ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основополагающая цель этой работы заключается в том, чтобы задать оценку аппроксимации частного случая обобщенных процессов Андерсона-Дарлинга, являющихся подвидов гауссовских полей.

Рассматриваемая в работе проблема относится к многомерным непрерывным задачам высокой размерности, имеющим широкую область применения. Например, интегралы высокой размерности применяются от физики до финансов [9]. Многие из них определены на пространстве из d параметров, при росте числа которых вычислительная сложность задач растет. Заметим, что при достаточно большой размерности такие задачи почти невозможно или очень трудно решить аналитически, в следствии чего появляется заинтересованность в построении аппроксимации в пределах пороговой ошибки равной ε.

Так же следует обратить внимание на то, что с задачей оценки аппроксимации тесно связана активно развивающаяся теория анализа информационной сложности многопараметрических задач аппроксимации. Для построения многопараметрических аппроксимаций требуется некоторое количество информационных операций, задающихся либо линейными функционалами, либо значениями функции. Так как вычисление даже одной информационной операции требует большой вычислительной сложности, возникает потребность в минимизации ее использования. В этой связи вводится понятие информационной сложности, которая определяется, как минимальное количество информационных операций, необходимых для построения аппроксимации многомерной задачи при фиксированном пороге ошибки.

В данной работе рассматривается оценка сложности аппроксимации стохастического процесса Андерсона-Дарлинга, напрямую связанного с предельным распределением для статистик Крамера-Мизеса [2].

В свою очередь первая часть работы посвящена постановке задачи, а также рассмотрению существующих подходов задания оценки аппроксимации для многопараметрических случайных процессов. Будет рассмотрено, каким образом задача поиска аппроксимации частного случая процесса связана с задачей поиска информационной сложности, в чем заключается особенность моделирования через разложение Карунена-Лоэва и какие способы задания оценки существуют.

Во второй части будет проведена проверка на возможность применения центральных предельных теорем, необходимых для задания оценки. Помимо прочего будет проведена серия расчетов, по результатам которых будет задана оценка аппроксимации через особенности, коими располагает частный случай рассматриваемого нами процесса.

Результатом работы станет асимптотическая оценка при сколь угодно большой параметрической размерности и произвольном фиксированном пороге ошибки процессов Андерсона-Дарлинга методом Карунена-Лоэва, где параметры процесса стремятся к нулю.

Оценка будет иметь вид:

$$\ln n(d;\varepsilon) = A_d + B_d \cdot q(\varepsilon) + o(B_d),$$

где $q\colon (0;1) \to \mathbb{R}$ - (неубывающая функция); $(A_d)_{\mathrm{d} \in \mathrm{N}}$ – последовательность; $(B_d)_{\mathrm{d} \in \mathrm{N}}$ – положительная последовательность; $\varepsilon \in (0;1)$.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Постановка цели

Рассмотрим гауссовский процесс (гауссовское поле) $X(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$, для которого при любых наборах $t_1, \ldots, t_n$ случайная величина $(X(t_1), \ldots, X(t_n))$ имеет многомерное нормальное распределение, где $t_i \in \mathbb{R}^d$. Число d будем называть параметрической размерностью процесса.

Характерной особенностью гауссовских процессов является то, что они полностью определяются k-мерным вектором математического ожидания $\mu_e = (E[X(t_1)], E[X(t_2)], \ldots, E[X(t_k)])^T$ и матрицей ковариаций $\sum$, состоящей из элементов:

$$\sum_{i,j} = E[\,(X(t_i) - \mu_e^i)\,(X(t_j) - \mu_e^j)\,] = \mathrm{Cov}[X(t_i), X(t_j)],$$

где $i, j \in [1, k]$.

В нашей постановке задачи вектор математического ожидания μ_e будем считать нулевым, то есть процесс $X(t)$ является центрированным. Так же обратим внимание на то, что в действительности ковариационная матрица задается через функцию ковариации, то есть:

$$\sum_{i,j} = cov\left(X(t_i), X\left(t_j\right)\right) = K\left(t_i, t_j\right),$$

где $K(\cdot,\cdot)$ – корреляционная функция.

Иными словами, можно сказать, что $(i;\, j)$ элемент ковариационной матрицы $\sum$ можно задать ковариационной функцией $K(\cdot,\cdot)$. Также заметим, что процесс *X(t)* можно рассматривать как случайную функцию ввиду того факта, что случайный процесс есть индексированная случайная величина. В нашем случае индексное множество задается набором всевозможных $\mathbb{R}^d$ векторов.

Заметим, что непосредственно из определения гауссовского процесса прямой способ моделирования имеет ряд трудностей. Например, вычисление матрицы ковариации конечномерного распределения и операций, связанных с ней, особенно с большой параметрической размерностью, являются трудоемкими. Первостепенной причиной таких проблем является сама матрица ковариаций, так как количество хранимых данных зависит не только от размера индексного множества, на котором будет моделироваться процесс, но и от степени параметрической размерности процесса. Таким образом при большом размере индексного множества и сравнительно большом количестве параметров, от которых зависит моделируемый процесс, мы столкнемся с проблемой чрезвычайно быстрого роста размерности матрицы. Из этого появляется заинтересованность в построении аппроксимации *X(t)*.

В общем виде аппроксимации имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{m} \tau_k\,(t) \cdot\ L_k(X)\,, t \in \mathbb{R}^d,$$

где τ_k - некоторая детерминированная функция; $L_k(X)$ - линейный непрерывный функционал.

Рассмотрим разложение Карунена-Лоэва, задающегося формулой:

$$\widetilde{X^d}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k^d}\ \cdot \varphi_k\,(t) \cdot Z_k\,, t \in \mathbb{R}^d,$$

где λ_k^d – собственные числа интегрального оператора с ядром $k(s,t)$; φ_k - собственные функции интегрального оператора с ядром $k(s,t)$; Z_k - независимая случайная величина, распределенная по стандартному закону нормального распределения.

Разложение можно считать стохастическим аналогом ряда Фурье. Будем рассматривать аппроксимации ранга m, которые имеют следующий вид:

$$\widetilde{X_m^d}(t) = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda_k^d}\ \cdot\ \varphi_k\,(t) \cdot Z_k\,, t \in \mathbb{R}^d.$$

Аппроксимация задается через частичную сумму разложения Карунена-Лоэва, состоящую из m слагаемых. Тогда ошибкой аппроксимации будем считать величину err = $E\,\|X - \widetilde{X_m}\,\|^2$, где функция нормы $\|\cdot\|^2$ определена на некотором нормальном пространстве функций. Заметим, что $\widetilde{X_m}$ минимизирует среднюю квадратическую ошибку, а потому является оптимальной аппроксимацией.

Сложностью аппроксимации будем называть минимальное число n(d, ε), для которого оптимальная аппроксимация ранга m процесса параметрической размерности d имеет ошибку, не превосходящую порога ε.

Данная задача тесно связана с задачей анализа информационной сложности аппроксимации многопараметрической функции. В ней рассматривается бесконечномерный объект, например, функция. Вычисление некоторого алгоритма (оператора) от последней является задачей либо вычислительно трудоемкой, либо аналитически неразрешимой.

Также сама функция чаще всего не может быть введена в существующие вычислительные системы напрямую. Поэтому мы пользуемся ее дискретным представлением, однако вычисление последнего также является затратной по времени операцией. В свою очередь информационной сложностью является минимальный объем данного дискретного представления, при котором аппроксимация алгоритма (оператора) дает минимальную ошибку с заданным порогом. При этом сложность зависит от параметрической размерности и порога ошибки.

В конечном счете можно сказать, что определенная выше сложность аппроксимации совпадает с информационной сложностью аппроксимации в среднем некоторого отображения.

Существуют различные подходы анализа аппроксимации. Мы рассмотрим асимптотический подход, где d → ∞. В работе будем рассматривать многопараметрические обобщенные процессы Андерсона-Дарлинга, которые являются одними из важных представителей гауссовских процессов.

Напомним, что данный процесс в одномерном случае задается ковариационной функцией:

$$K_\mu(t,s) \;=\; \Big(\frac{min(t,s) - ts}{\sqrt{t(1-t)}\,\sqrt{s(1-s)}}\Big)^{\mu}.$$

В свою очередь многомерный случай задается ковариационной функцией:

$$K^d(t,s) = \prod_{i=1}^{d} K_{\mu_i}(t_i,s_i) = \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{min(t_i,s_i) - t_i s_i}{\sqrt{t_i(1-t_i)}\,\sqrt{s_i(1-s_i)}}\right)^{\mu_i},$$

где $t = (t_1, .., t_d)$ и $s = (s_1, .., s_d)$ из $[0; 1]^d$; $\{\mu_i\}_{i \in N}$ - заданная последовательность, различных значений.

В работе будем рассматривать случай, когда последовательность параметров μ_i процесса стремится к нулю. Актуальность данной работы заключается в том, что ранее данный случай не рассматривался.

Целью работы является вывод на основе общих теорем асимптотической оценки сложности аппроксимации многопараметрических процессов Андерсона-Дарлинга при различных условиях на параметры процесса.

Для того, чтобы достигнуть вышеуказанной цели необходимо решить следующий набор задач:

— формальное описание модели (основные понятия теории информационной сложности, стохастическая интерпретация, многопараметрические задачи);

— обзор известных результатов, методов решения смежных задач, в том числе и предельных вероятностных методов (теория суммирования независимых случайных величин);

— изучение асимптотики сложности аппроксимации при различных условиях на масштабирующие параметры (задание оценки роста сложности аппроксимации при асимптотическом анализе).

В качестве результата должны получить асимптотическую оценку сложности аппроксимации обобщенных многопараметрических процессов Андерсона-Дарлинга, где параметры, определяющие поведение процесса, стремятся к нулю

1.2. Изначальные замечания

Стоит уточнить ряд моментов, которые были указаны в пункте 1.1. Как было замечено ранее, многомерный случай процесса Андерсона-Дарлинга задается через ковариационную функцию $K^d(t, s)$, которая в действительности состоит из ковариационных функций $K_{\mu_i}(t_i, s_i)$ для однопараметрических процессов $Y(u)$, $u \epsilon [0;1]$.

Говоря иными словами, рассматриваемый нами случайный процесс в действительности, обладает тензорной структурой, то есть многопараметрический процесс Андерсона-Дарлинга вида $X^d(t)$, где $t \epsilon [0;1]^d$ в действительности представим через тензорное произведение процессов $Y(u)$ и задается следующим образом:

$$X^d(t) = Y(u_1) \otimes Y(u_2) \otimes \ldots \otimes Y(u_d).$$

Теперь более точно зададим понятие «сложность аппроксимации в постановке в среднем». Последнее соответствует следующей формуле:

$$n(d, \varepsilon) = \min\{m \epsilon \mathbb{N}, \text{где } err(d, m) \leq \varepsilon \cdot noer(d)\}.$$

Под $\varepsilon \epsilon (0;1)$ будем подразумевать пороговую ошибка, а под функцией $err(\cdot,\cdot)$ рассматривается функция минимального среднего квадратического отклонения от процесса $X^d(t)$ для всех возможных m-ранговых аппроксимаций размерности d процесса $\widetilde{X_m^d}(t)$ (возможно так же использование понятия «n-ранговая аппроксимация»). Процесс $X(t)$ рассматривается, как элемент пространства Лебега $L_2([0;1]^d)$, на котором определены понятия скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и норма $\|\cdot\|$ и, как следствие, понятие второй момента, задающийся, как $\mathbb{E}\|\cdot\|^2$

Таким образом для элементов $X^d(t)$ задано понятие норма $\|\cdot\|$ благодаря чему можно определить функцию $err(\cdot,\cdot)$, как:

$$err(d, n) = \inf\left\{\sqrt{\mathbb{E}\left\|X^d(t) - \widetilde{X_m^d}(t)\right\|^2}, \text{где } \widetilde{X_m^d}(t) \epsilon \mathcal{X}_m^d\right\}.$$

Под $\mathcal{X}_m^d$ предполагается класс всевозможных аппроксимаций d-мерного процесса ранга m. Функция $noer(d)$ задается, как:

$$noer(d) = \sqrt{\mathbb{E}\|X^d(t)\|^2},$$

где $t \epsilon [0;1]^d$.

Вышеописанная функция в действительности нормализует пороговую ошибку. Таким образом граница $\varepsilon \cdot noer(d)$ масштабируется в зависимости от параметрической размерности процесса $X^d(t)$.

В свою очередь, изучая вопрос задания сложности аппроксимации в данной работе, мы в действительности воспринимаем функцию $n(d, \varepsilon)$, как функцию от двух параметров, где параметр d принадлежит множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, а параметр пороговой ошибки ε определен, как было замечено ранее, на промежутке (0; 1).

Учитывая ранее указанный факт, что аппроксимация Карунена-Лоэва минимизирует среднюю квадратическую ошибку отклонения, в действительности функцию сложности аппроксимации в среднем $n(d, \varepsilon)$ при пороге ошибки ε задается формулой:

$$n(d, \varepsilon) = \min\{m \epsilon \mathbb{N}, \text{где } \mathbb{E}\left\|X^d(t) - \widetilde{X_m^d}(t)\right\|^2 \leq \varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}\left\|X^d(t)\right\|^2\}. \quad (1)$$

Здесь же обратим внимание на то, что помимо разложения Карунена-Лоэва существуют и другие аппроксимации гауссовских полей, которые так же стоит упомянуть в этой работе. К ним относятся разложение ковариационной матрицы по собственным значениям и метод факторизации Холецкого. Однако ввиду того факта, что обе из представленных аппроксимаций зависят от матрицы ковариации, последние не походят для рассматриваемого нами асимптотического случая, где параметрическая размерность процесса стремится к бесконечности, так как тогда задача для них становится трудно вычислимой. В отличие от представленных выше аппроксимаций разложение Карунена-Лоэва зависит от собственных чисел и функций интегрального ковариационного оператора, а не от ковариационной матрицы. По этой причине, а также из-за того, что разложение минимизирует среднюю квадратическую ошибку, была выбрана именно данная аппроксимация.

После того, как было более точно задано определение функции сложности $n(d, \varepsilon)$, перейдем к вопросу моделирования гауссовского случайного процесса, чтобы чуть более точно разъяснить особенности прямых способов моделирования последних.

Для начала опишем прямой способ моделирования процесса, чтобы чуть точнее определить проблемы, с которыми мы столкнемся, если выберем его. Рассмотрим одномерный случай. Тогда, если следовать из определения случайного процесса, моделируя одномерную случайную функцию $Y(u)$, мы в действительности моделируем гауссовскую случайную величину Y, которая задается математическим ожиданием, которое у нас равно нулю, т.к. рассматриваемый нами случайный процесс центрирован, и значением дисперсии σ^2. Таким образом случайная величина Y задается, как:

$$Y = \sigma \cdot X,$$

где X - независимая случайная величина, распределенная по закону стандартного нормального распределения.

Теперь рассмотрим моделирование процесса, как если бы мы рассматривали последний, как набор векторов. В этой постановке при прямом моделировании, исходя из определения, мы строим гауссовский вектор Y^n размерности n, используя матрицу ковариаций $\sum$ и вектор математического ожиданий, который в нашей постановке является нулевым, так как рассматриваемый нами процесс является центрированным. Зная это и пользуясь определением многомерных нормальных распределений, получим, что:

$$Y^n = \sqrt{\sum} \cdot X^n,$$

где X^n - вектор независимых случайных величин, задаваемых стандартным нормальным распределением.

Обратим внимание на то, что в действительности верхнюю запись можно интерпретировать, как линейную комбинацию вектора X^n с коэффициентом в виде i-го столбца матрицы, задающейся через квадратный корень от матрицы ковариации.

В свою очередь также заметим, что размер матрицы ковариации напрямую зависит, в сущности, от двух параметров: размера индексного множества ind и параметрической размерности процесса d, - порождая степенную функцию вида ind^{2d}, задающую количество элементов, хранимых в матрице в зависимости от выше указанных параметров. Так как поиск корня от матрицы ковариации сопряжен с поиском ее собственных чисел, алгоритм вычисления которых обладает сложностью $O(n^3)$, где n есть размер матрицы ковариации. Именно по этой причине хранение и взаимодействие с матрицей ковариации являются трудными задачами, которые вынуждают нас прибегать к построению аппроксимаций.

Выводы по главе 1

В результате была сформулирована цель предстоящей работы, определено понятие сложности аппроксимации в среднем, а также исследована особенность прямого моделирования случайного процесса.

ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ

2.1. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕТОДОМ КАРУНЕНА-ЛОЭВА

Чуть лучше изучим метод построения аппроксимации через метод Карунена-Лоэва. Последний базируется на альтернативной трактовке процесса отличной от идеи, связанной с прямым моделированием. Рассматривая случайный гауссовский процесс, как случайную функцию, мы в действительности можем моделировать случайный процесс через собственные числа и ортонормированные в пространстве L_2 собственные функции интегрального ковариационного оператора $\mathcal{K}_L^d$, действующего из пространства L_2 в L_2. В свою очередь ковариационный оператор примет вид:

$$\mathcal{K}_L^d f(t) = \int_{[0;1]^d} K^d(t,s) f(s) ds. \tag{2}$$

Будем рассматривать последовательность собственных чисел λ_k^d интегрального ковариационного оператора (2), k ∈ ℕ, как упорядоченную по не возрастанию. Использование данного похода обосновано тем, что начиная с некоторого момента собственные числа перестают в значительной степени влиять на аппроксимацию.

Заметим, что для ковариационного оператора справедливо:

$$\mathcal{K}_L^d\, \psi_e^d(t) = \lambda_e^d \psi_e^d(t), \tag{3}$$

где $e \epsilon \mathbb{N}; t \epsilon [0;1]^d; \lambda_k^d$ – собственные числа оператора (2); $\psi_e^d(t)$ – ортонормированные собственные функции оператора (2).

Ссылаясь на работу Брауна, посвященную изучению средней квадратической ошибки в расширяющихся последовательностях случайных функций [1], заметим, что аппроксимация вида:

$$\widetilde{X_m^d}(t) = \sum_{k=1}^{m} \langle X^d, \psi_k^d(t) \rangle\, \psi_k^d(t), \tag{4}$$

где $t \epsilon [0;1]^d$, минимизирует ошибку среднего квадратического отклонения, что позволяет считать данную оценку оптимальной.

Используя равенство Парсеваля, обнаружим, что:

$$\mathbb{E}\left\|X^d(t)\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\langle X^d(t), \psi_k^d(t)\rangle\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^d \, \mathbb{E}\left(\frac{\langle X^d(t), \psi_k^d(t)\rangle}{\sqrt{\lambda_k^d}}\right)^2.$$

Исходя из теории гауссовских процессов, заметим, что $\frac{\langle X^d(t), \psi_k^d(t)\rangle}{\sqrt{\lambda_k^d}}$ обладает независящим стандартным нормальным распределением. Таким образом второй множитель в сумме ряда, являясь, в сущности, вторым моментом, будет равен единице. Следовательно получим, что:

$$\mathbb{E}\left\|X^d(t)\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^d. \tag{5}$$

Тогда оценка сложности аппроксимации (1), если использовать равенства (4) и (5), примет вид:

$$n(d,\varepsilon) = \min\{m \epsilon \mathbb{N}, \text{где } \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^d - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^d \leq \varepsilon^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^d\}.$$

Данную запись можно представить и следующим, образом:

$$n(d,\varepsilon) = \min\{m \epsilon \mathbb{N}, \text{где } \textstyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^d \leq \varepsilon^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^d\}, \tag{6}$$

где левую часть неравенства можно воспринимать, как «хвост» последовательности. Для формальности заметим, что правая часть неравенства в действительности является следом ковариационного оператора $\mathcal{K}_L^d$, что позволяет нам представить запись (6), как:

$$n(d,\varepsilon) = \min\left\{m \epsilon \mathbb{N}, \text{где } \textstyle\sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^d \leq \varepsilon^2 \Lambda^d\right\}, \tag{7}$$

где $\Lambda^d = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^d$ – след ковариационного оператора $\mathcal{K}_L^d$.

Таким образом неформально сложность аппроксимации можно рассматривать, как счетную функцию. Тогда, так как мы рассматриваем упорядоченную по не возрастанию последовательность собственных чисел ковариационного оператора, можно считать, что в действительности определенная таким образом сложность аппроксимации в действительности зависит исключительно от последовательности собственных чисел. В свою очередь под сложностью в этом случае можно считать минимальный порядковый номер собственного числа, начиная с которого собственные числа перестают значимо влиять на сумму.

Тут же стоит обратить внимание на то, что в следствии тензорной структуры рассматриваемого нами случайного процесса, собственные числа λ_k^d и собственные функции $\psi_k^d(t)$ корреляционного оператора на пространстве размерности d могут быть соответственно представлены через произведение собственных чисел $\lambda_{j,k}$ и собственных функций $\psi_{j,k}(t)$ одномерного ковариационного оператора вида:

$$\mathcal{K}_\mu f(t) = \int_{[0;1]} K_\mu(t,s) f(s) ds. \tag{8}$$

Тогда след матрицы одномерного ковариационного оператора $\mathcal{K}_\mu$ будет иметь вид:

$$\Lambda^{\mu_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k}\,. \tag{9}$$

Из (9) следует, что след Λ^d задается, как:

$$\Lambda^d = \prod_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k}$$

Заметим так же, что аппроксимация вида (4) в точности соответствует используемому нами разложению Карунена-Лоэва. Для того, чтобы в этом убедится умножим и разделим каждое из слагаемых на $\sqrt{\lambda_k^d}$. Разумеется, для каждого k-го слагаемого мы подбираем соответствующее число λ_k^d. Тогда получим, что слагаемое:

$$\frac{\langle X^d, \psi_k^d(t)\rangle}{\sqrt{\lambda_k^d}},$$

как было замечено ранее, в соответствии с теорией гауссовских процессов будет задавать поведение случайной величины Z_k, обладающей стандартным нормальным законом распределения. В таком случае аппроксимация случайного процесса $X^d(t)$ ранг m с параметрической размерностью d, построенная через метод Карунена-Лоэва, будет иметь вид:

$$\widetilde{X_m^d}(t) = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda_k^d} \cdot \psi_k^d\,(t) \cdot Z_k\,, t \in [0;1]^d, \tag{10}$$

где λ_k^d– собственные числа интегрального ковариационного оператора с ядром ковариационной функции процесса Андерсона-Дарлинга $K^d(t,s)$; $\psi_k^d(t)$ – собственная функция интегрального ковариационного оператора с ядром ковариационной функции процесса Андерсона-Дарлинга $K^d(t,s)$;

Y_k – стандартная нормальная случайная величина.

2.2. Собственные числа корреляционного оператора

Из пункта 2.1 мы сделали вывод, что сложность аппроксимации напрямую определяется через собственные числа интегрального ковариационного оператора (2), где последние можно представить через произведение собственных чисел оператора (8). Используя результаты статьи Пайка, посвященной многопараметрическому расширению процессов Андерсона-Дарлинга [2], обнаружим, что собственные числа $\lambda_{j,k}$ и собственные функции $\psi_k^d(t)$ интегрального оператора (8) имеют вид:

$$\lambda_{j,k} = \frac{\mu_j}{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)},$$

$$\psi_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{(2\mu_j+2k-1)\,\Gamma(2\mu_j+k)}{(j-1)!}}\; P_{\mu_j+k-1}^{-\mu_j}(2t-1)$$

где $k \epsilon \mathbb{N}$; $\Gamma(x)$- гамма-функция; $P_{\mu_j+k}^{-\mu_j}\,(x)$ - измененный многочлен Лежандра (см. [7]), что задается, как:

$$P_{\mu_j+k}^{-\mu_j}\,(x) = \frac{(-1)^k}{2^{k+\mu_j}\Gamma\big(\mu_j+k+1\big)}(1-x^2)^{-\frac{\mu_j}{2}}\frac{d^k}{dx^k}(1-x^2)^{\mu_j+k}.$$

В свою очередь обратим внимание на свойство, которым обладают собственные числа процесса Андерсона-Дарлинга:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)} - \frac{\mu_j}{(\mu_j+k)} = 1. \tag{11}$$

Таким образом след ковариационного оператора (8) примет:

$$\Lambda^{\mu_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} = 1.$$

Тогда нетрудно найти значение следа ковариационного оператора (3), что имеет вид:

$$\Lambda^d = \prod_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{j,k} = 1.$$

Исходя из этого, можем заключить, что последовательность собственных чисел λ_i^d , задающая поведение сложности аппроксимации, определяется набором параметров μ_j, а оценка сложности аппроксимации имеет вид:

$$n(d, \varepsilon) = \min\left\{m \epsilon \mathbb{N}, \text{где } \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k^d \leq \varepsilon^2\right\}.$$

2.3. Закон распределения вероятностей

Ранее уточнялось, что задача поиска информационной сложности тесно связана с задачей поиска сложности аппроксимации. В действительности данные понятия во многом схожи, ибо теория информационной сложности рассматривает процесс моделирования аналитически трудно или вовсе не вычислимых функций через все еще трудно вычислимые функционалы. Информационная сложность ставит своей целью минимизировать обращение к функционалам, чтобы полученная аппроксимация не превышала заданного порога ошибки.

Исходя из этого в задании сложности аппроксимации мы могли бы обратиться к классам трактабильности, которые можно считать аналогом классов вычислительной сложности в теории информационной сложности [3]. К примеру, можно сказать, что решаемая задача является P-трактабильной в среднем, если $n(d;\varepsilon) \leq c \cdot d^r \cdot \varepsilon^{-s}$, где $\varepsilon \epsilon (0;1)$; $d \epsilon \mathbb{N}$; $r, s \geq 0$; $d > 0$. Однако последние задают недостаточно точную оценку в асимптотическом случае, поэтому данным подходом пользоваться не будем.

Ввиду того факта, что определённая нами сложность аппроксимации соответствует той, что была задана в статье А. Хартова, посвященной заданию сложности гауссовских полей [4], последнее позволяет нам воспользоваться выводами оной. Причина, по которой мы используем именно этот подход объясняется тем, что выведенный таким образом результат, задает более точную оценку сложности аппроксимации в асимптотическом случае, когда параметрическая размерность стремится к бесконечности.

Ссылаясь на работу, получим, что сложность аппроксимации $n(d,\varepsilon)$ в действительности задается, как:

$$n(d,\varepsilon) = A_{\mathrm{d}} + \mathrm{B}_{\mathrm{d}} \cdot \mathrm{q}(\varepsilon) + \mathrm{o}(\mathrm{B}_{\mathrm{d}}),$$

где A_{d}- последовательность; B_{d} – положительная последовательность; $\mathrm{q}(\varepsilon) = G^{-1}(1-\varepsilon^2)$ – квантильная функция от функции распределения $G(x)$.

Под функцией распределения $G(x)$ определяется:

$$\lim_{d\to\infty} G_d(x) = G(x).$$

Так же заметим, что функция распределения $G_d(x)$ задается, как:

$$G_d(x) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} U_j - A_d}{B_d} \leq x\right),$$

где U_j – независимая случайная величина.

В нашем случае U_j определяется, как случайная величина, заданная по закону распределения:

$$\mathbb{P}\left(U_j = \left|\ln \lambda_{j,k}\right|\right) = \lambda_{j,k},$$

где $k \epsilon \mathbb{N}$; $\lambda_{j,k}$ – собственные числа ковариационного интегрального оператора оператора $\mathcal{K}^d f(t)$ с ядром функции $K^d(t,s)$.

Ссылаясь на пункт 2.2, где были заданы собственные числа для ковариационного оператора (8) обнаружим, что случайная величина U_j примет вид:

$$U_j = \ln\left(\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j}\right).$$

Тогда закон распределения случайной величины задается, как:

$$\mathbb{P}\left(U_j = \ln\left(\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j}\right)\right) = \ln\left(\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j}\right).$$

Таким образом задав закон поведения случайной величины U_j , обнаружим что для задания оценки сложности аппроксимации нам будет достаточно определить, как себя ведет функция распределения $G_d(x)$, для чего проверим возможность применения ЦПТ.

Как известно в классической ЦПТ независимые стандартные величины требуют существования математического ожидания и дисперсии. Рассматриваемая нами случайная величина распределена не одинаково ввиду того факта, что собственные числа $\lambda_{j,k}$ рассматриваются в порядке не возрастания. Как следствие, начиная с некоторого момента μ_j перестают сильно влиять на распределение.

Тогда распишем частные суммы в виде:

$$\lim_{d\to+\infty}\frac{1}{B_d}\left(\sum_{i=1}^{d}E\left[U_j \cdot 1\left(\left|U_j\right| \le \tau B_d\right)\right]-A_d\right)=a$$

$$\lim_{\tau\to0}\underline{\lim}_{d\to\infty}\frac{1}{{B_d}^2}\left(\sum_{i=1}^{d}Var\left[U_j \cdot 1\left(\left|U_j\right| \le \tau B_d\right)\right]\right)=$$

$$=\lim_{\tau\to0}\overline{\lim}_{d\to\infty}\frac{1}{{B_d}^2}\left(\sum_{i=1}^{d}Var\left[U_j \cdot 1\left(\left|U_j\right| \le \tau B_d\right)\right]\right)=\sigma^2.$$

В свою очередь заметим, что представленные выше условия на математическое ожидание и дисперсию являются обобщёнными.

Выводы по главе 2

В результате проведенного исследования были выявлены особенности моделирования через метод Карунена-Лоэва. Были так же изучены различные способы задания сложности аппроксимации. По результатам главы был выбран метод задания оценки сложности аппроксимации.

ГЛАВА 3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

3.1. ПОИСК ОЦЕНОК ОСНОВНЫХ МЕТРИК

Так как в пункте 2.3 была определена функция вероятностей для случайной величины U_j , зададим оценки математического ожидания и дисперсии для оной, где параметр μ_j фиксирован. Иными словами, мы посчитаем метрики для собственных чисел от одномерного интегрального ковариационного оператора. Последние задаются следующим образом:

$$E_{\mu_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)} \ln\left(\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j}\right);$$

$$D_{\mu_j} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)} \left(\ln\left(\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j}\right)\right)^2 - \left(E_{\mu_j}\right)^2.$$

Однако для удобства задания оценки заметим, что формулы, представленные сверху, можно представить следующим образом:

$$E_{\mu_j} = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)} \ln\left(\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j}\right);$$

$$D_{\mu_j} = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)} \left(\ln\left(\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j}\right)\right)^2 - \left(E_{\mu_j}\right)^2.$$

Зная это зададим оценку на E_μ:

$$E_{\mu_j} = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)\cdot(\mu_j+k)} \ln\left[\frac{(\mu_j+k-1)\cdot(\mu_j+k)}{\mu_j}\right] =$$

$$= \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k-1} - \frac{\mu_j}{\mu_j+k}\right) \ln\left[\frac{(\mu_j+k-1)\cdot(\mu_j+k)}{\mu_j}\right].$$

Распишем ряд по слагаемым. Тогда получим, что предел примет вид:

$$\lim_{k^* \to \infty} \left[\begin{array}{c} \dfrac{\mu_j \ln(\mu_j+1)}{\mu_j} - \dots - \\ -\dfrac{\mu_j}{\mu_j+k} \ln\left(\dfrac{(\mu_j+k-1)\,(\mu_j+k)}{\mu_j}\right) + \\ + \dfrac{\mu_j}{\mu_j+k} \ln\left(\dfrac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j}\right) - \dots - \\ - \dfrac{\mu_j}{\mu_j+k^*} \ln\left(\dfrac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\right) \end{array}\right]$$

Обратим внимание на то, что, разложив следующий ряд и оставив нетронутыми первый и последние слагаемые, мы можем сформировать новый ряд из оставшихся слагаемых. Используя это получим, что:

$$E_{\mu_j} = A_1^1 + A_1^2 - A_1^3,$$

где $A_1^1 = \ln(\mu_j + 1)$; $A_1^2 = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{\mu_j + k} \ln \frac{\mu_j + k + 1}{\mu_j + k - 1}$;

$A_1^3 = \lim_{k^* \to \infty} \frac{\mu_j}{\mu_j + k^*} \ln \frac{(\mu_j + k^* - 1)(\mu_j + k^*)}{\mu_j}$.

Тогда мы можем ограничить сверху ряд A_1^2, используя свойство собственных чисел процесса Андерсона-Дарлинга (11), и получим:

$$A_1^2 = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{\mu_j + k} \ln \frac{\mu_j + k + 1}{\mu_j + k - 1} = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{\mu_j + k} \ln\left(1 + \frac{2}{\mu_j + k - 1}\right) \approx$$
$$\approx \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{2\mu_j}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} = 2 \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} = 2.$$

Рассматривая последнее слагаемое и учитывая, что $k^* \to +\infty$, зададим оценку последнего через пределы.

$$A_1^3 = \lim_{k^* \to \infty} \frac{\mu_j}{\mu_j + k^*} \ln\left(\frac{(\mu_j + k^* - 1)(\mu_j + k^*)}{\mu_j}\right) \leq$$
$$\leq \lim_{k^* \to +\infty} \frac{2\mu_j \ln(\mu_j + k^*)}{\mu_j + k^*} - \lim_{k^* \to +\infty} \frac{\mu_j \ln \mu_j}{\mu_j + k^*}.$$

Рассмотрим пределы представленные выше:

$$\lim_{k^* \to +\infty} \frac{\ln(\mu_j + k^*)}{\mu_j + k^*} \cdot 2\mu_j = 0;$$
$$\lim_{k^* \to +\infty} \frac{\mu_j \ln \mu_j}{\mu_j + k^*} = 0;$$
$$A_1^3 \leq \frac{2\mu_j \ln(\mu_j + k^*)}{\mu_j + k^*} - \frac{\mu_j \ln \mu_j}{\mu_j + k^*} = 0.$$

То есть можно сказать, что слагаемое A_1^3 равно нулю. Таким образом получим, что оценка для математического ожидания равна:

$$E_{\mu_j} \approx \ln(\mu_j + 1) + 2 + 0.$$

Теперь зададим оценку на дисперсию, что имеет следующий вид:

$$D_{\mu_j} = \lim_{k^* \to \infty} R_1 - R_2,$$

где $R_1 = \sum_{k=1}^{k^*} \frac{\mu}{(\mu + k - 1)(\mu + k)} \left(\ln\left(\frac{(\mu + k - 1)(\mu + k)}{\mu}\right)\right)^2$; $R_2 = (E_\mu)^2$.

Сначала разложим второй момент:

$$R_1 = \sum_{k=1}^{k^*} \frac{\mu}{(\mu+k-1)(\mu+k)} \left(\ln\left(\frac{(\mu+k-1)(\mu+k)}{\mu}\right)\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{k^*} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k-1} - \frac{\mu_j}{\mu_j+k}\right) \left(\ln\left[\frac{(\mu_j+k-1)\cdot(\mu_j+k)}{\mu_j}\right]\right)^2$$

По аналогии с математическим ожиданием разложим второй момент на слагаемые:

$$R_1 = \ln^2(\mu_j+1) + \frac{\mu_j}{\mu_j+1}\left(\ln^2\frac{(\mu_j+2)(\mu_j+1)}{\mu_j} - \ln^2\frac{(\mu_j+1)(\mu_j)}{\mu_j}\right) + \cdots -$$

$$- \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*} \ln^2\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}.$$

Таким образом по аналогии с поиском оценки математического ожидания мы получим, что второй момент задается, как:

$$R_1 = \ln^2(\mu_j+1) + \sum_{k=1}^{k^*-1}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\ln\frac{(\mu_j+k)^2\left((\mu_j+k)^2-1\right)}{\mu_j^2}\right) -$$

$$- \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*} \ln^2\left(\frac{(\mu_j+k^*)(\mu_j+k^*-1)}{\mu_j}\right);$$

Теперь разложим квадрат математического ожидания, используя полученную ранее оценку для математического ожидания.

$$R_2 = \left(\ln(\mu_j+1) + \sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} - \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\right)^2 =$$

$$= \left(\ln(\mu_j+1) - \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\right)^2 +$$

$$+ 2\left(\ln(\mu_j+1) - \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\right)\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)^2.$$

Раскроем скобки:

$$R_2 = \ln^2(\mu_j+1) - 2\ln(\mu_j+1)\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\cdot\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j} +$$

$$+ \left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\right)^2 \ln^2\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j} + 2\ln(\mu_j+1)\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} -$$

$$- 2\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\cdot\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} + \left(\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)^2.$$

Разложив второй момент и квадрат математического ожидания приступим к заданию оценки для дисперсии:

$$D_\mu = \ln^2(\mu_j+1) + \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k} \ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} \ln\frac{(\mu_j+k)^2\left((\mu_j+k)^2-1\right)}{\mu_j^2} \right) -$$

$$-\lim_{k^*\to\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*} \ln^2\left(\frac{(\mu_j+k^*)(\mu_j+k^*-1)}{\mu_j}\right) - \ln^2(\mu_j+1) +$$

$$+\lim_{k^*\to\infty} 2\ln(\mu_j+1)\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\cdot \ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j} - \lim_{k^*\to\infty}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\right)^2 \ln^2\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j} -$$

$$-\lim_{k^*\to\infty} 2\ln(\mu_j+1)\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} +$$

$$+\lim_{k^*\to\infty} 2\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\cdot\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} -$$

$$-\lim_{k^*\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)^2.$$

Сократим слагаемое $\ln^2(\mu_j+1)$, получим:

$$D_\mu = \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k} \ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} \ln\frac{(\mu_j+k)^2\left((\mu_j+k)^2-1\right)}{\mu_j^2} \right) -$$

$$-\lim_{k^*\to\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*} \ln^2\left(\frac{(\mu_j+k^*)(\mu_j+k^*-1)}{\mu_j}\right) +$$

$$+\lim_{k^*\to\infty} 2\ln(\mu_j+1)\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\cdot \ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j} - \lim_{k^*\to\infty}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\right)^2 \ln^2\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j} -$$

$$-\lim_{k^*\to\infty} 2\ln(\mu_j+1)\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} +$$

$$+\lim_{k^*\to\infty} 2\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\cdot\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} -$$

$$-\lim_{k^*\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)^2$$

Сгруппируем слагаемые с общим множителем $2\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}$.

$$D_\mu = \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k} \ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} \ln\frac{(\mu_j+k)^2\left((\mu_j+k)^2-1\right)}{\mu_j^2} \right) -$$

$$-\lim_{k^*\to\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j+k^*} \ln^2\left(\frac{(\mu_j+k^*)(\mu_j+k^*-1)}{\mu_j}\right) +$$

$$+\lim_{k^*\to\infty} 2\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\left(\ln(\mu_j+1)+\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)-$$

$$-\lim_{k^*\to\infty}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\right)^2\ln^2\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}-$$

$$-\lim_{k^*\to\infty} 2\ln(\mu_j+1)\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}-\lim_{k^*\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)^2=$$

Объединим суммы вида $\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\cdot C_{\mu_j}$.

$$D_\mu=\lim_{k^*\to\infty}\sum_{k=1}^{k^*-1}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\left(\ln\frac{(\mu_j+k)^2\left((\mu_j+k)^2-1\right)}{\mu_j^2}-\ln(\mu_j+1)^2\right)\right)-$$

$$-\lim_{k^*\to\infty}\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln^2\left(\frac{(\mu_j+k^*)(\mu_j+k^*-1)}{\mu_j}\right)\left(1+\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\right)+$$

$$+\lim_{k^*\to\infty} 2\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\left(\ln(\mu_j+1)+\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)-$$

$$-\lim_{k^*\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)^2=$$

$$=\lim_{k^*\to\infty}\sum_{k=1}^{k^*-1}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\left(\ln\frac{(\mu_j+k)^2\left((\mu_j+k)^2-1\right)}{\mu_j^2\,(\mu_j+1)^2}\right)\right)-$$

$$-\lim_{k^*\to\infty}\frac{\mu_j(2\mu_j+k^*)}{(\mu_j+k^*)^2}\ln^2\left(\frac{(\mu_j+k^*)(\mu_j+k^*-1)}{\mu_j}\right)+$$

$$+\lim_{k^*\to\infty} 2\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\left(\ln(\mu_j+1)+\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)-$$

$$-\lim_{k^*\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)^2$$

Таким образом получим, что дисперсия задается из набора слагаемых A_2^i следующим образом:

$$D_{\mu_j}=W_2^1-W_2^2+W_2^3-W_2^4,$$

где $W_2^1=\lim_{k^*\to\infty}\sum_{k=1}^{k^*-1}\left(\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\left(\ln\frac{(\mu_j+k)^2\left((\mu_j+k)^2-1\right)}{\mu_j^2\,(\mu_j+1)^2}\right)\right)$;

$W_2^2=\lim_{k^*\to\infty}\frac{\mu_j(2\mu_j+k^*)}{(\mu_j+k^*)^2}\ln^2\left(\frac{(\mu_j+k^*)(\mu_j+k^*-1)}{\mu_j}\right)$;

$W_2^3=\lim_{k^*\to\infty}\frac{2\mu_j}{\mu_j+k^*}\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}\left(\ln(\mu_j+1)+\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{\mu_j}{\mu_j+k}\ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1}\right)$;

$W_2^4 = \lim_{k^* \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{\mu_j + k} \ln \frac{\mu_j + k + 1}{\mu_j + k - 1} \right)^2.$

Для начала оценим второе и третье слагаемое дисперсии в пределе. Тогда оценка для слагаемого W_2^2 примет вид:

$$W_2^2 \leq \lim_{k^* \to \infty} \frac{\mu_j (2\mu_j + k^*)}{(\mu_j + k^*)^2} \ln^2 \left(\frac{(\mu_j + k^*)^2}{\mu_j} \right) =$$

$$= \lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j (2\mu_j + k^*) \ln^2(\mu_j + k^*)}{(\mu_j + k^*)^2} - \lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j \ln \mu_j (2\mu_j + k^*) \ln(\mu_j + k^*)}{(\mu_j + k^*)^2} +$$

$$+ \lim_{k^* \to \infty} \frac{\mu_j \ln^2(\mu_j)(2\mu_j + k^*)}{(\mu_j + k^*)^2}.$$

Рассмотрим каждый предел по отдельности.

$$\lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j (2\mu_j + k^*) \ln^2(\mu_j + k^*)}{(\mu_j + k^*)^2} = 0;$$

$$\lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j \ln \mu_j (2\mu_j + k^*) \ln(\mu_j + k^*)}{(\mu_j + k^*)^2} = 0;$$

$$\lim_{k^* \to \infty} \frac{\mu_j \ln^2(\mu_j)(2\mu_j + k^*)}{(\mu_j + k^*)^2} = 0.$$

Тогда получим, что:

$$\lim_{k^* \to \infty} W_2^2 = 0.$$

В свою очередь оценка для слагаемого A_2^3 примет вид:

$$W_2^3 \leq \lim_{k^* \to \infty} \frac{2\mu_j}{\mu_j + k^*} \ln \frac{(\mu_j + k^*)^2}{\mu_j} \left(\ln(\mu_j + 1) + \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{2\mu_j}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} \right) =$$

$$= \lim_{k^* \to \infty} \frac{2\mu_j}{\mu_j + k^*} \ln \frac{(\mu_j + k^*)^2}{\mu_j} \left(\ln(\mu_j + 1) + 2 \right) =$$

$$= \lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j (\ln(\mu_j + 1) + 2) \ln(\mu_j + k^*)}{\mu_j + k^*} - \lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j (\ln(\mu_j + 1) + 2) \ln(\mu_j)}{\mu_j + k^*};$$

Рассмотрим слагаемые по-отдельности. Получим, что:

$$\lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j (\ln(\mu_j + 1) + 2) \ln(\mu_j + k^*)}{\mu_j + k^*} = 0;$$

$$\lim_{k^* \to \infty} \frac{4\mu_j (\ln(\mu_j + 1) + 2) \ln(\mu_j)}{\mu_j + k^*} = 0;$$

Тогда получим, что в пределе третье слагаемое ведет себя, как:

$$\lim_{k^* \to \infty} W_2^3 = 0.$$

Таким образом мы обнаружили, что слагаемые A_2^2 и A_2^3 в пределе стремятся к нулю. Теперь зададим оценку поведения слагаемого A_2^1, используя соответствующие свойства случайной величины $U_{j,k}$. Тогда получим, что:

$$W_2^1 = \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j + k} \ln \frac{\mu_j + k + 1}{\mu_j + k - 1} \left(\ln \frac{\left(\mu_j + k\right)^2 \left(\left(\mu_j + k\right)^2 - 1\right)}{\mu_j^2 \left(\mu_j + 1\right)^2} \right) \right) \approx$$

$$\approx \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\mu_j}{\mu_j + k} \ln \left(1 + \frac{2}{\mu_j + k - 1}\right) \left(\ln \frac{\left(\mu_j + k\right)^4}{\mu_j^2 \left(\mu_j + 1\right)^2} \right) \right) \approx$$

$$\approx \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{4\mu_j}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} \left(\ln \frac{\left(\mu_j + k\right)^2}{\mu_j \left(\mu_j + 1\right)} \right) \right) \approx$$

$$\approx \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{8\mu_j \ln\left(\mu_j + k\right)}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} - \frac{4\mu_j \ln\left(\mu_j \cdot (\mu_j + 1)\right)}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} \right) \approx$$

$$\approx \lim_{k^*\to\infty} 8\mu_j \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\ln\left(\mu_j + k\right)}{(\mu_j + k)\left(\mu_j + k - 1\right)} \right) - \ 4 \ln\left(\mu_j\right)(\mu_j + 1)$$

Наконец оценим четвертое слагаемое, оценка которого примет вид:

$$W_2^4 = \lim_{k^*\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{\mu_j + k} \ln \frac{\mu_j + k + 1}{\mu_j + k - 1} \right)^2 =$$

$$= \lim_{k^*\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{(\mu_j + k)} \ln \left(1 + \frac{2}{\mu_j + k - 1}\right) \right)^2 \approx$$

$$\approx \lim_{k^*\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{(\mu_j + k)} \frac{2}{\mu_j + k - 1} \right)^2 = 4.$$

Таким образом оценка дисперсии для случайной величины U_j при фиксированном параметре μ_j примет вид:

$$D_{\mu_j} \approx \ 8\mu_j C_1 - 4 \ln\left(\mu_j\right)(\mu_j + 1) - 4,$$

где $C_1 \geq \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\ln(k)}{k^2}\right) \ \approx \sum_{k=1}^{k^*-1} \left(\frac{\ln\left(\mu_j + k\right)}{(\mu_j + k)\left(\mu_j + k - 1\right)} \right).$

В результате нами были заданы оценки на основные метрики.

3.2. Проверка обобщенного критерия

Учитывая то обстоятельство, что оценка сложности аппроксимации, как было замечено ранее, в действительности задается через функцию распределения G, было бы разумным шагом проверить возможность применения одной из центральных предельных теорем. В случае, если одну из них мы все-таки сможем применить, это не только позволит нам задать функцию квантиля распределения G, но и в свою очередь оценки на последовательности A_d и B_d.

Воспользуемся обобщенным критерием (см. [4])

$$\lim_{d\to\infty} \max_{j=1,..,d} \mathbb{P}\left(\left|U_j\right| > xB_d\right) = 0, \tag{12}$$

где $x > 0$.

При выполнении критерия можно применить центральную предельную, из которой следует, что функция распределения $G_d(x)$ сходится к канонической функции Леви L задающейся триплетом $(\gamma;\ \sigma^2;\ \mathcal{L})$:

$$L(x) = \exp\left\{it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{|x|>0}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)d\mathcal{L}(x)\right\},$$

где $\gamma \in \mathbb{R};\ \sigma^2 \geq 0;\ \mathcal{L} -$ спектральная функция Леви.

Исходя из этого получим следующие оценки:

$$\lim_{d\to\infty}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{P}\left(\left|U_j\right| \geq xB_d\right) = -\mathcal{L}(x),$$

для всех $x > 0$;

$$\lim_{d\to\infty}\frac{1}{B_d}\left(\sum_{i=1}^{d} E\left[U_j\ \cdot 1\left(\left|U_j\right| \leq\ \tau B_d\right)\right] - A_d\right) = \gamma + \int_{0<|x|<\tau}\frac{x^3 d\mathcal{L}(x)}{1+x^2} - \int_{|x|\geq\tau}\frac{x d\mathcal{L}(x)}{1+x^2};$$

$$\lim_{\tau\to 0}\lim_{d\to\infty}\frac{1}{{B_d}^2}\left(\sum_{i=1}^{d} Var\left[U_j\ \cdot 1\left(\left|U_j\right| \leq\ \tau B_d\right)\right]\right) =\ \sigma^2.$$

Проверим возможность применения выполнения критерия (12). Со смысловой точки зрения последний можно считать, как проверку распределения на тяжелые хвосты. Для начала определим, чему равно $\mathbb{P}\left(\left|U_j\right| \geq xB_d\right)$:

$$\mathbb{P}(|U_j| \geq xB_d) = \sum_{k:\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} \geq xB_d}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}.$$

Введем понятие $k_{\text{тот}}^{d,j}$, которое обозначает такое k зависящее от d и μ_j, начиная с которого начинает выполняется условие $\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} \geq xB_d$. Тогда сумма примет вид:

$$\mathbb{P}(|U_j| \geq xB_d) = \sum_{k=k_{\text{тот}}^{d,j}}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}.$$

Распишем сумму, как в свое время делали в (11):

$$\mathbb{P}(|U_j| \geq xB_d) = \sum_{k=k_{\text{тот}}^{d,j}}^{\infty} \frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)} - \frac{\mu_j}{(\mu_j+k)} =$$

$$= \frac{\mu_j}{\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}-1\right)} - \frac{\mu_j}{\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}\right)} + \frac{\mu_j}{\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}\right)} - \cdots +$$

$$+ \frac{\mu_j}{(\mu_j+k^*-1)} - \frac{\mu_j}{(\mu_j+k^*)} + \cdots ,$$

где $k^* \to \infty$. Исходя из этого получим, что вероятность примет вид:

$$\mathbb{P}(|U_j| \geq xB_d) = \frac{\mu_j}{\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}-1\right)} \tag{13}$$

Формально зададим оценку на $k_{\text{тот}}^{d,j}$. По условию известно, что:

$$|U_j| \geq xB_d,$$

тогда оценка на $k_{\text{тот}}^{d,j}$ примет вид:

$$\ln\frac{\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}-1\right)\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}\right)}{\mu_j} \geq xB_d;$$

$$\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}-1\right)\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}\right) \geq \mu_j e^{xB_d}.$$

Для удобства ограничим $\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}-1\right)\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}\right)$ сверху, как:

$$\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}\right)^2 \geq \left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}-1\right)\left(\mu_j+k_{\text{тот}}^{d,j}\right).$$

Тогда оценка на $k_{\text{тот}}^{d,j}$ примет вид:

$$\mu_j + k_{\text{тот}}^{d,j} \geq \sqrt{\mu_j e^{xB_d}};$$

$$k_{\text{тот}}^{d,j} \geq \sqrt{\mu_j e^{xB_d}} - \mu_j. \tag{14}$$

Определив оценку таким образом, вернемся к проверке критерия (12). Будем считать, что при μ_r дробь (13) примет максимальное значение. Тогда критерий примет вид:

$$\lim_{d\to\infty} \max_{j=1,..,d} \mathbb{P}\left(\left|U_j\right| \geq xB_d\right) = \lim_{d\to\infty} \frac{\mu_r}{\left(\mu_r + k_{\text{тот}}^{d,j} - 1\right)}. \tag{15}$$

Воспользовавшись ограничением на $k_{\text{тот}}^{d,j}$ (14) обнаружим, что предел (15) можно ограничить сверху:

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\mu_r}{\left(\mu_r + k_{\text{тот}}^{d,j} - 1\right)} \leq \lim_{d\to\infty} \frac{\mu_r}{\left(\sqrt{\mu_r e^{xB_d}} - 1\right)}$$

Так как μ_r является константой, а из постановки задачи известно, что $B_d \to +\infty$, тогда оценка критерия примет вид:

Однако проблема в том, что

$$\lim_{d\to\infty} \max_{j=1,..,d} \mathbb{P}\left(\left|U_j\right| \geq xB_d\right) \leq \lim_{d\to\infty} \frac{\mu_r}{\left(\sqrt{\mu_r e^{xB_d}} - 1\right)} = 0.$$

Таким образом мы доказали выполнение критерия, что позволяет нам воспользоваться обобщенной теоремой.

3.3. Проверка критерия Ляпунова

Пункт 3.2 позволяет нам использовать обобщенную теорему для задания сложности аппроксимации. Однако стоит заметить, что результаты, полученные через последнюю, будут в силу особенностей теоремы неточными.

Зная это, попытаемся воспользоваться ЦПТ, для своего применения требующей выполнения более строгого критерия. Для этого проверим возможность применения ЦПТ Ляпунова. Для ее применения необходимо проверить выполнение критерия Ляпунова, что задается, как:

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left|U_j - \mathbb{E}U_j\right|^3}{\left(\sum_{j=1}^{d} D_{\mu_j}\right)^{3/2}} = 0.$$

Однако для удобства в дальнейшем будем проверять предел:

$$\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\left|U_j-\mathbb{E}U_j\right|^3\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{d}D_{\mu_j}\right)^3}}.$$

В том случае, если критерий выполняется, мы сможем применить центральную предельную теорему, из которой будет следовать, что:

$$\mathrm{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{d}U_j-A_d}{B_d}\right)\ \to\Phi(x),$$

где $d\to\infty$ $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального распределения.

Заметим так же, что из представленной выше центральной предельной теоремы будет следовать, что последовательности A_d и B_d могут быть заданы через последовательности метрик, а именно:

$$A_d=\sum_{j=1}^{d}E_{\mu_j};\ B_d=\sqrt{\sum_{j=1}^{d}D_{\mu_j}}.$$

Для проверки критерия необходимо оценить третий центральный момент случайной величины U_j, к оценке которого мы и приступим:

$$\mathbb{E}\left|U_j-\mathbb{E}U_j\right|^3=\lim_{k^*\to\infty}\sum_{k=1}^{k^*}\left[\frac{\mu_j}{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}\cdot\left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}{\mu_j}-E_{\mu_j}\right|^3\right].$$

Заметим, что третий момент можно представить, как:

$$\mathbb{E}\left|U_j-\mathbb{E}U_j\right|^3=\lim_{k^*\to\infty}\sum_{k=1}^{k^*}\left[\begin{array}{c}\left(\frac{\mu_j}{(\mu_j+k-1)}-\frac{\mu_j}{(\mu_j+k)}\right)\cdot\\ \cdot\left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}{\mu_j}-E_{\mu_j}\right|^3\end{array}\right].$$

Распишем третий момент через слагаемые. Тогда получим, что предел примет вид:

$$\lim_{k^*\to\infty}\left[\frac{\mu_j}{\mu_j}\left|\ln\frac{(\mu_j+1-1)(\mu_j+1)}{\mu_j}-E_{\mu_j}\right|^3-\frac{\mu_j}{\mu_j+1}\left|\ln\frac{(\mu_j+1-1)(\mu_j+1)}{\mu_j}-E_{\mu_j}\right|^3+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_j}{\mu_j+1}\left|\ln\frac{(\mu_j+1)(\mu_j+2)}{\mu_j}-E_{\mu_j}\right|^3-\cdots-\frac{\mu_j}{\mu_j+k^*}\left|\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j}-E_{\mu_j}\right|^3\right].$$

Заметим, что центральный третий момент можно разбить на слагаемые, как мы в свое время поступили с математическим ожиданием и дисперсией. Тогда третий центральный момент примет вид:

$$\mathbb{E}\left|U_j - \mathbb{E}U_j\right|^3 = A_3^1 + A_3^2 - A_3^3,$$

где $A_3^1 = \left|\ln(\mu_j + 1) - E_{\mu_j}\right|^3$;

$A_3^2 = \lim\limits_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left[\frac{\mu_j}{\mu_j + k}\left(\left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^3 - \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^3\right)\right]$;

$A_3^3 = \lim\limits_{k^* \to \infty} \frac{\mu_j}{\mu_j + k^*}\left|\ln\frac{(\mu_j+k^*-1)(\mu_j+k^*)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^3$.

Рассмотрим второе слагаемое A_3^2. Заметим, что при оценки последнего допустимо применение оценки сверху ввиду того обстоятельства, что в критерии Ляпунова третий центральный момент стоит в числителе. Тогда, разложив второе слагаемое, получим, что:

$$A_3^2 = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \left[\frac{\mu_j}{\mu_j + k}\left(\left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^3 - \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^3\right)\right] =$$

$$= \lim_{k^* \to \infty} \left[\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{\mu_j + k}\left(\left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right| - \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|\right) \cdot \\ \cdot \left(\begin{array}{c} \left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^2 + \\ + \left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right| \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right| + \\ + \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^2 \end{array}\right) \end{array}\right].$$

Для удобства представим второе слагаемое через набор других слагаемых. Тогда слагаемое A_3^2 представимо, как:

$$A_3^2 = \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\mu_j}{\mu_j + k} B_3^1 (B_3^2 + B_3^3 + B_4^3),$$

где $B_3^1 = \left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right| - \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|$;

$$B_3^2 = \left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^2;$$

$$B_3^3 = \left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|\left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|;$$

$$B_3^4 = \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^2.$$

Для начала зададим оценку на слагаемое B_3^1. Как было замечено ранее здесь в отличии от дисперсии допустимо применение оценки сверху. Ввиду этого обстоятельства оценка слагаемого B_3^1 примет вид:

$$B_3^1 = \left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right| - \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right| \le$$

$$\le \left|\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k+1) - \left(\ln\mu_j + E_{\mu_j}\right)\right|$$

$$- \left|\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k-1) - \left(\ln\mu_j + E_{\mu_j}\right)\right| \le$$

$$\le \left|\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k+1) - \ln(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)\right| =$$

$$= \ln(\mu_j+k)(\mu_j+k+1) - \ln(\mu_j+k)(\mu_j+k-1) =$$

$$= \ln\frac{\mu_j+k+1}{\mu_j+k-1} \le \frac{2}{\mu_j+k-1}.$$

Теперь ограничим слагаемое B_3^3. Здесь так же можно воспользоваться тем обстоятельством, что можно применить оценку сверху. Тогда получим, что оценка слагаемого B_3^3 примет вид:

$$B_3^3 = \left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|\left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right| \le$$

$$\le \left(\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right)^2.$$

Тогда обнаружим, что слагаемое A_3^2 при применении выше представленных оценок примет вид:

$$A_3^2 \le \lim_{k^*\to\infty}\sum_{k=1}^{k^*-1}\frac{2\mu_j}{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}\left(\begin{array}{c}2\left|\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^2 + \\ + \left|\ln\frac{(\mu_j+k-1)(\mu_j+k)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^2\end{array}\right).$$

Обратим внимание на то, что тогда второе слагаемое можно представить через ранее введенные слагаемые B_3^2 и B_3^4 . Тогда слагаемое A_3^2 будет иметь следующий вид:

$$A_3^2 \leq \lim_{k^*\to\infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{2\mu_j}{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)} \ (2B_3^2 + B_3^4\ ).$$

Наконец, дадим оценку на второй множитель $2B_3^2 + B_3^4$.

$$2B_3^2 + B_3^4 = 2\left(\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j}\right)^2 - 4\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)}{\mu_j}E_{\mu_j} +$$

$$+2\left(E_{\mu_j}\right)^2 + \left(\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}{\mu_j}\right)^2 - 2\ln\frac{(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)}{\mu_j}E_{\mu_j} +$$

$$+\left(E_{\mu_j}\right)^2 = 2\big(\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)\big)^2 - 4\ln\mu_j\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k+1) +$$

$$+2(\ln\mu_j)^2 - 4\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k+1)E_{\mu_j} + 4\ln\mu_j\, E_{\mu_j} + 2\left(E_{\mu_j}\right)^2 +$$

$$+\big(\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k-1)\big)^2 - 2\ln\mu_j\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k-1) +$$

$$+(\ln\mu_j)^2 - 2E_{\mu_j}\ln(\mu_j+k)(\mu_j+k-1) + 2E_{\mu_j}\ln\mu_j + \left(E_{\mu_j}\right)^2 \leq$$

$$\leq 3(\ln\mu_j)^2 + \ 3\left(E_{\mu_j}\right)^2 + 3\left(\ln(\mu_j+k+1)^2\right)^2 - 6\ln\mu_j\ln(\mu_j+k+1)^2 -$$

$$-4\ln(\mu_j+k-1)^2 E_{\mu_j} - 2E_{\mu_j}\ln(\mu_j+k-1)^2 + 6E_{\mu_j}\ln\mu_j =$$

$$= 3(\ln\mu_j)^2 + \ 3\left(E_{\mu_j}\right)^2 + 12\big(\ln(\mu_j+k+1)\big)^2 - 12\ln\mu_j\ln(\mu_j+k+1) -$$

$$-12\ln(\mu_j+k-1)\,E_{\mu_j} + 6E_{\mu_j}\ln\mu_j$$

Таким образом оценка на второй множитель примет вид:

$$2B_3^2 + B_3^4 \leq 3(\ln\mu_j)^2 + \ 3\left(E_{\mu_j}\right)^2 + 12\big(\ln(\mu_j+k+1)\big)^2$$
$$- 12\ln\mu_j\ln(\mu_j+k+1) - 12\ln(\mu_j+k-1)\,E_{\mu_j} + 6E_{\mu_j}\ln\mu_j.$$

В свою очередь имея оценку на второй множитель второго слагаемого третьего центрального момента, можно задать окончательную оценку на слагаемое A_3^2:

$$A_3^2 \le \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{2\mu_j}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 3(\ln \mu_j)^2 + \ 3\left(E_{\mu_j}\right)^2 + 12(\ln(\mu_j + k + 1))^2 - \\ -12 \ln \mu_j \ln(\mu_j + k + 1) - 12 \ln(\mu_j + k - 1)\, E_{\mu_j} + 6E_{\mu_j} \ln \mu_j \end{pmatrix}$$

Зная это, распишем слагаемое A_3^2 воспользовавшись свойством собственных чисел интегрального ковариационного оператора с ядром функции корреляции процесса Андерсона-Дарлинга (11):

$$A_3^2 \le 6(\ln \mu_j)^2 + 6\left(E_{\mu_j}\right)^2 + 24\mu_j \cdot \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{(\ln(\mu_j + k + 1))^2}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} -$$

$$- 24\mu_j \ln \mu_j \cdot \lim_{k^* \to \infty} \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\ln\left(\mu_j + k + 1\right)}{\left(\mu_j + k\right)\left(\mu_j + k - 1\right)} -$$

$$- 24E_{\mu_j}\mu_j \cdot \lim_{k^* \to \infty} \textstyle\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\ln(\mu_j + k - 1)}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} + 12E_{\mu_j} \ln \mu_j.$$

Так как мы рассматриваем, что $k^* \to +\infty$, можно сказать, что соответствующие ряды в оценке слагаемого A_3^2 эквивалентны записи:

$$\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{(\ln(\mu_j + k + 1))^2}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} \approx \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{(\ln(k))^2}{(k)^2} \le \ C_2;$$

$$\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\ln(\mu_j + k + 1)}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} \approx \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\ln(k)}{(k)^2} \le C_1;$$

$$\sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\ln(\mu_j + k - 1)}{(\mu_j + k)(\mu_j + k - 1)} \approx \sum_{k=1}^{k^*-1} \frac{\ln(k)}{(k)^2} \le \ C_1;$$

Как было указано выше, эквивалентные ряды можно ограничить некоторыми константами. Тогда слагаемое A_3^2 можно оценить, как:

$$A_3^2 \le 6(\ln \mu_j)^2 + 6\left(E_{\mu_j}\right)^2 + 24\mu_j C_2 - \ 24\mu_j \ln \mu_j\, C_1 - 24E_{\mu_j}\mu_j C_1 + 12E_{\mu_j} \ln \mu_j.$$

Представим сумму квадратов через квадрат суммы. Для этого прибавим и вычтем слагаемое $12E_{\mu_j} \ln \mu_j$. Тогда получим, что оценку на A_3^2 можно задать, как:

$$A_3^2 \le 6\left(\ln\mu_j + E_{\mu_j}\right)^2 - 12\ln\mu_j\, E_{\mu_j} + 24\mu_j C_2 -$$

$$-\, 24\mu_j \ln\mu_j\, C_1 - 24E_{\mu_j}\mu_j C_1 + 12E_{\mu_j}\ln\mu_j =$$

$$= 6\left(\ln\mu_j + E_{\mu_j}\right)^2 + 24\mu_j C_2 - 24\mu_j \ln\mu_j\, C_1 - 24E_{\mu_j}\mu_j C_1 \le$$

$$\le 6\left(\ln\mu_j + E_{\mu_j}\right)^2 - 24\mu_j \ln\mu_j\, C_1 + 24\mu_j\left(C_2 - E_{\mu_j}C_1\right)$$

Наконец зададим оценку на последнее третье слагаемое. Рассмотрим слагаемое A_3^3 в пределе. Для этого воспользуемся оценкой на математическое ожидание сверху.

$$\lim_{k^*\to+\infty} A_3^3 = \lim_{k^*\to\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j + k^*}\left|\ln\frac{\left(\mu_j + k^* - 1\right)\left(\mu_j + k^*\right)}{\mu_j} - E_{\mu_j}\right|^3 \le$$

$$\le \lim_{k^*\to\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j + k^*}\left|\ln\frac{\left(\mu_j + k^* - 1\right)\left(\mu_j + k^*\right)}{\mu_j} - \ln\left(\mu_j + 1\right) - 2\right|^3 \le$$

$$\le \lim_{k^*\to+\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j + k^*}\left|\ln\frac{\left(\mu_j + k^* - 1\right)\left(\mu_j + k^*\right)}{\mu_j\left(\mu_j + 1\right)e^2}\right|^3.$$

Ограничив слагаемое A_3^3 сверху получим, что в пределе его можно ограничить нулем:

$$\lim_{k^*\to+\infty} A_3^3 \le \lim_{k^*\to+\infty} \frac{\mu_j}{\mu_j + k^*}\left|\ln\frac{\left(\mu_j + k^* - 1\right)\left(\mu_j + k^*\right)}{\mu_j(\mu_j + 1)e^2}\right|^3 = 0$$

Таким образом оценка третьего момента сверху примет вид:

$$\mathbb{E}\left|U_j - \mathbb{E}U_j\right|^3 \le \left|\ln\left(\mu_j + 1\right) - EU_j\right|^3 +$$

$$+\, 6\left(\ln\mu_j + EU_j\right)^2 - 24\mu_j \ln\mu_j\, C_1 + 24\mu_j\left(C_2 - EU_j C_1\right)$$

Воспользуемся полученной ранее в пункте 3.2 оценкой на математическое ожидание. Тогда получим, что оценка сверху примет вид:

$$\mathbb{E}\left|U_j - \mathbb{E}U_j\right|^3 \le 6\left(\ln\mu_j + EU_j\right)^2 - 24\mu_j \ln\mu_j\, C_1 + 24\mu_j\left(C_2 - EU_j C_1\right) - 8$$

Вернемся к проверке критерия Ляпунова. Используя ранее рассмотренные оценки, получим, что критерий примет вид:

$$\lim_{d\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{d} \mathbb{E}\left|U_j - \mathbb{E}U_j\right|^3}{\left(\sum_{j=1}^{d} D_{\mu_j}\right)^{3/2}} \leq$$

$$\leq \lim_{d\to\infty} \sqrt{\frac{\left(\sum_{j=1}^{d} 6\left(\ln \mu_j + EU_j\right)^2 - 24\mu_j \ln \mu_j C_1 + 24\mu_j\left(C_2 - EU_jC_1\right) - 8\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{d}\left(8C_1 - 4\ln(\mu_j)(\mu_j + 1) - 4\right)\right)^3}}.$$

Проверим, что оценка предела сверху стремится к нулю. Заметим, что т.к. мы рассматриваем предел нам достаточно рассмотреть слагаемые, привносящие наибольший вклад в сумму числителя и знаменателя. В числителе все слагаемые кроме последнего являются положительными. Последнее объясняется тем, что $\ln \mu_j$ при стремящем в нашем случае μ_j к нулю является отрицательным, но перед ним стоит знак минус, делая все слагаемое положительным. Тогда обнаружим, что так как:

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} 6\left(\ln \mu_j + EU_j\right)^2 \geq \lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d}\left(-24\mu_j \ln \mu_j C_1\right);$$

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} 6\left(\ln \mu_j + EU_j\right)^2 \geq \lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d} \left(24\mu_j\left(C_2 - EU_jC_1\right) - 8\right);$$

слагаемое $6\left(\ln \mu_j + EU_j\right)^2$является наибольшим.

Проведем аналогичное сравнение в знаменателе:

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d}\left(-4\ln(\mu_j)(\mu_j + 1)\right) \geq \lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{d}(8C_1 - 4);$$

Получим, что слагаемое $\left(-4\ln(\mu_j)(\mu_j + 1)\right)$ является наибольшим.

Тогда предел примет вид:

$$\lim_{d\to\infty} \sqrt{\frac{\left(\sum_{j=1}^{d} 6\left(\ln \mu_j + EU_j\right)^2\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{d}\left(-8\ln(\mu_j)\right)\right)^3}} = \lim_{d\to\infty} \sqrt{\frac{36\left(\sum_{j=1}^{d}\left(\ln \mu_j + EU_j\right)^2\right)^2}{512\left(\sum_{j=1}^{d}\left(-\ln(\mu_j)\right)\right)^3}}.$$

Однако так как $\mu_j \to 0$ в действительности числитель можно ограничить сверху, как:

$$\sum_{i=1}^{d}\left(\ln \mu_j + EU_j\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{d}\left(\ln \mu_j\right)^2,$$

где $\mu_j \to 0$.

Тогда предел примет вид:

$$\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{36\left(\sum_{j=1}^{d}\left(\ln\mu_j+EU_j\right)^2\right)^2}{512\left(\sum_{j=1}^{d}\left(-\ln\left(\mu_j\right)\right)\right)^3}}\le\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{36\left(\sum_{i=1}^{d}\left(\ln\mu_j\right)^2\right)^2}{512\left(\sum_{i=1}^{d}\left(-\ln\left(\mu_j\right)\right)\right)^3}}\,.$$

Так как слагаемые $\left(\ln\mu_j\right)^2$ и $-\ln\left(\mu_j\right)$ при $\mu_j\to 0$ являются положительными, предел можно заменить на аналогичный:

$$\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{36\left(\sum_{i=1}^{d}\left(\ln\mu_j\right)^2\right)^2}{512\left(\sum_{i=1}^{d}\left(-\ln\left(\mu_j\right)\right)\right)^3}}=\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{36\left(\sum_{i=1}^{d}\ln^2\mu_j\right)^2}{512\left(\sum_{i=1}^{d}\left|\ln\left(\mu_j\right)\right|\right)^3}}.$$

Для того, чтобы предел стал зависеть исключительно от параметра d, проведем замену параметра μ_j:

$$\mu_j\approx\frac{\mathrm{C}}{j^{\alpha}\ln_{+}^{\beta}j},$$

где $\alpha,\beta,C>0$; $\ln_{+}j=\max(1;\ln j)$. Введение функции $\ln_{+}j$ обусловлено тем, что при $j=1$ знаменатель дроби $\frac{\mathrm{C}}{j^{\alpha}\ln_{+}^{\beta}j}$ обращается в ноль. Таким образом предел критерия примет вид:

$$\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{36\left(\sum_{i=1}^{d}\ln^2\left(\frac{\mathrm{C}}{j^{\alpha}\ln_{+}^{\beta}j}\right)\right)^2}{512\left(\sum_{i=1}^{d}\left|\ln\left(\frac{\mathrm{C}}{j^{\alpha}\ln_{+}^{\beta}j}\right)\right|\right)^3}}.$$

С целью дальнейшего поиска предела обратимся к теории правильно меняющихся функций [6]. Из последней следует, что функция $f(j)=\ln j$ является медленно меняющейся. Используя специальные свойства правильно меняющихся функций [5], обнаружим, что конечная, положительная, измеримая и интегрируемая по Лебегу на каждом подынтервале $[A;+\infty)$ функция $U(x)$ является правильно меняющейся тогда и только тогда, когда существует k, при котором справедливо, что:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k+1}\,U(x)}{\int_A^x t^k\,U(t)dt}=a_k+1, \tag{16}$$

где число a_k равен сумме порядка ρ функции $U(x)$ и k.

Известно, что $f(j) = \ln j$ является правильно меняющейся функцией порядка $\rho = 0$. Тогда воспользовавшись заменой вида:

$$\int_1^d \ln\frac{C}{j^\alpha \ln_+^\beta j}\,dj \approx \sum_{j=1}^{d} \ln\frac{C}{j^\alpha \ln_+^\beta j},$$

получим, что предел (16) при $k = 0$ примет вид:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ \ln\dfrac{C}{x^\alpha \ln_+^\beta x}}{\sum_{j=1}^{d}\ln\dfrac{C}{j^\alpha \ln_+^\beta j},} = 1.$$

Воспользовавшись полученным выше пределом, представим ряды сумм из критерия, как:

$$\sum_{i=1}^{d}\left(\ln\frac{C}{j^\alpha \ln_+^\beta j}\right)^2 \approx d\left(\ln\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right)^2;\sum_{i=1}^{d}\left(\ln\frac{C}{j^\alpha \ln_+^\beta j}\right) \approx d\left(\ln\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right).$$

Тогда критерий примет вид:

$$\lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{36d^2\ln^4\left(\dfrac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right)}{512d^3\left|\ln^3\left(\dfrac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right)\right|}} = \lim_{d\to\infty}\sqrt{\frac{36\left|\ln\dfrac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right|}{512d}} = 0.$$

Таким образом мы доказали, что:

$$\lim_{d\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\left|U_j - \mathbb{E}U_j\right|^3}{\left(\sum_{j=1}^{d}D_{\mu_j}\right)^{3/2}} = 0.$$

Последнее свидетельствует о выполнении критерия Ляпунова. Данное обстоятельство позволяет нам воспользоваться ЦПТ Ляпунова.

3.4. Задание оценки сложности аппроксимации

Так как в предыдущем пункте была доказана возможность применения ЦПТ Ляпунова, тогда можно воспользоваться описанными в пункте 3.2 оценками на математическое ожидание и дисперсию, которые имеют вид:

$$A_d = \sum_{j=1}^{d} E_{\mu_j};\ B_d = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} D_{\mu_j}}.$$

Воспользовавшись оценками на метрики, заданными в пункте 3.1 получим, что последовательности A_d и B_d можно задать, как:

$$A_d \approx \sum_{j=1}^{d} \ln(\mu_j + 1) + 2\,d; B_d \approx \sqrt{\sum_{j=1}^{d} 8\mu_j C_1 - 4\ln(\mu_j)(\mu_j + 1) - 4d},$$

где $\sum_{k=1}^{k^*-1}\left(\frac{\ln(k)}{k^2}\right) \le C_1$.

Заметим, что из выполнения критерия также следует, что случайные величины U_j сходятся к стандартной нормальной величине.

Тогда сложность аппроксимации примет вид:

$$\ln\ n(d;\varepsilon) = A_{\mathrm{d}} + B_{\mathrm{d}} \cdot \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2) + o(B_{\mathrm{d}}),$$

где $A_d \approx \sum_{j=1}^{d} \ln(\mu_j + 1) + 2d\,; B_d \approx \sqrt{\sum_{j=1}^{d} 8\mu_j C_1 - 4\ln(\mu_j)(\mu_j + 1) - 4}$.

Проведем сравнительный асимптотический анализ сложностей двух различных алгоритмов построения случайных процессов, что были указаны в пункте 1.1, как прямой метод моделирования и метод моделирования через разложение Карунена-Лоэва, что использует полученную в этом пункте оценку. Как было указано в пункте 1.2 прямой метод моделирования требует от нас взаимодействия с матрицей ковариации и именно с последней связаны основные трудности прямого метода моделирования процесса, так как мы сталкиваемся не только с проблемой обработки последней, но и с проблемой ее хранения.

Последняя обоснована тем, что размер матрицы ковариации определяется, как ind^{2d}, где ind- размер индексного множества (представленное через равномерное разбиение отрезка значений [0; 1]), а d - параметрическая размерность случайного процесса. Причем для более точного построения случайного процесса потребуется использовать индексное множество размер, которого хотя бы приравнен параметрической размерности процесса, так как при больших параметрах d и малом размере индексного множества ind, процесс будет вести себя ненаглядно.

Таким образом в прямом методе моделирования построение матрицы ковариации занимает $O(d \cdot ind^{2d})$ (т.к. в d-мерном процессе нам для каждой из ind^{2d} ячеек ковариации нужно посчитать функцию ковариации d раз). Следом потребуется найти собственные вектора и собственные числа от ковариационного оператора, что займет $O(ind^{6d})$. Наконец на то, чтобы умножить вектор стандартных нормальных величин на матрицу потребуется $O(ind^{4d})$. Таким образом асимптотическая вычислительная сложность прямого метода составила:

$$O(ind^{6d} + ind^{4d} + \ d \cdot ind^{2d}).$$

В тоже время для моделирования случайного процесса для заданного вектора t^d через метод Карунена-Лоэва потребуется посчитать сумму слагаемых в размере:

$$e^{\sum_{j=1}^{d} \ln(\mu_j+1)+2d+\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sqrt{\sum_{j=1}^{d} 8\mu_j C_1-4\ln(\mu_j)(\mu_j+1)-4}},$$

исходя из заданной нами оценки.

Тут же обратимся к формуле разложения Карунена-Лоэва (10). Нетрудно заметить, что наибольшей вычислительной сложностью обладают множители, связанные с подсчетом значения d-мерных собственных функций $\psi_k^d(t)$. Это обстоятельство является следствием того, что для задания одномерной ортонормированной собственной функции $\psi_{j,k}(t)$ требуется считать многочлен Лежандра. В тоже время известно, что последний можно задать через формулу Родригеса [8], как:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \ (x^2 - 1)^n.$$

Оную также можно представить в явном виде, как:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 \ (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Зная, что максимальное значение, которое может принять n в формуле Родригеса равно $n(d;\varepsilon)$ будем считать, что асимптотическая сложность вычислений многочлена Лежандра составит:

$$O(e^{2d+\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sqrt{-4\ln\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right)\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}+1\right)-4d}}),$$

где мы полагаем, что подсчет факториала осуществляется через субэкспоненциальный алгоритм квадратического решета, обладающего вычислительной сложностью:

$$O(e^{(1+o(1))\sqrt{\log num\cdot\log\log num}}),$$

где num – число, подвергающееся факторизации. Заметим, что в случае, когда считается факториал от максимального возможного значения $num = n(d;\varepsilon)$ вычислительная сложность факторизации примет вид:

$$O(e^{\sqrt{\left(2d+\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sqrt{-4\ln\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right)\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}+1\right)-4d}\right)\cdot\log(\log n(d;\varepsilon))}}).$$

Определив вычислительную сложность формулы Родригеса, учтем то, что при подсчете одного слагаемого в разложении Карунена-Лоэва количество обращений к оной напрямую зависит от параметрической размерности процесса d. Тогда получим, что оценку вычислительной сложности при подсчете одного слагаемого в заданной точке t^d в разложении Карунена-Лоэва можно оценить, как:

$$O(d\cdot e^{2d+\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sqrt{-4\ln\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right)\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}+1\right)-4d}}).$$

Тогда подсчет функции-аппроксимации в некоторой точке t^d можно оценить, как:

$$O(d\cdot e^{4d+2\Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sqrt{-4\ln\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}\right)\left(\frac{C}{d^\alpha \ln_+^\beta d}+1\right)-4d}}).$$

Чтобы провести сравнительный анализ, будем считать, что мы обратились к аппроксимации ind^d раз, что соответствует размеру вектора, который мы получаем при работе прямого метода моделирования. Тогда получим, что вычислительная сложность моделирования через аппроксимацию будет иметь вид:

$$O\left(d \cdot ind^{d} \cdot e^{4d+2\Phi^{-1}(1-\varepsilon^{2})\sqrt{-4\ln\left(\frac{C}{d^{\alpha}\ln_{+}^{\beta} d}\right)\left(\frac{C}{d^{\alpha}\ln_{+}^{\beta} d}+1\right)-4d}}\right).$$

Получив оценки, обнаружим, что:

$$O(ind^{5d}) \geq O\left(d \cdot e^{4d+2\Phi^{-1}(1-\varepsilon^{2})\sqrt{-4\ln\left(\frac{C}{d^{\alpha}\ln_{+}^{\beta} d}\right)\left(\frac{C}{d^{\alpha}\ln_{+}^{\beta} d}+1\right)-4d}}\right),$$

при $ind \to +\infty; d \to +\infty$.

Таким образом можно заключить, что с вычислительной точки зрения аппроксимация при полученной оценке ведет себя быстрее метода прямого моделирования.

Вместе с тем нетрудно заметить, что алгоритм аппроксимации при малой параметрической размерности с вычислительной точки зрения ведет себя плохо в сравнении с прямым методом. Данное обстоятельство объясняется тем, что оценка сложности аппроксимации задавалась для асимптотического случая, где параметрическая размерность процессов стремилась к бесконечности. Именно при росте количества параметров, от которых зависит процесс, утверждение из предыдущего абзаца окажется верным.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3

В результате проведённой работы в данной главе была получена оценка сложности аппроксимации. Стоит обратить внимание на то, что последняя получена в результате серии эквивалентных преобразований, таким образом при расчетах была допущена погрешность, значение которой не превосходит некоторого $C \cdot o(t)$, где C – некоторая константа. Вместе с тем указанная погрешность не является значительной, из чего можно заключить, что в целом представленное решение является точным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы были проведены теоретическое и практическое исследования, по окончании которых была задана оценка сложности аппроксимации для случая, где параметры, задающие поведение процесса, стремятся к нулю. Теоретическая часть работы, ставившая целью погрузиться в вопрос моделирования случайных процессов, позволила глубже рассмотреть задачу, понять в чем заключалась особенность моделирования случайного процесса, рассматриваемого, как случайная функция. Данный раздел позволил рассмотреть известные способы решения проблемы и применить наиболее актуальный из них.

Практическая часть ставила своей целью аккумулирование изученных в предыдущих разделах данных, чтобы на их основе задать оценку сложности аппроксимации.

В качестве дальнейшего развития проблемы можно попытаться задать более точную оценку в сравнении с методом эквивалентных преобразований, используя наработки, полученные в результате вычислений, проведенных в главе номер 3.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. J.L. Brown, Mean Square truncation error in series expansions of random functions, J. Soc. Indust. Appl. Math., 8 (1960), 1, 28-32.
2. J. -R. Pycke, Multivariate extensions of the Anderson-Darling process // Stat.&Probab. // Letters. – 2003. - №63 – С. 387-399.
3. E. Novak, H. Wozniakowski, Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zurich, 2008.
4. A.A.Khartov, Asymptotic analysis of average case approximation complexity of Hilbert space valued random elements // Journal of Complexity -2003. -№31 - С. 835-866.
5. Е. Сенета, Правильно меняющиеся функции // Издательство «Наука» - 1985. – С. 54-59.
6. Е. Сенета, Правильно меняющиеся функции // Издательство «Наука» - 1985. – С. 9-18.
7. Robin, L., Fonctions spheriques de Legendre et fonctions spheroidales. // Collection Technique et Scientique du C.N.E.T, Gauthier-Villars, Paris. -1959.
8. A. Richard, The 1839 paper on permutations: its relation to the Rodrigues formula and further developments // History of mathematics -2005. – vol. 28. - С. 105 – 118.
9. S. Paskov, J. F. Taub, Faster Valuation of Financial Derivatives // Journal of Portfolio Management -2000. -№22 – С. 113-120.