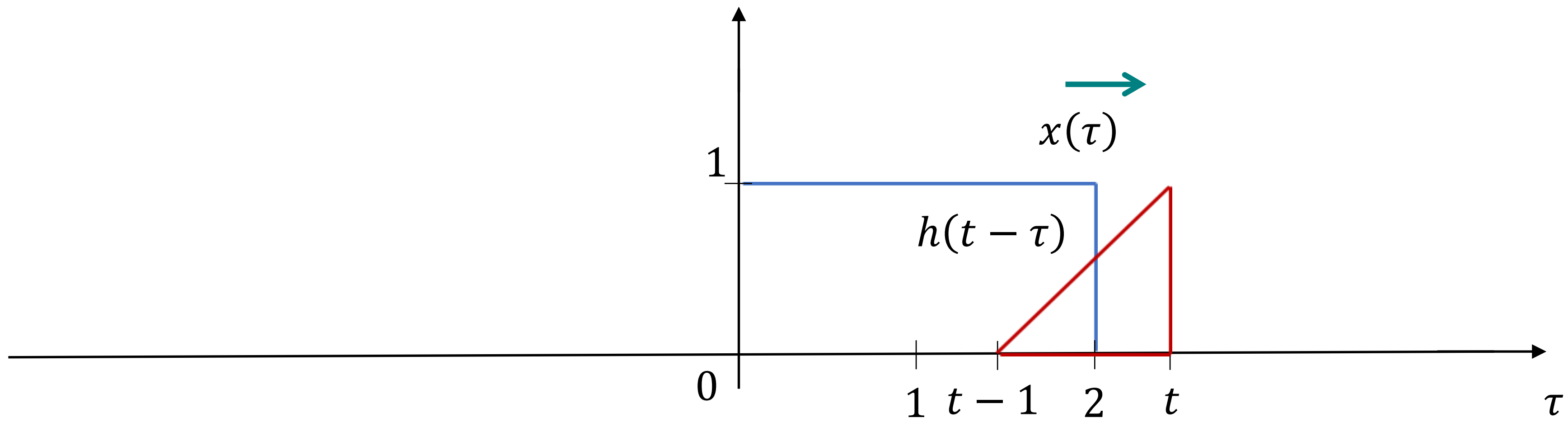
$$= t - t + 1 - t^2 + t^2 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2 - 2t + 1}{2} = 1 - \mathrm{t} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \rightarrow 1 \le t < 2$$

Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

3. Συνεχίζουμε να σέρνουμε το $h(t-\tau)$ προς το $+\infty$

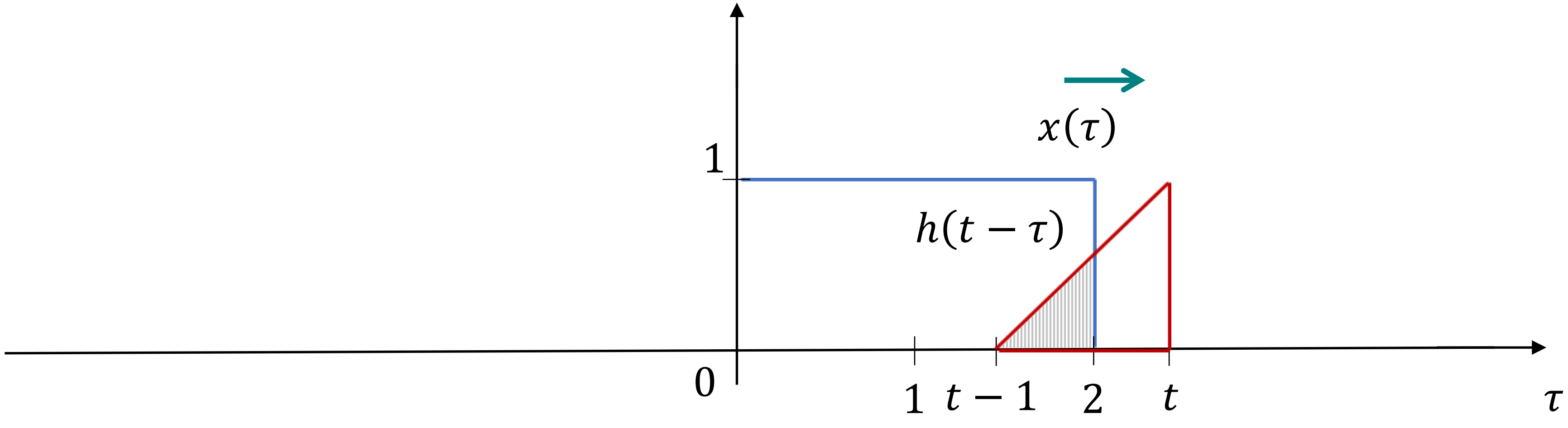


- Η επόμενη περίπτωση είναι όταν το δεξί άκρο του $h(t-\tau)$ περάσει το δεξί άκρο του $x(t)$ όμως το αριστερό άκρο του $h(t-\tau)$ εξακολουθεί να βρίσκεται πάνω στο $x(t)$. Το κοινό διάστημα επικάλυψης είναι $[t-1, 2]$

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Παράδειγμα 1

4. Καθορίζουμε τις περιοχές του χρόνου τ όπου τα δύο σήματα συνυπάρχουν, δηλ. $x(t-\tau)y(\tau) \neq 0$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα



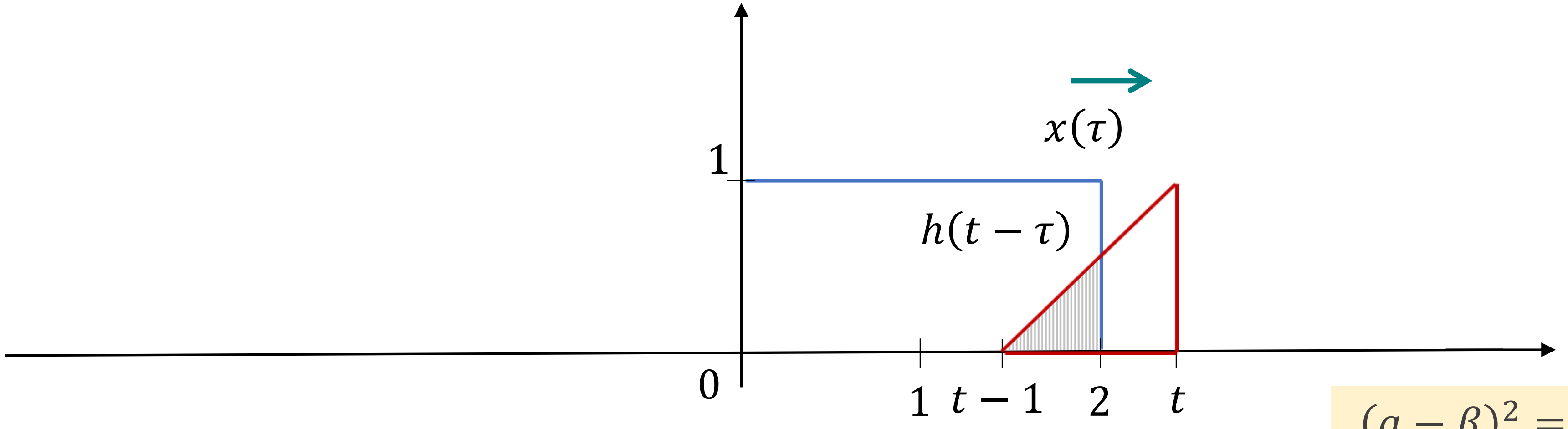
- Άρα για $t \ge 2$ και $t-1 \le 2 \;\rightarrow t \le 3 \rightarrow 2 \le t \le 3$ το ολοκλήρωμα της συνέλιξης είναι

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{t-1}^{2} 1 \cdot (1-t+\tau)d\tau = \tau\Big|_{t-1}^{2} - \tau t\Big|_{t-1}^{2} + \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{t-1}^{2}$$

Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

4. Καθορίζουμε τις περιοχές του χρόνου τ όπου τα δύο σήματα συνυπάρχουν, δηλ. $x(t-\tau)y(\tau) \neq 0$ και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα



$$(a-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$y(t) = \tau\Big|_{t-1}^{2} - \tau t\Big|_{t-1}^{2} + \frac{\tau^2}{2}\Bigg|_{t-1}^{2} = 2-(t-1)-[2t-t(t-1)] + \frac{2^2}{2} - \frac{(t-1)^2}{2} =$$

$$= 2-t+1-2t+t^2-t+2-\frac{(t^2-2t+1)}{2} = t^2-4t+5-\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2} =$$

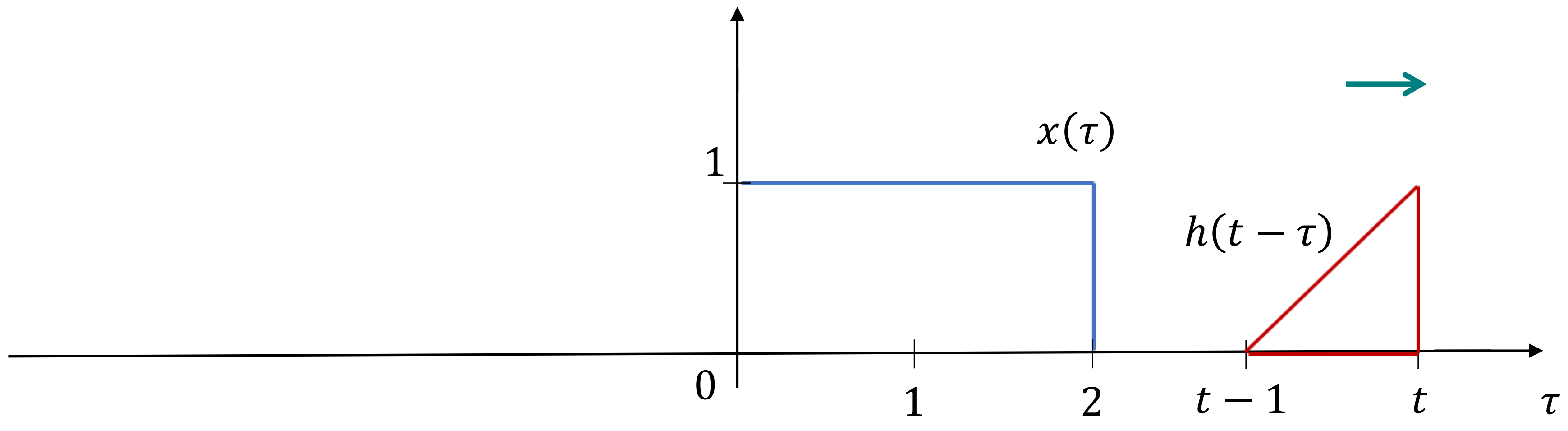
$$= \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(t^2-6t+9) = \frac{1}{2}(t-3)^2$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 \rightarrow 2 \le t \le 3$$

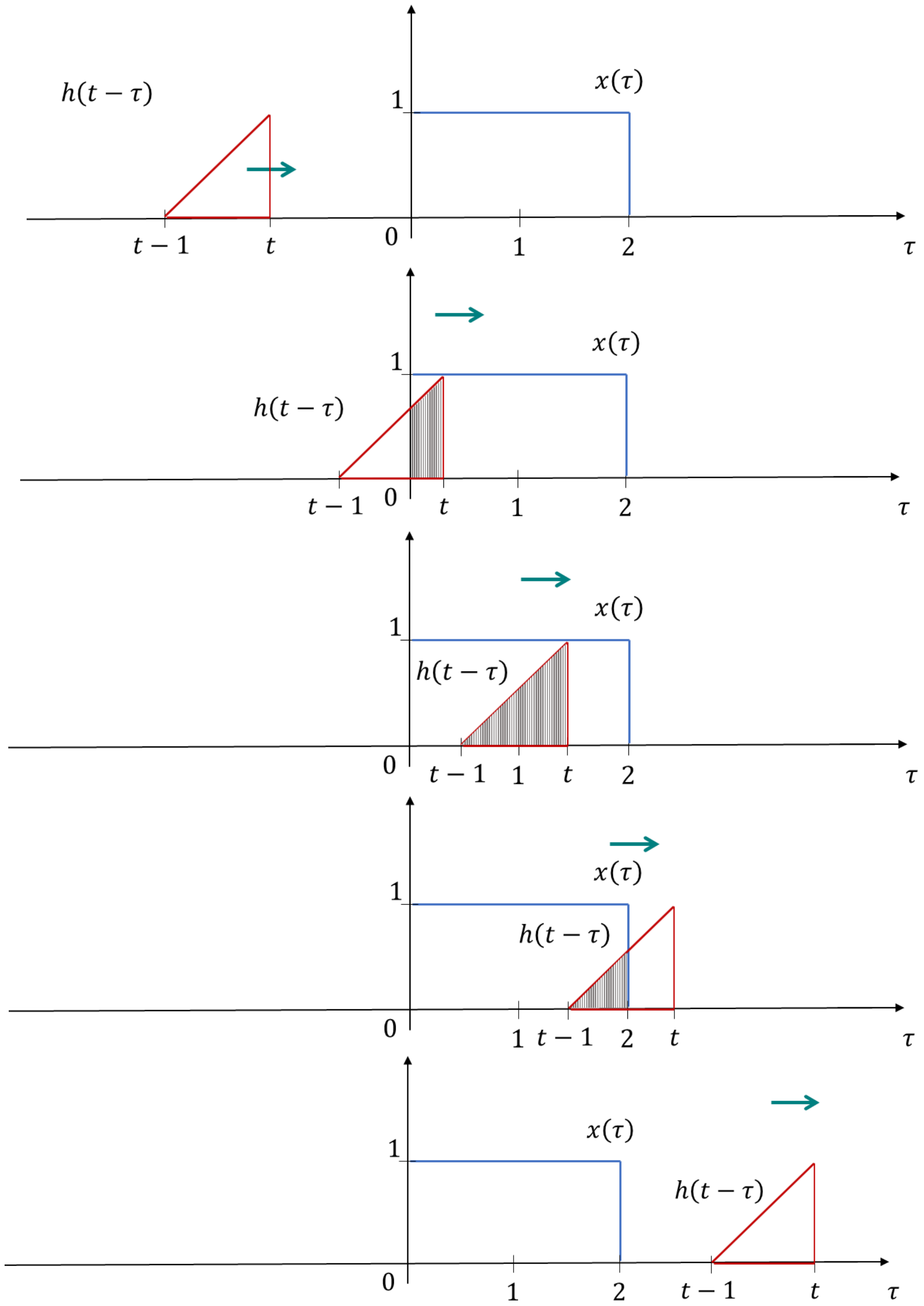
Παράδειγμα 1

$$h(t) = \begin{cases} 1-t & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases} \qquad x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

3. Συνεχίζουμε να σέρνουμε το $h(t-\tau)$ προς το $+\infty$ μέχρι να μην υπάρχει κοινό διάστημα επικάλυψης των σημάτων



- Η τελευταία περίπτωση είναι όταν και το αριστερό άκρο του $h(t-\tau)$ περάσει το δεξί άκρο του $x(t)$ και πλέον το $h(t-\tau)$ έχει περάσει όλο το $x(t)$ και δεν υπάρχει κοινό διάστημα επικάλυψης.
- Στην παραπάνω περίπτωση για $t \ge 2$ και $t-1 > 2 \rightarrow t > 3$ έχουμε $\boldsymbol{y(t) = 0}$, αφού δεν υπάρχει επικάλυψη.



Παράδειγμα 1

- Επομένως, η έξοδος του συστήματος είναι

$$y(t) = \begin{cases} t - \dfrac{t^2}{2} & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{2} & 1 \le t < 2 \\ \dfrac{1}{2}(\mathrm{t}-3)^2 & 2 \le t < 3 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

Βιβλιογραφία

1. **Σήματα και Συστήματα**, Σεραφείμ Καραμπόγιας, Κεφάλαιο 2, Ενότητες 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3 (σελ.41-49)

2. **Σήματα και Συστήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου**, Αθανάσιος Μάργαρης, Κεφ. 1, Ενότητες 1.10.1, 1.10.2 (σελ. 27-37)

3. **Επεξεργασία Σήματος Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου**, Γεώργιος Καφεντζής, Κεφ.4, Ενότητα 4.6 (σελ. 138-152)

Τέλος Ενότητας