不定积分之潮

The tide of indefinite integrals

作者：虚调子

时间：April 24, 2023

版本：0.0.4.0

如入无人之境，重奏失落之音。———琉璃火

前言

19 年，笔者在知乎发表了第一篇关于不定积分的文章。在此期间参阅资料，发现大多有关不定积分的文章都缺乏一定深度，或者说有些过时。这与不定积分常常不被当成应试重点，以及解决相应问题的需求不高有关。另外的因素也包括，有些写的文章零散地放在知乎感觉有些别扭，以及热情的读者希望能得到更多详细的讲解，以上种种因素促使了本作的产生。

这是专门讲解不定积分方法的笔记，可供对不定积分感兴趣的学生、拓新的老师们阅读。与大学教材不同的是，笔记没有很多定理的严格证明，对于用到的定理，大部分情况只是引用，不做论证。**作者认为读者已经大致了解不定积分的概念，在“微积分”课程上已经有了一定基础。**

笔记将讲解一些从考试会遇到的不定积分题开始，直至远远超越考研难度的不定积分应对策略。笔记中的例题选自新的考试题甚至是原创题，以讲究时效性。以及笔记的一大特色是力图拓宽不定积分的狭隘视野，让学习者感受不定积分本质的美，总结和统一不定积分旧有的零散知识，去除无聊计算的刻板印象。笔者整理了最新的技巧与思想，正试图掀起不定积分之浪潮。

仓促所作，有纰漏再所难免。如果有可以改进的地方，欢迎在知乎上私信，或者于 Q 群 1046154546 交流。

本文模板选自Elegant 系列, 感谢模板作者的分享！同时感谢读者的支持！

虚调子

2021 年 3 月 10 日

整理不易，感谢支持！(微信 | 支付宝)

目录

第一章 不定积分初识

在微积分的学习旅途中，求不定积分常常作为求微分的反问题。

我们需要形成的第一印象是：这两者难度并不在同一量级。因为求微分是封闭的，而不定积分不封闭。说成黑话就是有些函数是积不出的。为了有效解决实际中的不定积分问题，我们需要从别处获取额外的知识。

1.1 不定积分的基本性质

在理解什么是不定积分之前，我们先来看看微分。

命题 1.1. 微分的四条法则

对一个函数 f 求微分，若记为 f'，则：

- $(f+g)' = f' + g'$(加和法则)
- $(fg)' = f'g + fg'$ (莱布尼兹法则)
- $(f(g))' = f'(g)\,g'$(链式法则)
- $(C)' = 0$

那么它们的逆也就构成了不定积分的四条性质：

命题 1.2. 不定积分的四条性质

一个函数 f 对 x 求不定积分，若记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$，则：

- $\displaystyle\int \mathrm{d}f + \mathrm{d}g = f + g$(加和律)
- $\displaystyle\int g\mathrm{d}f + \int f\mathrm{d}g = fg$ (分部律)
- $\displaystyle\int f'(g)\,\mathrm{d}g = f(g)$(凑微分)
- $\displaystyle\int 0\mathrm{d}t = C$

其中备受关注的是**“凑微分”**和**“分部积分”**。前者就是不定积分基本性质的第三条，后者是第二条。本质上说，这是“函数的乘积运算”和“函数的复合运算”与“不定积分运算”之间的关系。在初学者的不定积分计算训练里，这两个是熟悉不定积分必备的。由于过于底层，笔者一般称为“分部 (积分) 律”，就像集合运算里的“摩根律”一样，而不是称为一种方法。

另外注意这里 C 并不完全是常数的意思，这里将在后面的修正部分提到。

1.1.1 指数系函数的引入

我们的运算工具已经 OK 了，准备动手！

首先考虑 $f=x, g=C$, 利用加和律, 我们就可以得到:

$$\int \mathrm{d}x = x + C \tag{1.1}$$

再考虑 $f=x, g=x$ 下的分部律，能得到:

$$2\int x\mathrm{d}x = x^2 \tag{1.2}$$

在此基础上我们继续考虑 $f=x, g=x^2$ 下的分部律等等……就能得到积分表的第一个公式:

$$\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{1.3}$$

如果再适当利用不定积分的加和律，即可解决所有多项式的积分。

但是——对于 $n=-1$ 时会有一些特别的事情发生:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x \tag{1.4}$$

这里引入了 $\ln x$ 函数[1]，它被称之为**对数函数**，作为**指数函数** e^x 的反函数。这是源自指数函数自带的定义 (自导性): $(e^x)' = e^x$. 利用换元:

$$\int e^x\mathrm{d}x = e^x \to \int x\mathrm{d}(\ln x) = x = \int \mathrm{d}x \to \mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

可以来说明这一点。e^x 在不定积分中的地位不一般，在微分方程领域还有更明显的体现。这是核心的存在, 蕴含着一个神秘的常数 e, 在不定积分里就不作过多关注了。

1.1.2 三角系函数的引入

我们现在拥有了指数函数和有理 (分式) 函数，再来看下另一类重要函数吧。稍微升级一下，考虑不定积分: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$。这与不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ 相似。对于后者，我们可以利用换元:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\end{aligned}$$

参考这个过程，将分母在复数域分解，则可以形式地将前者用 $\dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{1+ix}{1-ix}$ 表达。为了与流行的符号契合, 我们定义这两个结果分别是**反正切函数**、**反双曲正切函数**。记为:

$$\begin{cases}\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}\\ \arctan x = \dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\dfrac{1+ix}{1-ix} \sim \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\end{cases} \tag{1.6}$$

其中反双曲正切函数记法还有 $artanh/arctanh/ath$ 等等，本文将采用 $arth$ 标记。

[1]这里可以理解为,

$$\lim_{n\to -1}\frac{x^{n+1}-1}{n+1} = \ln x \tag{1.5}$$

诱导的结果。这也表明 x^n 的不定积分或许应该还带有一个本原的常数项。

从定义的名字上来看，它们的反函数是更“正规”的函数[2].

来看这个“正规”函数 $f(x)$：

$$x = \int_0^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \tag{1.7}$$

这样我们可以两边求导，得到一个微分式：

$$1 + f^2(x) = f'(x) \tag{1.8}$$

若设 $f(x) = \frac{p}{q}$，则上式等价于：

$$\left(p^2+q^2\right)\mathrm{d}x = q\mathrm{d}p - p\mathrm{d}q \tag{1.9}$$

再整理一下：

$$p\left(p\mathrm{d}x + \mathrm{d}q\right) + q\left(q\mathrm{d}x - \mathrm{d}p\right) = 0 \tag{1.10}$$

那么我们可以得到一个有趣的结论，

$$p\mathrm{d}x = -\mathrm{d}q \iff q\mathrm{d}x = \mathrm{d}p \tag{1.11}$$

还有一个推论, 若上式两边都成立，就有:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(p^2+q^2\right) &= 2\left(p\mathrm{d}p + q\mathrm{d}q\right) \\ &= 2\left(pq - pq\right)\mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

啊哈！p^2+q^2 是常数。

出于扩充符号的目的，我们称这组特别函数组为 $\{\sin x, \cos x\}$(**三角函数**)，这里人为赋予常数的大小为 1，挺自然的想法。如果再利用勾股定理，则还可以赋予一定的几何意义。

由于是基本的函数，往往有很多种定义方式，比如级数定义，或者直接从已定义的指数函数中来：

命题 1.3. 欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{1.12}$$

推广地，我们还可以得到一组**双曲正弦、双曲余弦函数**：$\{\sinh x, \cosh x\}$。

至于正割余切之类的冷门符号，这里不再过多提到。

1.1.3 初等函数

刘维尔 (**Joseph Liouville**) 划分了六大基本函数：反对幂三指常以及它们的复合 (指的是反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数、指数函数以及常函数)，这些其实已经包括在了上面两类函数的引入之中。其他的统称非初等函数，也就是俗称“积不出”。在考试范围内都是对初等函数的不定积分。

[2]这种以不定积分的反函数来定义新函数的思想也用来定义了椭圆函数、双纽线函数 sn(x) 等。

刘维尔发展了微分域理论，描摹了初等函数不定积分的模样。用大白话来说，也就是非初等函数就是非初等，不能用初等函数表达。比较正式的写法是：

命题 1.4. 初等函数的定义

若 D 是域 F 上的微分算子，则 f 为 F 上的初等函数当且仅当该函数至少满足以下三者之一：

- 是 F 上的代数函数。
- 是 F 上的指数性函数，也即 $D\left(f\right)=fD\left(a\right),a\in F$
- 是 F 上的对数性函数，也即 $D\left(a\right)=aD\left(f\right),a\in F$

还有一个更广泛的刘维尔定理：

定理 1.1. 刘维尔定理

若 $f(x)$ 是有理函数，$g(x)$ 是多项式函数，那么 $\int f\left(x\right)e^{g(x)}\mathrm{d}x$ 初等的充要条件就是存在互质的多项式 P,Q 使得下式成立：

$$Q\left(x\right)\left[Q\left(x\right)f\left(x\right)-P'\left(x\right)-P\left(x\right)g'\left(x\right)\right]=-P\left(x\right)Q'\left(x\right) \tag{1.13}$$

对于不定积分的海洋来说，初等函数甚至连冰山一角也算不上。这表明我们关注不定积分，不应该仅仅局限在初等函数上。越来越多的积分凸显了不定积分的局限，如果需要解析表达就要定义新的符号。比如：

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi} \tag{1.14}$$

那么它的不定积分是？当然不是初等函数了，而是定义为**误差函数**：

$$\mathrm{erf}\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{1.15}$$

然后还有一些用过的符号：

$$\mathrm{Ei}\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t,\mathrm{Si}\left(x\right)=\int_{0}^{x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\mathrm{Ci}\left(x\right)=\int_{0}^{x}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \tag{1.16}$$

分别称为指数积分函数、正弦积分函数等等。在一定程度上拓宽了不定积分的范围，但还远远不够。

现代大概有了一百多种特殊函数，大致分为 Gamma 函数家族，误差函数与指数积分家族，多对数与 Zeta 函数家族，正交多项式家族，贝塞尔家族，勒让德家族，椭圆函数家族，球谐函数家族，模数形式家族，数论函数家族...

这些函数之间的转换关系也很复杂，有人就希望有一种大一统函数来冲破符号的禁锢：从 Appell 函数到合流超几何函数，再到广义超几何函数，然后是梅耶尔 G 函数... 最后变成了统一函数家族. 按酱紫君的话来说，就是更多的悲剧。

比如 $\int\sin\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$，这太超越了！还有一个悲剧的消息：由哥德尔不完备定理的推论，你不可能找到能涵盖所有不定积分的符号表达。所以我们研究不定积分，更多的应该是关注各种函数的微分关系，而不是为了寻求一个不带积分号的解。

随着新工具的兴起，人们对不定积分的兴趣逐渐褪去。

但这些沉淀的思考仍历久弥新。

1.2 修正

本章我们将提到笔记的一大特色：**不定积分的修正**。修正的目的一部分在于简洁 (...或者说偷懒)，一部分在于这部分与人们对不定积分的需求无关，是一个来自于定积分求解的要求，也即**能正常使用牛莱公式计算相应的定积分**。或者说对讨论不定积分本身来说意义不大。注意: 这里不定积分的概念与课本上的有所区别，**对于一般考试而言，除了不能省略 C 外，也是可以默认进行其他修正的**。我们可以认为，不定积分的修正与否均为不定积分，这样将对结果的限制打开，收益是巨大的。

定义 1.1. 常数与连续修正

由于达布定理等因素，不定积分的原函数将至多含有第一类间断点。于是总可以通过给某些区间分别增加常数来获得连续的原函数。为了方便交流：

- 将省略常数 C，以及在讨论不定积分时，等号的意义扩展为左右两边的差的导数为 **0**。例如：

$$\int (x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x = \frac{(x-1)^2}{2}$$

- 等号左边到等号右边的过程就称为修正，在汉语语义下有等号右边“更好”的意思。后文将对存在第一类间断点的不定积分省略修正，也就是说接受结果“略有瑕疵”。

♣

这其实解释了很多初学者的疑惑，比如下面这个“悖论”。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\cdot \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Rightarrow 0 = 1$$

当然这并不是悖论，而是因为默认了常数修正。在不定积分的等号里，是进行了意义的扩展了的 (相差一个常数自然是“相等”的)。比如更“离谱”的：

$$\int 0\cdot \mathrm{d}x = 1 = 2 = 3 = 4 = ... \tag{1.17}$$

为什么要进行这种扩展呢？不严谨地说，不定积分是一个自发地从低维到高维的过程，两者信息量量级不相当，所得到的高维结果是必有信息缺失的，而这种扩展起到了加数据的作用，使得过程从左到右和从右到左都是恰当的。

另外需要注意，只在结果后面装模作样地写上“+C(C 是任意常数)”其实不一定能完成常数修正。这也是我们不再采用课本定义的原因。

具体可以看https://zhuanlan.zhihu.com/p/586089550. 教材上的漏洞在修正体系下将被严肃对待，包括在了上面提到的常数修正之中。

定义 1.2. sgn 与定义域修正

由于开根号、去绝对值等操作会带来一个符号的差别，即原函数与所求得的表达式在定义域上相差一个符号，或者根据符号的需要缩小或扩大定义域，于是为了方便进行交流：

- 后文将默认进行了对结果的 sgn 修正，变换过程省略。例如：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x)(= \ln|x|)$$

例 1.1 常用的 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \mathrm{arth}x$ 也可以认为默认进行了 sgn(符号) 修正。因为由 $\tanh(x)$ 的反函数来定义的定义域在 $|x| < 1$. 而不定积分的定义域要更广一些：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \mathrm{arth}x \left(= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \tag{1.18}$$

最直接的 sgn 修正就是利用 sgn() 函数解决。除此之外，取绝对值也是一种简单的 sgn 修正，对于复杂的函数将会有更复杂的修正结果。在追求结果的简洁和运算的简便方面，采用 sgn 修正是适合的。

注意 sgn 修正不仅仅只有简单地添加符号，如

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arth}\frac{2x}{1+x^2} \tag{1.19}$$

相比 $\mathrm{arth}x$ 来说也是 sgn 修正，顺便将定义域扩大了。

例 1.2 来尝试修正：$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)$.

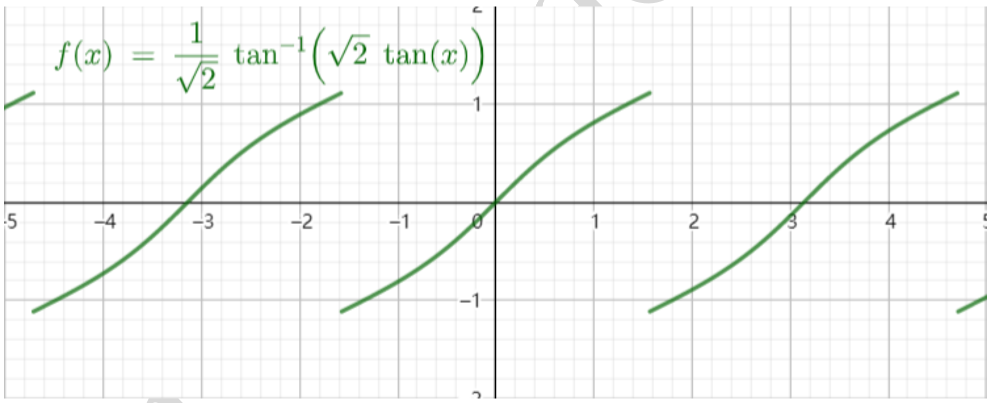

图 1.1: 不连续的结果

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\tan x) + \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\tan x}{1+\sqrt{2}\tan^2 x} + \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x\cos x}{\cos^2 x + \sqrt{2}\sin^2 x} + \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin 2x}{3+2\sqrt{2}-\cos 2x} + \frac{x}{\sqrt{2}}$$

如图，由之前的间断函数变成了连续函数，连续修正成功。

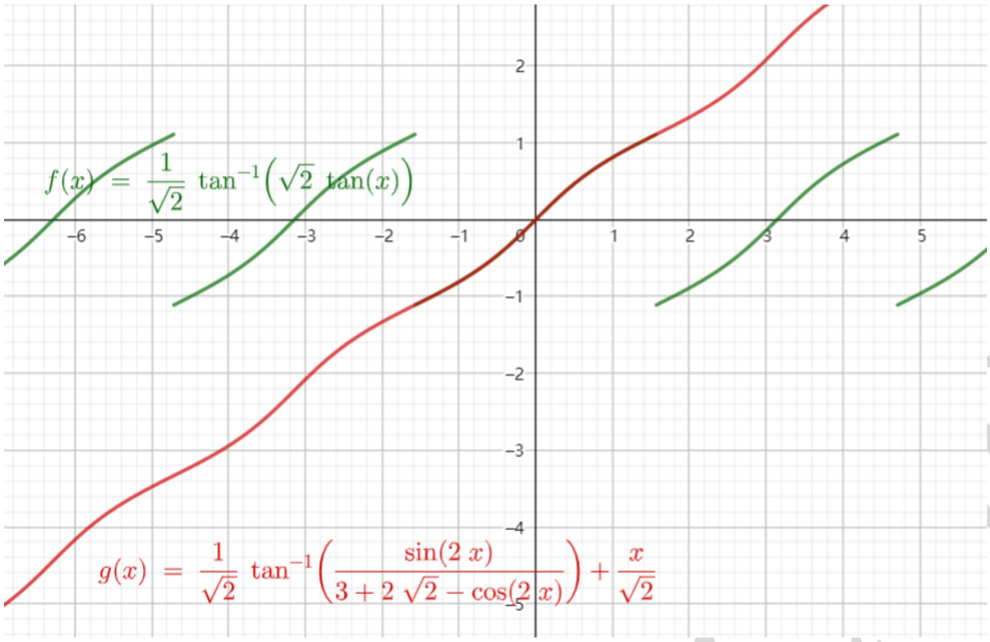

图 1.2: 修正后连续的结果

1.2.1 反正切修正

通常，经过一些粗暴的换元后，定义域已四分五裂。我们如果想要实现相应的修正，就需要一些特定的计算方法了。下面讨论一些对反正切函数的修正。(注: 修正的思路不是唯一的)

例 1.3 对 $f(x) = \arctan(k\tan x)$ 进行连续性修正.

前面的例题其实也已经提到，思路是 $+x - \arctan(\tan x)$，即

$$\begin{aligned}\arctan(k\tan x) &= \arctan(k\tan x) + x - \arctan(\tan x)\\ &= x + \arctan\frac{(k-1)\tan x}{1+k\tan^2 x}\\ &= x + \arctan\frac{(k-1)\sin(2x)}{(k+1)-(k-1)\cos(2x)}\end{aligned}$$

例 1.4 对 $f(x) = \arctan\left(k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$ 的修正.

思路来源为魏念辉 ($k \neq 0$)，

$$\begin{aligned}\arctan\left(k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) &= \arctan\left(k\left(x-\frac{1}{x}\right)\right) + \arctan\left(\frac{1}{kx}\right) + \arctan(kx)\\ &= \arctan\left(kx^3 + \left(\frac{1}{k}-1\right)x\right) + \arctan(kx)\end{aligned}$$

这样是在 R 上连续的函数了。

另外，值得一提的是对于一般的 $\arctan\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ 有机械的思路修正。

定理 1.2. 反正切修正公式

若 $f(x)=i$ 有 n 个复解 $x_k=a_k+i*b_k$，那么：

$$\arctan f(x)=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{x-a_k}{b_k}\tag{1.20}$$

等号是修正意义下的。

证明 **(By** 魏念辉**)** 留意到 ln 与 arctan 的一些关系，

$$\begin{aligned}\arctan f(x)&=\operatorname{Im}\left[\ln\left(1+i\cdot f(x)\right)\right]\\&=\operatorname{Im}\left[\ln\left(i\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\right)\right]\\&=\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x-a_k-ib_k\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{x-a_k}{b_k}\end{aligned}$$

可以据此把所有简单的具备间断点的反正切的结果修正。

例 1.5 $\arctan\left(\dfrac{x^3-x^2-4x-1}{x^3+4x^2+x-1}\right)=\arctan x+\arctan(x+1)+\arctan(1+2x)$

除此之外，我们还可以注意到一种反正切的修正，这类甚至改变了函数名。我们考虑：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}}\ (a>0)\tag{1.21}$$

这里会自动限制 a 的范围，来源于符号的局限性。如果考虑 $a<0$, 我们能得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{arth}\frac{x}{\sqrt{-a}}\ (a<0)\tag{1.22}$$

这两者在考虑复数域后是一致的，可以作为一种定义域修正处理。**在后文中，如果 a 的符号未知，那么我们们采用 *arctan* 形式而省略定义域修正, 为避免一些无聊的讨论。**

如果考虑 $a=0$ 时，上式需要更进一步的修正，使得 a 对于趋近极限过程连续。

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}=-\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{\sqrt{a}}{x}\ (a>0)\tag{1.23}$$

这样取极限都会有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{x}\tag{1.24}$$

1.2.2 取整函数的修正

取整函数是指 $f(x)=[x]$，输出不超过 x 的最大整数。由于分别在每个区域都是常数，所以取整函数的不定积分核心就是修正。

思路是采用多项式法。例：

$$\int [x]\,\mathrm{d}x = x[x] + P_2([x]) = x[x] - \frac{1}{2}[x](1+[x]) \tag{1.25}$$

日常生活中，我们可能还会遇到**小数部分函数**，也即

$$f(x) = \{x\} = x - [x] \geq 0 \tag{1.26}$$

他们组合的更复杂的积分也是可以利用多项式法修正的，这里由于感兴趣的人不多也就不详细展开了，举一个高次的例子：

$$\int x\{x\}[x]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\{x\}^2 - \frac{2}{3}x\{x\}^3 + \frac{1}{6}\{x\}^3 + \frac{1}{3}[x]^3 + \frac{1}{6}[x]^2 \tag{1.27}$$

1.3 参考资料

1.3.1 网络

如果电脑上没有安装 MMA，matlab 等数学软件，可以利用下面的求解网站凑合。使用软件解题，作用在于鉴别野题，以及启发思考 (?)，但是不能取代对不定积分的认知，因为有很多题目是软件所不能的。

- wolframalpha，功能足够强大，除了满足求不定积分外还可以求定积分等。
- integral-calculator，专门求不定积分的网站，并且支持可读步骤输出，以及相应的图像。
- 不定积分解题技巧，知乎大佬零蛋大 2020 年末写的不定积分解题技巧。
- 不定积分之潮，笔者的不定积分专栏，多多关注感谢喵。

1.3.2 书籍

下面这些是比较经典的书籍，可以了解一些名词的来源，也用作公式查阅。

- 《吉米多维奇数学分析习题集》第三册 (1628 题之后的与不定积分有关的部分)。真 • 习题集。
- 《积分的方法与技巧》金玉明等著，中国科学技术大学出版社，是 17 年的书，基础总结得不错。
- 《Table of Integrals,Series,and Products》, 俗称积分大典，里面有相当详细的公式表和其他扩展内容。英文。
- 《组合积分法》朱永银、郭文秀著，华中科技大学出版社。在零几年的那时候算是很新的方法。
- 《微积分学教程》(不定积分部分). 菲赫金哥尔茨. 俗称菲砖，讲解详细，由浅入深。
- 《Polylogarithms and Associated Functions》.Leonard Lewin. 一部总结性的多重对数函数相关专著。英文。

第二章 双元积分之路

Math rewards you when you retain symmetry. —— **Frank Wilczek**

在常见的不定积分题中，常常会发现有一些对称的元素。这诱发了我们是否可以考虑一些利用对称性的积分方法。提到对称，首先想到的应该是：

定理 2.1. 分部积分律

对于 u, v，有：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{2.1}$$

定理告诉我们这样一个信息：$u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ 的不定积分是 uv。的确是相当对称的结论了。更进一步，一个自然的问题是 $u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u$ 的不定积分有什么好的表达呢？

2.1 二次双元的基本公式及推导

对于上面的问题，我的一种解决方案是，考虑 $u^2 + v^2 = 1$，这样就会有：

$$\begin{aligned}\int u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u &= \int \frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2+v^2} \\ &= \int \frac{u^2}{u^2+v^2}\mathrm{d}\left(\frac{v}{u}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}(v/u)}{1+(v/u)^2} \\ &= \arctan\frac{v}{u}\end{aligned}$$

当然这样格局就小了。经计算，我们可以适当推广至 3 种情形：

$$\begin{aligned}&(1)\, u^2 + v^2 = a^2 \\ &(2)\, u^2 + a^2 = v^2 \\ &(3)\, u^2 - a^2 = v^2\end{aligned}$$

考虑几何意义的话，可以将第一种称为 (两个二次元的) **实圆 (关系)**，第二、三种称为**虚圆 (关系)**。或者可以写成下面的微分式：

$$\begin{aligned}(Im)\, u\mathrm{d}u &= v\mathrm{d}v \\ (Re)\, u\mathrm{d}u + v\mathrm{d}v &= 0\end{aligned}$$

但这一切只是一个称呼，本质上可以进行**虚/实化**换元进行统一。

比如对实圆进行虚化：令 $u \to iu$，则 $u^2 + v^2 \to v^2 - u^2$，形式上变成了虚圆。这也强烈暗示了相似性与对称性。复数无处不在！

(注: 本章出现的双元将狭义地理解为二次双元，或者三角双元/双曲双元 blabla...)

定理 2.2. 双元第一积分公式

对于双元 x, y，我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y} = \begin{cases} \ln(x+y) & (\mathrm{Im}) \\ \arctan \dfrac{x}{y} & (\mathrm{Re}) \end{cases} \tag{2.2}$$

Re 表示实圆，Im 表示虚圆。♡

证明 对于虚圆，我们有 $x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{y + x} \tag{2.3}$$

其中利用了等分性。于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int \frac{\mathrm{d}(x+y)}{x+y} = \ln(x+y) \tag{2.4}$$

由于是不定积分，也可以有其他形式。其他比较常见的形式是 $\mathrm{arth}\frac{x}{y}$，以及带常数的 arsh 等，不过推荐用定理中的形式，因为又提示了对称性，又足够简洁。

对于实圆，我们同样有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{iy} = \frac{i\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y}{iy + x} \tag{2.5}$$

但这里就不写成 $i\ln(x+iy)$ 的形式了，因为不是完全对称的，而且带虚数不太好看。推荐写成一个等价的形式：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y} = \arctan \frac{x}{y} \tag{2.6}$$

另外别的形式有 arcsin 函数等。

定理 2.3. 双元第二积分公式

对于双元 x, y，我们有：

$$\int f(x,y) \cdot \frac{\mathrm{d}x}{y} = \int f(x,y) \cdot \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 \pm x^2} \tag{2.7}$$

对于实圆取加号，对于虚圆取减号. 可以注意到这里的分母在两种情况下均为常数。♡

证明 证明是容易的，我们需要关注在第一公式里使用的等分性，这里只讨论虚圆，

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{y\mathrm{d}x}{y^2} = \frac{x\mathrm{d}y}{x^2} = \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2 - x^2} \tag{2.8}$$

这与 f 本身没有什么关系。如果 $f = 1$ 就退化到第一公式的情形。

由此，我们可以用上面的思路推导所有的双元积分。

例题 2.1 求 $\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: 设 $y=\sqrt{1+x^2}$，并且合理利用 $y^2-x^2=1$ 进行代换：

$$\begin{aligned}\int y\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y\\ &=\frac{1}{2}\left[\int y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\int\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2-x^2}\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[\int\mathrm{d}\left(xy\right)+\int\frac{\mathrm{d}x}{y}\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[xy+\ln\left(x+y\right)\right]\end{aligned}$$

这里建议读者停下阅读，尝试算算 $\int\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$ 之类的。这种比较基础的积分需要熟练掌握。

定理 2.4. 双元第三积分公式

对于双元 x,y，我们有：

$$\int f(x,y)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\frac{1}{y^2\pm x^2}\int f(x,y)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)\tag{2.9}$$

这里是由于 $y^2\pm x^2$ 为常数，可以提到积分号外。另外同前，对于实圆取加号，对于虚圆取减号。是第二积分公式的推论。♡

证明 利用第二积分公式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\frac{1}{y^2}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2\pm x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(x/y\right)}{y^2\pm x^2}\tag{2.10}$$

同样地，这与 f 本身没什么关系。

可能会有小可爱想知道 $\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}$ 怎么算，这里有两种方案. 一是借用旧有积分表上的公式，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a},\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arth}\frac{x}{a}\tag{2.11}$$

这样把 y^2 转换成 $a^2\pm x^2$ 就可以解决了。还有一条路是完全在双元公式下：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2} &= \int y\frac{\mathrm{d}x}{y^3}=\frac{1}{y^2\pm x^2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x/y\right)}{1/y}\\ &=\frac{1}{\sqrt{y^2\pm x^2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(x/y\right)}{\sqrt{y^2\pm x^2}/y}\\ &=\frac{1}{\sqrt{y^2\pm x^2}}\int\frac{\mathrm{d}m}{n}\end{aligned}$$

然后我们判断 $m=\frac{x}{y},n=\frac{\sqrt{y^2\pm x^2}}{y}$ 是虚圆还是实圆，就可以套用第一公式了。笔者建议去习惯第二种，这样能更完美的容纳双元体系，如果太习惯旧有规则也不强求。

下面来看一些简单的例题。

例题 2.2 求 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解: 设 $y=\sqrt{1-x^2}$, 则有:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{y} = -\int x\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}\left(xy\right)+\int \frac{\mathrm{d}y}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\end{aligned}$$

例题 2.3 求 $\int \sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+...}}}\mathrm{d}x$

解: 若设被积函数为 $f(x)$，那么有极限等式:

$$\sqrt{x^2+f\left(x\right)}=f\left(x\right) \tag{2.12}$$

解得：$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4x^2}\right)$, 再设 $p=\sqrt{1+4x^2}, q=2x$，(并且利用前面的例题) 就有:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}\left(1+p\right)\mathrm{d}x &= \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int p\mathrm{d}q \\ &= \frac{x}{2}+\frac{1}{8}\left(pq+\ln\left(p+q\right)\right) \\ &= \frac{x}{4}\left(2+\sqrt{1+4x^2}\right)+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)\end{aligned}$$

可以看到还是轻松加愉快的。如果熟练了，我们可以同时考虑更多的二次双元，它们互相有实圆/虚圆关系。

例题 2.4 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

解: **(By 水中星)** 若设 $p=\sin x, q=\cos x, r=\sqrt{1+\sin^2 x}$，则有:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{rq} = \int \frac{\mathrm{d}p}{rq^2} \\ &= \int \frac{r^2}{r^2-2p^2}\frac{\mathrm{d}p}{r^3} = \int \frac{1}{1-2\left(p/r\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{p}{r}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arth}\frac{\sqrt{2}p}{r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arth}\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}\end{aligned}$$

例题 2.5 求 $\int \sqrt{\frac{x}{2+x^3}}\mathrm{d}x$.

解: 若设 $p=x^{\frac{3}{2}}, q=\sqrt{2+x^3}$,

$$\int \sqrt{\frac{x}{2+x^3}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}p}{q}=\frac{2}{3}\ln|p+q| \tag{2.13}$$

例题 2.6 [2020 广东省数竞 (民办高职)] 求 $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解:(By 白酱) 令 $y=\sqrt{1+x^2}$，这里注意逆用第一积分公式，则：

$$\begin{aligned}\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x &= \int \ln(x+y)\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x+y)-\int x\frac{\mathrm{d}x}{y} \\ &= x\ln(x+y)-\int \mathrm{d}y \\ &= x\ln(x+y)-y\end{aligned}$$

例题 2.7 求 $\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 令 $y=\sqrt{1+x^2}$，同前：

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^2}\mathrm{d}x &= -\int \ln(x+y)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+y)+\int\frac{\mathrm{d}x}{xy} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}y}{x^2}-\frac{\ln(x+y)}{x} \\ &= -\mathrm{arth}y-\frac{\ln(x+y)}{x} \\ &= -\mathrm{arth}\left(\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}\end{aligned}$$

下面是常见三角函数的积分, 若设 $p=\sin x, q=\cos x$:

- $\int \sin x\mathrm{d}x=\int p\mathrm{d}x=\int -\mathrm{d}q=-\cos x$
- $\int \cos x\mathrm{d}x=\int q\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}p=\sin x$
- $\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{p}{q}\mathrm{d}x=\int -\frac{\mathrm{d}q}{q}=-\ln(\cos x)$
- $\int \cot x\mathrm{d}x=\int \frac{q}{p}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}p}{p}=\ln(\sin x)$
- $\int \csc x\mathrm{d}x=\int \frac{-\mathrm{d}q}{p^2}=-\int\frac{\mathrm{d}q}{1-q^2}=-\mathrm{arth}(\cos x)$
- $\int \sec x\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}p}{q^2}=\int\frac{\mathrm{d}p}{1-p^2}=\mathrm{arth}(\sin x)$

2.2 双元的降次与递推

在一般的课本上，常常采用三角换元法。这算是双元的一种特殊情形，两者的主要区别在于三角有倍角半角表示，而双元需要变换成倍角形式。后者见以后的内容，这里讲解不用倍角表示来求解高次不定积分。

在这个部分中只有三种富有技巧性的操作，分别是**常数代换、分部积分**和**混合**。

例题 2.8 求 $\displaystyle\int \sin^3 x \mathrm{d}x$.

解 先进行双元换元 $p=\sin x, q=\cos x$，

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\mathrm{d}x &= \int p^3\frac{\mathrm{d}p}{q} = -\int p^2\mathrm{d}q \\ &= -\int (1-q^2)\mathrm{d}q \\ &= \frac{1}{3}q^3 - q\end{aligned}$$

这里是单纯的常数代换，用来联系 n 次与 $n+2$ 次。

例题 2.9 求 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解：同前，令 $p=\sin x, q=\cos x$，

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\mathrm{d}x &= -\int p^3\mathrm{d}q \\ &= -\int (1-q^2)p\mathrm{d}q = \int q^2p\mathrm{d}q - \int p\mathrm{d}q \\ &= -\int p^2q\mathrm{d}p - \int p\mathrm{d}q \\ &= -\frac{1}{3}p^3q - \int p\mathrm{d}q + \frac{1}{3}\int p^3\mathrm{d}q \\ &= -\frac{1}{4}p^3q - \frac{3}{4}\int p\mathrm{d}q\end{aligned}$$

这里我们会发现最开始的 $\int p^3\mathrm{d}q \to \int p\mathrm{d}q$，这个过程就是混合降次。(注：上面最后一个等号是消去红色部分 1:3 混合得到。)

更高次也可以利用这个方法来降次求得。然后利用

$$\begin{aligned}\int p\mathrm{d}q &= \frac{1}{2}\left[\int p\mathrm{d}q + q\mathrm{d}p + \int \frac{p\mathrm{d}q - q\mathrm{d}p}{q^2+p^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}(pq) + \int \frac{\mathrm{d}q}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(pq + \arctan\frac{q}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\sin x\cos x - x)\end{aligned}$$

即可完成积分。

当然不止限于三角函数积分，类似 $\int (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$ 也可以解决。这里我们可以总结一个常用公式，对于考试来说是绰绰有余的：

结论 对于双元 p,q，有

$$\int p\mathrm{d}q = \frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(p^2 \pm q^2)\int \frac{\mathrm{d}q}{p} \tag{2.14}$$

其中虚圆取减号，实圆取加号。总之 $p^2 \pm q^2$ 是常数。

下面讨论更高次的情况。不难发现求解更高次的关键在于讨论 $\int y^n \mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{y^n}$ 的求解。另外两个是 $\int x^n \mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$，这是显然的，不做讨论。

其中当 n 为偶数时，利用常数代换可以解决 $\int y^n \mathrm{d}x$，而 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^n}$ 可以同时利用常数代换和分部积分化简到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}$。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^{2n}} = \frac{a_n x}{y^{2n}} + \dots + \frac{a_2 x}{y^4} + a_1 \int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} \tag{2.15}$$

这个我们可以用反正切函数等表达。

其中当 n 为奇数时。$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^n}$ 可以与之前类似，化简到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^3}$。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^{2n+1}} = \frac{a_n x}{y^{2n+1}} + \dots + a_1 \int \frac{\mathrm{d}x}{y^3} \tag{2.16}$$

这个在双元第三积分公式里已经解决。而对于 $\int y^n \mathrm{d}x$，我们则需要还加上混合操作，来得到：

$$\int y^{2n+1} \mathrm{d}x = a_n y^{2n+1} x + \dots + a_1 y x + a_0 \int \frac{\mathrm{d}x}{y} \tag{2.17}$$

然后利用双元第一积分公式得到解决。

感兴趣的读者可以算出以上公式各个系数。类比于点火公式，这里算出最后一种情形 (最常见):

定理 2.5. 双元点火公式

对于双元 x, y，我们有：

$$\begin{aligned}\int y^{2n-1} \mathrm{d}x = &\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)!!\,(2n-2k-2)!!}{(2n)!!\,(2n-2k-1)!!} \left(y^2 \pm x^2\right)^k x y^{2n-1-2k} \\ &+ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(y^2 \pm x^2\right)^n \int \frac{\mathrm{d}x}{y}\end{aligned}$$

注：$y^2 \pm x^2$ 为双元常数。

一些低次的例子为

$$\int y^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} x y^3 + \frac{3}{8} \left(y^2 \pm x^2\right) x y + \frac{3}{8} \left(y^2 \pm x^2\right)^2 \int \frac{\mathrm{d}x}{y} \tag{2.18}$$

$$\int y^5 \mathrm{d}x = \frac{1}{6} x y^5 + \frac{5}{24} \left(y^2 \pm x^2\right) x y^3 + \frac{5}{16} \left(y^2 \pm x^2\right)^2 x y + \frac{5}{16} \left(y^2 \pm x^2\right)^3 \int \frac{\mathrm{d}x}{y} \tag{2.19}$$

至此，我们可以认为如果一个积分能被转化为 $\int x^m y^n \mathrm{d}x$ 这样的双元形式，则必有初等表达。或者称，**双元的多项式的不定积分是初等的。**

2.3 双元的分式构型

2.3.1 双元的非齐次基本构型

在常见的不定积分中，总会有些非齐次的项，是不是双元就用不了呢？答案是否定的。

例题 2.10 求解 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+\lambda}$.

若设 $y=\sqrt{1-x^2}$，则分母是一个双元和常数的和。我们可以把双元均看成一次，常数看成二次/零次，此之谓非齐次。因为有 $x^2+y^2=1$。通用方法是有理化：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+\lambda}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda+y}=\int \frac{\lambda-y}{\lambda^2-y^2}\mathrm{d}x$$

这样可以分成两块来求解。

$$\begin{aligned}
I&=\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda^2-y^2}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda^2-1+x^2}\\
&=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\arctan \dfrac{x}{\sqrt{\lambda^2-1}},|\lambda|>1\\ -\frac{1}{x},\lambda=1\\ -\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\operatorname{arth}\frac{x}{\sqrt{1-\lambda^2}},|\lambda|<1\end{cases}
\end{aligned}$$

与另一部分，需要用到第三公式，并且将次数凑齐。

$$\begin{aligned}
J=\int \frac{y\mathrm{d}x}{\lambda^2-y^2}&=\int \frac{y^4}{\left[\lambda^2x^2+\left(\lambda^2-1\right)y^2\right]\left(x^2+y^2\right)}\frac{\mathrm{d}x}{y^3}\\
&=\int \frac{\mathrm{d}b}{\left(\lambda^2b^2+\lambda^2-1\right)\left(1+b^2\right)}=\int \frac{\lambda^2\mathrm{d}b}{\lambda^2b^2+\lambda^2-1}-\int \frac{\mathrm{d}b}{1+b^2}\\
&=-\arctan \frac{x}{y}+\begin{cases}\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2-1}}\arctan \dfrac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2-1}}\dfrac{x}{y},|\lambda|>1\\ -\frac{y}{x},\lambda=1\\ -\frac{|\lambda|}{\sqrt{1-\lambda^2}}\operatorname{arth}\frac{|\lambda|}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{x}{y},|\lambda|<1\end{cases}
\end{aligned}$$

其中 b 代表两个双元的比。到此本题已经结束了。可以看到计算量略大，这是因为它其实对应着三角换元法中的万能代换，是一种理论上完美的解法。如果不是万不得已，可以不用这么配凑。另外，如果这里的 $\lambda=1$ 的话是更简便的过程的，留作读者思考。

需要注意，求解这种结构的定积分时要进行连续修正。下面是一个进行过修正的例子：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda+\cos x}=\begin{cases}\frac{2\operatorname{sgn}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-1}}\left(\frac{x}{2}+\arctan \frac{\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\sin x}{\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)-\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\cos x}\right),|\lambda|>1\\ \cot \frac{x}{2},\lambda=-1;\tan \frac{x}{2},\lambda=1\\ \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\ln \left|\frac{\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}-\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}+\tan \frac{x}{2}}\right|,|\lambda|<1\end{cases}$$

还可以看到，如果要写出结果，需要分很多情况讨论。所以我们在存储这部分内容

时，可以保留一部分不定积分，类似之前 pdq 的积分一样。

定理 2.6. 非齐次构型公式 1

对于双元 p,q，我们有：

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{\lambda+p}=\int \frac{\mathrm{d}q}{p}+\lambda\left[f\left(q\right)-f\left(\lambda\frac{q}{p}\right)\right] \tag{2.20}$$

其中:$f\left(q\right)=\int \frac{\mathrm{d}q}{\lambda^2-p^2}$.

如果把 dq/p 移到左边，那么我们还有

定理 2.7. 非齐次构型公式 2

对于双元 p,q，我们有：

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{p\left(p+\lambda\right)}=f\left(\lambda\frac{q}{p}\right)-f\left(q\right) \tag{2.21}$$

其中:$f\left(q\right)=\int \frac{\mathrm{d}q}{\lambda^2-p^2}$.

2.3.2 双元的齐次基本构型

定理 2.8. 一次齐次构型公式

(2022) 对于双元 p,q，若 $p^2\pm q^2=C$ 我们有：

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{Ap+Bq}=\frac{1}{A^2\pm B^2}\left(A\int \frac{\mathrm{d}q}{p}\pm B\ln\left(Ap+Bq\right)\right) \tag{2.22}$$

定理 2.9. 二次齐次构型公式

(2022) 对于双元 p,q，若 $p^2\pm q^2=C$ 我们有：

$$\int \frac{p\mathrm{d}q}{Ap^2-Bq^2}=\frac{1}{A\pm B}\left(\int \frac{\mathrm{d}q}{p}\pm\int \frac{\mathrm{d}\left(q/p\right)}{A/B-\left(q/p\right)^2}\right) \tag{2.23}$$

证明 **Hint:** 我们由等分性有：

$$p^2\pm q^2=C\to\int \frac{Ap\mathrm{d}q\pm Bq\mathrm{d}p}{Ap^2-Bq^2}=\int \frac{\mathrm{d}q}{p} \tag{2.24}$$

$$\int \frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{Ap^2-Bq^2}=\int \frac{p^2}{Ap^2-Bq^2}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right)=\int \frac{\mathrm{d}\left(q/p\right)}{A-B\left(q/p\right)^2} \tag{2.25}$$

证明即将这两者线性组合。

例题 2.11 求 $\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{2-t^2}\mathrm{d}t$.

解:(By 风中鱼) 置 $s=\sqrt{t^2-1}, b=\frac{t}{s}$，有：

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{2-t^2}\mathrm{d}t &= -\int \frac{s\mathrm{d}t}{2s^2-t^2}\\ &= -\frac{1}{3}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{s} - \int \frac{\mathrm{d}\left(t/s\right)}{2-\left(t/s\right)^2}\right)\\ &= -\frac{1}{3}\ln\left(t+s\right)+\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{arth}\frac{t}{\sqrt{2}s}\\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{arth}\frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}}-\frac{1}{3}\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\end{aligned}$$

例题 2.12 求 $\int \frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$.

解:(By 虚调子) 我们设

$$p=\frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}, q=\frac{\cos x}{\sin x}, r=\frac{1}{\sin x}$$

这样我们有

$$p^2+1=q^2=r^2-1, \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}r}{qr}$$

于是带入后利用上面的构型公式可得。

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}\mathrm{d}x &= -\int p\frac{\mathrm{d}r}{qr}=\int \frac{p\mathrm{d}q}{-r^2}\\ &= \int \frac{p\mathrm{d}q}{p^2-2q^2}=-\left(\int \frac{\mathrm{d}q}{p}-\int \frac{\mathrm{d}\left(q/p\right)}{\frac{1}{2}-\left(q/p\right)}\right)\\ &= \sqrt{2}\mathrm{arth}\left(\frac{\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}\right)-\ln\left(\frac{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}\right)\end{aligned}$$

与

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}=-\int \frac{r^2}{pq}\frac{\mathrm{d}r}{qr}=-\int \frac{\mathrm{d}p}{q^2}=-\arctan\frac{\sqrt{\cos 2x}}{\sin x} \tag{2.26}$$

2.4 双元的恒等式诱导

不定积分的背后往往隐藏着恒等式，下面用例题来讲解一些常用思路。

例题 2.13 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+1\right)\sqrt{x^2+1}}$.

解：(By 水中星) 我们首先需要注意到：$2\left(x^2+1\right)=\left(x+1\right)^2+\left(x-1\right)^2$。当然本质上和待定系数一样，我们是为了把分母的根式以及非齐次项 $x+1$ 化为齐次。什么意思呢？

若令

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x+1}=p, \frac{x-1}{x+1}=q$$

我们有 $p^2 = 1 + q^2$。作用体现在下面：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{\frac{1+x}{2}\mathrm{d}q}{p\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}q}{p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(p+q)\end{aligned}$$

当然，如果我们令

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x-1} = p, \frac{x+1}{x-1} = q$$

也是可以算的，留作读者习题。

我们可以发现分母的非齐次项与根号的乘积，在做这种双换元后，变成了被前面所研究的双元构型。那么如何确定我们需要的双换元呢？过程里写的是注意到一个恒等式——这个恒等式把一个根号下的多项式转变为两个多项式平方和 (差) 的形式。对于没有接触过双元的人来说，往往会发现，如果仅做两个多项式的比值换元 (如果多项式是一次的，称为“莫比乌斯变换”) 后，原来的积分得到了“化简”。而双元正好就是为什么所谓的“莫比乌斯变换”有用的源头。我们采用的双元体系，实际上推广了莫比乌斯变换，使得不用非得是一次的多项式之比，甚至不一定是多项式，具体可以看下面的例题。

对于恒等式的“注意到”，如果真注意不到，也有相关的算法直接套用，具体见本节末尾的结论。

例题 2.14 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(1+x^2)}$

解:(By 风中鱼) 置

$$p = \frac{x-1}{x+1}, q = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(1+x^2)} &= \int \frac{2}{q^2}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^4} \\ &= \int \frac{1}{q^2}\frac{(1-p)^2}{4}\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{q^2-2p}{q^2}\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{4}p - \frac{1}{2}\ln q \\ &= \frac{1}{4}\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x+1}\end{aligned}$$

例题 2.15 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{2x^2-1}}$.

解：(By 风中鱼) 注意到：$x^2-\left(1-x^2\right)=2x^2-1$，于是我们令

$$p=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},q=\frac{\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{1-x^2}},p^2-1=q^2 \tag{2.27}$$

则由前面的第三公式 $\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\left(y^2+x^2\right)\frac{\mathrm{d}x}{y^3}$ 不难得到：$\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$，于是：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{2x^2-1}}&=\int\frac{\mathrm{d}p}{q}=\ln\left(p+q\right)\\&=\ln\frac{x+\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

例题 2.16 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2+3x^4}}$.

解:(By 风中鱼) 注意到恒等式：

$$1+x^2+3x^4=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^2+\frac{11}{4}x^4$$

我们置 $p=\frac{2\sqrt{1+x^2+3x^4}}{\sqrt{11}x^2},q=\frac{x^2+2}{\sqrt{11}x^2},\mathrm{d}q=\frac{-4\mathrm{d}x}{\sqrt{11}x^3}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2+3x^4}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{p\frac{\sqrt{11}}{2}x^3}\\&=\int\frac{-\frac{\sqrt{11}}{4}x^3\mathrm{d}q}{p\frac{\sqrt{11}}{2}x^3}\\&=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}q}{p}=-\frac{1}{2}\ln\left(p+q\right)\end{aligned}$$

例题 2.17 求 $\displaystyle\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}$

解:(By 风中鱼) 注意到：$\left(1+x\right)^2=2\left(1+x+x^2\right)-\left(1+x^2\right)$，于是我们令

$$p=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1+x^2}},q=\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}},r=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$$

就有 $q^2=p^2-1=2-r^2$, 于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}&=\int\frac{2\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x+x^2}}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x+x^2}}\\&=\int\frac{2\sqrt{2}}{p}\mathrm{d}\left(\frac{q-r}{2}\right)-\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right|\\&=\sqrt{2}\ln\left|p+q\right|-\sqrt{2}\arctan\frac{r}{p}-\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right|\end{aligned}$$

例题 2.18 求 $\displaystyle\int\frac{R\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}{\left(R^2+r^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta$.

解:(By 风中鱼) 注意到：

$$\left(R\cos\theta-r\right)^2+\left(R\sin\theta\right)^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta=\left(R-r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2 \tag{2.28}$$

则有：

$$R^2\left(R-r\cos\theta\right)^2-r^2\left(R\cos\theta-r\right)^2=\left(R^2-r^2\right)\left(R^2+r^2-2Rr\cos\theta\right) \tag{2.29}$$

若设

$$m=\frac{r}{R}\frac{R\cos\theta-r}{R-r\cos\theta},n=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}{R-r\cos\theta} \tag{2.30}$$

则构成了双元 $m^2+n^2=1$。同时：$\mathrm{d}m=\dfrac{r}{R}\dfrac{\left(r^2-R^2\right)\sin\theta}{\left(R-r\cos\theta\right)^2}\mathrm{d}\theta$，于是：

$$\begin{aligned}\int\frac{R\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}{\left(R^2+r^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta&=-\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r^2R}\int\frac{m\mathrm{d}m}{n^3}\\&=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r^2R}\int\frac{\mathrm{d}n}{n^2}\\&=-\frac{R-r\cos\theta}{r^2\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\end{aligned}$$

例题 2.19 求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\left(x+1\right)^2}\mathrm{d}x.$

解:(By 水中星) 由于有恒等式：

$$3\left(x+1\right)^2+\left(x-1\right)^2=4\left(x^2+x+1\right)$$

故不妨设

$$p=\frac{x-1}{x+1},q=2\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \tag{2.31}$$

同时有 $\mathrm{d}p=\dfrac{2\mathrm{d}x}{\left(x+1\right)^2}$，故：

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{\left(x+1\right)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\left(x+1\right)^2\sqrt{x^2+x+1}}\\&=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\int\frac{x\mathrm{d}p}{q\left(x+1\right)}\\&=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\int\frac{\left(p+1\right)\mathrm{d}p}{2q}\\&=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}\ln\left(p+q\right)\\&=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right)\end{aligned}$$

例题 2.20 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{\left(x-1\right)^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x.$

解:(By 虚调子) 注意到恒等式：

$$4\left(1+x^3\right)=3\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)^3 \tag{2.32}$$

若设双元：

$$p=\frac{2}{x-1}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}},q=\frac{x+1}{x-1},p^2=3+q^2 \tag{2.33}$$

则：

$$\begin{aligned}
\int\frac{x^2+1}{(x-1)^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x&=\int\frac{2\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}{p\sqrt{q}}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\\
&=-\int\frac{q^2+1}{p\sqrt{q}}\frac{\mathrm{d}q}{2}=-\frac{1}{6}\int\frac{2q^2+p^2}{p\sqrt{q}}\mathrm{d}q\\
&=-\frac{1}{3}\int\frac{2q\mathrm{d}p+p\mathrm{d}q}{2\sqrt{q}}=-\frac{1}{3}\int\mathrm{d}\left(p\sqrt{q}\right)\\
&=-\frac{1}{3}p\sqrt{q}=-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{1+x^3}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

我们可以总结出一类双元思路：

$$p,q,r\longmapsto\frac{2}{x-1}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}},\frac{x+1}{x-1},\sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$$

这对解具备相似结构的不定积分提供了便利。在这里面令 $x=\frac{t}{a}$ 可以进行一点小的推广。

如果对数字不太敏感的读者，可以利用如下公式来“注意到恒等式”。

结论

$$\left(a^2-4b\right)\left(x+x_0\right)^2+4\left({x_0}^2-ax_0+b\right)\left(x^2+ax+b\right)=\left[\left(2x_0-a\right)x+ax_0-2b\right]^2 \tag{2.34}$$

其中 x_0,a,b 可以视为用来固定的参数。

使用方法是，我们从分母中选取要凑的式子 $(x+x_0)^2$ 和 x^2+ax+b，然后把系数代到上面的式子，这样会自然得到另一个新的平方项。

2.5 特殊的双元

定理 2.10. 辅助角公式

对于常数 $a,b>0$，有：

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\phi\right) \tag{2.35}$$

其中 $\tan\phi=\frac{b}{a}$。

同样地利用辅助角公式可以得到：

$$b\sin x-a\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\phi\right) \tag{2.36}$$

这里我们可以发现双元

$$\left\{\frac{a\sin x+b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b\sin x-a\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

它对应着初始双元 $\{\sin x,\cos x\}$ 逆时针旋转了 ϕ: $\{\sin(x+\phi),\cos(x+\phi)\}$.

类似地我们可以对其他双元旋转来产生新的双元。而且在实际中旋转后的双元很有效果。

下面是一些常见双元的例子：

2.5.1 对勾三元

因为有恒等式 $\left(x-\dfrac{a}{x}\right)^2+4a=\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^2$，所以这里可以诱导出一对双元。(又称“对勾三元 (From Mirion)”)

$$\boxed{p,q,r\longmapsto x+\frac{a}{x},x-\frac{a}{x},\sqrt{x^2+\frac{a^2}{x^2}+b}}$$

在化简一些四次的不定积分上，有奇效。观察次数差来换双元即可。另外还有一个特别的小技巧，我们可以注意到 $\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q=x$，由等分性：

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q\right)}{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q}=\frac{\mathrm{d}p}{q} \tag{2.37}$$

如果将 x 换成 x^n，那么

$$n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}(x^n)}{x^n}=\frac{\mathrm{d}p}{q} \tag{2.38}$$

这个技巧将在下面的例题中频繁使用。

例题 2.21 求 $\displaystyle\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解:(By 风中鱼) 设

$$p=x+\frac{1}{x},q=x-\frac{1}{x},r=\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x} \tag{2.39}$$

则:

$$\begin{aligned}\int\frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}&=-\int\frac{\mathrm{d}p}{pr}\\&=-\int\frac{\mathrm{d}r}{p^2}=-\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2+1}\\&=\operatorname{arc}\tan\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\end{aligned}$$

例题 2.22 求 $\displaystyle\int\frac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$.

解:(By 风中鱼) 设

$$p=x-\frac{1}{x},q=x+\frac{1}{x},r=\frac{\sqrt{1+x^2+x^4}}{x},s=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x} \tag{2.40}$$

则有双元分解：

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}&=\int\frac{pq}{r^2s}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\int\frac{pq}{r^2s}\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{4}=\int\frac{\left(q^2-p^2\right)\mathrm{d}s}{4r^2}\\&=\int\frac{\mathrm{d}s}{r^2}\\&=\arctan\frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\to-\arctan\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\end{aligned}$$

例题 2.23 求 $\displaystyle\int\frac{x^4-1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解:(By 风中鱼) 设

$$p=x+\frac{1}{x},q=x-\frac{1}{x},r=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

则有双元分解：

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}&=\int\frac{pq}{r}\frac{\mathrm{d}q}{p}\\&=\int\frac{q\mathrm{d}q}{r}=\int\mathrm{d}r\\&=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\end{aligned}$$

例题 2.24 求 $\displaystyle\int\frac{x^4+x^2}{\left(x^4+1\right)^2}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 置

$$p=x+\frac{1}{x},q=x-\frac{1}{x},r=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$$

有

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4+x^2}{\left(x^4+1\right)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{r^4}=\frac{1}{2}\int\frac{r^2-q^2}{r^4}\mathrm{d}q\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}q}{q^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{q\mathrm{d}r}{r^3}\\&=\frac{q}{4r^2}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{q}{\sqrt{2}}\\&=\frac{x^3-x}{4\left(x^4+1\right)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\end{aligned}$$

例题 2.25 求 $\displaystyle\int \frac{x^2+n^2x+1}{x^4-nx^2+1}\mathrm{d}x$, 其中 $n\in(0,2)$.

解：(By 水中星) 使 $a=1$，则

$$\begin{aligned}
\int \frac{p+n^2}{p^2-2-n}\frac{\mathrm{d}p+\mathrm{d}q}{p+q} &= \int \frac{p+n^2}{p^2-2-n}\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{p^2-q^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}q}{p^2-2-n}+n^2\int \frac{p^2\mathrm{d}\left(q/p\right)}{p^2-\frac{2+n}{4}\left(p^2-q^2\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}q}{q^2+2-n}+4n^2\int \frac{\mathrm{d}b}{\left(2+n\right)b^2+\left(2-n\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2-n}}\arctan\frac{q}{\sqrt{2-n}}+\frac{4n^2}{\sqrt{4-n^2}}\arctan\sqrt{\frac{2+n}{2-n}}\frac{q}{p} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2-n}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2-n}}+\frac{4n^2}{\sqrt{4-n^2}}\arctan\sqrt{\frac{2+n}{2-n}}\frac{x^2-1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

例题 2.26 求 $\displaystyle\int \frac{1-x}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+kx^2+1}}$.

解:(By 风中鱼) 我们置

$$p=x+\frac{1}{x},q=x-\frac{1}{x},r=\frac{\sqrt{x^4+kx^2+1}}{x}$$

就有 $p^2-r^2=2-k$, 此时原来的结构明晰：

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-x}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+kx^2+1}} &= \int \frac{1-x^2}{x^2+2x+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+kx^2+1}} \\
&= -\int \frac{\mathrm{d}p}{\left(2+p\right)r} = \int \frac{p-2}{4-p^2}\frac{\mathrm{d}p}{r} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}r}{2+k-r^2}-2\int \frac{r^2}{4r^2-\left(k+2\right)p^2}\mathrm{d}\left(\frac{p}{r}\right) \\
&= \begin{cases}
\frac{1}{\sqrt{2+k}}\left[\operatorname{arth}\frac{\sqrt{x^4+kx^2+1}}{x\sqrt{2+k}}-\operatorname{arth}\frac{\sqrt{k+2}\left(1+x^2\right)}{2\sqrt{x^4+kx^2+1}}\right] & (k>-2) \\
\frac{x-1}{\left|x^2-1\right|} & (k=-2) \\
-\frac{1}{\sqrt{-2-k}}\left[\arctan\frac{\sqrt{x^4+kx^2+1}}{x\sqrt{-2-k}}+\arctan\frac{\sqrt{-k-2}\left(1+x^2\right)}{2\sqrt{x^4+kx^2+1}}\right] & (k<-2)
\end{cases}
\end{aligned}$$

例题 2.27 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 不妨设：

$$p=\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2}{x}},q=\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}},r=\sqrt{x+\frac{2}{x}+2}$$

则积分可以转化为双元：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\mathrm{d}x &= \int \frac{r}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int r\mathrm{d}\left(p+q\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(p+q\right)r + \left(1-\sqrt{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}p}{r} + \left(1+\sqrt{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}q}{r} \\
&= \sqrt{x^2+2x+2} + \left(1-\sqrt{2}\right)\ln\left(\sqrt{x+\frac{2}{x}+2}+\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2}{x}}\right) \\
&+ \left(1+\sqrt{2}\right)\ln\left(\sqrt{x+\frac{2}{x}+2}+\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right) \\
&= \sqrt{x^2+2x+2} + \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) \\
&+ \sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+x+\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

例题 2.28 求 $\int \sqrt{a+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\mathrm{d}x.$

解:(By 风中鱼) 不妨设：

$$
p = \frac{x}{2}-\frac{1}{2x}, q = \frac{x}{2}+\frac{1}{2x}, r = \sqrt{a+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}
$$

则积分可以转化为双元：

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{a+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\mathrm{d}x &= \int r\mathrm{d}\left(p+q\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(p+q\right)r + \frac{a}{2}\ln\left(r+p\right) + \frac{a-1}{2}\ln\left(r+q\right) \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2} + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+\sqrt{a+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\right) \\
&+ \frac{a-1}{2}\ln\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}+\sqrt{a+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\right)
\end{aligned}
$$

例题 2.29 求 $\int \frac{\sqrt{x^2+ax+1}}{\sqrt{x^2+bx+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.$

解：(By 风中鱼) 若设

$$
p = \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}, q = \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}, r = \sqrt{x+\frac{1}{x}+a}, s = \sqrt{x+\frac{1}{x}+b}
$$

则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+ax+1}}{\sqrt{x^2+bx+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} &= \int \frac{r}{s}\frac{1}{pq}\frac{2\mathrm{d}p}{q} = 2\int \frac{r\mathrm{d}s}{p^2q^2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{r}{q^2}\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int \frac{r}{p^2}\mathrm{d}s \\
&= \frac{b-a}{2}\int \frac{r\mathrm{d}s}{(b+2)\,r^2-(a+2)\,s^2} - \frac{b-a}{2}\int \frac{r\mathrm{d}s}{(b-2)\,r^2-(a-2)\,s^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{b-2}{a-2}-t^2} - \int \frac{\mathrm{d}t}{\frac{b+2}{a+2}-t^2}\right), t=\frac{s}{r} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-2}{b-2}}\mathrm{arth}\sqrt{\frac{a-2}{b-2}}\frac{\sqrt{x^2+bx+1}}{\sqrt{x^2+ax+1}} \\
&- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+2}{b+2}}\mathrm{arth}\sqrt{\frac{a+2}{b+2}}\frac{\sqrt{x^2+bx+1}}{\sqrt{x^2+ax+1}}
\end{aligned}$$

例题 2.30 求 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x.$

解：(By 风中鱼) 使 $a=1, b=1$ 也即令：

$$p = x+\frac{1}{x}, q = x-\frac{1}{x}, r = \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$$

那么我们可以简化原式：

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}q}{r^2+p} = \int \frac{\mathrm{d}q}{p^2+p-1} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}q}{p-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - \int \frac{\mathrm{d}q}{p+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}
\end{aligned}$$

然后利用一个常用结论 (属于王者百题热身题)。

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}q}{p+a} &= \int \frac{(p-a)\,\mathrm{d}q}{p^2-a^2} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}q}{p} + a^2\int \frac{1}{p^2-a^2}\frac{\mathrm{d}q}{p} - a\int \frac{\mathrm{d}q}{q^2+4-a^2} \\
&= \ln(p+q) + a^2\int \frac{p^2\mathrm{d}\,(q/p)}{(4-a^2)\,p^2+a^2q^2} - a\int \frac{\mathrm{d}q}{q^2+4-a^2}
\end{aligned}$$

然后分别带入一定的 a 值即可。

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}q}{p-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} &= \ln(p+q) + \int \frac{\mathrm{d}b}{\frac{1}{5+2\sqrt{5}}+b^2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\int \frac{\mathrm{d}q}{q^2+\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \ln(p+q) + \sqrt{5+2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\frac{q}{p}\right) \\
&+ \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}q}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}
\end{aligned}$$

同理：

$$\int \frac{\mathrm{d}q}{p+\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \ln(p+q) + \sqrt{5-2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\frac{q}{p}\right) - \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}q}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

最后带入原式，

$$\int \ldots \mathrm{d}x = \sqrt{5+2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}(x-1/x)}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} - \sqrt{5-2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) - \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}(x-1/x)}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$$

右边这两个可以由之前的结论修正，这里限于篇幅就不过多介绍。

例题 2.31 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

解：(By 风中鱼) 设

$$p = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}, q = \sqrt{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}, r = \sqrt{x+\frac{1}{x-1}} \tag{2.41}$$

则不难求解：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}} &= \int \frac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}\mathrm{d}x \\ &= x + \ln|x-1| - \int r\,\mathrm{d}(p+q) \\ &= x + \ln|x-1| - r\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}\ln(p+r) - \frac{3}{2}\ln(q+r) \\ &= x + \frac{3}{2}\ln|x-1| - \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right) \\ &\quad - \frac{3}{2}\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-x+1}\right)\end{aligned}$$

读者习题: 求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \tag{2.42}$$

例题 2.32 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\mathrm{d}x$.

解:(By 虚调子) 设 $p=\frac{1}{x}+x, q=\frac{1}{x}-x, r=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}$, 则:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\mathrm{d}x &= \int \frac{r}{pq}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{r}{pq}\frac{p+q}{2}\mathrm{d}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{r}{pq}(q\mathrm{d}p - p\mathrm{d}q) = \frac{1}{4}\int \frac{r\mathrm{d}p}{p} - \frac{1}{4}\int \frac{r\mathrm{d}q}{q} \\
&= \frac{1}{4}\left(\int \frac{r^2\mathrm{d}r}{r^2+2} - \int \frac{r^2\mathrm{d}r}{r^2-2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arth}\frac{r}{\sqrt{2}} - \arctan\frac{r}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{arth}\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}x} - \arctan\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}x}\right)
\end{aligned}$$

例题 2.33 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}$

解:(By 零蛋大) 设 $p=x+x^{-1}, q=x-x^{-1}, r=\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}$，则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}} &= \int \frac{\mathrm{d}(p+q)}{2r} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left[(p+r)(q+r)\right] \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(2x^2-10+2x\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}\right)
\end{aligned}$$

例题 2.34 求 $\displaystyle\int \frac{1-x+3x^2}{(1+x+x^2)^2\sqrt{1-x+x^2}}\mathrm{d}x.$

解:(By 风中鱼) 利用前面的经验，我们置:

$$\begin{cases} p=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}, q=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} \\ r=\sqrt{x+\frac{1}{x}-1}, s=\sqrt{x+\frac{1}{x}+1} \end{cases} \tag{2.43}$$

若已知元素:

$$I=\int \frac{\mathrm{d}q}{s^2r} = \int \frac{r^2}{3r^2-2q^2}\mathrm{d}\left(\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{q}{r} \tag{2.44}$$

$$J=\int \frac{\mathrm{d}p}{s^2r} = -\int \frac{r^2}{r^2+2p^2}\mathrm{d}\left(\frac{p}{r}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\frac{p}{r} \tag{2.45}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-x+3x^2}{(1+x+x^2)^2\sqrt{1-x+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1-x+x^2}\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^2} + \int \frac{2x^2\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^2\sqrt{1-x+x^2}} \\
&= \int \frac{\sqrt{x}r}{x^2s^4}\mathrm{d}x + \int \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{x}s^4r} \\
&= \int \frac{r}{s^4}(\mathrm{d}q-\mathrm{d}p) + 2\int \frac{\mathrm{d}p+\mathrm{d}q}{s^4r} \\
&= \int \frac{r^2+2}{s^4r}\mathrm{d}q + \int \frac{2-r^2}{s^4r}\mathrm{d}p = \int \frac{\mathrm{d}q+\mathrm{d}p}{s^2r} - 2\int \frac{r\mathrm{d}p}{s^4} \\
&= I + J + 2\int \frac{r\mathrm{d}p}{s^2} - 2\int \frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4} \\
&= I - 3J + 2\int \frac{\mathrm{d}p}{r} - 2\int \frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4}
\end{aligned}$$

同时我们注意到：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{pr}{s^2}\right) &= \frac{p\mathrm{d}r+r\mathrm{d}p}{s^2} - \frac{2pr\mathrm{d}s}{s^3} \\
&= \frac{(p^2+r^2)\,\mathrm{d}p}{s^2r} - 2\frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4} \\
&= 2\frac{\mathrm{d}p}{r} - J - 2\frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4}
\end{aligned}$$

这样原积分结构明了，

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-x+3x^2}{(1+x+x^2)^2\sqrt{1-x+x^2}}\mathrm{d}x &= I - 2J + \frac{pr}{s^2} = \frac{pr}{s^2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{q}{r} + \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}\frac{p}{r} \\
&= \frac{(1+x)\sqrt{1-x+x^2}}{1+x+x^2} \\
&\quad + \sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}(1+x)}{\sqrt{1-x+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{6}(1-x)}{3\sqrt{1-x+x^2}}
\end{aligned}$$

例题 2.35 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{9-x}}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 不妨设

$$p = \sqrt{x-3}+\sqrt{9-x}, q = \sqrt{x-3}-\sqrt{9-x}$$

则我们可以发现 $p^2+q^2=12, pq=2x-12$, 于是

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}+\sqrt{9-x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{p+q}{2p}\mathrm{d}\left(\frac{pq}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{(p+q)(p\mathrm{d}q+q\mathrm{d}p)}{p} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{p^2\mathrm{d}q+pq\mathrm{d}p+pq\mathrm{d}q+q^2\mathrm{d}p}{p} \\
&= \frac{1}{4}pq + \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{4}\int \frac{12-p^2}{p}\mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{(x-3)(9-x)} + 3\ln\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{9-x}\right)
\end{aligned}$$

2.5.2 三角三元

下面我们将设 $p=\cos x+\sin x, q=\cos x-\sin x$，这其实是原来的初始双元进行了 45° 旋转。如果必要还可以加一个二次元：$r=\sqrt{2\sin x\cos x}$。

$$p,q,r\longmapsto \cos x+\sin x,\cos x-\sin x,\sqrt{2\sin x\cos x}$$

- 有数量关系：$r^2=p^2-1=1-q^2$
- 有导数关系：$\mathrm{d}p=q\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}q=-p\mathrm{d}x$.

例题 2.36 求 $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼)

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{r^2}{2}\cdot\frac{p-q}{2}}{p}\frac{\mathrm{d}p}{q}\\
&=\frac{1}{4}\int\frac{r^2\mathrm{d}p}{q}-\frac{1}{4}\int\frac{r^2\mathrm{d}p}{p}\\
&=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}p}{q}-\frac{1}{4}\int q\mathrm{d}p-\frac{1}{4}\int\frac{p^2-1}{p}\mathrm{d}p\\
&=-\frac{1}{8}\int p\mathrm{d}q+q\mathrm{d}p-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p^2-\ln p\right)\\
&=\frac{1}{4}\ln p-\frac{1}{8}\left(pq+p^2\right)\\
&=\frac{1}{4}\ln\left(\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{4}\cos x\left(\sin x+\cos x\right)
\end{aligned}$$

例题 2.37 求

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x \tag{2.46}$$

解:(By 风中鱼) 这里我们需要推广一下，另设 $m=\sin x+2\cos x, n=\cos x-2\sin x$，这也是一种旋转。顺便，此类双元对应了过时的" 组合积分法"，或者说是一种推广。

$$\begin{aligned}
\int\frac{\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{(2m+n)^2}{25m}\frac{\mathrm{d}m}{n}\\
&=\frac{4}{25}\int\frac{m\mathrm{d}m}{n}+\frac{4}{25}\int\mathrm{d}m+\frac{1}{25}\int\frac{n\mathrm{d}m}{m}\\
&=\frac{4}{25}(m-n)-\frac{1}{25}\int\frac{n^2\mathrm{d}n}{5-n^2}\\
&=\frac{4}{25}(m-n)+\frac{n}{25}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}n}{5-n^2}\\
&=\frac{4m-3n}{25}-\frac{1}{5\sqrt{5}}\mathrm{arth}\frac{n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

例题 2.38 一般地，求 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 若设 $p=a\sin x+b\cos x, q=a\cos x-b\sin x$，则：

$$\sin x\cos x=\frac{(ap-bq)(bp+aq)}{(a^2+b^2)^2} \tag{2.47}$$

带入即可：

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sin x\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{p}\frac{(ap-bq)(bp+aq)}{(a^2+b^2)^2}\frac{\mathrm{d}p}{q}\\
&=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[ab\int\left(\frac{p\mathrm{d}p}{q}-\frac{q\mathrm{d}p}{p}\right)+(a^2-b^2)\int\mathrm{d}p\right]\\
&=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\begin{array}{c}(a^2-b^2)p-abq\\ +ab\int\frac{q^2\mathrm{d}q}{a^2+b^2-q^2}\end{array}\right]\\
&=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\begin{array}{c}(a^2-b^2)p-2abq\\ +ab\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}\right]\\
&=\frac{a\sin x-b\cos x}{a^2+b^2}+\frac{ab}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arth}\frac{a\cos x-b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

例题 2.39 求 $\int\sqrt{\sin x-\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

解:(By 水中星) 设

$$p=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}, q=\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=\sqrt{1-\sin x}, r=\sqrt{\sin x} \tag{2.48}$$

于是就转化为双元积分了：

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{\sin x-\sin^2 x}\mathrm{d}x&=\int qr\frac{2\mathrm{d}p}{q}\\
&=2\int r\mathrm{d}p=\int\mathrm{d}(rp)-\int\frac{\mathrm{d}p}{r}\\
&=pr-\ln(p+r)\\
&=\sqrt{(1+\sin x)\sin x}-\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)
\end{aligned}$$

结果进行 sgn 修正的话，在前面乘一个 $\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$ 即可。

例题 2.40 求 $\int\sin^{\frac{3}{2}}x\cos^{\frac{5}{2}}x\mathrm{d}x.$

解: 若设 $p=\sin x+\cos x, q=\cos x-\sin x, r=\sqrt{2\sin x\cos x}$,(这里需要用到前面的

双元点火公式) 则：

$$
\begin{aligned}
\int \sin^{\frac{3}{2}} x \cos^{\frac{5}{2}} x \mathrm{d}x &= \int \frac{r^3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{p+q}{2} \frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\int r^3 \mathrm{d}p - \int r^3 \mathrm{d}q \right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{4} r^3 p - \frac{3}{8} rp + \frac{3}{8} \ln|r+p| \\ -\frac{1}{4} r^3 q - \frac{3}{8} rq - \frac{3}{8} \arctan \frac{q}{r} \end{array} \right) \\
&= \frac{2r^3 \sin x - 3r\cos x}{16\sqrt{2}} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \left(\ln|r+p| - \arctan \frac{q}{r} \right)
\end{aligned}
$$

例题 2.41 求

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x + \sin x \cos x} \tag{2.49}
$$

解：(By 风中鱼)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x + \sin x \cos x} &= \int \frac{-1}{p + r^2/2} \frac{\mathrm{d}q}{p} = -2 \int \frac{\mathrm{d}q}{p\,(2p + p^2 - 1)} \\
&= -2 \int \frac{\mathrm{d}q}{p\left(p + 1 + \sqrt{2}\right)\left(p + 1 - \sqrt{2}\right)} \\
&= 2 \int \frac{\mathrm{d}q}{p} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int \frac{\mathrm{d}q}{p + 1 + \sqrt{2}} \\
&\quad - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int \frac{\mathrm{d}q}{p + 1 - \sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

这是前面用过的模型，这里将剩下的一些简单的计算过程省略。

例题 2.42 求 $\int \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) \cos x \mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼)

$$
\begin{aligned}
\int \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) \cos x \mathrm{d}x &= \sin x \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) - \int \frac{p-q}{2} \frac{\frac{4}{r^3}\mathrm{d}r}{1 + \left(1 - \frac{2}{r^2}\right)^2} \\
&= \sin x \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) - 2 \int \frac{(p-q)\, r\mathrm{d}r}{r^4 + (r^2 - 2)^2} \\
&= \sin x \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) - \int \frac{p^2\mathrm{d}p + q^2\mathrm{d}q}{r^4 - 2r^2 + 2}
\end{aligned}
$$

后面其实算是固定的套路了。另设 $m=p+\frac{\sqrt{5}}{p},n=p-\frac{\sqrt{5}}{p}$，

$$
\begin{aligned}
\int\frac{p^2\mathrm{d}p}{r^4-2r^2+2}&=\int\frac{p^2\mathrm{d}p}{p^4-4p^2+5}\\
&=\int\frac{\mathrm{d}\left(m+n\right)}{2\left(p^2+5/p^2-4\right)}\\
&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}m}{m^2-\left(4+2\sqrt{5}\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}n}{n^2+2\sqrt{5}-4}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2\sqrt{5}-4}}\arctan\frac{n}{\sqrt{2\sqrt{5}-4}}-\frac{1}{2\sqrt{4+2\sqrt{5}}}\operatorname{arth}\frac{m}{\sqrt{4+2\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

另一部分同理，

$$
\begin{aligned}
\int\frac{q^2\mathrm{d}q}{r^4-2r^2+2}&=\int\frac{q^2\mathrm{d}q}{q^4+1}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{q-1/q}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{q+1/q}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

回代即可得到结果。

命题 2.1. 王者百题 094

验证：

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\mathrm{d}x=&\frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{2\sqrt{\tan x}}{\tan x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(\cos x-\sin x\right)-\frac{x}{2}\\
&-\frac{\ln\left(\sqrt{2\sin x\cos x}+\sin x+\cos x\right)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

解：(By 风中鱼)

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\mathrm{d}x&=\int\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x\\
&=\int\frac{\sqrt{\sin x}\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}\right)}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x\\
&=\int\frac{\frac{r}{\sqrt{2}}-\frac{p-q}{2}}{q}\frac{\mathrm{d}p}{q}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{r\mathrm{d}p}{1-r^2}-\frac{1}{2}\int\frac{p\mathrm{d}p}{q^2}+\frac{\mathrm{d}p}{q}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{r^2\mathrm{d}r}{p\left(1-r^2\right)}+\frac{1}{2}\ln q-\frac{1}{2}\arctan\frac{p}{q}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\int\frac{\mathrm{d}r}{p}+\int\frac{\mathrm{d}r}{p\left(1-r^2\right)}\right)+\ldots\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{p\mathrm{d}r-r\mathrm{d}p}{p^2-2r^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(r+p\right)+\ldots\\
&=\frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{2}r}{p}-\frac{\ln\left(r+p\right)}{\sqrt{2}}+\frac{\ln q}{2}-\frac{1}{2}\arctan\frac{p}{q}
\end{aligned}
$$

后面的化简过程省略。

例题 2.43 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$

解：(By 水中星) 设 $p=\sin x+\cos x, q=\cos x-\sin x$，则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x} &= \int \frac{p-q}{\sqrt{2}+p}\frac{\mathrm{d}p}{2q} \\
&= \int \frac{p-q}{2q^2}\left(\sqrt{2}-p\right)\frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int \frac{p\mathrm{d}p}{q^3}-\int \frac{q\mathrm{d}p}{q^3}\right)-\int \frac{p^2\mathrm{d}p}{2q^3}+\int \frac{pq\mathrm{d}p}{2q^3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2q}-\operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln q+\int \frac{p\mathrm{d}q}{2q^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2q}-\operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln q-\frac{p}{2q}+\frac{1}{2}\arctan\frac{p}{q}
\end{aligned}$$

下面是一个系列的题目：

例题 2.44 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

解:(By 水中星) 按 $p=\sin x+\cos x, q=\cos x-\sin x, r=\sqrt{2\sin x\cos x}$ 设双元：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)} \\
&= \int \frac{1}{p\left(1-\frac{r^2}{2}\right)}\frac{\mathrm{d}q}{p} = \int \frac{2\mathrm{d}q}{(2-q^2)(1+q^2)} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}q}{2-q^2}+\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}q}{1+q^2} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\arctan q \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\arctan(\sin x-\cos x)
\end{aligned}$$

例题 2.45 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解: 可以简单凑 $\tan x$ 解决：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{2}\sin x\cos x}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2}\sin x\cos x} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x-\sqrt{2}\tan x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+\sqrt{2}\tan x+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\tan x-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}\tan x+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}\tan x}{1-\tan^2 x}
\end{aligned}$$

例题 2.46 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x+\cos^5 x}$.

解：(By 虚调子) 设双元：$p=\sin x+\cos x, q=\sin x-\cos x, r=\sqrt{2\sin x\cos x}$ 就有：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x+\cos^5 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)\left(1-\sin x\cos x-\sin^2 x\cos^2 x\right)}\\
&= \int \frac{\mathrm{d}q}{p^2\left(1-\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)} = \int \frac{4\mathrm{d}q}{\left(2-q^2\right)\left(5-\left(2-q^2\right)^2\right)}\\
&= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}q}{2-q^2}-\frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{5}+2-q^2}+\frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{5}-2+q^2}\\
&= \frac{4}{5\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}-\frac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}+2}}\operatorname{arth}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}\\
&\quad+\frac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}-2}}\arctan\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}
\end{aligned}
$$

例题 2.47 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

解：(By 水中星) 比 5 次要简单的多：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x} &= \int \frac{8\mathrm{d}x}{5+3\cos 4x}\\
&= \int \frac{2\mathrm{d}\left(2x\right)}{4\cos^2\left(2x\right)+\sin^2\left(2x\right)}\\
&= \arctan\frac{\tan\left(2x\right)}{2}\\
&\sim 2x-\arctan\frac{\sin 4x}{\cos 4x+3}
\end{aligned}
$$

最后这个是进行了连续修正。对于更高次，可以由递推式：

$$
\sin^{n+2} x+\cos^{n+2} x=\sin^n x+\cos^n x-\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^{n-2} x+\cos^{n-2} x\right) \tag{2.50}
$$

来进行双元简化。

一般地，有 @ Polynomial 得到的如下结果：

定理 2.11. 三角高齐次式公式

$$
\int \frac{\sin^m 2x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x=
$$

$$
\frac{2^{n-1}}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\cos^{n-1-m}\left(\theta_{n,k}\right)\times\begin{cases}-\arctan\left(\sin\left(\theta_{n,k}\right)\cdot\tan 2x\right), 2\mid m\\ \arctan\left(\cot\left(\theta_{n,k}\right)\cdot\cos 2x\right), 2\nmid m\end{cases} \tag{2.51}
$$

其中 $\theta_{n,k}=\dfrac{\pi}{n}\left(k-\dfrac{1}{2}\right), m\in Z^+<2n$。

♡

2.5.3 $\sec x, \tan x$

有的时候以 $\sec x, \tan x$ 等为双元可以简化问题，更快地得出结果。

例题 2.48 求 $\int \frac{\sec^3 x + \sec x \tan^2 x}{\sqrt{\sec^4 x + \tan^4 x}} \mathrm{d}x$.

解:(By 学数垃圾) 若设

$$p = \sqrt{2} \sec x \tan x, q = \sqrt{\sec^4 x + \tan^4 x}$$

则不难得到

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^3 x + \sec x \tan^2 x}{\sqrt{\sec^4 x + \tan^4 x}} \mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\sqrt{2} \sec x \tan x + \sqrt{\sec^4 x + \tan^4 x} \right)
\end{aligned}$$

例题 2.49 求 $\int \sqrt{1 + \sec^4 x} \tan x \mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼) 若设

$$\sec x - \cos x = p, \sec x + \cos x = q, \sqrt{\sec^2 x + \frac{1}{\sec^2 x}} = r \tag{2.52}$$

则不难得到：

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1 + \sec^4 x} \tan x \mathrm{d}x &= \int \sqrt{1 + \sec^4 x} \frac{\mathrm{d}(\sec x)}{\sec x} \\
&= \int r \frac{\mathrm{d}(p+q)}{2} \\
&= \frac{1}{4}(p+q) r - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}p}{r} + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}q}{r} \\
&= \frac{1}{4}(p+q) r + \frac{1}{2} \ln \frac{q+r}{p+r} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sec^4 x} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sec^2 x + 1 + \sqrt{1 + \sec^4 x}}{\sec^2 x - 1 + \sqrt{1 + \sec^4 x}}
\end{aligned}$$

例题 2.50 求 $\int \frac{\sqrt{1 + \sec x}}{\tan x} \mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 不妨置

$$p = \sqrt{1 + \sec x}, q = \sqrt{\sec x - 1}$$

则有

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1 + \sec x}}{\tan x} \mathrm{d}x &= \int \frac{p}{pq} \frac{\mathrm{d}(p^2)}{(p^2 - 1) pq} \\
&= \int \frac{2\mathrm{d}p}{(p^2 - 2)(p^2 - 1)} = \int \frac{2\mathrm{d}p}{p^2 - 2} - \int \frac{2\mathrm{d}p}{p^2 - 1} \\
&= 2\mathrm{arth} \sqrt{1 + \sec x} - \sqrt{2} \mathrm{arth} \sqrt{\frac{1 + \sec x}{2}}
\end{aligned}$$

2.5.4 半角双元

例题 2.51 求 $\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：(By 游鹤) 若设

$$p=\sqrt{1+\sin x}, q=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}, p^2+q^2=2, \mathrm{d}p=\frac{q}{2}\mathrm{d}x \tag{2.53}$$

则不难得到：

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{p^2}{p^2+pq}\frac{2\mathrm{d}p}{q} = -2\int \frac{\mathrm{d}q}{p+q} \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}p+\mathrm{d}q}{p+q} + \int \frac{\mathrm{d}p-\mathrm{d}q}{p+q} \\ &= -\ln(p+q) + \arctan\frac{p}{q} \\ &= -\ln(1+\sin x+\cos x) + \arctan\frac{1+\sin x}{\cos x}\end{aligned}$$

其中用到了之前的齐次构型。

例题 2.52 求 $\int 2\frac{\arctan\sqrt{\sin x}}{1+\sin x} - \sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$.

解：(By 如梦令) 若设

$$p=\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}, q=\sqrt{1+\sin x}, r=\sqrt{\sin x}$$

则不难得到

$$\begin{aligned}\int 2\frac{\arctan\sqrt{\sin x}}{1+\sin x} - \sqrt{\sin x}\mathrm{d}x &= \int \left(2\frac{\arctan r}{q^2} - r\right)\frac{2\mathrm{d}q}{p} \\ &= -2\int \arctan r \mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right) - 2\int r\frac{\mathrm{d}q}{p} \\ &= -2\frac{p}{q}\arctan r + 2\int \frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}r}{q^2} - 2\int r\frac{\mathrm{d}q}{p} \\ &= -2\frac{p}{q}\arctan r + 2\int p\mathrm{d}\left(\frac{r}{q}\right) - 2\int r\frac{\mathrm{d}q}{p} \\ &= -2\frac{p}{q}\arctan r + 2\frac{pr}{q} - 2\int \frac{r}{q}\mathrm{d}p - 2\int r\frac{\mathrm{d}q}{p} \\ &= -2\frac{p}{q}\arctan r + 2\frac{pr}{q} \\ &= \frac{2\cos x}{1+\sin x}\left(\sqrt{\sin x} - \arctan\sqrt{\sin x}\right)\end{aligned}$$

2.6 复杂例子下的双元用法

下面是一些经典的例题。

例题 2.53 求 $\int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\mathrm{d}t, \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-x)^2}\mathrm{d}t, \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}, \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^2\sqrt{1-t^2}}$, 其中

$|x| < 1$.

解:(By 虚调子) 首先我们注意到恒等式:

$$\left(1-x^2\right)\left(1-t^2\right)+(t-x)^2=(xt-1)^2 \tag{2.54}$$

那么设双元:

$$p=\sqrt{1-x^2}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}, q=\frac{xt-1}{t-x}, \mathrm{d}q=\frac{1-x^2}{(t-x)^2}\mathrm{d}t$$

这样去掉根号即有

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}\mathrm{d}t&=\int\frac{1-x^2-(t-x)(t+x)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=\left(1-x^2\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}-\int\frac{t+x}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{1-x^2}\int\frac{\mathrm{d}q}{p}+\sqrt{1-t^2}-x\arctan\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\\&=\sqrt{1-x^2}\ln\frac{xt-1+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{t-x}+\sqrt{1-t^2}-x\arctan\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

然后

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-x)^2}\mathrm{d}t&=\int\frac{1-x^2-2x(t-x)-(t-x)^2}{(t-x)^2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\\&=\left(1-x^2\right)\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^2\sqrt{1-t^2}}-2x\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}-\arctan\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int(x-q)\frac{\mathrm{d}q}{p}-2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\int\frac{\mathrm{d}q}{p}-\arctan\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\\&=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{xt-1+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{t-x}-\arctan\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

剩下两个其实在前面的过程中已经算过了,

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{xt-1+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{t-x} \tag{2.55}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^2\sqrt{1-t^2}}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\frac{xt-1+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2}}{t-x}-\frac{\sqrt{1-t^2}}{(1-x^2)(t-x)} \tag{2.56}$$

例题 2.54 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin 2x)^3}$.

解:(By 风中鱼) 我们设 $p=\sin x+\cos x, q=\cos x-\sin x, r=\sqrt{2+\sin 2x}$，但是考虑到高次数，我们还要设

$$m=\frac{p}{r}, n=\frac{q}{\sqrt{3}r}, m^2+n^2=\frac{2}{3} \tag{2.57}$$

这样我们有

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin 2x)^3} &= \int \frac{\mathrm{d}p}{qr^6} = \frac{1}{9}\int \frac{\left(r^2+q^2\right)^2}{qr^6}\mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}p}{qr^2} + \frac{2}{9}\int \frac{q\mathrm{d}p}{r^4} + \frac{1}{9}\int \frac{q^3\mathrm{d}p}{r^6} \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{d}m}{\sqrt{3}n} + \frac{2}{9}\int \sqrt{3}n\mathrm{d}m + \frac{1}{9}\int \left(\sqrt{3}n\right)^3 \mathrm{d}m \\
&= \left(\frac{1}{9\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{2}{3}\right)\arctan\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{3}}{9}mn + \\
&\quad \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{4}mn^3 + \frac{3}{8}\frac{2}{3}mn + \frac{3}{8}\frac{4}{9}\arctan\frac{m}{n}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{12}\frac{p}{r}\frac{q^3}{3\sqrt{3}r^3} + \frac{7\sqrt{3}}{36}\frac{pq}{\sqrt{3}r^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\frac{\sqrt{3}p}{q} \\
&= \frac{1}{36}\frac{\cos 2x\,(1-\sin 2x)}{(2+\sin 2x)^2} + \frac{7}{36}\frac{\cos 2x}{2+\sin 2x} + \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\frac{\sqrt{3}\,(\sin x+\cos x)}{\cos x-\sin x}
\end{aligned}
$$

例题 2.55 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

解:(By 南极撸) 若设 $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$，那么 $t^2=2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$，同时 $\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$. 最后我们可以得到：

$$
\begin{cases}
x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2}{t^2}\right)=\dfrac{t^4+4}{4t^2} \\
\sqrt{x^2-1}=\dfrac{t^4-4}{4t^2}
\end{cases}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}\right)}{x+2\sqrt{x^2-1}} \\
&= \int \frac{\frac{t^4-4}{2t^2}\mathrm{d}t}{\frac{3t^4-4}{4t^2}} = 2\int \frac{t^4-4}{3t^4-4}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}t - \frac{16}{9}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{2}{3}\left[t+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}t\right)+\operatorname{arth}\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}t\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

然后回代即可。

例题 2.56 求

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^9 x+\sin^3 x} \tag{2.58}
$$

解：(By 风中鱼) 由于次数很高，所以想办法降次：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^9 x+\sin^3 x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}-\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{1+\sin^6 x} \tag{2.59}$$

前面的还是挺简单的：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} &\to \int \frac{1}{p^3}\frac{\mathrm{d}p}{q}=\int \frac{\mathrm{d}p}{pq}+\int \frac{q\mathrm{d}p}{p^3}\\ (p,q=\sin x,\cos x) &= -\frac{q}{2p^2}-\int \frac{\mathrm{d}q}{2p^2}\\ &= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{arth}(\cos x)\end{aligned}$$

重置双元：$\sec x=p,\tan x=q$，就有

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{1+\sin^6 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{p^2q^2}{p^6+q^6}\mathrm{d}p\\ &= \frac{1}{3}\left[\int \frac{p^2+q^2}{p^4-p^2q^2+q^4}\mathrm{d}p-\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2+q^2}\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[\int \frac{2p^2-1}{p^4-p^2+1}\mathrm{d}p-\int \frac{\mathrm{d}p}{2p^2-1}\right]\end{aligned}$$

再利用之前的技巧，令

$$m=p+\frac{1}{p},n=p-\frac{1}{p},l=\sqrt{p^2+\frac{1}{p^2}-1}$$

有：

$$\begin{aligned}\int \frac{2p^2-1}{p^4-p^2+1}\mathrm{d}p &= \int \frac{3\mathrm{d}m+\mathrm{d}n}{2l^2}\\ &= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}m}{m^2-3}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}n}{n^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\arctan n-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arth}\frac{m}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

总之：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^9 x+\sin^3 x} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arth}\frac{\sec^2 x+1}{\sqrt{3}\sec x}-\frac{1}{6}\arctan\left(\sec x-\frac{1}{\sec x}\right)\\ &\quad -\frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arth}\sqrt{2}\sec x-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{arth}(\cos x)\end{aligned}$$

例题 2.57 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x}$.

解：(By Mirion) 可以乘上 $\sin x\cos x$ 来化简函数名，仍然是前面的双元体系。但是因为是非齐次的，需要有不同的处理。令：

$$\sin x+\cos x,\cos x-\sin x,\sqrt{2\sin x\cos x}\to \sqrt{2}\frac{u^2-1}{u^2+1},\sqrt{2}\frac{2u}{u^2+1},\frac{\sqrt{u^4-6u^2+1}}{u^2+1} \tag{2.60}$$

则：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x}\\
=&\int \frac{\sin x\cos x\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(\sin x\cos x+1)+1}\\
=&\int \frac{\dfrac{u^4-6u^2+1}{2\left(u^2+1\right)^2}}{\sqrt{2}\dfrac{u^2-1}{u^2+1}\left(\dfrac{u^4-6u^2+1}{2\left(u^2+1\right)^2}+1\right)+1}\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{2}\dfrac{u^2-1}{u^2+1}\right)}{\sqrt{2}\dfrac{2u}{u^2+1}}\\
=&2\int \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)u^2-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}+4\right)u^4-\sqrt{2}+4}\mathrm{d}u {\color{blue}(u\in(0,1))}\\
=&\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+4}\int \frac{u^2-\left(3-2\sqrt{2}\right)}{u^4+\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}}\mathrm{d}u\\
=&\frac{3\sqrt{2}+2}{7}\int \frac{\left(3\sqrt{2}-5\right)\mathrm{d}p+\left(6-3\sqrt{2}\right)\mathrm{d}q}{u^2+\left(9-4\sqrt{2}\right)/\left(7u^2\right)}\\
=&\frac{10+14\sqrt{2}}{7}\mathrm{arth}\left[\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(u+\frac{1}{\left(9+4\sqrt{2}\right)u}\right)\right]\\
&+3\sqrt{2}\arctan\left[\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(u-\frac{1}{\left(9+4\sqrt{2}\right)u}\right)\right]
\end{aligned}
$$

最后我们考虑 u 的显化：

$$
u=\frac{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}{\cos x-\sin x} \tag{2.61}
$$

回代即可。

例题 2.58 求 $\displaystyle\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos x\sin x\mathrm{d}x\ \left(0<\alpha<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

解:(By 虚之花) 先分部一次：

$$
\begin{aligned}
\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos x\sin x\mathrm{d}x&=-\frac{1}{4}\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\mathrm{d}\left[\cos 2x\right]\\
&=-\frac{1}{4}\ldots+\frac{\tan\alpha}{4}\int \cos 2x\frac{\cot x\sec^2 x\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\\
&=-\frac{1}{4}\ldots+\frac{\tan\alpha}{4}\int \frac{\cot x-\tan x}{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

若置 $p=\tan x, q=\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}, r=\sqrt{\tan^2 x+1}$：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cot x-\tan x}{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}&\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan^2 x\right)}{\tan^2 x\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\\
&-\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan^2 x\right)}{\left(\tan^2 x+1\right)\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\\
&=\int \frac{p\mathrm{d}p}{p^2q}-2\int \frac{p\mathrm{d}p}{r^2q}=\int \frac{\mathrm{d}q}{p^2}-2\int \frac{\mathrm{d}q}{r^2}\\
&=\frac{1}{\tan\alpha}\arctan\frac{q}{\tan\alpha}-\frac{2}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\arctan\frac{q}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}
\end{aligned}
$$

回代即有：

$$\begin{aligned}\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos x\sin x\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos 2x\\ &+\frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\\ &-\frac{\tan\alpha}{2\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\arctan\frac{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\end{aligned}$$

例题 2.59 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2+1}$.

解:(By 虚调子) 设 $p=\cos x+\sin x, q=\sin x-\cos x$，那么可以适当分拆出双元积分构型：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2+1} &= \int\frac{\mathrm{d}q}{p\,(p+1-i)\,(p+1+i)}\\ &= \frac{1}{2i}\int\frac{\mathrm{d}q}{p\,(p+1-i)}-\frac{1}{2i}\int\frac{\mathrm{d}q}{p\,(p+1+i)}\\ &= \frac{1}{2i}\left(\begin{array}{l}\int\frac{(1-i)\mathrm{d}b}{(1-i)^2-2+(1-i)^2b^2}-\int\frac{\mathrm{d}q}{(1-i)^2-2+q^2}\\ -\int\frac{(1+i)\mathrm{d}b}{(1+i)^2-2+(1+i)^2b^2}+\int\frac{\mathrm{d}q}{(1+i)^2-2+q^2}\end{array}\right)\\ &= \frac{1}{2}\int\frac{2+b^2}{b^4+2b^2+2}\mathrm{d}b-2\int\frac{\mathrm{d}q}{q^4-4q^2+8}\end{aligned}$$

然后再用对勾双元解即可，其中 $b=q/p$.

$$\int\frac{2+b^2}{b^4+2b^2+2}\mathrm{d}b=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{8}}\operatorname{arth}\frac{b+\sqrt{2}/b}{\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}}+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{8}}\arctan\frac{b-\sqrt{2}/b}{\sqrt{2\left(\sqrt{2}+1\right)}}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}q}{q^4-4q^2+8}=-\frac{1}{4\sqrt{\sqrt{2}+1}}\operatorname{arth}\frac{q+2\sqrt{2}/q}{2\sqrt{\sqrt{2}+1}}+\frac{1}{4\sqrt{\sqrt{2}-1}}\arctan\frac{q-2\sqrt{2}/q}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

总之

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2+1} &= -\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{4\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{2}+1+\left(\sqrt{2}-1\right)\sin(2x)}{\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\cos(2x)}\\ &+\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}-1+\left(\sqrt{2}+1\right)\sin(2x)}{\sqrt{2\left(\sqrt{2}+1\right)}\cos(2x)}\\ &+\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{2}\operatorname{arth}\frac{1-\sin 2x+2\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}+1}\,(\sin x-\cos x)}\\ &-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}\arctan\frac{1-\sin 2x-2\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}\,(\sin x-\cos x)}\end{aligned}$$

同时可以得到一个定积分的结果

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos x+\sin x)^2+1}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\pi \tag{2.62}$$

例题 2.60 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}\ (n\in\mathbb{N}^+)$.

解:(By 虚调子) 设 $p=\sqrt{1+\sin x}, q=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$，就有 $p^2+q^2=2$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n} &= 2\int\frac{\mathrm{d}q}{p^{2n+1}}=\int\frac{(p^2+q^2)\mathrm{d}q}{2p^{2n+1}}\\ &=\int\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{2p^{2n}}\\ &=\int\frac{p^2\left(p^2+q^2\right)^{n-1}}{2^np^{2n}}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right)\\ &=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\int\binom{n-1}{k}\frac{q^{2k}}{p^{2k}}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right)\\ &=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2k+1}\frac{q^{2k+1}}{p^{2k+1}}\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\tan^{2k+1}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2^n\left(2k+1\right)}\end{aligned}$$

2.7 三角函数的复杂不定积分

如果以三角函数本身出题的话，双元可能就无法发挥功效了。双元相比三角函数表达最大的一个区别是没有倍角表示。这其实也是人为赋予的，我们有时也可以定义双元的倍角来类似操作。

2.7.1 倍角展开

对于一些简单的高次三角函数积分，是可以有相对简单的倍角表达的。首先我们考虑欧拉公式: $e^{i\theta}:=\cos\theta+i\sin\theta$ 以及

定理 2.12. De Moivre's formula

若 $z_1=r_1e^{i\theta_1}, z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$z_1z_2=\left(r_1r_2\right)e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{2.63}$$

♡

它有一个相当常用的推论:

结论 若设 $y=e^{i\theta}$，则 $2\cos\theta=y+\frac{1}{y}, 2i\sin\theta=y-\frac{1}{y}$，更进一步:

$$2\cos\left(n\theta\right)=y^n+\frac{1}{y^n}, 2i\sin\left(n\theta\right)=y^n-\frac{1}{y^n} \tag{2.64}$$

例题 2.61 求 $\int\cos^8 x\mathrm{d}x$.

解: 利用之前的推论，我们有

$$\begin{aligned}2^8\cos^8 x &= \left(y+\frac{1}{y}\right)^8 \\ &= \left(y^8+\frac{1}{y^8}\right)+8\left(y^6+\frac{1}{y^6}\right)+28\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+56\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+70 \\ &= 2\cos 8x+16\cos 6x+56\cos 4x+112\cos 2x+70\end{aligned}$$

因此我们可以有：

$$\begin{aligned}\int\cos^8 x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^7}\int(\cos 8x+8\cos 6x+28\cos 4x+56\cos 2x+35)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^7}\left(\frac{\sin 8x}{8}+\frac{4\sin 6x}{3}+7\sin 4x+28\sin 2x+35x\right)\end{aligned}$$

更一般地，我们有一些相关的恒等式：

$$\cos^n x=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\cos\left[(n-2k)\,x\right] \tag{2.65}$$

$$\sin^n x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+k}}{2^n}\binom{n}{k}\cos\left[(n-2k)\,x+\frac{\pi}{2}n\right] \tag{2.66}$$

例题 2.62 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x+4}$.

解: 化半角：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x+4} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+8\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \int\frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{3\tan\frac{x}{2}+4}=\frac{1}{3}\ln\left(3\tan\frac{x}{2}+4\right)\end{aligned}$$

例题 2.63 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

解:(By 学数垃圾) 利用倍角公式：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\,(1+\cos x)} \\ &= \int\frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos^3\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{8\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

2.7.2 和差化积

对于不同倍角之间，还有变换公式。

定理 2.13. 和差化积公式

- $\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

♡

同样的，这里还有积化和差公式。

定理 2.14. 积化和差公式

- $\sin x\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$
- $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

♡

这里给出一些例题：

例题 2.64 求 $\int \sin x\sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x$.

解：利用积化和差公式可以将三角的积变成三角的和。

$$\begin{aligned}\int \sin x\sin 3x\sin 5x\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{2}\sin 5x\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\int \sin 7x + \sin 3x - \sin 9x - \sin x\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 9x}{9} - \cos x\right)\end{aligned}$$

例题 2.65 求 $\int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$.

解：思路是递推，若记 $I_n = \int \frac{\sin(nx)}{\sin x}\mathrm{d}x$, 我们有

$$I_n - I_{n-2} = \int 2\cos(n-1)x\mathrm{d}x = 2\frac{\sin(n-1)x}{n-1}$$

于是不难得到：

$$I_{2n} = I_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin nx}{n} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin nx}{n} \tag{2.67}$$

$$I_{2n+1} = I_1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(n+1)x}{n+1} = x + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(n+1)x}{n+1} \tag{2.68}$$

例题 2.66 求 $\int \cot(x-a)\cot(x-b)\mathrm{d}x$.

解:(By Polynomial) 注意到

$$\cot(a-b)=\frac{1+\cot(x-a)\cot(x-b)}{\cot(x-a)-\cot(x-b)}$$

于是不难得到

$$\begin{aligned}&\int\cot(x-a)\cot(x-b)\,\mathrm{d}x\\=&\int\cot(a-b)\left(\cot(x-a)-\cot(x-b)\right)-1\mathrm{d}x\\=&\cot(a-b)\ln\frac{\sin(a-x)}{\sin(b-x)}-x\end{aligned}$$

例题 2.67 求 $\displaystyle\int\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)}\mathrm{d}x$.

解:(By 陌忆) 不难注意到:

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)}\mathrm{d}x&=\int\frac{\cos 2x\cos x}{\cos 3x\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\frac{\cos(3x)+\cos x}{\cos(3x)\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int\sec x+\sec 3x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\ln\left[(\sec x+\tan x)^3(\sec 3x+\tan 3x)\right]\end{aligned}$$

2.7.3 朗斯基行列式

方法也并不是固定的，还可以联系上朗斯基行列式。所谓朗斯基行列式，就是

$$W(p,q)=\begin{vmatrix}p&q\\p'&q'\end{vmatrix}\tag{2.69}$$

这种形式将会带来特殊的关系。

例题 2.68 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解:(By 虚调子) 注意到 $\sin(x+a),\sin(x+b)$ 都是

$$y''+y=0$$

的解，那么它们的朗斯基行列式为常数，也即

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}&=\frac{1}{\sin(b-a)}\int\frac{\sin(b-a)}{\sin(a+x)\sin(b+x)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\sin(b-a)}\int\frac{\mathrm{d}(\sin(a+x))}{\sin(a+x)}-\frac{\mathrm{d}(\sin(b+x))}{\sin(b+x)}\\&=\frac{1}{\sin(b-a)}\ln\left|\frac{\sin(a+x)}{\sin(b+x)}\right|\end{aligned}$$

例题 2.69 求 $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 考虑朗斯基行列式，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''(x) & g''(x) \\ f(x) & g(x) \end{vmatrix} \tag{2.70}$$

如果我们这里 $f''(x) = mf(x), g''(x) = ng(x)$, 那么能将行列式化为一个简单式子。对于本题，即

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} (e^{ax})' & (\sin bx)' \\ e^{ax} & \sin bx \end{vmatrix} \tag{2.71}$$

以及更一般地，

$$\int e^{ax+b}\sin(ux+v)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+u^2}\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{ax+b}\right) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(ux+v)) \\ e^{ax+b} & \sin(ux+v) \end{vmatrix} \tag{2.72}$$

第三章 单元积分之路

这里的单元与之前的双元对应，并不是 unit 的意思。而是另外一种特殊的“双元”。

最开始的灵感来源于三角函数的万能公式，是在利用双元法解题时的一小撮" 另类"。知友 @ 鸽姬布的回答提示了单元法仍有一定的高妙之处，而不只是对应于半角换元。然后在 2022 年间逐渐完善了 $pq = C$ 型的双元体系，由于往往不太需要同时对两者进行积分，也就是说没有双元第一公式这样的双元复杂性，所以归类为“单元”。这部分联系了过时的“万能换元法”、“欧拉换元法”等，是它们在双元体系下的更优雅的推广。

在了解其基础后，我们可以更完备的开发。在 2022 年末，知乎的 @ 无理函数君 思路放在处理指数函数类不定积分上，使得在计算此类不定积分上有不需要过多技巧的方案。

目前仍在开发中 (2023.3)。

3.1 双元化单元

在双元法里，我们常常会考虑：$x^2 + y^2 = 1$ 这种情形。因为这使得

$$\int y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \int \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} \to \arctan \frac{x}{y}$$

但是这并不是唯一的情形！比如当 x, y 满足 $xy = 1$ 时，

$$\int y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = \int \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln \frac{x}{y} \tag{3.1}$$

也是可以积出来的。

那么我们可以来研究 $pq = C$ 的双元 p, q，微分关系将与二次双元不相同：

$$p\mathrm{d}q + q\mathrm{d}p = 0 \tag{3.2}$$

值得一提的是二次双元与这类**定积双元**是很容易互相转化的，换句话说两者本质上是一回事，在求解不定积分上各有各的方便之处。

$$p^2 - q^2 = C \to (p + q)(p - q) = C \tag{3.3}$$

如果是实圆的话将带虚数。

例题 3.1 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1 + x}}$.

解: 不妨设

$$p = \sqrt{x} + \sqrt{1 + x}, q = \sqrt{1 + x} - \sqrt{x}, pq = 1 \tag{3.4}$$

这样可以将原题可以去掉根号：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}&=\int\frac{1}{1+p}\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}(p-q)^2\right)\\&=\frac{1}{2}\int\frac{p\mathrm{d}p}{1+p}+\frac{1}{2}\int\frac{q^2\mathrm{d}q}{1+q}\\&=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\ln(p+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}q^2-q\right)+\frac{1}{2}\ln(1+q)\\&=\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

例题 3.2 求 $\int\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼) 往往我们不需要写出双元，一般竞赛题 (对, 这种题已经只会在竞赛出现了) 会采用如下写法：若设 $t=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, 则有 $t^2-\dfrac{1}{t^2}=2x$，于是题目结构已经解析完毕。

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)\\&=\int t\left(t+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{t}\end{aligned}$$

例题 3.3 求 $\int\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{x+2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼) 若设

$$p=x+\sqrt{x^2+1},q=\sqrt{x^2+1}-x,pq=1$$

则我们能转化原题，

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{x+2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{\sqrt{p}}{3p+q}\mathrm{d}(p-q)\\&=\int\frac{p\sqrt{p}}{3p^2+1}\mathrm{d}p-\int\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{q}(3+q^2)}\\&=2\left(\int\frac{m^4}{3m^4+1}\mathrm{d}m-\int\frac{\mathrm{d}n}{3+n^4}\right)\end{aligned}$$

其中 m,n 分别为 $\sqrt{p},\sqrt{q}$. 后面的过程这里省略，具体可以参见“有理积分之根”部分。

例题 3.4 求 $\int\dfrac{\sec^2x\mathrm{d}x}{(\sec x+\tan x)^n}$.

解: 若设 $t=\sec x+\tan x$，则 $\frac{1}{t}=\sec x-\tan x$，于是我们有：

$$\begin{cases}\sec x=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\\ \mathrm{d}t=t\sec x\mathrm{d}x\end{cases}$$

带入：

$$\begin{aligned}\int\frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{(\sec x+\tan x)^n}&=\int\frac{1}{t^n}\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^n}+\frac{1}{t^{n+2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{1-n}}{1-n}-\frac{t^{-1-n}}{1+n}\right)\end{aligned}$$

另外，对于 $n=\pm1$，其相应的奇点部分取 $\ln x$ 形式即可。

3.2 多重根号杂例

众所周知 (?)，MMA 对于处理根号很苦手，以至于某些简单的多重根号不定积分被萌新误认为是非初等的，这里举一些常见的例子帮助分析问题。

例题 3.5 求 $\displaystyle\int\sqrt{1+(1+x^2)^{-1}+\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{-2}}\mathrm{d}x$

解:(By 风中鱼) 不难发现

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+(1+x^2)^{-1}+\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^{-2}}\mathrm{d}x&=\int 1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\&=x-\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\end{aligned}$$

例题 3.6 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x\sqrt{1-x^2}}}$.

解:(By Polynomial) 若设

$$p=x+\sqrt{1-x^2},q=x-\sqrt{1-x^2},r=\sqrt{2+2x\sqrt{1-x^2}}$$

则不难得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x\sqrt{1-x^2}}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left(p+q\right)}{r}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{q}{r}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(r+p\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2+2x\sqrt{1-x^2}}}+\ln\left(\sqrt{2+2x\sqrt{1-x^2}}+x+\sqrt{1-x^2}\right)\right)\end{aligned}$$

例题 3.7 求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 若设

$$p,q=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}\pm\sqrt{\sqrt{1+x^4}-1}}{\sqrt{2}x},r=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\tag{3.5}$$

那么有

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \int \frac{p+q}{\sqrt{2}}\frac{1}{r^4}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(pq\right) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\left(q^2+2\right)\mathrm{d}q}{\left(q^2+1\right)^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\left(p^2-2\right)\mathrm{d}p}{\left(p^2-1\right)^2} \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{q}{1+q^2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\arctan q + \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{p}{1-p^2} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\mathrm{arth}p \\
&= \frac{3}{4\sqrt{2}}\mathrm{arth}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^4}+x^2}}{x}\right) - \frac{x\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}}{4\sqrt{1+x^4}} \\
&\quad - \frac{3}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^4}-x^2}}{x}\right)
\end{aligned}$$

例题 3.8 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^4}}}$.

解:(By Polynomial) 我们设

$$p,q=\sqrt{x}\pm\frac{1}{\sqrt{x}};r,s=\sqrt{x+\frac{1}{x}\pm\sqrt{2}} \tag{3.6}$$

这样我们可以凑出来

$$\frac{r+s}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^4}}}{\sqrt{x}} \tag{3.7}$$

带入即有

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{1+x^4}}} = \int \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}x}{\left(r+s\right)\sqrt{x}} &= \frac{1}{2}\int \left(s-r\right)\mathrm{d}\left(p+q\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(s-r\right)\left(p+q\right) + \frac{2+\sqrt{2}}{4}\ln\left[\left(s+q\right)\left(p+r\right)\right] \\
&\quad - \frac{2-\sqrt{2}}{4}\ln\left[\left(s+p\right)\left(r+q\right)\right]
\end{aligned}$$

回代的结果这里就省略了。

例题 3.9 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}}}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解:(By Polynomial) 设

$$b=\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}}}$$

于是不难得到

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}}}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int \frac{4\mathrm{d}b}{1+b^4}$$

$$=\sqrt{2}\arctan\left(1+\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}}}\right)$$

$$-\sqrt{2}\arctan\left(1-\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}}}\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}+x^2+\sqrt{2}x\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}}}{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}+x^2-\sqrt{2}x\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}+\sqrt{2}\sqrt{1+x^4+\sqrt{1+x^4}}}}$$

例题 3.10 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^4+\sqrt{1+x^4}+2\sqrt{x^4-1+\sqrt{(x^8-1)(x^4-1)}}}}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

解:(By Mirion) 裂项：若设

$$t=\frac{x}{\sqrt{x^4-1}},s=\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}}$$

则

$$\int \frac{\sqrt{x^4+\sqrt{1+x^4}+2\sqrt{x^4-1+\sqrt{(x^8-1)(x^4-1)}}}}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^4+1}\mathrm{d}x+\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4}\mathrm{d}x$$

$$=-\int \frac{\mathrm{d}t}{4t^4+1}+2\int \frac{\mathrm{d}s}{1+s^4}$$

后略。

例题 3.11 求 $\displaystyle\int \sqrt{2+\cos x+\sqrt{5+4\cos x}}\mathrm{d}x.$

解:(By 魏念辉) 不难注意到：

$$\int \sqrt{2+\cos x+\sqrt{5+4\cos x}}\mathrm{d}x=\int \frac{\sin x}{\sqrt{\sqrt{5+4\cos x}-2-\cos x}}\mathrm{d}x$$

$$\left(t=\sqrt{5+4\cos x}\right)=\int \frac{-t\mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$$

$$=\sqrt{-t^2+4t-3}-2\arctan\frac{t-2}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$$

$$=\frac{2\sin x}{\sqrt{2+\cos x+\sqrt{5+4\cos x}}}$$

$$-2\operatorname{sgn}(\sin x)\arcsin\left(\sqrt{5+4\cos x}-2\right)$$

再进行连续修正即可。

3.3 指数类的单元法

思路一般是这样，我们关于指数类的不定积分，$\int e^{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x$ 里面的因子 $e^{f(x)}$ 是在不定积分的运算前后都不会消失，这引导我们关注该因子。不妨设为双元之一。而另一个双元也是“不会消失”的，这样我们可以用双元来表示整个完整过程。出于简单考虑，可以设 x 为另一个双元 (@ 无理函数君)，重心偏向于指数单元。这里在此基础上参考了 @ 初于冬雪在 2023 年初的一部分思路，做了进一步开发。

例题 3.12 求 $\displaystyle\int x^2\exp\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\mathrm{d}x.$

解:(百合) 我们首先能关注到 $o=\exp\left(\frac{x^2}{2}-x\right)$ 的因子。然后默认另一个元是 x，两者的微分关系是：

$$\frac{\mathrm{d}o}{o}=(x-1)\,\mathrm{d}x$$

然后是将原来的积分换元：

$$\begin{aligned}\int x^2\exp\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\mathrm{d}x&=\int x^2o\mathrm{d}x\\&=\int o(x-1)(x+1)\,\mathrm{d}x+\int o\mathrm{d}x\\&=\int(x+1)\,o\frac{\mathrm{d}o}{o}+\int o\mathrm{d}x\\&=(x+1)\,o\\&=(x+1)\exp\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\end{aligned}$$

例题 3.13 求 $\displaystyle\int e^{\sin x}\left(\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x.$

解: 我们首先能关注到 $o=e^{\sin x}$ 的因子，除此之外还有一个分母的极点需要保留，也即 $p=\dfrac{e^{\sin x}}{\cos x}$ 也一定是存在的。他们之间的微分关系如下：

$$\frac{\mathrm{d}o}{o}=\cos x\mathrm{d}x=\frac{o}{p}\mathrm{d}x,\ \frac{\mathrm{d}p}{p}=\left(\cos x+\frac{\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

然后我们将原来的一元积分往已设置的双元换元：

$$\begin{aligned}\int e^{\sin x}\left(\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x&=\int xe^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x-\int e^{\sin x}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\\&=\int xo\frac{\mathrm{d}o}{o}-\int p\left(\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}o}{o}\right)\\&=xo-\int op\frac{\mathrm{d}o}{o^2}-p+\int p\frac{\mathrm{d}o}{o}\\&=xo-p\\&=e^{\sin x}\left(x-\frac{1}{\cos x}\right)\end{aligned}$$

例题 3.14 求 $\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

解: (By 风中鱼) 有了前面的经验，我们除了关心 $o=e^{x+\frac{1}{x}}$ 外，还需要注意到 $1/x$ 的极点，这将来自于 $p=xe^{x+\frac{1}{x}}$, 他们的微分关系是

$$\frac{\mathrm{d}o}{o}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x,\frac{\mathrm{d}p}{p}=\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

于是

$$\begin{aligned}\int\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x&=\int xo\frac{\mathrm{d}p}{p}\\&=\int\mathrm{d}p=p\\&=xe^{x+\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

例题 3.15 求 .

第四章 含参积分和复变技巧

4.1 莱布尼兹公式

莱布尼兹公式是用来求两个函数积的 n 阶导。

定理 4.1. 莱布尼兹公式

对于足够光滑的 $u(x), v(x)$，

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)} \tag{4.1}$$

下面是一些常见的 n 阶导：

- $[\ln(1 \pm x)]^{(n)} = (\mp 1)^n \dfrac{-(n-1)!}{(1 \pm x)^n}$
- $\left(\dfrac{1}{a \pm x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!\,(\mp 1)^n}{(a \pm x)^{n+1}}$
- $[\sin x]^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2} n\right)$
- $\left[\sin^2 x\right]^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2} n\right)$
- $[\arctan x]^{(n)} = \dfrac{(-)^{n+1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \arctan \dfrac{1}{x}\right)$
- $\left[\dfrac{\ln x}{x}\right]^{(n)} = \dfrac{(-)^{n+1} n!}{x^{n+1}} (H_n - \ln x)$
- $[e^{ax} \sin bx]^{(n)} = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin\left(bx + n \arctan \dfrac{b}{a}\right)$

证明过程略。

4.2 简单的含参积分

如果被积函数内部有明显的微分关系，可以直接套公式解决。

例题 4.1 求 $\displaystyle\int x^m \ln^n x \mathrm{d}x$.

解:(By 虚调子) 简单地，我们有

$$\int x^m \mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \tag{4.2}$$

两边对 m 求 n 阶导，并用莱布尼兹公式就有：

$$\int x^m \ln^n x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,(-1)^k x^{m+1} \ln^{n-k} x}{(n-k)!\,(m+1)^{k+1}} \tag{4.3}$$

显然地，这里要求 $m \neq -1$，对于这种特殊情况，有：

$$\int \frac{\ln^n x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} \tag{4.4}$$

更多例题可以参考 (2020)https://zhuanlan.zhihu.com/p/114713997.

4.3 含参构造

在一些没有参数的不定积分里，也可以加入参数来简化计算。

例题 4.2 求 $\int \arcsin^n x\mathrm{d}x$.

先去掉反函数名, 令 $t=\arcsin x$：$\int \arcsin^n x\mathrm{d}x=\int t^n\cos t\mathrm{d}t$，构造含参不定积分：

$$\int \cos at\mathrm{d}t=\frac{\sin at}{a} \tag{4.5}$$

$$\int t\cos at\mathrm{d}t=\frac{at\sin at-\cos at}{a^2} \tag{4.6}$$

公式4.5 两边对 a 求导，就有：

$$\int t^{2n}(-)^n\cos(at)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}t^{2n-k}(-)^n\sin\left(at-k\frac{\pi}{2}\right)\frac{(-)^k k!}{a^{k+1}}$$

略微化简就有：

$$\int t^{2n}\cos(at)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!\,(-)^k}{(2n-k)!}\frac{t^{2n-k}}{a^{k+1}}\sin\left(at-k\frac{\pi}{2}\right) \tag{4.7}$$

利用公式4.6, 同理我们有：

$$\int t^{2n+1}\cos(at)\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!\,(-)^k}{(2n-k)!}\frac{t^{2n-k}}{a^{k+1}}\times\left[t\sin\left(at-k\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(at-k\frac{\pi}{2}\right)\frac{k+1}{a}\right]$$

最后令 $a=1$，

$$\int t^n\cos t\mathrm{d}t=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(-)^k}{(n-k)!}t^{n-k}\sin\left(t-k\frac{\pi}{2}\right), n|2\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(-)^k}{(n-k)!}t^{n-k}\begin{bmatrix}t\sin\left(t-k\frac{\pi}{2}\right)\\-(k+1)\cos\left(t-k\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}, n\nmid 2\end{cases} \tag{4.8}$$

以及：

$$\int \arcsin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(-)^k}{(n-k)!}\arcsin^{n-k}x\sin\left(\arcsin x-k\frac{\pi}{2}\right), n|2\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(-)^k}{(n-k)!}\arcsin^{n-k}x\begin{bmatrix}\arcsin x\sin\left(\arcsin x-k\frac{\pi}{2}\right)\\-(k+1)\cos\left(\arcsin x-k\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}, n\nmid 2\end{cases} \tag{4.9}$$

当然，这里其实并不需要分类讨论，

$$\int \arcsin^n x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k n!}{(n-k)!} \arcsin^{n-k} x \sin\left(\arcsin x - k\frac{\pi}{2}\right) \tag{4.10}$$

化简过程留给有兴趣的读者。另附一个类似的结论：

结论

$$\int x^n \sin x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} k! x^{n-k} \cos\left(\frac{k\pi}{2} - x\right) \tag{4.11}$$

例题 4.3 (From Mirion) 求 $\int \ln(\sin x) \ln(\cos x) \sin 4x \mathrm{d}x$.

解:(By Polynomial) 我们首先来看两个含参不定积分：

$$S(\nu) = \int \sin^\nu x \cos x \cos(2x) \mathrm{d}x,\ C(\nu) = \int \sin x \cos^\nu x \cos(2x) \mathrm{d}x \tag{4.12}$$

其实可以简单计算出来,

$$S(\nu) = \left(\cos 2x + \frac{2}{1+\nu}\right) \frac{\sin^{\nu+1}}{3+\nu} \tag{4.13}$$

$$C(\nu) = \left(\frac{2}{\nu+1} - \cos 2x\right) \frac{\cos^{\nu+1}}{\nu+3} \tag{4.14}$$

于是

$$\begin{aligned}
\int \ln(\sin x) \ln(\cos x) \sin 4x \mathrm{d}x &= \int \sin 2x \cos 2x \left[\ln^2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) - \ln^2 \sin x - \ln^2 \cos x\right] \mathrm{d}x \\
&= 2\int \frac{\sin 2x}{2} \ln^2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \mathrm{d}x - S''(1) - C''(1) \\
&= \frac{1}{16}\sin^2 2x - \frac{1}{8}\sin^2 2x \ln\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin^2 x \ln(\sin x) \\
&+ \frac{1}{2}\cos^2 x \ln(\cos x) + \frac{1}{2}\sin^2 2x \ln(\sin x) \ln(\cos x)
\end{aligned}$$

4.4 复变技巧

本节将会提到一类不定积分中行之有效的技巧，来源于不定积分的数域可以定义在复数域中，取实部虚部这类操作与积分微分结构互不影响。

例题 4.4 求 $\int e^{\cos x} \cos(x + \sin x + 2022) \mathrm{d}x$.

解:(By 虚之花) 我们把 $\cos x$ 复化:

$$\begin{aligned}\int e^{\cos x}\cos\left(x+\sin x+2022\right)\mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\int \exp\left\{\cos x+i\left(x+\sin x+2022\right)\right\}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{Re}\int \exp\left\{e^{ix}+ix+2022i\right\}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\int \exp\left\{e^{ix}+2022i\right\}\mathrm{d}\left(e^{ix}\right)\right]\\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{i}\exp\left\{e^{ix}+2022i\right\}\right]=\mathrm{Im}\left[\exp\left\{e^{ix}+2022i\right\}\right]\\ &= e^{\cos x}\sin\left(\sin x+2022\right)\end{aligned}$$

例题 4.5 求 $\int x^2e^x\sin x\mathrm{d}x$.

解: 我们将 $\sin x$ 复化，然后利用上面的含参构造，可以得到:

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\sin x\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\int x^2e^{(1+i)x}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{Im}\int\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}e^{ax}\right]|_{a=1+i}\,\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{Im}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\frac{e^{ax}}{a}=\mathrm{Im}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(e^{ax}\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a^2}\right)\right)|_{a=1+i}\\ &= \mathrm{Im}\left(e^{ax}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{2x}{a^2}+\frac{2}{a^3}\right)\right)|_{a=1+i}\\ &= \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\left(-\frac{1+i}{2}+ix+\frac{1-i}{2}x^2\right)\right)\\ &= e^x\cos x\left(-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2\right)+e^x\sin x\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2\right)\end{aligned}$$

第五章 有理积分之根

对于大多数有理的不定积分，利用双元法或者单元法都会有一种窒息的感觉，似乎无从下手。这是由于有理积分和前两者不在同一个维度！

和双元有一些联系的是 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$。如果我们升级一下，考虑 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$. 会怎么样呢？

例 5.1 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

解： 求解是容易的，

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} &= \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-x+1\right)-x^2+(x+1)}{1+x^3}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^3\right)}{1+x^3} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln \frac{1+x}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

可以看到，我们使用了立方和公式。但其实没有什么新的函数产生，仍然是初等的 (反正切函数和对数函数)。

这里为了更一般化，我们定义：

定义 5.1. ℧ 函数

$$\mho_{m,n}^{\pm}(x) = \int \frac{x^{m-1}}{1 \pm x^n}\mathrm{d}x$$

♣

一般会适当简写，$\mho_n^{\pm}(x) \equiv \int \frac{\mathrm{d}x}{1 \pm x^n}$，之前求的就是 $\mho_3^{+}(x)$[1]。

下面将证明形如 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$ $(n \in N*)$ 的不定积分均有初等函数表达，也即 $\mho_{m,n}^{\pm}(x)$ 是初等函数。

5.1 ℧ 函数的通式

这里我们考虑 $m < n$，也即是真分式的情形。先看偶数的情形，我们注意到：

$$x^{2n}-1 = \prod_{k=1}^{2n}\left(x - e^{\frac{k\pi i}{n}}\right) \tag{5.1}$$

$$x^{2n}+1 = \prod_{k=1}^{2n}\left(x - e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}}\right) \tag{5.2}$$

[1]这里的函数是笔者定义的，并没有广泛地得到数学界的承认，也未在教材上出现，但是为方便交流，定义这个符号是有必要的，将在后文的伪椭圆积分上有所体现。

故不难得到

$$
\begin{aligned}
\frac{x^{m-1}}{1-x^{2n}} &= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{e^{\frac{km\pi i}{n}}}{x-e^{\frac{k\pi i}{n}}} \\
&= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{e^{\frac{km\pi i}{n}}}{x-e^{\frac{k\pi i}{n}}}+\frac{e^{\frac{(2n-k)m\pi i}{n}}}{x-e^{\frac{(2n-k)\pi i}{n}}}\right)+\frac{1}{2n}\frac{(-1)^{m+1}}{x+1}+\frac{1}{2n}\frac{1}{1-x} \\
&= \frac{1}{2n}\frac{(-1)^{m+1}}{x+1}+\frac{1}{2n}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}mx-\cos\frac{k\pi}{n}(m-1)}{x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1}
\end{aligned}
$$

与

$$
\begin{aligned}
\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}(m-2n)}}{x-e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}m}}{x-e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}}} \\
&= -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}m}}{x-e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n}}}+\frac{e^{\frac{(2(2n+1-k)-1)\pi i}{2n}m}}{x-e^{\frac{(2(2n+1-k)-1)\pi i}{2n}}}\right) \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x\cos m\frac{2k-1}{2n}\pi-\cos\frac{2k-1}{2n}(m-1)\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}
\end{aligned}
$$

然后对其不定积分即可。

$$
\begin{aligned}
\mho^{-}_{m,2n} &= \int\frac{x^{m-1}}{1-x^{2n}}\mathrm{d}x \\
&= \int\frac{1}{2n}\frac{(-1)^{m+1}}{x+1}+\frac{1}{2n}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}mx-\cos\frac{k\pi}{n}(m-1)}{x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^{m+1}\ln(x+1)-\ln(1-x)}{2n}-\frac{1}{2n}\int\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}m\frac{2x-2\cos\frac{k\pi}{n}}{x^2-2\cos\frac{k\pi}{n}x+1}\mathrm{d}x \\
&+\frac{1}{n}\int\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}m\sin\frac{k\pi}{n}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\cos\frac{k\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{k\pi}{n}} \\
&= \frac{(-1)^{m+1}\ln(x+1)-\ln(1-x)}{2n}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{mk\pi}{n}\arctan\frac{x-\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} \\
&-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{mk\pi}{n}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
Ʊ^{+}_{m,2n} &= \int \frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{n}\int \sum_{k=1}^{n} \frac{x\cos\frac{2k-1}{2n}m\pi - \cos\frac{2k-1}{2n}(m-1)\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2n}\int \cos m\frac{2k-1}{2n}\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}\mathrm{d}x \\
&+\frac{1}{n}\int \sin\frac{2k-1}{2n}m\pi\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sin\frac{2k-1}{2n}m\pi\arctan\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}} \\
&-\frac{1}{2n}\cos\frac{2k-1}{2n}m\pi\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

下面来看奇数的情形。我们注意到：

$$
1-x^{2n+1}=(1-x)\prod_{k=1}^{2n}\left(x-e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}\right) \tag{5.5}
$$

故不难得到

$$
\begin{aligned}
\frac{x^{m-1}}{1-x^{2n+1}} &= \frac{1}{2n+1}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}m}}{x-e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}} \\
&= \frac{1}{2n+1}\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}m}}{x-e^{\frac{2k\pi i}{2n+1}}}+\frac{e^{\frac{2(2n+1-k)\pi i}{2n+1}m}}{x-e^{\frac{2(2n+1-k)\pi i}{2n+1}}}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1}\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{2km\pi}{2n+1}x-\cos\frac{2k(m-1)\pi}{2n+1}}{x^2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}x+1}
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

然后求不定积分就是

$$
\begin{aligned}
Ʊ^{-}_{m,2n+1} &= \int\frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{1-x^{2n+1}} \\
&= \int\frac{1}{2n+1}\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{2km\pi}{2n+1}x-\cos\frac{2k(m-1)\pi}{2n+1}}{x^2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}x+1}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2n+1}\ln(1-x)-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2km\pi}{2n+1}\int\frac{2x-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}}{x^2-2\cos\frac{2k\pi}{2n+1}x+1}\mathrm{d}x \\
&+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2km\pi}{2n+1}\sin\frac{2k\pi}{2n+1}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\right)^2+\sin\frac{2k\pi}{2n+1}} \\
&= -\frac{1}{2n+1}\ln(1-x)-\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2km\pi}{2n+1}\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right) \\
&+\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2km\pi}{2n+1}\arctan\frac{x-\cos\frac{2k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{2k\pi}{2n+1}}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

我们做变换 $x \to -x$，可以简单地得到

$$\begin{aligned}\mho_{m,2n+1}^{+} &= \int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{1+x^{2n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\ln(1+x) + \frac{(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2km\pi}{2n+1}\ln\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right) \\ &+ \frac{2(-1)^{m+1}}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2km\pi}{2n+1}\arctan\frac{x+\cos\frac{2k\pi}{2n+1}}{\sin\frac{2k\pi}{2n+1}}\end{aligned} \tag{5.8}$$

(注：在这个式子里，带入 $m=1, n=2$, 就可以得到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^5}$ 的结果)

如果 $m>n$，那么可以按次数将假分式拆成真分式。至此我们得到 Ʊ 函数是可计算的，而且是初等的。

5.2 Ʊ 函数的性质

在形式表示时，我们可以通过函数的性质进行简化计算。

1. 因数分解。如果 m, n 有公因子，那么可以将形式降次。证明是平凡的。

$$\mho_{Nm,Nn}^{\pm}(x) = \mho_{m,n}^{\pm}\left(x^N\right) \tag{5.9}$$

5.3 高次双元

5.3.1 高次双元的基本公式

相较于之前的二次双元，我们可以将原来的适当推广，也顺便给出原来的定理的推广：

定理 5.1. 高次双元定理

高 (n) 次双元，也即满足 $x^n \pm y^n = C$, 我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y} = \mho_n^{\pm}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{5.10}$$

$$\int f(x,y)\frac{y^n \pm mx^n}{y^n}\frac{\mathrm{d}x}{y^m} = \int f(x,y)\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{y^m}\right) \tag{5.11}$$

$$\int f(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{y^{1+n}} = \frac{1}{y^n \pm x^n}\int f(x,y)\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{5.12}$$

第三个式子可以看成第二个式子的特殊情况。本质上是二次双元两个公式的推广。♡

证明 证明参考后文，暂略，留作补充。

同时我们有一个非常重要的定理：

定理 5.2. 契比雪夫双元判定定理

高 (n) 次双元，也即满足 $x^n \pm y^n = C$, 我们有

$$\int x^a \mathrm{d}\left(y^b\right)$$

是初等的当且仅当 $a, b, a+b$ 其中至少一个数整除 n. 这表明高次双元的积分不再像二次双元在每一个整点都是初等的了。♡

例题 5.1 求 $\displaystyle\int \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

解: 设 $y=\sqrt[4]{1-x^4}$，则有 $y^3\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}x=0$. 则：

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{2x^4+y^4}{y^6}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{y^3\left(-2x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x\right)}{y^6} \\
&= \int \frac{y^2\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y}{y^4} = \int \mathrm{d}\left(\frac{x}{y^2}\right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}
\end{aligned}$$

可以看成第二个公式的一个简略证明。

例题 5.2 求 $\displaystyle\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{(1+x^4)^3}$.

解:(By 虚调子) 我们可以利用含参构造解决：

例题 5.3 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 设 $p=\sqrt[4]{x}, q=\sqrt[4]{1-x}, r=\sqrt[4]{1+x}$, 则有：

$$\frac{\mathrm{d}p}{q^3}=\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{q^4+p^4}=q^2\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right)$$

, 于是可以简化结构：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x &= \int \frac{4p^4q^3\mathrm{d}p}{r^{12}} \\
&= 4\int \frac{p^4q^4}{r^{12}}\frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= 4\int \frac{p^4q^8}{r^{12}}\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right) = 4\int \frac{b^4\mathrm{d}b}{(1+2b^4)^3}
\end{aligned}$$

其中 $b=\frac{p}{q}$，利用前一例题的结论即可。

5.3.2 高次双元的降次

本节对应二次双元里面介绍过的点火公式. 我们如果考虑高次双元 $y^n \pm x^n = C$, 那么

$$\begin{aligned}\int y^m \mathrm{d}x &= y^m x - \frac{1}{m}\int y^{m-1} x \mathrm{d}y \\ &= y^m x - \frac{1}{m}\int y^{m-n} x y^{n-1} \mathrm{d}y \\ &= y^m x \pm \frac{1}{m}\int y^{m-n} x^n \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{m+1} y^m x + \frac{1}{m+1}\left(y^n \pm x^n\right)\int y^{m-n} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

还可以发现如果令 $n=2$ 就可以退化到二次双元，可以说是二次双元的一个推广。

结论

$$\int y^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} y^m x + \frac{1}{m+1}\left(y^n \pm x^n\right)\int y^{m-n} \mathrm{d}x \tag{5.13}$$

例题 5.4 求 $\int \left(x^6+x^3\right)\sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^2}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 我们只需置 $y=\sqrt[3]{x^3+2}$, 然后

$$\begin{aligned}\int \left(x^6+x^3\right)\sqrt[3]{\left(x^3+2\right)^2}\mathrm{d}x &= \int x^3\left(x^3+1\right) y^2 \mathrm{d}x \\ &= \int y^8 - 3y^5 + 2y^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{9} y^8 x + \int \left(-\frac{25}{9}\right) y^5 + 2y^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{9} y^8 x - \frac{25}{54} y^5 x + \frac{29}{27}\int y^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{9} y^8 x - \frac{25}{54} y^5 x + \frac{29}{81} y^2 x + \frac{58}{81}\mho_3^-\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

注：我们还有一个类似的结论。

结论

$$\int \left(x^6+x^3\right)\sqrt[3]{x^3+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{8} x^4\left(x^3+2\right)\sqrt[3]{x^3+2} \tag{5.14}$$

5.4 一般的有理积分

除了上面讲到的属于 ℧ 函数的简单情形，我们还需要考虑一般的多项式。这里不再考虑已经淘汰的“待定系数法”，而是讲解目前不定积分大佬选择的“留数法”和“模法”。

5.4.1 留数法

似乎在 2015 年或者更早的数学贴吧看见过，应该算是比较经典的。

例题 5.5 求 $\int \frac{x^m}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}\mathrm{d}x$，假设 $0<m<n$，且 x_k 互不相等。

解:(By 风中鱼) 我们可以利用留数法来求各部分的系数：

$$\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \int \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x-x_k}\mathrm{d}x \tag{5.15}$$

两边分别取对应的留数，可以得到

$$\begin{aligned} a_k &= \operatorname*{Res}_{x\to x_k} \frac{x^m}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} \\ &= \lim_{x\to x_k} \frac{x^m}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(x-x_i)} \\ &= \frac{{x_k}^m}{(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)} \end{aligned}$$

然后对分开的每项积分即可。

$$\int \frac{x^m\mathrm{d}x}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{{x_k}^m}{\prod_{i=1,i\neq k}^{n}(x_k-x_i)} \ln(x-x_k) \tag{5.16}$$

这表明分母为非重根多项式的有理积分都可以这样算得形式解。

5.4.2 模法

本质上与留数法类似，区别在于减少了求高阶留数的繁杂计算。最开始大概是 2015 年高等数学吧的 @ 爱佛费克斯有所总结，更早的来源不太清楚，目前简中互联网上还没有流行起来。

例题 5.6 求 $\int \frac{1+x}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x.$

解:(By Mirion) 我们分别取分母的两个因式取模:

$$\frac{1+x}{1+x^2}\operatorname{mod}\left(x^4\right) = \frac{(1+x)\left(1-x^2\right)}{1-x^4}\operatorname{mod}\left(x^4\right) = \frac{(1+x)\left(1-x^2\right)}{1-0} = (1+x)\left(1-x^2\right)$$

$$\frac{1+x}{x^4}\operatorname{mod}\left(1+x^2\right) = \frac{1+x}{\left(\left(x^2+1\right)-1\right)^2}\operatorname{mod}\left(1+x^2\right) = \frac{1+x}{(1-0)^2} = 1+x$$

这样我们得到了一个分式分解，再分别积分即可。

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{1+x-x^2-x^3}{x^4} + \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} - \ln x + \arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \end{aligned}$$

这样可以不必计算 $x=0$ 处的高阶留数。

注意我们在 $\operatorname{mod}(x^4)$ 时，上下同乘了 $(1-x^2)$ 因子，这个因子并不可以随意取，需**要满足因子与 mod 的式子互素**，具体地说是 $(1-x^2)\operatorname{mod}(x^4)=1-x^2$。

如果遇到相对复杂的多项式判断是否互素，我们可以考虑**两个多项式 Sylvester 结式非零**机械且直接的判断。由于与不定积分的联系过于微弱，这里不再过多解释。

例题 5.7 求 $\int \frac{x^3+1}{x^4-2x}\mathrm{d}x$.

解: 对分母的两个因式取模：

$$\frac{x^3+1}{x}\bmod\left(x^3-2\right)=\frac{x^2\left(x^3+1\right)}{x^3}\bmod\left(x^3-2\right)=\frac{3}{2}x^2$$
$$\frac{x^3+1}{x^3-2}\bmod(x)=-\frac{1}{2}$$

这样我们得到了一个分式分解，再分别积分即可。

$$\int \frac{x^3+1}{x^4-2x}\mathrm{d}x=\int \frac{3}{2}\frac{x^2}{x^3-2}-\frac{1}{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^3-2}{x}\right| \tag{5.17}$$

第六章 隐函数的不定积分

6.1 圆锥曲线与双元

6.2 其他杂例

例题 6.1 若 $y(x-y)^2=x$ 定义了 $y(x)$, 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3y}$.

法一: 若设

$$x=\frac{t^3}{t^2-1},y=\frac{t}{t^2-1},t=x-y$$

我们将这条曲线单值参数化了。

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3y}&=\int\frac{t^2-1}{t^3-3t}\frac{3t^2\left(t^2-1\right)-2t^4}{\left(t^2-1\right)^2}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2-1\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left((x-y)^2-1\right)\end{aligned}$$

法二: 我们求全微分后

$$x\left(x-3y\right)\mathrm{d}y+y\left(x+y\right)\mathrm{d}x=0$$

于是有

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{x-3y}=\frac{-x\mathrm{d}y}{y(x+y)}=\frac{\mathrm{d}y}{x+y}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\\\frac{\mathrm{d}y}{x+y}=\frac{-y\mathrm{d}x}{x(x-3y)}=\frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}x}{x-3y}\right)\end{cases}\tag{6.1}$$

两式相加即可。

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x-3y}=\frac{\ln x-3\ln y}{4}\tag{6.2}$$

例题 6.2 若 $(x^2+y^2)^2=2xy$ 定义了 $y(x)$, 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解:(By 虚调子) 若设

$$p=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x},q=\frac{y}{x}$$

则构成双元，以及有：

$$p^4x^2=2q\Leftrightarrow 4\frac{\mathrm{d}p}{p}+2\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}q}{q}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{px} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}p}{pq} - 2\int \frac{\mathrm{d}p}{p^2} \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{arth}p + \frac{2}{p} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\mathrm{arth}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\end{aligned}$$

例题 6.3 若 $z^3+xz=8$ 定义了 $z(x)$, 求 $\displaystyle\int z^2\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 我们先取一次全微分，有

$$3z^2\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x = 0$$

那么回代可以发现

$$\begin{aligned}\int z^2\mathrm{d}x &= \int -z\left(3z^2\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\right) \\ &= -\frac{3}{4}z^4 - \int xz\mathrm{d}z \\ &= -\frac{3}{4}z^4 - \frac{1}{2}xz^2 + \frac{1}{2}\int z^2\mathrm{d}x \\ &= -\frac{3}{2}z^4 - xz^2\end{aligned}$$

最后一步是进行了混合。

第七章 初等的边缘：不定积分之锁

如果能完成考试范围的不定积分，大多数人就会失去了对不定积分的兴趣。一种声音是这样的：现在软件这么发达，何必手算那么多不定积分呢？

首先地球上的“软件”还不够发达，有些很简单的不定积分也是算不出来的，比如 $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{e^x-x^2}}\mathrm{d}x$。然后，有些“无聊”的计算有时不是单纯加减乘除就可以的，需要考虑真正的本质，例如涉及高次多项式的不定积分初等表达。我的理念是，技巧是思考的浓缩，需要有足够的计算来证明有效，同时知识的浓缩也是进步的象征。最后真正的计算题是很简单的，就算普普通通算一遍，对于熟练的积佬来说不会花太多时间，达不到浪费精力的意味，例如 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$。

还有一种声音是这样的：随便找一个自创的复杂函数，求导就可以出成一题不定积分，所以求不定积分没什么技巧/深度。唔，如果你尝试一下的话，会发现所谓的“复杂函数”结构可能是非常简单的，放进软件里都是秒解，普通人可能出不了题能难住软件，当然指的是有初等解。

我个人觉得求不定积分相似于在一定的规则内破译一种密码，而不同规则下的密码也将有着不同的强度。所以将一些特别的不定积分称为“锁”。如何有效设置/破译密码是有一定意义的。

正如标题所言，这里讲解几种相对常见的锁。本章将是普通大学生能解决的不定积分边界，换句话说是猜答案/爆算/软件求解等等所能理解的极限。如果继续往后走，将是无人之境，建议与同好结伴前行。

7.1 三角混合锁

锁表现于很多性质不同的函数混合在一起，结构看不清楚，这使得分部积分或者其他思路解题时遇到困难。

7.1.1 反三角函数的混合

例题 7.1 求 $\displaystyle\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

解: 设 $y=\sqrt{1+x^2}$，注意到：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\arctan x$,

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{x\mathrm{d}x}{y^3}e^{\arctan x}\\&=-\int\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)e^{\arctan x}=-\frac{e^{\arctan x}}{y}+\int\frac{\mathrm{d}x}{y^3}e^{\arctan x}\\&=-\frac{e^{\arctan x}}{y}+\int\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)e^{\arctan x}\\&=\frac{x-1}{y}e^{\arctan x}-\int\frac{x\mathrm{d}x}{y^3}e^{\arctan x}\\&=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}\end{aligned}$$

最后一步是与原积分混合。

值得一提的是，群友 @ 哈士奇发现了一种简单的操作，可以称之为**“不定积分洛必达”**，对分母为平方的情形，凑微分 $\mathrm{d}\left(-\frac{1}{g}\right)$,

$$\int\frac{f}{g^2}\mathrm{d}x=\int\frac{f}{g'}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{g}\right)=-\frac{f}{gg'}+\int\frac{\frac{f'g'-fg''}{g}}{g'^2}\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

如果 f 已经暗含一定的结构，比如

$$\int\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}=\frac{uv'-u'v}{vv'}+\int\frac{v'\mathrm{d}u'-u'\mathrm{d}v'}{v'^2} \tag{7.2}$$

这样我们的 u,v 都求了一次导，就像“洛必达法则”一样。这样使得一些反三角函数的积分得到简化。

下面用一个例子来说明。

例题 7.2 求 $\displaystyle\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x.$

解:(By 哈士奇) 过程如下：

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{\arctan x}{x-\arctan x}\right)^2\mathrm{d}x&=\int\frac{\arctan^2 x}{1-\frac{1}{1+x^2}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x-\arctan x}\right)\\&=-\frac{1}{x-\arctan x}\frac{\arctan^2 x}{1-\frac{1}{1+x^2}}+\int\frac{1}{x-\arctan x}\frac{2\arctan x}{x^3}(x-\arctan x)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1+x^2}{x^2}\frac{\arctan^2 x}{x-\arctan x}+2\int\frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1+x^2}{x^2}\frac{\arctan^2 x}{x-\arctan x}-\frac{\arctan x}{x^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)}\\&=-\frac{1+x^2}{x^2}\frac{\arctan^2 x}{x-\arctan x}-\frac{\arctan x}{x^2}-\frac{1}{x}-\arctan x\\&=\frac{1+x\arctan x}{\arctan x-x}\end{aligned}$$

可以看到，在做类似的操作后，我们把反三角函数求导消掉了，这样不定积分形式将很

简单。但是缺点是计算量较大，待后续优化。

7.1.2 $(x,1)\times(\sin x,\cos x)$

注意到恒等式：

$$2\left(x^2+1\right)=\begin{cases}(x\cos x-\sin x)^2+(x\sin x+\cos x)^2\\(x\sin x-\cos x)^2+(x\cos x+\sin x)^2\end{cases}\tag{7.3}$$

于是可以诱导出两对双元。

对于第一对，我们设

$$x\cos x-\sin x=m,x\sin x+\cos x=n\tag{7.4}$$

有单元微分关系：

$$\mathrm{d}m=-x\sin x\mathrm{d}x,\mathrm{d}n=x\cos x\mathrm{d}x\tag{7.5}$$

有多元微分关系：

$$m\mathrm{d}n-n\mathrm{d}m=x^2\mathrm{d}x\tag{7.6}$$

$$n\mathrm{d}(\sin x)-\sin x\mathrm{d}n=\cos^2 x\mathrm{d}x\tag{7.7}$$

$$m\mathrm{d}(\sin x)-\sin x\mathrm{d}m=(x-\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x\tag{7.8}$$

$$\cos x\mathrm{d}m-m\mathrm{d}(\cos x)=-\sin^2 x\mathrm{d}x\tag{7.9}$$

$$\cos x\mathrm{d}n-n\mathrm{d}(\cos x)=(x+\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x\tag{7.10}$$

来看一些例题吧。

例题 7.3 求 $\displaystyle\int\frac{x\left(x^2+x\tan x+1\right)}{(x\tan x-1)^2}\mathrm{d}x$

解:(By 风中鱼) 若置 $p=x\sin x-\cos x,q=x\sin x+\cos x$，则我们有：

$$q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q=2\left(x+\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x\rightarrow\frac{x^2}{2}\left(q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q\right)=x^3+x^2\sin x\cos x\tag{7.11}$$

和

$$pq=x^2\sin^2 x-\cos^2 x\rightarrow xpq=x^3\sin^2 x-x\cos^2 x\tag{7.12}$$

于是：

$$\int \frac{x\cos x\left(x^2\cos x + x\sin x + \cos x\right)}{(x\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{x^2}{2}(q\mathrm{d}p - p\mathrm{d}q) - xpq\mathrm{d}x}{p^2}$$
$$= -\frac{qx^2}{2p} = \frac{x^2}{2}\frac{1+x\tan x}{1-x\tan x}$$

除此之外，如果我们设双元 $p=\sqrt{1+\cos x}, q=\sqrt{1-\cos x}$, 这样也会产生三角函数混合的效果。可以得到：

- $pq = \sin x p^2 = 1+\cos x$
- $p\mathrm{d}q - q\mathrm{d}p = \mathrm{d}x$
- $\int \frac{\mathrm{d}q}{p} = \frac{x}{2}, \int p\mathrm{d}q = \frac{x+\sin x}{2}$

例题 7.4 求 $\int \frac{2(1+\cos x)+x\sin x}{2(1+\cos x)+x(x+2\sin x)}\mathrm{d}x$

解:(By 风中鱼)

7.2 双元锁与指数锁

如果混合的两只函数性质对应，那么可能会发生神奇的“化合反应”，使得看不出原来的反应物了。

7.2.1 双元锁

这种锁的特征在于，有两只对称的函数进行了融合，使得消除了相干项。具体我们从例子中来看看吧。

例题 7.5 求

$$\int \frac{(\sin x+2x)\left[\left(x^2+1\right)\sin x - x(\cos x+2)\right]}{(\cos x+2)^2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\mathrm{d}x \tag{7.13}$$

解：(By 虚调子) 若设 $p=\sin x+2x, q=x^2+1$，则原式可以适当化简：

$$\int \frac{p\left(-qp''-q'p'/2\right)}{p'^2q^{3/2}}\mathrm{d}x = -\int \frac{p\mathrm{d}\left(p'\right)}{p'^2q^{1/2}} - \int \frac{p\mathrm{d}q}{2p'q^{3/2}}$$
$$= \frac{p}{p'\sqrt{q}} - \int \frac{\sqrt{q}\mathrm{d}p - \frac{p}{2\sqrt{q}}\mathrm{d}q}{p'q} - \int \frac{p\mathrm{d}q}{2p'q^{3/2}}$$
$$= \frac{p}{p'\sqrt{q}} - \int \frac{\mathrm{d}p}{p'\sqrt{q}}$$
$$= \frac{\sin x+2x}{(\cos x+2)\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{\sin x+2x}{(\cos x+2)\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

例题 7.6 求

$$\int \frac{(x+1)^2\sqrt{x+\ln x}+(3x+1)\ln x+3x^2+x}{(x\ln x+x^2)\sqrt{x+\ln x}+x^2\ln x+x^3}\mathrm{d}x \tag{7.14}$$

解：(By 虚调子) 不妨设 $p=\sqrt{x+\ln x}$，有 $2p\mathrm{d}p=\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{2p^2(x+1)x\mathrm{d}p+(3x+1)p^2\mathrm{d}x}{xp^3+x^2p^2}&=\int \frac{2px^2\mathrm{d}p+2px\mathrm{d}p+(3x+1)p\mathrm{d}x}{xp^2+x^2p}\\&=\int \frac{2px\mathrm{d}(p+x)+\left(2px^2+2p^2x\right)\mathrm{d}p}{xp(x+p)}\\&=2\ln(x+p)+2\int \mathrm{d}p\\&=2\ln\left(x+\sqrt{x+\ln x}\right)+2\sqrt{x+\ln x}\end{aligned}$$

例题 7.7 求 $\displaystyle\int \frac{\cosh x+x^2+1}{(x\sinh x-1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解:(By 风中鱼) 若置 $p=x\sinh x-1, q=x+\sinh x$，则有 $p^2+q^2=\left(1+x^2\right)\cosh^2 x$，以及：

$$\begin{aligned}q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q&=1+\sinh^2 x+\cosh x\left(1+x^2\right)\\&=\cosh x\left(\cosh x+1+x^2\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x+x^2+1}{(x\sinh x-1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\int \frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{p\sqrt{p^2+q^2}}\\&=\int \frac{q^2}{p\sqrt{p^2+q^2}}\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right)\\&=\int \frac{\mathrm{d}b}{b\sqrt{1+b^2}}=-\operatorname{arth}\sqrt{1+b^2}\\&=-\operatorname{arth}\sqrt{1+\left(\frac{x\sinh x-1}{x+\sinh x}\right)^2}\end{aligned}$$

注： 下题具体思路也类似，留作读者习题。

命题 7.1. 王者百题 001

求

$$\int \frac{\cos(\sin x)+\cos^2 x}{1+\sin x\cdot\sin(\sin x)}\mathrm{d}x \tag{7.15}$$

例题 7.8 (From 魏念辉) 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cosh(\cos x)}{\cos x\sinh(\cos x)+\cosh(\cos x)-\sin x}\mathrm{d}x.$

解：(By Mirion) 注意到恒等式：

$$[\cos x\sinh(\cos x)+\cosh(\cos x)]^2=\sin^2 x+[\sinh(\cos x)+\cos x\cosh(\cos x)]^2 \tag{7.16}$$

将分母“有理化”后，我们有：

$$\begin{aligned}\int ...\mathrm{d}x &= \int \frac{[\sin x+\cosh(\cos x)][\sin x+\cosh(\cos x)+\cos x\sinh(\cos x)]}{[\sinh(\cos x)+\cos x\cosh(\cos x)]^2}\mathrm{d}x\\ &= ...\\ &= \frac{1+\sin x\cosh(\cos x)}{\sinh(\cos x)+\cos x\cosh(\cos x)}\end{aligned}$$

例题 7.9 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sech}x+2\mathrm{sech}^2 x\mathrm{csch}(2\mathrm{sech}x)}{\sqrt{\coth^2 x\mathrm{csch}^2(\mathrm{sech}x)+1}}\mathrm{d}x$.

解:(By Polynomial) 若置

$$p=\sqrt{1+\mathrm{sech}x\tanh(\mathrm{sech}x)}, q=\sqrt{1-\mathrm{sech}x\tanh(\mathrm{sech})}, p^2+q^2=2 \tag{7.17}$$

于是：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{sech}x+2\mathrm{sech}^2 x\mathrm{csch}(2\mathrm{sech}x)}{\sqrt{\coth^2 x\mathrm{csch}^2(\mathrm{sech}x)+1}}\mathrm{d}x &= \int p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p\\ &= 2\int\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{p^2+q^2}\\ &= 2\arctan\frac{q}{p}=2\arctan\sqrt{\frac{1-\mathrm{sech}x\tanh(\mathrm{sech}x)}{1+\mathrm{sech}x\tanh(\mathrm{sech}x)}}\end{aligned}$$

例题 7.10 求 $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{\cot x(\cos x-\cosh x)-\sinh x}\mathrm{d}x$.

解:(By Polynomial) 我们设

$$p=\cos x-\cosh x, q=\sin x+\sinh x \tag{7.18}$$

这样算几个常见的双元式，不难发现

$$\begin{aligned}\int \frac{\sinh x}{\cot x(\cos x-\cosh x)-\sinh x}\mathrm{d}x &= \int\frac{2\sin x\sinh x}{2\cos x(\cos x-\cosh x)-2\sin x\sinh x}\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{p^2-q^2}\\ &= \mathrm{arth}\frac{q}{p}=\mathrm{arth}\frac{\sin x+\sinh x}{\cos x-\cosh x}\end{aligned}$$

例题 7.11 求 $\displaystyle\int \frac{\cos x\cdot e^x+\cos(e^x)}{\sin x\cdot\sin(e^x)+1}\mathrm{d}x$.

解:(By Polynomial) 这里考虑双元

$$p=\sin\left(\frac{x+e^x}{2}\right), q=\cos\left(\frac{e^x-x}{2}\right) \tag{7.19}$$

和前类似地，

$$\int \frac{\cos\left(e^{x}\right)+e^{x}\cos x}{\sin\left(e^{x}\right)\sin x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{p^{2}+q^{2}}=\operatorname{arc}\tan\frac{q}{p}$$
$$=\operatorname{arc}\tan\frac{1+\tan\frac{e^{x}}{2}\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{e^{x}}{2}}$$

例题 7.12 求 $\int \frac{\left[\left(2+\sqrt{3}\right)x+1\right]\sqrt{x^{3}-1}}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^{3}(x-1)\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x.$

解:(By 风中鱼) 这里我们需要注意到恒等式:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^{2}+x+1\right)=\left(x^{2}-1\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right)^{2} \tag{7.20}$$

于是置双元：$p=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{x^{2}+x+1}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^{2}}},q=\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x+2+\sqrt{3}}$，有

$$\mathrm{d}q=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^{2}-1}}\left(x+2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{x^{2}-1}}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^{2}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)x+1}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^{2}\sqrt{x^{2}-1}}$$

则：

$$\int \frac{\left[\left(2+\sqrt{3}\right)x+1\right]\sqrt{x^{3}-1}}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^{3}(x-1)\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}p\mathrm{d}q$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}pq+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\ln|p+q|$$
$$=\frac{\sqrt{\left(x^{3}-1\right)(x+1)}}{2\left(x+2+\sqrt{3}\right)^{2}}$$
$$+\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2\sqrt{3}}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^{2}-1}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^{2}+x+1\right)}}{x+2+\sqrt{3}}\right|$$

7.2.2 指数锁

锁在于，原本在分子分母均应出现的指数项合并于分母。

所以我们不妨称其为指数锁。对于指数锁有一个标准式:

$$\int\frac{P^{m}\left(aP+P'\right)}{\left(be^{-nax}\pm P^{n}\right)^{\frac{m+1}{n}}}\mathrm{d}x \tag{7.21}$$

其中 P 是任意函数,a,b 是常数，上述形式都将会有初等表达。但值得一提的是，mma 等软件会遇上困难，解不出来。从而一些软件小子会认为是不可初等表达。

在进行变换：$t=e^{ax}P(x)$ 后，标准形式化简为**契比雪夫型**。

$$\int t^{m}\left(b\pm t^{n}\right)^{-\frac{m+1}{n}}\mathrm{d}t \tag{7.22}$$

然后套路地，令 $k=\frac{\sqrt[n]{b\pm t^{n}}}{t}$ 就可以化成普通有理积分了。

例题 7.13 求

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{e^x-x^2}}\mathrm{d}x \tag{7.23}$$

解：(By 虚调子) 若设 $t=xe^{-\frac{x}{2}}$，则：

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{\sqrt{e^x-x^2}}\mathrm{d}x &= -2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= -2\arcsin t\\ &= -2\arcsin\left(xe^{-\frac{x}{2}}\right)\end{aligned}$$

例题 7.14 求 $\displaystyle\int \frac{1+\cot x}{1+e^x\sin x}\mathrm{d}x.$

解:(By 水中星) 不难注意到：

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\cot x}{1+e^x\sin x}\mathrm{d}x &= \int 1+\cot x-\frac{e^x\left(\sin x+\cos x\right)}{1+e^x\sin x}\mathrm{d}x\\ &= x+\ln\sin x-\ln\left(1+e^x\sin x\right)\end{aligned}$$

例题 7.15 求 $\displaystyle\int \frac{x\left(x+1\right)\mathrm{d}x}{\left(e^x+x+1\right)^2}.$

解:(By 风中鱼) 设 $y=e^x+x+1$，则有：$\mathrm{d}y=\left(y-x\right)\mathrm{d}x$，于是：

$$\begin{aligned}\int \frac{x\left(x+1\right)\mathrm{d}x}{\left(e^x+x+1\right)^2} &= \int \frac{\left(x+1\right)\left(y\mathrm{d}x-\mathrm{d}y\right)}{y^2}\\ &= \int \frac{x+1}{y}\mathrm{d}x+\int \left(x+1\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)\\ &= \int \frac{x+1}{y}\mathrm{d}x+\frac{x+1}{y}-\int \frac{\mathrm{d}x}{y}\\ &= \frac{x+1}{y}+\int \frac{y\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{y}\\ &= \frac{x+1}{e^x+x+1}+x-\ln\left(e^x+x+1\right)\end{aligned}$$

例题 7.16 求 $\displaystyle\int \frac{x\left(x+1\right)^{n-1}e^x\mathrm{d}x}{\left(e^x+x+1\right)^{n+1}}.$

解:(By 鈷) 若设 $p=e^x+x+1, q=1+x$，则有：

$$q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q=\left[\left(x+1\right)\left(e^x+1\right)-\left(e^x+x+1\right)\right]\mathrm{d}x=xe^x\mathrm{d}x \tag{7.24}$$

于是：

$$\int \frac{x(x+1)^{n-1}e^x\mathrm{d}x}{(e^x+x+1)^{n+1}} = \int \frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{p^2} = -\int \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right) = -\frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}\right)^n$$

更一般地，我们可以考虑

例题 7.17 求 $\displaystyle\int \frac{x(x+1)^m e^{nx}}{(e^x+1+x)^{m+n+1}}\mathrm{d}x$.

解:(By QuantumPathogen) 可以利用含参积分来解决，我们考虑

$$J(a,b) = \int \frac{x\mathrm{d}x}{a(1+x)+be^x} = \frac{x}{a} - \frac{1}{a}\ln\left(a(x+1)+be^x\right) \tag{7.25}$$

那么

$$\int \frac{x(x+1)^m e^{nx}}{(e^x+1+x)^{m+n+1}}\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial b^n}J|_{(1,1)} \tag{7.26}$$

一个推论是

$$\int \frac{x(x+1)^n}{(e^x+1+x)^{n+1}}\mathrm{d}x = \ln\frac{e^x}{1+x+e^x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{1+x}{1+x+e^x}\right)^k \tag{7.27}$$

7.2.3 半角锁

前面的双元锁部分来自于 @Polynomial 出的题，已经总结出了一个二元半角锁：

$$\int \frac{\cos p\mathrm{d}q + \cos q\mathrm{d}p}{\sin p + \sin q} = \ln\frac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}} \tag{7.28}$$

使用诱导公式，也可以写成

$$\int \frac{\sin p\mathrm{d}q + \sin q\mathrm{d}p}{\cos p + \cos q} = 2\operatorname{arth}\left(\tan\frac{p}{2}\tan\frac{q}{2}\right) \tag{7.29}$$

其中 p, q 是任意两个函数。与之类似地还有

$$\int \frac{\sin q\mathrm{d}p - \sin p\mathrm{d}q}{\cos p - \cos q} = 2\operatorname{arth}\left(\tan\frac{p}{2}\cot\frac{q}{2}\right) \tag{7.30}$$

$$\int \frac{\sin q\mathrm{d}p + \sin p\mathrm{d}q}{1+\cos p\cos q} = 2\arctan\left(\tan\frac{p}{2}\tan\frac{q}{2}\right) \tag{7.31}$$

$$\int \frac{\sin q\mathrm{d}p - \sin p\mathrm{d}q}{\cos p\cos q - 1} = 2\arctan\left(\tan\frac{p}{2}\cot\frac{q}{2}\right) \tag{7.32}$$

那么自然地，可以试图推广到三元，@Mirion 发现了下面的公式。

$$\int \frac{\sin p\sin q\mathrm{d}r + \sin p\sin r\mathrm{d}q + \sin q\sin r\mathrm{d}p}{\cos p + \cos q + \cos r + \cos p\cos q\cos r} = 2\operatorname{arth}\left(\tan\frac{p}{2}\tan\frac{q}{2}\tan\frac{r}{2}\right) \tag{7.33}$$

类似上面的二元半角的函数变换 (tan 到 cot)，我们能得到总共 6 个公式。

例题 7.18 求 $\int \frac{(\sin x-1)(\cosh(\cosh x)-1)(\cos x\sinh x-\sinh(\cosh x))}{\left(\sin x+1-a^2(\sin x-1)+\cosh(\cosh x)\left((a^2+1)\sin x-a^2+1\right)\right)^2}\mathrm{d}x$.

解:(By Mirion)

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{(\sin x-1)(\cosh(\cosh x)-1)(\cos x\sinh x-\sinh(\cosh x))}{\left(\sin x+1-a^2(\sin x-1)+\cosh(\cosh x)\left((a^2+1)\sin x-a^2+1\right)\right)^2}\mathrm{d}x\\
=&\frac{1}{2a^3}\operatorname{arth}\left(a\tan\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\tanh\frac{\cosh x}{2}\right)\\
&+\frac{1}{2a^2\left(a^2\tan\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\tanh\frac{\cosh x}{2}-\cot\frac{\frac{\pi}{2}-x}{2}\coth\frac{\cosh x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

(未完待续)

7.3 等分锁

我们在之前的双元公式的使用中，利用了等分性来得出结论。但是并没有完全充分利用，如果系数不是常数，而是一个函数将会形成锁。

例题 7.19 求 $\int \frac{1+\sin x-e^x(1-\cos x)}{x(1+\sin x)+e^x\cos x}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 我们有

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

这将诱导:

$$\int \frac{e^x(1-\sin x)+x\cos x}{e^x\cos x+x+x\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\ln(1+\sin x) \tag{7.34}$$

同时我们还有

$$\int \frac{e^x(\cos x-\sin x)+(1+\sin x)+x\cos x}{e^x\cos x+x+x\sin x}\mathrm{d}x=\ln\left(e^x\cos x+x+x\sin x\right) \tag{7.35}$$

两者相减即有

$$\int \frac{1+\sin x-e^x(1-\cos x)}{x(1+\sin x)+e^x\cos x}\mathrm{d}x=\ln\frac{x(1+\sin x)+e^x\cos x}{1+\sin x} \tag{7.36}$$

第八章 不可名状：伪椭圆不定积分

本章的结果是相当有趣的，不过难度要比之前的内容高出不少，读者谨慎食用。

所谓**伪椭圆积分 (pseudo-elliptic integral)**，是指常见的积分软件只能输出椭圆函数形式的解，而实质上是具备初等解的不定积分。

Rubi 库中的公式能解决其中一部分 (Rubi 库里有一系列求解不定积分的法则，用于机器的快速积分，与常见积分计算的 Risch 算法有一定区别, 具体自行搜索)：

定理 8.1. Rubi 库里的一个公式

若 $71c^2+100ae=0$，或者 $1152c^3-125b^2e=0$，则令

$$P(x)=\frac{1}{320}\left(33b^2c+6ac^2+40a^2e\right)-\frac{22}{5}acex^2+\frac{22}{15}bcex^3+\frac{1}{4}e\left(5c^2+4ae\right)x^4+\frac{4}{3}be^2x^5+2ce^2x^6+e^3x^8$$

于是：

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2+ex^4}}=\frac{1}{8\sqrt{e}}\ln\left[P(x)+\frac{P'(x)}{8\sqrt{ex}}\sqrt{a+bx+cx^2+ex^4}\right]\tag{8.1}$$

♡

证明对右边求导即可，但这只是隔靴搔痒。下面来看看这类积分如何解决吧———

8.1 伪椭圆入门题

本节收集了一个系列的简单不定积分。

例题 8.1 求 $\displaystyle\int\frac{x^4-1}{x^8+1}\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解: 这道其实是之前用双元算过的，这里只是为了摆在一起。设 $t=\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4}}$，就有

$$\int\frac{x^4-1}{x^8+1}\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}=\sqrt{2}\mho_4^-\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^4}}\right)\tag{8.2}$$

例题 8.2 求 $\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^4}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}$.

解:(By 风中鱼) 若设 $t=x\dfrac{\sqrt[4]{1+x^8}}{1-x^4}$，就有

$$\int\frac{x^2}{1+x^4}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}=\int\frac{t^2}{1+8t^4}\mathrm{d}t=2^{-\frac{9}{4}}\mho_{3,4}^+\left(2^{\frac{3}{4}}x\frac{\sqrt[4]{1+x^8}}{1-x^4}\right)\tag{8.3}$$

例题 8.3 求 $\displaystyle\int\frac{x^4}{1-x^8}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}$.

解:(By 魏念辉) 设 $t=\dfrac{\sqrt[4]{2}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}$, 有

$$\int \frac{x^4}{1-x^8}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\int \frac{t^4}{t^8-1}\mathrm{d}t=-\frac{2}{2\sqrt[4]{2}}\mho^{-}_{5,8}\left(\frac{\sqrt[4]{2}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}\right) \tag{8.4}$$

例题 8.4 求 $\displaystyle\int \frac{x^2}{1-x^8}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}$.

解:(By Polynomial)

这里可以得出一个结论：

结论 对于不定积分 $\displaystyle\int \frac{ax^2+bx^4+cx^6}{1-x^8}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^8}}$ 总有初等解。

8.2 高次双元非齐次化齐次

注：本节的主要素材来自于群佬 @ 魏念辉在 2021 年左右研究的内容。

进入正题之前，看一个最开始的例子。

例题 8.5 求 $\displaystyle\int \frac{\tan^2 x}{1+\sec^2 x}\sqrt[3]{\tan x\cdot\sec x}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 不妨设 $p=\sqrt[3]{\tan x}, q=\sqrt[3]{\sec x}$, 这里是六次双元。利用高次双元公式可以有

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan^2 x}{1+\sec^2 x}\sqrt[3]{\tan x\sec x}\mathrm{d}x&=\int \frac{p^6}{1+q^6}pq\frac{\mathrm{d}\left(p^3\right)}{q^6}\\&=3\int \frac{p^4}{2+p^6}\mathrm{d}q\\&=-\int \frac{p^{12}}{\left(p^6-2q^6\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p^2}\right)\end{aligned}$$

注意这里被积函数是一个齐次式，而我们的凑微分变量却是一个非齐次式。因为这里有巧妙的锁芯：

$$\begin{aligned}\left(p^6-2q^6\right)^2&=p^{12}-4p^6q^6+4q^{12}\\&=p^{12}+4q^6\left(q^6-p^6\right)\\&=p^{12}+4q^6\end{aligned}$$

于是可以凑出非齐次的结果。

$$\int \frac{\tan^2 x}{1+\sec^2 x}\sqrt[3]{\tan x\sec x}\mathrm{d}x=-\int \frac{p^{12}}{p^{12}+4q^6}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p^2}\right)=-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\mho^{+}_{6}\left(\sqrt[3]{\frac{2\sec x}{\tan^2 x}}\right) \tag{8.5}$$

也可以写成显式，

$$\int \frac{\tan^2 x}{1+\sec^2 x}\sqrt[3]{\tan x\sec x}\mathrm{d}x=-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{t^2+\sqrt{3}t+1}{t^2-\sqrt{3}t+1}+\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{6}\arctan t^3\right) \tag{8.6}$$

其中 $t=\sqrt[3]{2\cot x\csc x}$.

例题 8.6 求 $\displaystyle\int\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{5-4\sin x}}\mathrm{d}x$.

解:(By Mirion) 若设 $p=\sqrt[3]{4+4\sin x},q=\sqrt[3]{5-4\sin x}$, 则有

$$\sin x=\frac{p^3}{4}-1,\cos x=\sqrt{\frac{p^3}{4}\left(2-\frac{p^3}{4}\right)}=\frac{1}{12}p^{\frac{3}{2}}\sqrt{8q^3-p^3}\tag{8.7}$$

这样可以消除三次根号,

$$\begin{aligned}\int\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{5-4\sin x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{p}{\sqrt[3]{4}q}\frac{\frac{3}{4}p^2\mathrm{d}p}{\frac{1}{12}p^{\frac{3}{2}}\sqrt{8q^3-p^3}}=\frac{9}{\sqrt[3]{4}}\int\frac{p^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}p}{q\sqrt{8q^3-p^3}}\\&=\frac{9}{\sqrt[3]{4}}\int\frac{\mathrm{d}b}{1+b^3}\sqrt{\frac{b^3}{8-b^3}}\left(b=\frac{p}{q}\right)\\&=-\frac{18}{\sqrt[3]{4}}\int\frac{t\mathrm{d}t}{(8+t^3)\sqrt{t^3-1}}\left(t=\frac{2}{b}\right)\end{aligned}$$

然后注意到

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{d}x}{(8+x^3)\sqrt{x^3-1}}&=-\frac{1}{12}\int\frac{(1-x)\,\mathrm{d}x}{(2+x)\sqrt{x^3-1}}-\frac{1}{12}\int\frac{\left(x^2-2x-2\right)\mathrm{d}x}{(x^2-2x+4)\sqrt{x^3-1}}+\frac{1}{4}\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(8+x^3)\sqrt{x^3-1}}\\&=\frac{1}{12}\int\frac{\mathrm{d}a}{(8+a)\sqrt{a-1}}+\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}b}{9+b^2}-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}c}{2-6c^2}\\&=\frac{1}{18}\arctan\frac{(1-x)^2}{3\sqrt{x^3-1}}+\frac{1}{18}\arctan\frac{\sqrt{x^3-1}}{3}-\frac{1}{6\sqrt{3}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{3}\,(1-x)}{\sqrt{x^3-1}}\end{aligned}$$

其中的中间变量分别为

$$a=x^3,b=\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^3-1}},c=\frac{1-x}{\sqrt{x^3-1}}\tag{8.8}$$

这样再回代即有

$$\begin{aligned}\int\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{5-4\sin x}}\mathrm{d}x=&\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\arctan\frac{(\sec x+\tan x)\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{10-8\sin x}}-1\right)}{\left(4\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{10-8\sin x}}-1\right)\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{10-8\sin x}}}\\&+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}\operatorname{arth}\frac{(\sec x+\tan x)\left(\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{10-8\sin x}}-1\right)}{\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{10-8\sin x}}}\end{aligned}$$

这里我们考虑了一个高次构型:

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(a+x^3)\sqrt{x^3+b}}\tag{8.9}$$

对于这个构型,我们有如下结论:

结论 当 $a=-8b\ or\ 4b$ 时, 不定积分

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(a+x^3)\sqrt{x^3+b}}\tag{8.10}$$

有初等解。

证明留给感兴趣的读者。

例题 8.7 求 $\int \frac{\sqrt{\sin x}}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

例题 8.8 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{x^3-3x^2+4x-2}}$.

(待更新)

8.3 低次恒等式的诱导

例题 8.9 求 $\int \sqrt[3]{\frac{x\left(x+3\right)^5}{\left(x+4\right)^4\left(x+1\right)^5}}\mathrm{d}x$.

解:(By 百合) 首先指数化，我们能得到

$$\int \sqrt[3]{\frac{x\left(x+3\right)^5}{\left(x+4\right)^4\left(x+1\right)^5}}\mathrm{d}x=\int \sqrt[3]{\frac{\left(e^t-4\right)\left(e^t-1\right)^5}{e^t\left(e^t-3\right)^5}}\mathrm{d}t$$

其中 $e^t=x+4$, 我们注意到

例题 8.10 求 $\int \frac{7x+17}{7x+5}\sqrt[6]{\frac{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{\left(x-1\right)^8}}\mathrm{d}x$.

解:(By 百合) 首先指数化，我们能得到

$$\int \frac{7x+17}{7x+5}\sqrt[6]{\frac{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{\left(x-1\right)^8}}\mathrm{d}x=\int \frac{7e^t+24}{7e^t+12}\sqrt[6]{\frac{\left(e^t+3\right)\left(e^t+4\right)}{e^{2t}}}\mathrm{d}t$$

其中 $e^t=x-1$, 我们注意到：$\left(e^t+3\right)\left(e^t+4\right)=e^{2t}+\left(7e^t+12\right)$，若设

$$p=\frac{\left(e^t+3\right)\left(e^t+4\right)}{e^{2t}},q=\frac{7e^t+12}{e^{2t}},\mathrm{d}q=-\frac{7e^t+24}{e^{2t}}\mathrm{d}t$$

则 $p=1+q$,

$$\begin{aligned}\int \frac{7x+17}{7x+5}\sqrt[6]{\frac{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{\left(x-1\right)^8}}\mathrm{d}x&=-\int \frac{\mathrm{d}q}{q}\sqrt[6]{p}=\int \frac{\sqrt[6]{p}\mathrm{d}p}{1-p}\\&=\int \frac{6u^6\mathrm{d}u}{1-u^6},u=\sqrt[6]{p}=\sqrt[6]{\frac{\left(x+2\right)\left(x+3\right)}{\left(x-1\right)^2}}\end{aligned}$$

后面的有理积分计算省略。

8.4 高次恒等式的诱导

例题 8.11 (From 百合) 求 $\int \frac{4x^2+x+10}{x^2+12x+8}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+3x^2+6x+5}}$.

例题 8.12 (From 来过倒会字名然不我特艾别) 求 $\int \frac{2+10x+3x^2}{\left(x-1\right)\left(13+27x\right)}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+3x^2+6x+5}}$.

解:(By 百合) 首先我们注意到

$$320\left(5+6x+3x^2+x^3\right)+(x-1)^3(13+27x)=3\left(23+14x+3x^2\right)^2$$

所以不难得到

$$\int\frac{2+10x+3x^2}{(x-1)(13+27x)}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+3x^2+6x+5}}=-\frac{1}{4\sqrt{15}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{320}{3}}\frac{\sqrt{x^3+3x^2+6x+5}}{3x^2+14x+23} \tag{8.11}$$

例题 8.13 (From 来过倒会字名然不我特艾别) 求 $\displaystyle\int\frac{7+7x+x^2}{4+x+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+3x^2+6x+5}}$.

例题 8.14 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^4+20x^3+27x^2+4x-4}}$.

解:(By 水中星) 首先我们注意到，根号下的多项式含有根 $x=-2$, 对分母的另一个二次因式求莫比乌斯对应，也即：

$$\int\frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^4+20x^3+27x^2+4x-4}}=\int\frac{3-t}{(t^2-3)\sqrt{4t^3-9t^2-18t+39}}\mathrm{d}t$$

其中 $t=\dfrac{x+4}{x+2}$，作了一步化简。然后我们注意到恒等式：

$$3\left(4t^3-9t^2-18t+39\right)+4\left(t^2-3\right)^3=\left(2t^3-9t+3\right)^2 \tag{8.12}$$

那么我们设

$$p=\sqrt{3}\frac{\sqrt{4t^3-9t^2-18t+39}}{(t^2-3)^{\frac{3}{2}}},q=\frac{2t^3-9t+3}{(t^2-3)^{\frac{3}{2}}}$$

就有

$$\begin{aligned}\int\frac{3-t}{(t^2-3)\sqrt{4t^3-9t^2-18t+39}}\mathrm{d}t&=\int\frac{\sqrt{3}}{p}\frac{\mathrm{d}q}{9}\\&=\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln(p+q)\\&=\frac{1}{3\sqrt{3}}\ln\left(\frac{2t^3-9t+3+\sqrt{3}\sqrt{4t^3-9t^2-18t+39}}{(t^2-3)^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$

例题 8.15 求 $\displaystyle\int\frac{8x^2-x+5}{4x^2+16x-23}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+2x^3-3x^2+5x-5}}$.

例题 8.16 求 $\displaystyle\int\frac{3x^2-20x-3}{(x-5)\sqrt{x^4+6x^2+2x-1}}\mathrm{d}x$.

解:(By 来过倒会字名然不我特艾别) 我们注意到：

$$x^4+6x^2+2x-1=\left(x^2+3\right)^2+2(x-5)$$

若设 $t=\dfrac{x-5}{\left(x^2+3\right)^2}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2-20x-3}{(x-5)\sqrt{x^4+6x^2+2x-1}}\mathrm{d}x&=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+2t}}\\&=2\operatorname{arth}\frac{\sqrt{x^4+6x^2+2x-1}}{x^2+3}\end{aligned}$$

例题 8.17 求 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)(2x+1)}\sqrt{\frac{x+1}{8x^3+33x^2+42x+14}}$.

解:(By 来过倒会字名然不我特艾别) 我们注意到:

$$8x^3+33x^2+42x+14=2(x+1)^3+3(x+2)^2(2x+1)$$

若设

$$p=\frac{\sqrt{8x^3+33x^2+42x+14}}{(x+1)^{\frac{3}{2}}},q=\sqrt{3}\frac{(x+2)\sqrt{2x+1}}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}$$

则

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)(2x+1)}\sqrt{\frac{x+1}{8x^3+33x^2+42x+14}}&=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{pq}\mathrm{d}q=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arth}\frac{p}{\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arth}\frac{1}{\sqrt{2}(x+1)}\sqrt{\frac{8x^3+33x^2+42x+14}{x+1}}\end{aligned}$$

例题 8.18 求 $\displaystyle\int\frac{5x^2-12x-16}{x^2+x+2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(3x+8)\left(5x^2+16\right)}}$.

解:(By 水中星) 我们注意到:

$$\left(5x^2+16\right)(3x+8)x=16\left(x^2+x+2\right)^2-\left(x^2-4x+8\right)^2$$

若设

$$p=\frac{\sqrt{\left(5x^2+16\right)(3x+8)x}}{x^2+x+2},q=\frac{x^2-4x+8}{x^2+x+2}$$

则

$$\int\frac{5x^2-12x-16}{x^2+x+2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(3x+8)\left(5x^2+16\right)}}=\int\frac{\mathrm{d}q}{p}=\arctan\frac{x^2-4x+8}{\sqrt{x(3x+8)\left(5x^2+16\right)}}$$

例题 8.19 求 $\displaystyle\int\frac{x^2-4x-6}{(x+1)\left(2x^2-3\right)\sqrt{x^4+2x^3-4x-4}}\mathrm{d}x$.

解:(By 百合) 我们注意到:

$$x^4+2x^3-4x-4+\left(x^2+x-1\right)^2=(x+1)^2\left(2x^2-3\right)$$

于是设

$$p=\frac{\sqrt{x^2+2x^3-4x-4}}{x^2+x-1},q=\frac{x+1}{x^2+x-1}\sqrt{2x^2-3},\mathrm{d}q=-\frac{x^2-4x-6}{\left(x^2+x-1\right)^2\sqrt{2x^2-3}}\mathrm{d}x$$

则

$$\int \frac{x^2-4x-6}{(x+1)(2x^2-3)\sqrt{x^4+2x^3-4x-4}}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}q}{pq} = -\arctan\frac{\sqrt{x^2+2x^3-4x-4}}{x^2+x-1} \tag{8.13}$$

例题 8.20 求 $\int \frac{x\sqrt{3x-2}}{(11x^2-24x+12)\sqrt{-2x^3+9x-6}}\mathrm{d}x.$

解:(By 百合)

$$\int \frac{x\sqrt{3x-2}}{(11x^2-24x+12)\sqrt{-2x^3+9x-6}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arth}\frac{50x^3-171x^2+180x-60}{\sqrt{3}\sqrt{(-2x^3+9x-6)(3x-2)^3}} \tag{8.14}$$

8.5 连分式算法

本节内容节选自 **M.P.Chebyshev** 的一篇论文。

对于伪椭圆不定积分

$$\int \frac{x+A}{\sqrt{x^4+ax^3+bx^2+cx+e}}\mathrm{d}x \equiv \int \frac{x+A}{\sqrt{R(x)}}\mathrm{d}x$$

初等的情形至多只有一种 (A 相较于 $R(x)$ 固定)。此时我们对分母做连分式展开,

$$\sqrt{R(x)} = a_0(x) + \frac{1}{a_1(x)+}\frac{1}{a_2(x)+}\cdots \tag{8.15}$$

其中 a_0 是二次多项式，后面的 a_k 也是多项式，如果所有的 a_k 都是一次的，那么不存在 A 使得伪椭圆不定积分初等。

如果到达某个时刻，a_n 是二次的，那么令

$$\psi(x) = a_0(x) + \frac{1}{a_1(x)+}\frac{1}{a_2(x)+}\cdots\frac{1}{a_{n-1}(x)} \tag{8.16}$$

这样不定积分可解,

$$\int \frac{x+A}{\sqrt{R(x)}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\lambda}\ln\frac{\psi(x)+\sqrt{R(x)}}{\psi(x)-\sqrt{R(x)}} \tag{8.17}$$

其中 λ 是一个配平最高次项的常数。

若设 $\psi(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, 并且 $R(x)$ 是首一的。$A(x), B(x)$ 都是多项式，那么也可以写成

$$\int \frac{x+\left(\frac{A'(x)}{\deg(A(x))B(x)}-x\right)}{\sqrt{R(x)}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\deg(A(x))}\ln\left(A(x)+B(x)\sqrt{R(x)}\right) \tag{8.18}$$

例题 8.21 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1}+2)^2-12}}.$

解: 我们有:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1}+2)^2-12}} = \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+4x^3-6x^2+4x+1}}$$

然后试图展开

$$\sqrt{R(x)} = x^2 + 2x - 5 + \frac{12}{x+3+}\frac{-2}{x+2+}\frac{-3}{x+2+}\frac{-2}{x+3+}\frac{6}{x^2+2x-5+}\cdots$$

则

$$\begin{aligned}\psi(x) &= x^2 + 2x - 5 + \frac{12}{x+3+}\frac{-2}{x+2+}\frac{-3}{x+2+}\frac{-2}{x+3} \\ &= \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{x^6+12x^5+45x^4+44x^3-33x^2+43}{x^4+10x^3+30x^2+22x-11}\end{aligned}$$

然后就能得到一个有点夸张的结果：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1}+2)^2-12}} = \frac{1}{6}\ln\left(\begin{array}{c} x^6+12x^5+45x^4+44x^3-33x^2+43+ \\ (x^4+10x^3+30x^2+22x-11)\sqrt{(x+1)^4-12x}\end{array}\right) \tag{8.19}$$

第九章 简单的非初等积分

从此章开始，我们将要远离平静的初等不定积分海面！

在初次下潜之时，我认为应当遵循一些“求生”原则 (个人理解)：尽量联系定积分以及初等积分，尽量采用辐射更广的非初等定义，尽量在奇诡的不定积分野题里保持理性。

除此之外，我们应该谦逊地欣赏，这古老的未被驯服的灵与旧日智者的遗迹。(好像有点太中二了———)

9.1 菲涅尔积分

菲涅尔积分 **(Fresnel integral)** 定义为:

$$S\left(x\right)=\int\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x,C\left(x\right)=\int\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

9.2 Ei/Ci/Si

我们定义：

$$\mathrm{Ei}\left(x\right)=\int\frac{e^x}{x}\mathrm{d}x,\mathrm{Si}\left(x\right)=\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\mathrm{Ci}\left(x\right)=\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x \tag{9.2}$$

例题 9.1 求 $\int x\ln x\sin x\mathrm{d}x$.

解: 经过反复分部积分最终能得到

$$\begin{aligned}\int x\ln x\sin x\mathrm{d}x&=-x\ln x\cos x+\int\cos x\left(1+\ln x\right)\mathrm{d}x\\&=-x\ln x\cos x+\sin x\left(1+\ln x\right)-\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\\&=-x\ln x\cos x+\sin x\left(1+\ln x\right)-\mathrm{Si}\left(x\right)\end{aligned}$$

9.3 朗伯 W 函数

朗伯 W 函数的定义为：

$$W\left(x\right)e^{W(x)}=x \tag{9.3}$$

所定义的函数。它有两条分支在实数域。

例题 9.2 求 $\int W\left(x\right)\mathrm{d}x$.

解: 类似反函数的不定积分是简单的。

$$
\begin{aligned}
\int W(x)\,\mathrm{d}x &= \int W(x)\,\mathrm{d}\left(W(x)\,e^{W(x)}\right) \\
&= \int e^{W} W(1+W)\,\mathrm{d}W \\
&= e^{W}\left(W^2 - W + 1\right) \\
&= x\left(W(x) - 1\right) + e^{W(x)}
\end{aligned}
$$

第十章 指对双元

10.1 多重对数函数的引入

对对数函数 $\ln x$ 的积分处理往往都是利用分部积分公式来处理。这是因为某种意义上还没有定义其“积分”的函数，而是定义了其“微分”的函数。于是初等范围内的表达依赖于用求导处理对数函数。

那么如果在不定积分"d 的两端" 都出现了对数函数，利用分部积分公式可能就失效了！例如

$$\int \ln x \mathrm{d}\left(\ln\left(x+1\right)\right) = \ln x \ln\left(1+x\right) - \int \ln\left(1+x\right) \mathrm{d}\left(\ln x\right)$$

如果碰巧两边的对数函数一样，

$$\int \ln x \mathrm{d}\left(\ln x\right) = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

这样就有简单的初等表达了！这似乎和前面的双元积分有关系...

在双元积分里我们引入了反正切函数来表达，这里我们或许也可以试着引入一些函数。双元积分的核心在于 $x^2+y^2=c^2$. 而我们这里进行一些微调，$e^x+e^y=e^c$. 哦豁，那我们这里有 $e^x\mathrm{d}x = \pm e^y \mathrm{d}y$ 了，是熟悉的味道！

当然这里函数的定义是有很大随意性的，我们仍然遵循流行的符号减少麻烦。也就是说，定义**二重对数函数**：

$$\mathrm{Li}_2\left(x\right) = -\int_0^x \ln\left(1-x\right)\mathrm{d}\left(\ln x\right) \tag{10.1}$$

这么定义有一个显见的好处：

$$\mathrm{Li}_2\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} \tag{10.2}$$

函数的级数表达非常干净，另外这也是下标 2 的由来。

$$\mathrm{Li}_n\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^n} = \int_0^x \frac{\mathrm{Li}_{n-1}\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t \tag{10.3}$$

或者可以写成

$$\int \mathrm{Li}_{n-1}\left(\lambda e^x\right)\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_n\left(\lambda e^x\right) \tag{10.4}$$

有了这个定义就能解决一系列的不定积分了。

还有一个小小的细节，$\mathrm{Li}_2\left(x\right)$ 在 $x>1$ 的时候不是纯实数，带有一个虚部。

$$\mathrm{ImLi}_2\left(e^x\right) = -\pi x \quad \left(x>0\right) \tag{10.5}$$

除此之外，很多多重对数函数的恒等式以及恒等式会蕴含特殊值，在求定积分的时候有所体现。

10.2 简单的对数积分

那么我们开头那个积分如何算呢？

例题 10.1 求 $\int \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$

解: 这个只需在二重对数函数的定义里，做变换 $x \to -x$ 即可。

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_2(-x) \tag{10.6}$$

另外我们不难总结出下面的公式：

定理 10.1. 指对双元积分公式

对于指对双元 p, q，满足 $e^p \pm e^q = C$，我们有：

$$\int p\mathrm{d}q = \ln(e^p \pm e^q)\,q - \mathrm{Li}_2\left(\frac{\pm e^q}{e^p \pm e^q}\right) \tag{10.7}$$

我们需要注意有可能对数项引入了虚数，这其实不矛盾，因为和后面 Li 函数的虚部抵消了。

细致的读者在上面的验算过程中可以得到一个相关的经典恒等式：

命题 10.1. Li2 恒等式 1

若 $e^p + e^q = 1$，

$$\mathrm{Li}_2(e^p) + \mathrm{Li}_2(e^q) + pq = \mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6} \tag{10.8}$$

例题 10.2 求 $\int \frac{\ln(1-x^2)}{1+x}\mathrm{d}x$

解: 利用之前的公式即可。设 $s = \ln(1-x), t = \ln(1+x)$，则有 $e^s + e^t = e^{\ln 2}$ 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(1-x^2)}{1+x}\mathrm{d}x &= \int (s+t)\,\mathrm{d}t \\ &= t\ln 2 - \mathrm{Li}_2\left(e^{t-\ln 2}\right) + \frac{1}{2}t^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(1+x) + \ln 2\ln(1+x) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1+x}{2}\right)\end{aligned}$$

例题 10.3 求 **(From 苹果糖)** $\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{(e^x-1)^2}$.

解:(By 虚调子) 若设 $e^y = 1 - e^x$，先分部一次，

$$\int \frac{x^4 e^x \mathrm{d}x}{(e^x-1)^2} = \frac{x^4}{1-e^x} - 4\int \frac{x^3}{1-e^x}\mathrm{d}x \tag{10.9}$$

我们可以转化为之前的指对双元型：

$$\begin{aligned}\int\frac{x^n\mathrm{d}x}{1-e^x}&=\int\frac{x^ne^x\mathrm{d}x}{e^xe^y}=-\int\frac{x^n}{e^x}\mathrm{d}y\\&=-\int x^n\mathrm{d}y-\int x^n\frac{e^y}{e^x}\mathrm{d}y\\&=-\int x^n\mathrm{d}y+\int x^n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由引入的公式我们有

$$\int y\mathrm{d}x=-\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)\tag{10.10}$$

于是：

$$\begin{aligned}\int x^3\mathrm{d}y&=x^3y-3\int x^2y\mathrm{d}x\\&=x^3y+3\int x^2\mathrm{d}\left[\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)\right]\\&=x^3y+3x^2\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)-6\int\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)x\mathrm{d}x\\&=x^3y+3x^2\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)-6x\mathrm{Li}_3\left(e^x\right)+6\int\mathrm{Li}_3\left(e^x\right)\mathrm{d}x\\&=x^3y+3x^2\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)-6x\mathrm{Li}_3\left(e^x\right)+6\mathrm{Li}_4\left(e^x\right)\end{aligned}$$

回代即有：

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4e^x\mathrm{d}x}{\left(e^x-1\right)^2}&=\frac{x^4}{1-e^x}+4\left(\int x^3\mathrm{d}y-\int x^3\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{x^4}{1-e^x}-x^4+4x^3\ln\left|1-e^x\right|\\&+12x^2\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)-24x\mathrm{Li}_3\left(e^x\right)+24\mathrm{Li}_4\left(e^x\right)\end{aligned}$$

10.3 与 Li 函数相关的特殊函数

下面是一些可能为了使结果更简洁而出现的特殊函数，和 Li 函数有密不可分的关系。

10.3.1 Ti 函数

定义为

$$\mathrm{Ti}_n\left(x\right)=\mathrm{ImLi}_n\left(ix\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^kx^{2k+1}}{\left(2k+1\right)^n}\tag{10.11}$$

值得一提的是，

$$\mathrm{Li}_n\left(ix\right)=\frac{1}{2^n}\mathrm{Li}_n\left(-x^2\right)+i\mathrm{Ti}_n\left(x\right)\tag{10.12}$$

以及

$$\mathrm{Ti}_2\left(x\right)=\int\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x,\mathrm{Ti}_n\left(x\right)=\int\frac{\mathrm{Ti}_{n-1}\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x\tag{10.13}$$

值得一提的是特殊值

$$\mathrm{Ti}_2(1) = G \tag{10.14}$$

其中 G 是**卡塔兰常数**。

例题 10.4 求 $\displaystyle\int \frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int \frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = 2\mathrm{Ti}_2\left(\tan\frac{x}{2}\right) \tag{10.15}$$

10.3.2 χ 函数

χ 函数和 Ti 函数的关系就好像反正切与反双曲正切函数的关系一样：

$$\chi_n(ix) = i\mathrm{Ti}_n(x), \mathrm{Ti}_n(ix) = i\chi_n(x) \tag{10.16}$$

不定积分的定义也就是

$$\chi_2(x) = \int \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x \tag{10.17}$$

10.3.3 Cl 函数

Clausen 函数定义为

$$\mathrm{Cl}_n(\theta) = \mathrm{Im}\mathrm{Li}_n\left(e^{i\theta}\right) \tag{10.18}$$

不定积分的定义是，

$$\mathrm{Cl}_2(\theta) = -\int_0^\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta \tag{10.19}$$

其他的定义还有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}_2(\theta) &= \int_0^1 \arctan\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ &= \int_1^\infty \frac{\sin\theta\cdot\ln x}{x^2-2x\cos\theta+1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n\theta)}{n^2}\end{aligned}$$

值得一提的是特殊值

$$\mathrm{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = G \tag{10.20}$$

推论 10.1. 对数积分相关公式 1

$$\int \ln\left(\sin^2 x - \sin^2\alpha\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{Cl}_2(2\alpha-2x) - \mathrm{Cl}_2(2\alpha+2x) - 4x\ln 2}{2}, |x| \le |\alpha| \tag{10.21}$$

推论 10.2. 反正切积分相关公式 1

$$\int \frac{x}{\tan x} \mathrm{d}x = x \ln(2\sin x) + \frac{1}{2}\mathrm{Cl}_2(2x) \tag{10.22}$$

推论 10.3. 对数积分相关公式 2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Cl}_2(2\theta) + \mathrm{Cl}_2(2\omega) + \mathrm{Cl}_2(2\phi) - 2\mathrm{Cl}_2(\theta)\right) \tag{10.23}$$

其中：

$$\theta = \arccos\frac{1-a^2}{1+a^2}, \omega = \arctan\left(\frac{(x+a)\sin\theta}{(x-a)-(x+a)\cos\theta}\right), \phi = \pi - \theta - \omega \tag{10.24}$$

10.3.4 $\mathrm{Li}_2(r,\theta)$ 函数

我们定义

$$\mathrm{Li}_2(r,\theta) = -\frac{1}{2}\int_0^r \frac{\ln\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)}{r}\mathrm{d}r \tag{10.25}$$

有简单的特殊值

$$\mathrm{Li}_2(r,0) = \mathrm{Re}\mathrm{Li}_2(r), \mathrm{Li}_2\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(-r^2\right) \tag{10.26}$$

我们有结论

命题 10.2. 反正切碰上反正切

$$\int \frac{\arctan(kx)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left[\frac{(1+k)x}{\sqrt{1+x^2}}, \arctan\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left[\frac{(1-k)x}{\sqrt{1+x^2}}, \arctan\frac{1}{x}\right] \tag{10.27}$$

如果带入特殊的上下限，我们有：

$$\int_0^\infty \frac{\arctan kx}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\frac{\mathrm{Li}_2(1+k) - \mathrm{Li}_2(1-k)}{2} = \frac{\pi^2}{8} - \chi_2\left(\frac{1-k}{1+k}\right) \tag{10.28}$$

10.4 一些杂例

首先是一些简单定积分的不定积分结果：

命题 10.3. 指对碰上三角 1

$$\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln(1+x)\arctan x - \frac{1}{2}\mathrm{Ti}_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Ti}_2\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Ti}_2(x) \tag{10.29}$$

取相反数可以得到关于 $\ln(1-x)$ 的结果。

证明 略

命题 10.4. 指对碰上三角 2

$$\int \frac{x\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\mathrm{Li}_2\left(-x^2\right)+\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-x)+\frac{1}{8}\ln^2\left(1+x^2\right) \tag{10.30}$$

证明 略

下面一般是用来钓鱼的题，不过在引入多重对数函数后还是可以解的。

例题 10.5 求

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x \tag{10.31}$$

解：(By 虚调子) 先换元 $x=\sin t$, 则

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int \frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t}\mathrm{d}t+\int \frac{\ln(\cos t)}{\tan t}\mathrm{d}t \tag{10.32}$$

分别求解

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t}\mathrm{d}t&=\int \frac{\ln(1+u)}{u\left(1+u^2\right)}\mathrm{d}u\\
(u=\tan t)&=\int \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u-\int \frac{u\ln(1+u)}{1+u^2}\mathrm{d}u\\
&=-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-u)-\frac{1}{8}\mathrm{Li}_2\left(-u^2\right)-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(\frac{-2u}{1+u^2}\right)-\frac{1}{8}\ln^2\left(1+u^2\right)\\
\int \frac{\ln(\cos t)}{\tan t}\mathrm{d}t&=\int -\frac{v\ln v}{1-v^2}\mathrm{d}v\\
(v=\cos t)&=\frac{1}{4}\int \frac{-\ln\left(v^2\right)}{1-v^2}\mathrm{d}\left(v^2\right)\\
&=-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(1-v^2\right)
\end{aligned}$$

然后再回代即可

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-\tan t)-\frac{1}{8}\mathrm{Li}_2\left(-\tan^2 t\right)-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2(-\sin 2t)\\
&-\frac{1}{2}\ln^2(\cos t)-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(\sin^2 t\right)\\
&=-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(x^2\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{1}{8}\mathrm{Li}_2\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\\
&-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(-2x\sqrt{1-x^2}\right)-\frac{1}{8}\ln^2\left(1-x^2\right)
\end{aligned}$$

第 十一 章 三元与椭圆积分

11.1 椭圆积分简介

椭圆积分算是一类很常见的特殊函数了，在不定积分中还是有存在感的。一般定义 (来自 **Legendre**) 如下：

第一类不完全椭圆积分：

$$F\left(x;k\right)=\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^{2}\right)\left(1-k^{2}x^{2}\right)}} \tag{11.1}$$

$$F\left(\phi,k\right)=\int_{0}^{\phi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}} \tag{11.2}$$

第二类不完全椭圆积分：

$$E\left(x;k\right)=\int_{0}^{x}\sqrt{\frac{1-k^{2}x^{2}}{1-x^{2}}}\mathrm{d}x \tag{11.3}$$

第三类不完全椭圆积分：

$$\pi\left(x;n,k\right)=\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-nx^{2}\right)\sqrt{\left(1-x^{2}\right)\left(1-k^{2}x^{2}\right)}} \tag{11.4}$$

个人认为这类符号在不定积分的使用是有瑕疵的。首先限制了根号下的因式对 x 只能成实圆关系。然后同一函数有相当多的不同函数名的等价表达。然后也限制参数的范围，这给更多的不定积分拒之门外.

再让我们看看 **Weierstrass** 的定义：

$$x=\int_{0}^{\wp(x)}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{4z^{3}-g_{2}z-g_{3}}} \tag{11.5}$$

换句话说，我们定义如下微分方程的解：

$$\wp'\left(x\right)^{2}=4\wp\left(x\right)^{3}-g_{2}\wp\left(x\right)-g_{3} \tag{11.6}$$

这个形式方便做积分，因为在此基础上我们还定义了

$$\int_{0}^{z}\wp\left(z\right)-\frac{1}{z^{2}}\mathrm{d}z=-\zeta\left(z\right)+\frac{1}{z},\zeta'\left(z\right)=-\wp\left(z\right) \tag{11.7}$$

这是外氏椭圆积分的不定积分。以及

$$\int_{0}^{z}\zeta\left(z\right)-\frac{1}{z}\mathrm{d}z=\ln\frac{\sigma\left(z\right)}{z},\sigma'\left(z\right)=\sigma\left(z\right)\zeta\left(z\right) \tag{11.8}$$

由于是二阶微分方程，再上一层就不用定义了。

11.2 椭圆积分的三元转化

本章介绍几种常见的三元形式。首先三元是继承之前的双元模式，双元中区分不同符号的思路是，虚圆和实圆关系。但是这里，我们将不止两种。

若考虑 $\int \frac{p}{qr}\cdot q\mathrm{d}q$(其中字母都互为双元),此时我们可以称之为三元。如果类似 $\int \frac{p\mathrm{d}q}{qr}$ 这种，我们会发现可以退化为双元解决 (如何操作？见后)。而前者是无法退化的，所以那是我们将要讨论的 (货真价实的) 三元！

后者可以称之为伪三元，前面的双元例题中我们其实也遇到过很多次了。下文中的三元将默认指的是前者这种无法退化的情形。

那么如何更准确的判定呢？

定理 11.1. 三元判定定理

对于形如 $\int p^a q^b r^{c-1}\mathrm{d}r$ 的三元积分，当且仅当 $a+b+c$ 是偶数时可以退化为双元积分。

证明 若为偶数，不妨设 $Ap^2+B=Cq^2+D=r^2$，那么我们有

$$\frac{ADp^2-BCq^2}{D-B}=r^2 \tag{11.9}$$

这意味着：$\sqrt{\left|\frac{AD}{D-B}\right|}\frac{p}{r},\sqrt{\left|\frac{BC}{D-B}\right|}\frac{q}{r}$ 构成了双元。如果我们带入积分：

$$\begin{aligned}
\int p^a q^b r^{c-1}\mathrm{d}r &= \int p^a q^{b+3} r^{c-1}\frac{\mathrm{d}r}{q^3}\\
&\sim \int \left(\frac{p}{r}\right)^a\left(\frac{q}{r}\right)^{b+3} r^{c-a-b-4}\mathrm{d}\left(\frac{r}{q}\right)\\
&= \int \left(\frac{p}{r}\right)^a\left(\frac{q}{r}\right)^{b+3}\left[\begin{array}{c}\frac{AD}{D-B}\left(\frac{p}{r}\right)^2\\ +\frac{BC}{D-B}\left(\frac{q}{r}\right)^2\end{array}\right]^{\frac{c-a-b-4}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{r}{q}\right)
\end{aligned}$$

便成为了一个双元积分。目的已经达到。

所以我们更关注那些奇次型，其中奇次型中最简单的也就是-1 次和 1 次。如你所见，第一类、第二类椭圆积分恰好分别就是-1 次与 1 次，前人还是有所考虑的。

对比双元中的 2 次与 0 次：$\int y\mathrm{d}x,\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$，他们之间存在一定关系：2 次可以提取出 0 次。见前文的双元点火公式相关。事实上，我们这里第一类也是可以转化为第二类椭圆积分的 (如何转化？)。

例题 11.1 求 $\int\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$

解: 若置 $y=\sqrt{b^2-x^2},z=\sqrt{a^2+x^2}$，这是最简单的三元情形。我们有很多条路来

走：(一)

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{y\mathrm{d}x}{z}=\int\frac{xy\mathrm{d}x}{xz}=-\int\frac{y^2\mathrm{d}y}{xz}\\&=\int\frac{\left(a^2+b^2\right)x^2-b^2z^2}{a^2xz}\mathrm{d}y\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}\int\frac{x\mathrm{d}y}{z}-\frac{b^2}{a^2}\int\frac{z\mathrm{d}y}{x}\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}\int\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{a^2+b^2-y^2}}\mathrm{d}y-...\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}bE\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)-\frac{b^2}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}E\left(\frac{z}{b};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\end{aligned}$$

(二)

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{y\mathrm{d}x}{z}=-\int\frac{y^2\mathrm{d}y}{xz}\\&=\int\frac{z^2-\left(a^2+b^2\right)}{xz}\mathrm{d}y\\&=\int\frac{z\mathrm{d}y}{x}-\left(a^2+b^2\right)\int\frac{\mathrm{d}y}{xz}\\&=bE\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)-\frac{\left(a^2+b^2\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}F\left(\frac{y}{b};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\end{aligned}$$

综上我们可以看出：

结论 第一类椭圆积分可以向第二类转化：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{AB}=\int\frac{A^2-B^2\mathrm{d}x}{AB\left(b^2-a^2\right)}&=\frac{1}{a}F\left(\frac{x}{b};\frac{b}{a}\right)\\&=\frac{1}{b^2-a^2}\left[aE\left(\frac{x}{b};\frac{b}{a}\right)-bE\left(\frac{x}{a};\frac{a}{b}\right)\right]\end{aligned}$$

而且若将下限均取为 0，两者相差的常数则为 0. 如果使用流行的符号就是：

$$\left(\lambda^2-1\right)F\left(x;\lambda\right)=E\left(x;\lambda\right)-\lambda E\left(\lambda x;\frac{1}{\lambda}\right)\tag{11.10}$$

接下来讨论符号的问题。

如果把 $A=\sqrt{a^2-x^2},B=\sqrt{b^2-x^2},x$ 三元的符号简写为 $-,-,+$，**符号相反的两项成实圆，相同的两项成虚圆**。那么上面的例题显示，$-,+,+$ 可以分解成几个 $-,-,+$。唔这种分解完全是因为只有 $-,-,+$ 才有配套的符号表示。

哦豁，那我们重新建一套符号吧。先别急！

再看看，如果对于 $\int\sqrt{\frac{a^2+x^2}{b^2-x^2}}\mathrm{d}x$, 我们可以利用一个简单的双元变换：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b^2-x^2}}=-\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{b^2-x^2}\right)}{x}$$

，使得 $+,+,-$ 可以变换为 $+,-,+$，这对于符号的定义来说，等价于 $-,+,-$。

11.3 与高次双元的关系

第十二章 微分方程引领的不定积分

12.1 齐次微分方程

定理 12.1. 二阶方程积分公式

若 y 满足微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$，我们有：

$$\int e^{\int p\mathrm{d}x}\left(h'' + ph' + qh\right) y\mathrm{d}x = e^{\int p\mathrm{d}x}\left(h'y - hy'\right) \tag{12.1}$$

其中 h 是任意关于 x 的函数。 ♡