203: Διακριτά Μαθηματικά
Κεφάλαιο 3: Συνδυαστική

Σπυρίδων Τζίμας

Εαρινό Εξάμηνο 2025

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

Συνδυαστική

Στη Συνδυαστική, θεωρούμε κάποιο πείραμα πάνω σε κάποια αντικείμενα και απαριθμούμε όλους τους συνδυασμούς αντικειμένων που είναι κάποιας μορφής που μας ενδιαφέρει και που είναι δυνατόν να εμφανιστούν ως αποτελέσματα του πειράματος.

Όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος τα καλούμε ενδεχόμενα του πειράματος και το σύμπαν που θεωρούμε είναι το σύνολο των ενδεχομένων του πειράματος.

Παράδειγμα: Απαριθμήστε τα ενδεχόμενα του πειράματος ρίψης δύο διακεκριμένων ζαριών όπου και τα δύο ζάρια φέρνουν πρώτους αριθμούς.

Το σύνολο των αντικειμένων είναι το $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το σύμπαν είναι το $U = Z^2$. Το σύνολο των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν είναι το $A = \{2, 3, 5\}^2$ ή αλλιώς

$$A = \{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}$$

Άρα το ζητούμενο είναι $|A| = 9$.

Ανεξαρτησία

Ένα πείραμα μπορεί να αποτελείται από μικρότερα πειράματα τα οποία πραγματοποιούνται ανεξάρτητα, δηλαδή το αποτέλεσμα του ενός δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα του άλλου.

Παράδειγμα: Απαριθμήστε τα ενδεχόμενα του πειράματος ρίψης δύο διακεκριμένων ζαριών όπου και τα δύο ζάρια φέρνουν πρώτους αριθμούς.

Το πείραμα P αποτελείται από δύο ανεξάρτητα πειράματα $P_1 = P_2$ ρίψης ενός ζαριού. Το σύμπαν των P_1, P_2 είναι το $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Άρα το σύμπαν του P είναι το $U = Z^2$. Το σύνολο των ενδεχομένων των P_1, P_2 που μας ενδιαφέρουν είναι το $A_1 = A_2 = \{2, 3, 5\}$. Άρα το σύνολο των ενδεχομένων του P που μας ενδιαφέρει είναι το $A = A_1^2 = \{2, 3, 5\}^2$. Άρα το ζητούμενο είναι $|A| = |A_1|^2 = 3^2 = 9$.

Συμβολοσειρές

Έστω ότι μας ενδιαφέρουν οι ακολουθίες
που σχηματίζονται αποκλειστικά από τα στοιχεία ενός συνόλου Σ.

Τότε το σύνολο Σ το καλούμε αλφάβητο, τα στοιχεία του Σ τα καλούμε σύμβολα
και τις ακολουθίες που ανήκουν στο Σ^n τις καλούμε συμβολοσειρές μήκους n.

Την συμβολοσειρά $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \Sigma^n$ την γράφουμε απλά $a_1 a_2 \ldots a_n$.

Αρχή της Απαρίθμησης: Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί σε k ανεξάρτητα στάδια και το i-οστό στάδιο μπορεί να συμβεί με m_i διαφορετικούς τρόπους, τότε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να συμβεί το γεγονός είναι $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_k$.

Παράδειγμα: Απαριθμήστε τις συμβολοσειρές μήκους 8 με αλφάβητο το $\Sigma = \{0, 1\}$ (ψηφία του δυαδικού συστήματος αρίθμησης) (1 byte).

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8 = 256$$

Παράδειγμα: Απαριθμήστε τις συμβολοσειρές μήκους 8 με αλφάβητο το $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9, a, b, \ldots, z\}$ (αλφαριθμητικοί χαρακτήρες) των οποίων το πρώτο σύμβολο είναι λατινικός χαρακτήρας.

$$26 \times (26 + 10) \times (26 + 10) \times (26 + 10) \times (26 + 10) \times (26 + 10) \times (26 + 10) \times (26 + 10)$$

Άσκηση: Απαριθμήστε τις συμβολοσειρές μήκους 16 με αλφάβητο το $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$ οι οποίες περιέχουν τουλάχιστον ένα 3, τουλάχιστον ένα 5, και τουλάχιστον ένα 7.

Λύση: Τα αντικείμενα είναι τα σύμβολα του Σ. Το σύμπαν είναι το Σ^{16}.
Έστω Z το σύνολο των συμβολοσειρών που μας ζητείται να απαριθμήσουμε.
Ορίζουμε τα σύνολα $A_i = (\Sigma \setminus \{i\})^{16}$ των συμβολοσειρών μήκους 16 που δεν περιέχουν i.
Τότε $Z = A_3^C \cap A_5^C \cap A_7^C = (A_3 \cup A_5 \cup A_7)^C$.

$$\begin{aligned}|A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= 3 \times 9^{16} - 3 \times 8^{16} + 7^{16}\end{aligned}$$

$$|Z| = |(A_3 \cup A_5 \cup A_7)^C| = |U| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 10^{16} - 3 \times 9^{16} + 3 \times 8^{16} - 7^{16}$$

Παραγοντικό

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n, ορίζουμε $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$. Για το 0, ορίζουμε $0! = 1$. Τον αριθμό αυτόν τον καλούμε παραγοντικό του αρχικού αριθμού.

Παρατήρηση: $n! = (n-1)! \cdot n$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n.

Το Μοντέλο Σφαιρίδια σε Κουτιά

Στη συνέχεια, όταν έχουμε ένα (υπο)πρόβλημα απαρίθμησης, το μοντελοποιούμε ως εξής:

Έχουμε k σφαιρίδια και n κουτιά.

- Τα κουτιά είναι είτε όμοια είτε διακεκριμμένα.
- Τα κουτιά έχουν είτε πεπερασμένη είτε άπειρη χωρητικότητα.
- Τα σφαιρίδια είναι είτε όμοια είτε διακεκριμμένα.
- Τα σφαιρίδια τοποθετούνται είτε με είτε χωρίς επανατοποθέτηση.
- Είτε μας ενδιαφέρει είτε δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των σφαιριδίων μέσα στα κουτιά.

Επιλέγοντας την κατάλληλη περίπτωση σε όλα τα παραπάνω, μετατρέπουμε το αρχικό μας πρόβλημα σε πρόβλημα απαρίθμησης όλων των δυνατών τοποθετήσεων των k σφαιριδίων στα n κουτιά.

Διακεκριμένα Σφαιρίδια σε Κουτιά Πεπερασμένης Χωρητικότητας

Έστω ότι έχουμε

- διακεκριμένα κουτιά χωρητικότητας το πολύ ένα και
- διακεκριμένα σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση.

Τότε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των k σφαιριδίων στα n κουτιά είναι:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Καλούμε διάταξη κάθε επιλογή των k από n διακεκριμένα αντικείμενα και τοποθέτηση τους σε σειρά. Το πλήθος των διαφορετικών διατάξεων k από n διακεκριμένα αντικείμενα είναι:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

Καλούμε μετάθεση κάθε τοποθέτηση n διακεκριμένων αντικείμενων σε σειρά. Το πλήθος των διαφορετικών μεταθέσεων n διακεκριμένων αντικειμένων είναι:

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Μοντελοποίηση: αντικείμενα $\rightarrow$ κουτιά

θέσεις $\rightarrow$ σφαιρίδια

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Παράδειγμα: Έστω ότι πρέπει να χρονοπρογραμματίσουμε τις εξετάσεις των μαθημάτων του $2^{ου}$ εξαμήνου για την εξεταστική του Ιουνίου έτσι ώστε να μην εξετάζονται δύο μαθήματα την ίδια μέρα. Απαριθμήστε τα έγκυρα προγράμματα.

$n = 15 = 3 \times 5$ διακεκριμένες διαθέσιμες μέρες στην εξεταστική χωρητικότητας το πολύ ένα
$k = 5$ διακεκριμένα μαθήματα $2^{ου}$ εξαμήνου χωρίς επανατοποθέτηση

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι: $P(n,k) = P(15,5) = \dfrac{15!}{10!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$

Διατάξεις και Μεταθέσεις

Παράδειγμα: Έστω ένας σύλλογος παραδοσιακών χορών αποτελείται από 10 άνδρες και 20 γυναίκες. Απαριθμήστε τις μεταθέσεις όλων των μελών έτσι ώστε:

- να διαταχθούν πρώτα όλοι οι άνδρες και μετά όλες οι γυναίκες.
- να διαταχθούν πρώτα σε ζευγάρια(=(άνδρας,γυναίκα)) και μετά οι υπόλοιπες γυναίκες.

Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις κάθε θέση είναι προκαθορισμένη είτε μόνο για άνδρα είτε μόνο για γυναίκα. Συνεπώς κάθε ζητούμενη μετάθεση όλων των μελών μπορεί να καθοριστεί σε δύο ανεξάρτητα στάδια:

- Τοποθέτηση των ανδρών στις θέσεις που είναι προκαθορισμένες μόνο για άνδρες.
- Τοποθέτηση των γυναικών στις θέσεις που είναι προκαθορισμένες μόνο για γυναίκες.

Τα δύο αυτά στάδια ισοδυναμούν με τον καθορισμό μιας μετάθεσης των ανδρών και μιας μετάθεσης των γυναικών.

Άρα το πλήθος των ζητούμενων μεταθέσεων όλων των μελών είναι:
$P(10,10)P(20,20) = 10!20!$

Άσκηση: Απαριθμήστε τις μεταθέσεις των λατινικών χαρακτήρων ώστε να μην εμφανίζεται καμία από τις λέξεις bird, fish και human.

Λύση: Τα αντικείμενα είναι οι λατινικοί χαρακτήρες. Το σύμπαν U είναι το σύνολο των μεταθέσεων των λατινικών χαρακτήρων χωρίς περιορισμούς. Έστω B,F και H τα σύνολα των μεταθέσεων των λατινικών χαρακτήρων ώστε να εμφανίζονται οι λέξεις bird, fish και human αντίστοιχα. Έστω Z το σύνολο των μεταθέσεων των λατινικών χαρακτήρων που μας ζητείται να απαριθμήσουμε. Τότε $Z = B^C \cap F^C \cap H^C = (B \cup F \cup H)^C$.

$$|U| = 26! \qquad |B| = 23! \qquad |F| = 23! \qquad |H| = 22!$$

$$|B \cap F| = 0 \qquad |B \cap H| = 19! \qquad |F \cap H| = 19! \qquad |B \cap F \cap H| = 0$$

$$|B \cup F \cup H| = |B| + |F| + |H| - |B \cap F| - |B \cap H| - |F \cap H| + |B \cap F \cap H| = 2 \times 23! + 22! - 2 \times 19!$$

$$|Z| = |(B \cup F \cup H)^C| = |U| - |B \cup F \cup H| = 26! - 2 \times 23! - 22! + 2 \times 19!$$

Διακεκριμένα Σφαιρίδια σε Κουτιά Άπειρης Χωρητικότητας

Έστω ότι έχουμε

- διακεκριμένα κουτιά άπειρης χωρητικότητας και
- διακεκριμένα σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση.

Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των σφαιριδίων μέσα στα κουτιά,
τότε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των k σφαιριδίων στα n κουτιά είναι:

$$n^k$$

Αν μας ενδιαφέρει η σειρά των σφαιριδίων μέσα στα κουτιά,
τότε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των k σφαιριδίων στα n κουτιά είναι:

$$P(n+k-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$

Διακεκριμένα Σφαιρίδια σε Κουτιά Άπειρης Χωρητικότητας

Παράδειγμα: Έστω ότι πρέπει να χρονοπρογραμματίσουμε τις εξετάσεις των μαθημάτων του $2^{ου}$ εξαμήνου για την εξεταστική του Ιουνίου χωρίς περιορισμό στο πλήθος των εξεταζόμενων μαθημάτων ανά μέρα. Απαριθμήστε τα έγκυρα προγράμματα.

$n = 15 = 3 \times 5$ διακεκριμένες διαθέσιμες μέρες στην εξεταστική άπειρης χωρητικότητας
$k = 5$ διακεκριμένα μαθήματα $2^{ου}$ εξαμήνου χωρίς επανατοποθέτηση

Μας ενδιαφέρει η σειρά εξέτασης των μαθημάτων μέσα στην κάθε μέρα.
Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$P(n+k-1, k) = P(15+5-1, 5) = P(19, 5) = \frac{19!}{14!} = 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15$$

Διακεκριμένα Σφαιρίδια σε Κουτιά Άπειρης Χωρητικότητας

Παράδειγμα: Θέλουμε να μοιράσουμε μία τράπουλα 60 διακεκριμένων καρτών σε 3 διακεκριμένες στοίβες. Απαριθμήστε τους δυνατούς τρόπους στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των καρτών μέσα στις στοίβες.
2. Αν μας ενδιαφέρει η σειρά των καρτών μέσα στις στοίβες.

$n = 3$ διακεκριμένες στοίβες άπειρης χωρητικότητας
$k = 60$ διακεκριμένες κάρτες χωρίς επανατοποθέτηση

1. $n^k = 3^{60}$
2. $P(n+k-1,k) = P(3+60-1,60) = P(62,60) = \dfrac{62!}{2!} = \dfrac{62!}{2}$

Ομάδες Όμοιων Σφαιριδίων

Έστω ότι έχουμε

- διακεκριμένα κουτιά χωρητικότητας το πολύ ένα και
- m διακεκριμένες ομάδες με $k_1, k_2, \ldots, k_m$ όμοια σφαιρίδια.

Τότε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των k σφαιριδίων στα n κουτιά είναι:

$$\frac{P(n,k)}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

Ομάδες Όμοιων Σφαιριδίων

Παράδειγμα: Η ομάδα μπάσκετ του τμήματος που αποτελείται από 10 φοιτητές πηγαίνει στο γυμναστήριο για να κάνει προπόνηση στο σουτάρισμα. Στο γυμναστήριο υπάρχουν 3 μπάλες χρώματος πορτοκαλί, 1 χρώματος μπλε και 1 χρώματος μαύρου. Απαριθμήστε τους δυνατούς τρόπους να αναθέσουμε τις μπάλες στους φοιτητές της ομάδας μπάσκετ.

$n = 10$ διακεκριμένοι φοιτητές
$k = 5$ μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση
$m = 3$ διακεκριμένες ομάδες με $k_1 = 3$, $k_2 = 1$ και $k_3 = 1$ όμοιες μπάλες

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$\frac{P(n,k)}{k_1!k_2!k_3!} = \frac{P(10,5)}{3!1!1!} = \frac{10!}{5!3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

Ομάδες Όμοιων Σφαιριδίων

Παράδειγμα: Θέλουμε να στεγάσουμε ένα νέο τμήμα του πανεπιστημίου σε ένα υπάρχον κτήριο που διαθέτει 10 δωμάτια. Απαριθμήστε τους δυνατούς τρόπους να διαμερίσουμε τα δωμάτια σε 3 αίθουσες διδασκαλίας, 2 εργαστήρια και 5 γραφεία καθηγητών.

$n = 10$ διακεκριμένα διαθέσιμα δωμάτια χωρητικότητας το πολύ ένα
$k = 10$ ζητούμενα δωμάτια χωρίς επανατοποθέτηση
$m = 3$ διακεκριμένες ομάδες με $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ και $k_3 = 5$ όμοια δωμάτια

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι:

$$\frac{P(n,k)}{k_1!k_2!k_3!} = \frac{P(10,10)}{3!2!5!} = \frac{10!}{3!2!5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 2} = 9 \times 8 \times 7 \times 5$$

Όμοια Σφαιρίδια

Έστω ότι έχουμε

- διακεκριμένα κουτιά χωρητικότητας το πολύ ένα και
- όμοια σφαιρίδια.

Αν τοποθετούμε τα σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση,
τότε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των k σφαιριδίων στα n κουτιά είναι:

$$C(n, k) = \frac{P(n, k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Αν τοποθετούμε τα σφαιρίδια με επανατοποθέτηση,
τότε το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων των k σφαιριδίων στα n κουτιά είναι:

$$C(n+k-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Συνδυασμοί

Καλούμε συνδυασμό κάθε επιλογή των k από n διακεκριμένα αντικείμενα χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά. Το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών k από n διακεκριμένα αντικείμενα είναι:

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Μοντελοποίηση: αντικείμενα $\rightarrow$ κουτιά

θέσεις $\rightarrow$ σφαιρίδια

Συνδυασμοί

Παράδειγμα: Απαριθμήστε τις συμβολοσειρές μήκους 8 με αλφάβητο το $\Sigma = \{0, 1\}$ (ψηφία του δυαδικού συστήματος αρίθμησης) (1 byte) οι οποίες περιέχουν ακριβώς 4 μηδενικά.

$n = 8$ διακεκριμένα ψηφία
$k = 4$ όμοια μηδενικά

Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι: $C(n, k) = C(8, 4) = \dfrac{8!}{4!4!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$

Άσκηση: Σε ένα τμήμα πανεπιστημίου 20 καθηγητών πρέπει να σχηματιστεί μία επιτροπή 5 ατόμων. Απαριθμήστε τις δυνατές επιτροπές στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Χωρίς κανέναν περιορισμό.
2. Αν δεν πρέπει να συμμετέχει ο πρόεδρος.
3. Αν πρέπει να συμμετέχει ο πρόεδρος.
4. Αν πρέπει να συμμετέχει ο πρόεδρος ή ο αναπληρωτής πρόεδρος.

$n = 20$ διακεκριμένοι καθηγητές
$k = 5$ όμοια μέλη επιτροπής

1. $C(n,k) = C(20,5)$
2. Αφαιρούμε έναν καθηγητή (τον πρόεδρο), άρα: $n = 19 \Rightarrow C(n,k) = C(19,5)$
3. Αφαιρούμε έναν καθηγητή (τον πρόεδρο) και ένα μέλος (πρέπει να είναι ο πρόεδρος), άρα: $n = 19, k = 4 \Rightarrow C(n,k) = C(19,4)$
4. Βλέπε επόμενη διαφάνεια.

Πρώτος Τρόπος: Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

Τα αντικείμενα είναι οι καθηγητές. Το σύμπαν U είναι το σύνολο όλων των δυνατών επιτροπών χωρίς κανέναν περιορισμό. Έστω A και B τα σύνολα όλων των δυνατών επιτροπών με τη συμμετοχή του προέδρου και του αναπληρωτή προέδρου αντίστοιχα. Το σύνολο που μας ζητείται να απαριθμήσουμε είναι το $A \cup B$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2C(19,4) - C(18,3) = \cdots = 6936$$

Δεύτερος Τρόπος: Περιπτώσεις

Αν συμμετέχει ο πρόεδρος και δεν συμμετέχει ο αναπληρωτής πρόεδρος: $C(18,4)$
Αν δεν συμμετέχει ο πρόεδρος και συμμετέχει ο αναπληρωτής πρόεδρος: $C(18,4)$
Αν συμμετέχει ο πρόεδρος και συμμετέχει και ο αναπληρωτής πρόεδρος: $C(18,3)$
Συνολικά: $2C(18,4) + C(18,3) = \cdots = 6936$

Μοντέλο k σφαιριδίων σε n κουτιά	Πλήθος δυνατών τοποθετήσεων
διακεκριμένα κουτιά χωρητικότητας το πολύ ένα διακεκριμένα σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση	$P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (διατάξεις)
διακεκριμένα κουτιά άπειρης χωρητικότητας διακεκριμένα σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση δεν μας ενδιαφέρει η σειρά μέσα στα κουτιά	n^k
κουτιά και σφαιρίδια όπως προηγουμένως μας ενδιαφέρει η σειρά μέσα στα κουτιά	$P(n+k-1,k) = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$
διακεκριμένα κουτιά χωρητικότητας το πολύ ένα m διακεκριμένες ομάδες με $k_1, \ldots, k_m$ όμοια σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση	$\dfrac{P(n,k)}{k_1! \cdots k_m!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k_1! \cdots k_m!}$
διακεκριμένα κουτιά χωρητικότητας το πολύ ένα όμοια σφαιρίδια χωρίς επανατοποθέτηση	$C(n,k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ (συνδυασμοί)
διακεκριμένα κουτιά χωρητικότητας το πολύ ένα όμοια σφαιρίδια με επανατοποθέτηση	$C(n+k-1,k) = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$