矩阵分析与应用作业 5

潘澳旋

6. 空间 V 上恒等映射下的不变子空间

解 根据不变子空间的定义，在恒等映射下所有的子空间都是不变子空间，如像空间、核空间等。

7. Let $\mathbf{T}$ be the linear operator on $\Re^4$ defined by

$$\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4,\ x_2 + x_4,\ 2x_3 - x_4,\ x_3 + x_4),$$

and let $\mathcal{X} = span\{e_1, e_2\}$ be the subspace that is spanned by the first two unit vectors in $\Re^4$.

(a) Explain why $\mathcal{X}$ is invariant under $\mathbf{T}$.

(b) Determine $\left[\mathbf{T}_{/\mathcal{X}}\right]_{\{e_1,e_2\}}$.

(c) Describe the structure of $[\mathbf{T}]_{\mathcal{B}}$, where $\mathcal{B}$ is any basis obtained from an extension of $\{e_1, e_2\}$.

解 a. 线性算子 T 分别作用于 e_1、e_2，得: $T(e_1) = e_1 \in X, T(e_2) = e_1 + e_2 \in X$，对于 $x = ae_1 + be_2 \in X$，经过 T 作用后 $T(x) = (a+b)e_1 + be_2 \in X$，因此空间 X 是线性算子 T 下的不变子空间。

b. 由 $T(e_1) = e_1 \in X, T(e_2) = e_1 + e_2 \in X$ 得 $[T_{/X}]_{[e_1,e_2]}$=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

c. 设 $B = e_1, e_2, u_1, u_2$，则 $[T_B] = ([T_{e_1}], [T_{e_2}], [T_{u_1}], [T_{u_2}])$，结合 b 知 $[T_B] =$

$$\begin{pmatrix} [T_{/X_{(e_1,e_2)}}] & B_{2x2} \\ 0 & C_{2x2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & B_{2x2} \\ 0 & 1 & \\ & 0 & C_{2x2} \end{pmatrix} \tag{3}$$