## 补充：树的计数

本节将讨论树的计数问题，它的提法是：具有n个结点的不同形态的树有多少棵？我们先讨论二叉树的情况，然后将结果推广到树。

首先明确两个概念：

(1) 二叉树T和T ’相似：这是一个递归定义，指T和T ’都为空或者是均不为空且其左右子树又分别相似。

(2)二叉树T和T ’等价：二者不仅相似，而且所有对应结点上的数据元素均相同。

二叉树的计数问题就是讨论具有n个结点且互不相似的二叉树的数目bn 。

下面给出n值较小的情况示例（见图6.41）：

n＝0时 b0＝1 （空二叉树）

n＝1时 b1＝1 （一个根结点）

n＝2时 b2＝2

n＝3时 b3＝5

n=0

**n**=1

n=2

n=3

图6.41 0－3个结点时不相似二叉树的数目

当n>3时，情况又如何呢？让我们来推导一般公式。

一般情况下，一颗具有n(n>1)个结点的二叉树可以看成是由一个根结点、一棵具有i个结点的左子树、和一棵具有n－i－1个结点的右子树组成，如下图6.35所示 ，其中0≤i≤n-1。由此可得出如下递推公式(公式6-1)

b0＝1

 n≥1 (公式6-1)

由式（6-1），可知：

b0=1

b1=1

i个结点

n-i-1

个结点

b2= b0b1  + b1b1 = 2

b3= b0b2 + b1b1 + b2b0 =5

同理:

b4=b0b3+b1b2+b2b1+b3b0=14

5 2 2 5

下面我们利用生成函数来讨论这个递推公式。

对于序列 b0 ，b1 ，…，bn，…

定义生成函数 = (公式6-2)

因为

=

根据(6-1)得出  (公式6-3)

由此得

即 

解此二次方程得 

由初值b0=1，应有

所以



 （公式6-4）

当k=0 时，式（6-4）的第一项为1，故有





 (公式6-5)

对照（6-2）和（6-5）而得

 

 (公式6-6)

因此，含有n个结点的不相似的二叉树有棵。

我们还可以从另一个角度来讨论这个问题。从二叉树的遍历已经知道，任意一棵二叉树结点的前序遍历和中序遍历是唯一的。反过来，给定结点的前序序列和中序序列1，能否确定一棵二叉树呢？又是否唯一呢？

由定义，二叉树的前序遍历是先访问根结点D，其次遍历左子树L，最后遍历右子树R。即在结点的前序序列中，第一个结点必是根D；而另一方面，由于中序遍历是先遍历左子树L，然后访问根D，最后遍历右子树R，则根结点D将中序序列分割成两部分：在D之前是左子树结点的中序序列，在D之后是右子树结点的中序序列。反过来，根据左子树的中序序列中结点个数，又可将前序序列除根以外分成左子树的前序序列和右子树的前序序列两个部分。依次类推，便可递归得到整棵二叉树，如图6.42所示。

例：已知结点的前序序列和中序序列分别为：

前序序列：18 14 7 3 11 22 35 27

中序序列：3 7 11 14 18 22 27 35

则可按上述分解求得整棵二叉树。

首先由前序序列得知二叉树的根为18，则其左子树的中序序列为（3，7，11，14）,右子树的中序序列为（22，27，35）。反过来得知其左子树的前序序列必为（14，7，3，11），右子树的前序序列为（22 35 27）。类似地，可由左子树的前序序列和中序序列构造得18的左子树，由右子树的前序序列和中序序列构造得18的右子树。

图 6.42 由前序和中序序列构造一棵二叉树

结论：给定一棵二叉树的前序序列和中序序列，可唯一确定一棵二叉树。

我们可由此结论来推导具有n个结点的不同形态的二叉树的数目。

假设对二叉树的n个结点从1到n加以编号，且令其前序序列为1,2,…,n,则由前面的讨论可知，不同的二叉树所得中序序列不同。如图6.43所示两棵有8个结点的二叉树，它们的前序序列都是12345678，而图6.43(a)所示树的中序序列为32465178，图6.43(b) 所示树的中序序列为23147685。因此，不同形态的二叉树的数目恰好是前序序列均为12…n的二叉树所能得到的中序序列的数目。

(a) 中序序列为32465178 (b) 中序序列为23147685

图6.43 具有不同中序序列的二叉树

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 栈状态 访问  空  1  1 2  1 2 3  1 2 3  1 2  空 1 | 栈状态 访问  空  1  1 2  1 2  1 3  1 3  空 1 | 栈状态 访问  空  1  1 2  1 2  空 1  3  空 3 | 栈状态 访问  空  1  空 1  2  2 3  2 3  空 2 | 栈状态 访问  空  1  空 1  2  空 2  3  空 3 |

图 6.44 中序遍历时进栈和出栈的过程

而中序遍历的过程实质上是一个结点进栈和出栈的过程。二叉树的形态确定了其结点进栈和出栈的顺序，也确定了其结点的中序序列。例如图6.44所示为n=3时不同形态的二叉树在中序遍历时栈的状态和访问结点次序的关系。由此可知，由前序序列12…n所能得到的中序序列的数目恰好为数列12…n按不同顺序进栈和出栈所能得到的排列的数目。这个数目为



由二叉树的计数可推得树的计数。由“森林与二叉树的转换”中可知一棵树可转换成唯一的一棵没有右子树的二叉树，反之亦然。则具有n个结点有不同形态的树的数目tn 和具有n-1个结点互不相似的二叉树的数目相同。即tn = bn-1 。图6.45 展示了具有4个结点的树和具有3个结点的二叉树的关系。从图中可见，在此讨论树的计数是指有序树，因此(c)和(d)是两棵具有不同形态的树（在无序树中，它们被认为是相同的树）。

(a) (b) (c) (d) (e)

图6.45 具有不同形态的树和二叉树