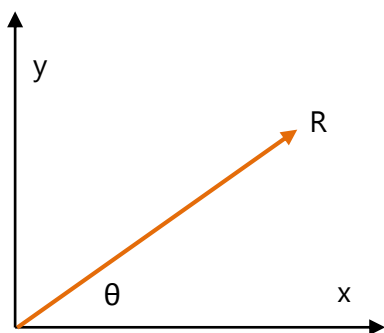


KINEMATIKA GERAK DENGAN ANALISIS VEKTOR

A. PENDAHULUAN

- Dalam vektor** terdapat dua komponen utama, yaitu komponen horizontal (sumbu x) dan komponen vertikal (sumbu y).
- Kedua komponen vektor** tersebut memiliki resultan yang memiliki arah yang merupakan akar dari jumlah kuadrat komponen x dan y.
- Cara menentukan** komponen-komponen vektor:



$$x = R \cos \theta$$

$$y = R \sin \theta$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

B. POSISI DAN PERPINDAHAN PARTIKEL

- Posisi (r)** merupakan kedudukan benda terhadap titik acuan.
- Posisi** dapat dinyatakan dengan vektor-vektor satuan, pada sumbu x ditulis \mathbf{i} , dan sumbu y ditulis \mathbf{j} .

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Perpindahan ($\Delta \mathbf{r}$)** adalah perubahan posisi benda dalam waktu tertentu.

- Perpindahan** dapat dirumuskan:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

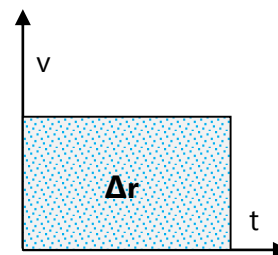
$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}$$

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

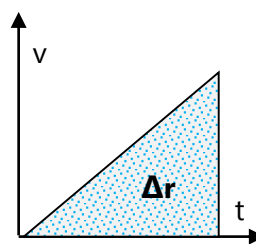
dengan arah perpindahan:

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

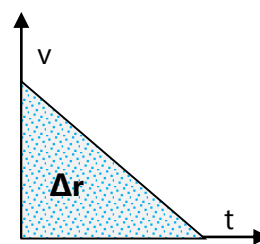
- Grafik perpindahan** dalam berbagai macam gerak terhadap kecepatan dan waktu:



v konstan



v dipercepat



v diperlambat

C. KECEPATAN PARTIKEL

- Kecepatan rata-rata (v)** adalah hasil bagi perpindahan dengan waktu tempuhnya.

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

dengan arah kecepatan:

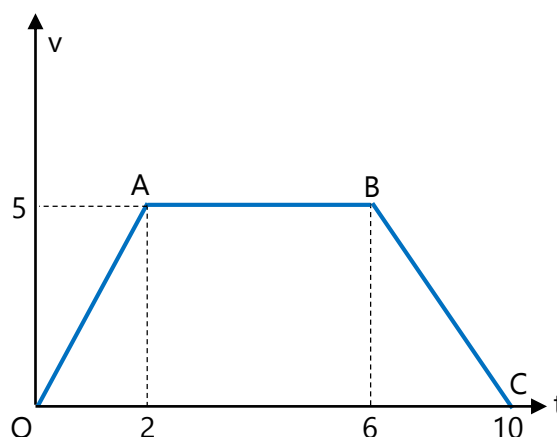
$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

- Kecepatan sesaat** adalah kecepatan rata-rata untuk Δt mendekati nol.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{\mathbf{v}}$$

- Kecepatan sesaat** dengan pendekatan grafik:

Contoh:



Untuk $0 \leq t \leq 2$ (garis OA):


$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_A - x_0}{t_A - t_0}$$

Untuk $2 \leq t \leq 6$ (garis AB):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$

Untuk $6 \leq t \leq 10$ (garis BC):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_C - x_B}{t_C - t_B}$$

 **Kecepatan sesaat** merupakan turunan pertama fungsi posisi.

$$v = r' = \frac{dr}{dt}$$

Turunan sederhana:


$$r = x^n$$

$$r' = n \cdot x^{n-1}$$

Contoh: Tentukan fungsi kecepatan sesaat dari fungsi $r = 4t^2 + 5t + 1$!

$$r' = 2 \cdot 4 \cdot t^{(2-1)} + 1 \cdot 5 \cdot t^{(1-1)} + 0.1$$

$$v = 8t + 5 \text{ m/s}$$

 **Posisi partikel** dapat ditentukan menggunakan integral dari fungsi kecepatan.

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_x \cdot dt$$

$$x - x_0 = \int_0^t v_x \cdot dt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t v_y \cdot dt$$

$$y - y_0 = \int_0^t v_y \cdot dt$$


$$x = x_0 + \int_0^t v_x \cdot dt$$

$$y = y_0 + \int_0^t v_y \cdot dt$$

lalu dapat dicari resultannya, atau:

$$r = r_0 + \int_0^t v \cdot dt$$

D. PERCEPATAN PARTIKEL

 **Percepatan rata-rata (a)** adalah perubahan kecepatan dalam waktu tertentu.


$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$a = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}$$


$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

dengan arah percepatan:

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

 **Percepatan sesaat** adalah kecepatan rata-rata untuk Δt mendekati nol.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}$$

 **Percepatan sesaat** merupakan turunan pertama fungsi kecepatan dan turunan kedua fungsi posisi.

$$a = r'' = \frac{dv}{dt} = \frac{dr'}{dt}$$

Turunan sederhana:

$$r = x^n$$

$$r'' = n(n-1) \cdot x^{n-2}$$


Contoh: Tentukan fungsi kecepatan dan percepatan dari fungsi $r = 2t^2 + 3t - 5$!

$$r' = 2 \cdot 2 \cdot t^{(2-1)} + 1 \cdot 3 \cdot t^{(1-1)} + 0.1$$

$$v = 4t + 3 \text{ m/s}$$

$$r'' = 1 \cdot 4 \cdot t^{(1-1)} + 0.3$$

$$a = 4 \text{ m/s}^2$$

 **Kecepatan** dapat ditentukan menggunakan integral dari fungsi percepatan.

$$a = \frac{dv}{dt}$$


$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a \cdot dt$$


$$v - v_0 = \int_0^t a \cdot dt$$


$$v = v_0 + \int_0^t a \cdot dt$$

lalu dapat dicari resultannya.

E. GERAK LURUS DAN GERAK MELINGKAR

 **Gerak lurus** adalah gerak yang dipengaruhi oleh kecepatan linear, sedangkan **gerak melingkar** dipengaruhi oleh kecepatan sudut.


 **Gerak lurus berubah beraturan (GLBB)** adalah gerak yang dipengaruhi oleh kecepatan linear dan percepatan linear konstan, sedangkan **gerak melingkar berubah beraturan (GMBB)** dipengaruhi oleh kecepatan sudut dan percepatan sudut konstan.

 **Hubungan** gerak lurus (translasi/linear) dengan gerak melingkar (rotasi):


Besaran	Linear	Rotasi	Hub.
Perpindahan	r (m)	θ (rad)	$r = \theta \cdot R$
Kecepatan	v (m/s)	ω (rad/s)	$v = \omega \cdot R$
Percepatan	a (m/s ²)	α (rad/s ²)	$a = \alpha \cdot R$

 **Hubungan** GLBB dengan GMBB:

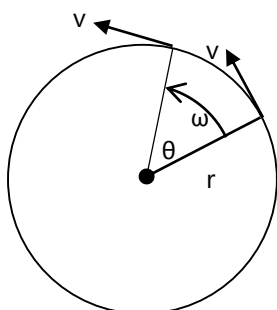
GLBB	GMBB
$v = v_0 + a.t$	$\omega = \omega_0 + a.t$
$s = v_0.t + \frac{1}{2}a.t^2$	$\theta = \omega_0.t + \frac{1}{2}\alpha.t^2$
$v_t^2 - v_0^2 = 2as$	$\omega_t^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$


 **Hubungan** GLBB dengan GMBB dengan analisis vektor:

GLBB	GMBB
$v = \frac{dr}{dt}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt}$	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
$r = r_0 + \int_0^t v.dt$	$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega.dt$
$v = v_0 + \int_0^t a.dt$	$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha.dt$

 **Gerak melingkar berubah beraturan** dipengaruhi oleh:

- Kecepatan linear
- Kecepatan angular/sudut
- Percepatan tangensial/linear
- Percepatan sentripetal




 **Kecepatan linear** pada GMBB arahnya menuju arah gerak benda (lurus) yaitu menyinggung lintasan gerakan, dimana lintasannya berupa busur/keliling lingkaran. dapat dirumuskan:

$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$v = \frac{2\pi r}{T}$	$v = 2\pi r f$
---------------------------------	------------------------	----------------

r = jari-jari lingkaran (m)

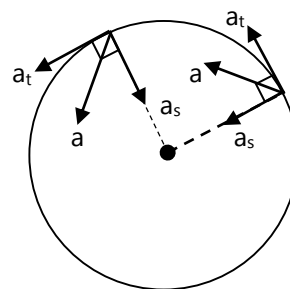
T = periode (s)

f = frekuensi (1/s)

 **Kecepatan angular/sudut** pada GMBB arahnya menuju arah putaran benda (melingkar) yaitu berupa perubahan besar sudut busur lingkaran.

dapat dirumuskan:

$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega = 2\pi f$
---	---------------------------	-------------------



 **Percepatan tangensial/linear** pada GMBB:

- Arahnya searah dengan garis singgung lingkaran.
 - Arahnya sejajar dengan kecepatan linear.
 - Arahnya tegak lurus dengan percepatan sentripetal.
 - Mengubah besar kecepatan total benda.
- dapat dirumuskan:

$a_t = \alpha.r$	$a_t = \frac{dv}{dt}$
------------------	-----------------------

 **Percepatan sentripetal** pada GMBB:


- Arahnya menuju pusat lingkaran.
- Arahnya tegak lurus dengan percepatan tangensial.
- Mengubah arah kecepatan total benda (menuju pusat).

dapat dirumuskan:

$a_s = \frac{v^2}{r}$	$a_s = \omega^2.r$
-----------------------	--------------------

menghasilkan gaya sentripetal:

$F_s = \frac{mv^2}{r}$	$F_s = m.\omega^2.r$
------------------------	----------------------

 **Percepatan total** adalah perpaduan antara percepatan tangensial dan percepatan sentripetal, dapat dirumuskan:

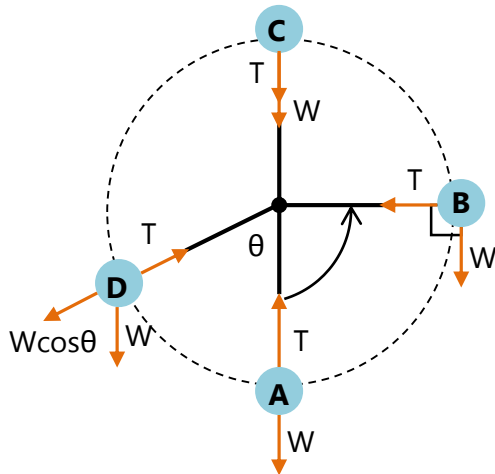
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_s^2}$$

dengan arah percepatan total:

$$\tan \theta = \frac{a_t}{a_s}$$

Beberapa contoh gerak melingkar:

Gerak melingkar vertikal dengan tali



Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$T \pm W \cos \theta = F_s$$

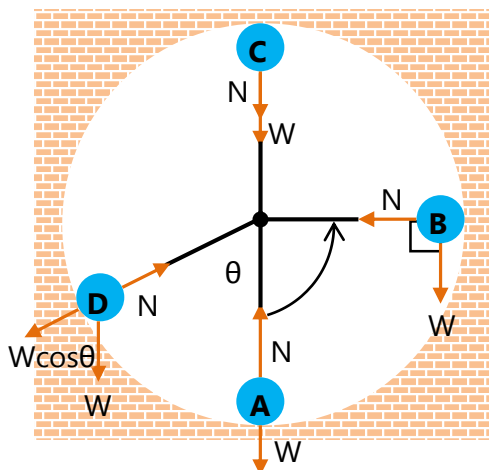
Kecepatan minimum yang dibutuhkan agar benda dapat mencapai titik B dari A adalah:

$$v_{\min} = \sqrt{2 \cdot g \cdot r}$$

Kecepatan minimum yang dibutuhkan agar benda berputar satu lingkaran penuh:

$$v_{\min} = \sqrt{5 \cdot g \cdot r}$$

Gerak melingkar vertikal di dalam bidang lingkaran



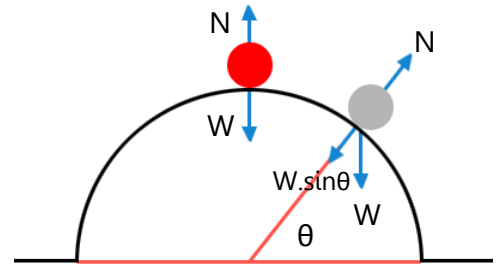
Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$N \pm W \cos \theta = F_s$$

Kecepatan minimum pada C agar benda tidak meninggalkan lintasan:

$$v_{\min} = \sqrt{g \cdot r}$$

Gerak melingkar vertikal di luar bidang lingkaran



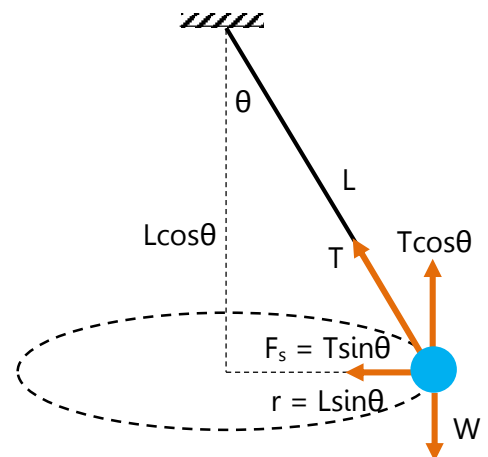
Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$N - W \sin \theta = -F_s$$

Kecepatan minimum agar benda tidak meninggalkan lintasan:

$$v_{\max} = \sqrt{g \cdot r}$$

Ayunan konis



Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$W = T \cos \theta$$

$$F_s = T \sin \theta$$

$$T = \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

Kecepatan maksimum agar tali tidak putus:

$$v_{\max} = \sqrt{g \cdot r \cdot \tan \theta}$$

Gerak melingkar horizontal dengan tali



Gaya sentripetal pada gerak ini berupa tegangan tali yang menahan benda agar tetap berada pada lintasannya.

Persamaan umum yang dapat dibentuk:

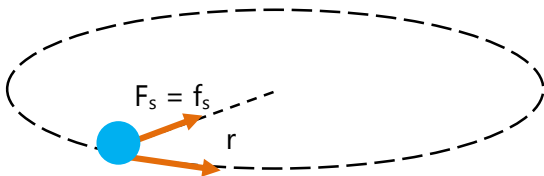
$$F_s = T$$

$$T = \frac{mv^2}{r}$$

Kecepatan maksimum agar tali tidak putus:

$$V_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{T_{\text{maks}} \cdot r}{m}}$$

Gerak melingkar horizontal tanpa tali



Gaya sentripetal pada gerak ini berupa gaya gesek statis yang menahan benda agar tidak tergelincir sewaktu berputar.

Persamaan umum yang dapat dibentuk:

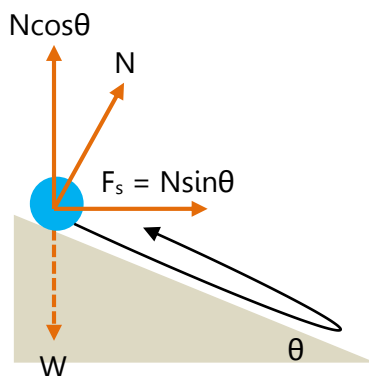
$$F_s = f_s$$

$$\frac{mv^2}{r} = \mu_s \cdot N$$

Kecepatan maksimum agar benda tidak meninggalkan lintasan:

$$V_{\text{maks}} = \sqrt{\mu_s \cdot g \cdot r}$$

Gerak melingkar pada bidang miring atau velodrom



Persamaan umum yang dapat dibentuk:

$$N = \frac{mg}{\cos \theta}$$

$$F_s = mg \tan \theta$$

Kecepatan maksimum agar benda tidak meninggalkan lintasan dapat dirumuskan:

$$V_{\text{maks}} = \sqrt{g \cdot r \cdot \tan \theta}$$

$$V_{\text{maks}} = \sqrt{\mu_s \cdot g \cdot r}$$