

MODUL RELASI DAN FUNGSI



MATEMATIKA WAJIB
KELAS 10 MIPA/IPS

RELASI DAN FUNGSI

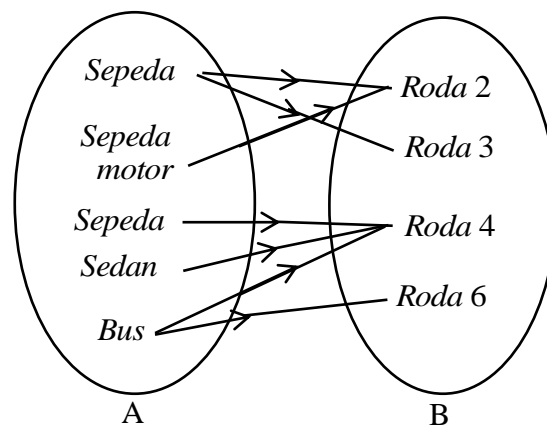
A. Pengertian Relasi dan Fungsi

Banyak fenomena atau kejadian alam yang dapat dihubungkan dengan suatu relasi. Sebagai contoh, misalkan diberikan dua himpunan :

$A = \{\text{sepeda, sepeda motor, sedan, angkot, bus}\}$

$B = \{\text{roda dua, roda tiga, roda empat, roda enam}\}$

Bagaimanakah hubungan antara himpunan A (jenis kendaraan) dan himpunan B (banyaknya roda kendaraan) ? Untuk menggambarannya, dapat dilihat pada diagram berikut ini :



Aturan yang menghubungkan himpunan A dan himpunan B yakni banyaknya roda untuk setiap kendaraan yang diberikan, merupakan suatu relasi. Jadi relasi didefinisikan sebagai berikut :

Relasi dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu aturan yang menghubungkan elemen-elemen pada himpunan A ke elemen-elemen pada himpunan B.

Dalam hal ini A dinamakan himpunan daerah asal (domain) dan B dinamakan himpunan daerah Kawan (kodomain).

Terdapat empat cara menyatakan relasi, yakni :

- (1) Dengan diagram panah.
- (2) Dengan himpunan pasangan terurut.
- (3) Dengan grafik
- (4) Dengan Persamaan (Ekspresi Simbolik)

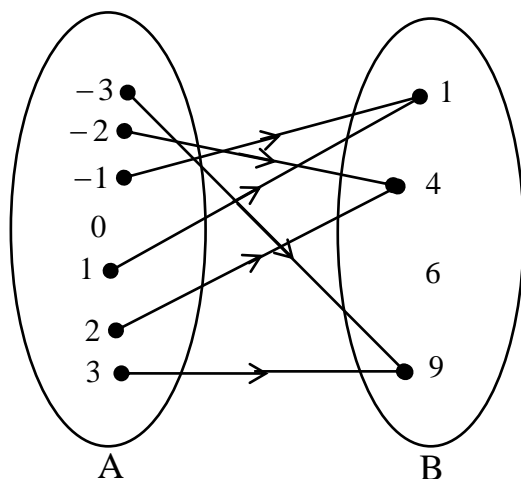
Berikut ini akan diuraikan keempat cara menyatakan relasi, dalam bentuk contoh soal

01. Misalkan $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 4, 6, 9\}$

Jika x adalah elemen A dan y adalah elemen B , dan berlaku hubungan $y = x^2$.

Maka gambarkanlah relasi dari A ke B dalam bentuk diagram panah

Jawab



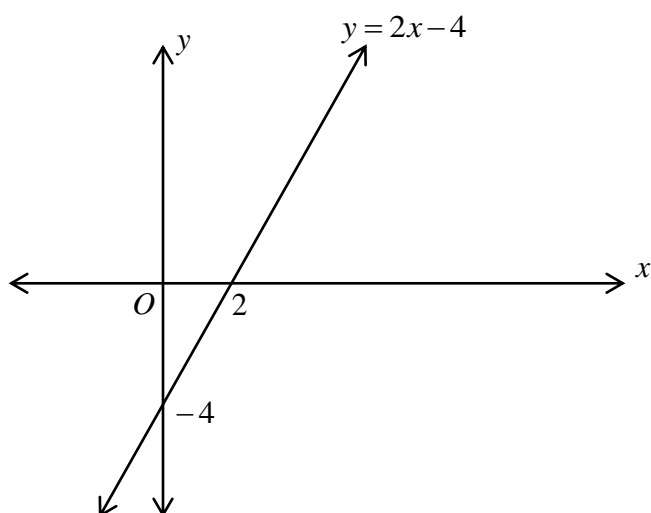
02. Misalkan $A = \{2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{3, 4, 5\}$ Jika x adalah elemen A dan y adalah elemen B , serta berlaku hubungan x kurang dari y , maka nyatakanlah relasi dari A ke B dalam bentuk pasangan berurutan

Jawab

$\{(2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

03. Diketahui A adalah himpunan bilangan real dan B juga himpunan bilangan real. Jika x adalah elemen A dan y elemen B , serta berlaku hubungan $y = 2x - 4$, maka nyatakanlah relasi dari A ke B dalam bentuk grafik

Jawab



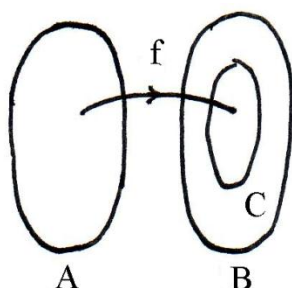
Sumbu-X sebagai daerah asal
Dan sumbu-Y sebagai daerah kawan

04. Diketahui A adalah himpunan bilangan real dan B juga himpunan bilangan real. Jika x adalah elemen A dan y elemen B, serta berlaku hubungan “Nilai y lebih 4 dari kebalikannya x”, maka nyatakanlah relasi dari A ke B dalam bentuk persamaan

Jawab

$$y = \frac{1}{x} + 4$$

Dalam kehidupan ini, terdapat banyak sekali relasi yang menghubungkan suatu kelompok (himpunan) ke kelompok lain. Sebagai contoh antara himpunan orang tua dan himpunan anak-anak, kelompok hewan predator dan kelompok hewan mangsanya, dan lain-lain. Namun secara garis besar, relasi-relasi tersebut dapat dibagi menjadi dua macam, yakni fungsi dan bukan fungsi. Jika A dan B adalah himpunan yang terdefinisi, maka fungsi f dari A ke B ialah suatu relasi khusus yang memetakan setiap x anggota A ke tepat satu y anggota B



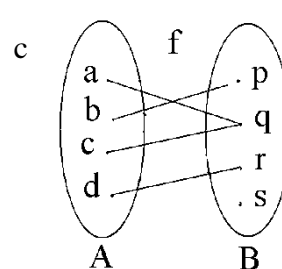
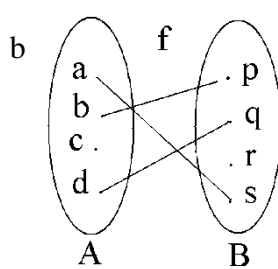
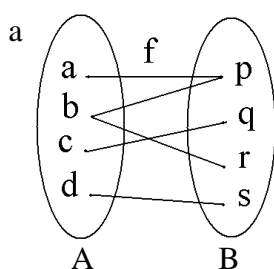
Himpunan A dinamakan daerah asal (Domain), dilambangkan dengan D_f

Himpunan B dinamakan daerah kawan (kodomain), dilambangkan dengan K_f

Himpunan C dinamakan daerah hasil (Range) dilambangkan dengan R_f yaitu himpunan unsur-unsur pada B yang mempunyai pasangan dari A

Untuk lebih jelasnya membedakan fungsi dan bukan fungsi, ikutilah contoh soal berikut ini :

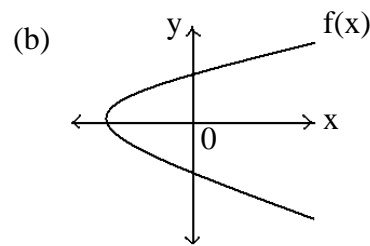
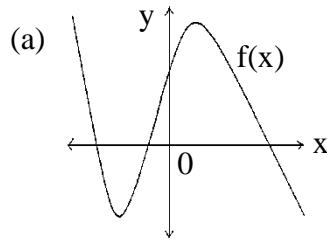
01. Manakah diantara relasi yang digambarkan dalam bentuk diagram panah berikut ini yang merupakan fungsi



Jawab

- (a) Bukan fungsi karena ada cabang (unsur c) di daerah asal
- (b) Bukan fungsi karena ada sisa (unsur c) pada daerah asal
- (c) Fungsi

02. Manakah diantara relasi yang digambarkan dalam bentuk grafik berikut ini yang merupakan fungsi



Jawab

(a) fungsi

(b) Bukan fungsi karena ada sisa dan cabang pada daerah asal

03. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$. Manakah diantara relasi yang digambarkan dalam bentuk pasangan berurutan berikut ini merupakan fungsi

(a) $f:A \rightarrow B = \{(2, 1), (4, 3), (3, 1), (1, 3), (4, 2)\}$

(b) $f:A \rightarrow B = \{(1, 3), (4, 1), (3, 2)\}$

(c) $f:B \rightarrow A = \{(2, 4), (3, 1), (1, 2)\}$

(d) $f:B \rightarrow A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$

(e) $f:A \rightarrow A = \{(1, 4), (3, 1), (2, 2), (4, 3)\}$

Jawab

(a) Bukan fungsi karena ada cabang (unsur 4) di daerah asal A

(b) Bukan fungsi karena ada sisa (unsur 2) pada daerah asal A

(c) Fungsi

(d) Fungsi

04. Tentukan daerah asal alamiah dari setiap fungsi berikut ini :

(a) $f(x) = \frac{4x+5}{3x-9}$

(b) $f(x) = \sqrt{4x-8}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

(d) $f(x) = 4x - 12$

Jawab

(a) $f(x) = \frac{4x+5}{3x-9}$

Syarat : $3x - 9 \neq 0$

$3x \neq 9$

$x \neq 3$

Daerah asal : $D_f = \{x \mid x \in \text{Real}, x \neq 3\}$

(b) $f(x) = \sqrt{4x-8}$

Syarat : $4x - 8 \geq 0$

$4x \geq 8$

$x \geq 2$

Daerah asal : $D_f = \{x \mid x \in \text{Real}, x \geq 2\}$

$$(c) f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$$

$$\text{Syarat : } x^2 - 7x + 10 \geq 0$$

$$(x - 5)(x - 2) \geq 0$$

$$x_1 = 1 \text{ dan } x_2 = 2$$

$$\text{sehingga : } x \leq 2 \text{ atau } x \geq 5$$

$$\text{Daerah asal : } D_f = \{x \mid x \in \text{Real}, x \leq 2 \text{ atau } x \geq 5\}$$

$$(d) f(x) = 4x - 12$$

Fungsi linier terdefinisi untuk semua bilangan real

$$\text{Daerah asal : } D_f = \{x \mid x \in \text{Real}\}$$

05. Tentukanlah daerah hasil dari setiap fungsi berikut ini :

$$(a) f(x) = 2x + 5 \quad \text{untuk } D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$$

$$(b) f(x) = x^2 - 2x - 8 \quad \text{untuk } D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$$

$$(c) f(x) = x^2 - 8x + 15 \quad \text{untuk } D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$$

Jawab

$$(a) f(x) = 2x + 5$$

untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$ diperoleh :

$$x = -3 \text{ maka } f(-3) = 2(-3) + 5 = -1$$

$$x = 3 \text{ maka } f(3) = 2(3) + 5 = 11$$

$$\text{Jadi } R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 11\}$$

$$(b) f(x) = x^2 - 2x - 8$$

untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$ diperoleh :

$$x = -3 \text{ maka } f(-3) = (-3)^2 - 2(-3) - 8 = 9 + 6 - 8 = 7$$

$$x = 3 \text{ maka } f(3) = (3)^2 - 2(3) - 8 = 9 - 6 - 8 = -5$$

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2(1)} = 1 \text{ maka } f(1) = (1)^2 - 2(1) - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$$

$$\text{Jadi } R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}, -9 \leq y \leq 7\}$$

$$(c) f(x) = x^2 - 8x + 15$$

untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$ diperoleh :

$$x = -3 \text{ maka } f(-3) = (-3)^2 - 8(-3) + 15 = 9 + 24 + 15 = 48$$

$$x = 3 \text{ maka } f(3) = (3)^2 - 8(3) + 15 = 9 - 24 + 15 = 0$$

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2(1)} = 4 \text{ maka } f(4) = (4)^2 - 8(4) + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$$

$$\text{Jadi } R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}, -1 \leq y \leq 48\}$$

06. Tentukanlah daerah hasil dari setiap fungsi berikut ini :

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 12$ untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

(b) $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$ untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -5\}$

Jawab

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 12$

untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ diperoleh $x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(1)} = -2$

maka $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 12 = 4 - 8 - 12 = -16$

Jadi $R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y \geq -16\}$

(b) $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$

untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -5\}$ diperoleh

$$y = \frac{2x-3}{x+5}$$

$$y(x+5) = 2x-3$$

$$xy + 5y = 2x - 3$$

$$xy - 2x = -5y - 3$$

$$(y-2)x = -5y-3$$

$$x = \frac{-5y-3}{y-2}$$

Jadi $R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$

Selanjutnya akan diuraikan sifat-sifat fungsi dalam kaitannya dengan daerah asal, daerah lawan dan daerah hasilnya

Ditinjau dari karakteristik daerah lawannya, fungsi dibagi menjadi

1. Fungsi Surjektif

Misalkan f suatu fungsi dari A ke B maka f dinamakan fungsi surjektif atau fungsi “Kepada” (onto) jika $R_f = B$. Sedangkan fungsi yang tidak surjektif dinamakan fungsi “kedalam” (into)

Dengan kata lain:

Suatu fungsi f dikatakan surjektif jika tidak ada sisa di daerah kawan

2. Fungsi Injektif

Misalkan f suatu fungsi dari A ke B serta x_1 dan x_2 anggota A , maka f dikatakan fungsi injektif atau fungsi “satu-satu” jika untuk sembarang $x_1 \neq x_2$ berlaku $f(x_1) \neq f(x_2)$

Dengan kata lain:

Suatu fungsi f dikatakan injektif jika tidak ada cabang di daerah kawan

3. Fungsi Bijektif

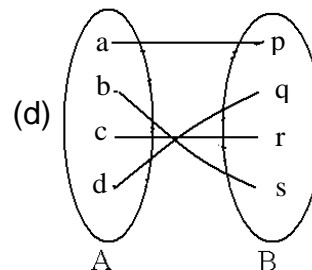
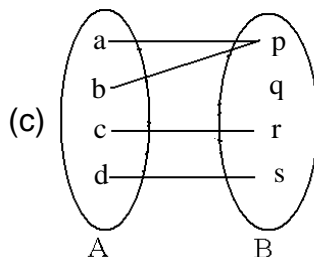
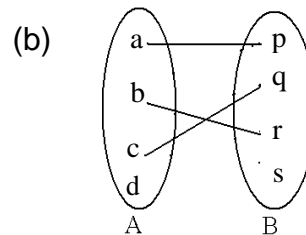
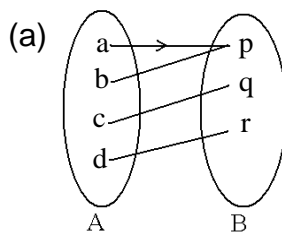
Fungsi f dikatakan bijektif jika fungsi tersebut sekaligus surjektif dan injektif

Dengan kata lain:

Suatu fungsi f dikatakan bijektif jika tidak ada sisa dan cabang di daerah kawan

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini

01. Manakah diantara fungsi-fungsi berikut ini merupakan fungsi surjektif, injektif atau bijektif



Jawab

- (a) Fungsi surjektif, karena tidak ada sisa pada daerah kawan
- (b) Bukan fungsi, karena pada daerah asal terdapat sisa
- (c) Bukan keduanya (surjektif dan injektif), karena ada sisa dan cabang pada daerah kawan
- (d) Fungsi bijektif, karena tidak ada sisa dan tidak ada cabang pada daerah kawan

02. Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, manakah diantara fungsi-fungsi berikut ini merupakan fungsi surjektif, injektif atau bijektif

- (a) $f: A \rightarrow B = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (4, 1)\}$
- (b) $f: B \rightarrow A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2)\}$
- (c) $f: A \rightarrow A = \{(1, 4), (2, 1), (3, 4), (2, 2)\}$
- (d) $f: B \rightarrow B = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$

Jawab

- (a) Fungsi surjektif, karena tidak ada sisa pada daerah kawan (himpunan B)
- (b) Fungsi Injektif, karena tidak ada cabang pada daerah kawan (himpunan A)
- (c) Bukan fungsi, karena pada daerah asal terdapat cabang dan juga sisa (himpunan A)
- (d) Fungsi bijektif, karena tidak ada sisa dan tidak ada cabang pada daerah kawan (himpunan B)

Ditinjau dari simetrisitasnya fungsi dapat dibagi menjadi :

1. Fungsi Genap

Suatu fungsi f dikatakan genap jika berlaku $f(x) = f(-x)$ untuk semua x anggota D_f
Atau fungsi tersebut simetris terhadap sumbu Y

2. Fungsi Ganjil

Suatu fungsi f dikatakan ganjil jika berlaku $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x anggota D_f
Atau fungsi tersebut memenuhi sifat simetri putar terhadap titik asal $O(0, 0)$

Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini

03. Manakah diantara fungsi-fungsi berikut ini merupakan fungsi genap dan ganjil ?

(a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

(c) $f(x) = 3x^3 - 5x$

(d) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{x^2 + 3}$

(e) $f(x) = \sin x$

(f) $f(x) = \cos x$

Jawab

(a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2$

Uji $f(-x) = 2(-x)^4 - 3(-x)^2$

$$f(-x) = 2x^4 - 3x^2$$

Karena $f(x) = f(-x)$ untuk semua x anggota D_f maka fungsi tersebut fungsi genap

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

Uji $f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 2$

$$f(-x) = x^2 + 4x + 2$$

Uji $-f(x) = -(x^2 - 4x + 2)$

$$-f(x) = -x^2 + 4x - 2$$

Karena $f(-x) \neq f(x)$ dan $f(-x) \neq -f(x)$ untuk semua x anggota D_f maka fungsi tersebut bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil

(c) $f(x) = 3x^3 - 5x$

Uji $f(-x) = 3(-x)^3 - 5(-x)$

$$f(-x) = -3x^3 + 5x$$

Uji $-f(x) = -(3x^3 - 5x)$

$$-f(x) = -3x^3 + 5x$$

Karena $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x anggota D_f maka fungsi tersebut fungsi ganjil

(d) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{x^2 + 3}$

Uji $f(-x) = \frac{2(-x)^3 - 4(-x)}{(-x)^2 + 3}$

$$f(-x) = \frac{-2x^3 + 4x}{x^2 + 3}$$

$$\text{Uji } -f(x) = -\frac{2x^3 - 4x}{x^2 + 3}$$

$$-f(x) = \frac{-2x^3 + 4x}{x^2 + 3}$$

Karena $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x anggota D_f maka fungsi tersebut fungsi ganjil

(c) $f(x) = \sin x$

Uji $f(-x) = \sin(-x)$

$$f(-x) = -\sin x$$

Uji $-f(x) = -\sin x$

Karena $f(-x) = -f(x)$ untuk semua x anggota D_f maka fungsi tersebut fungsi ganjil

(c) $f(x) = \cos x$

Uji $f(-x) = \cos(-x)$

$$f(-x) = \cos x$$

Karena $f(-x) = f(x)$ untuk semua x anggota D_f maka fungsi tersebut fungsi genap

SOAL LATIHAN 01

A. Pengertian Relasi dan Fungsi

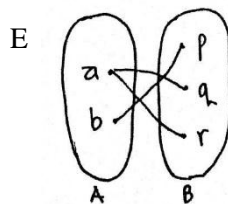
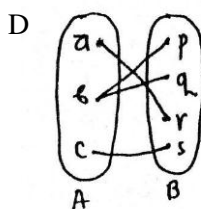
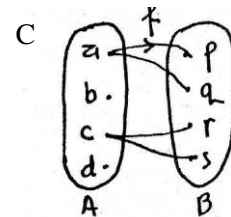
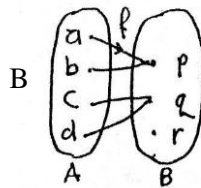
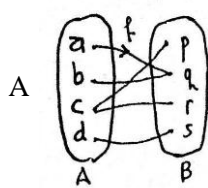
01. Manakah diantara relasi-relasi berikut ini merupakan fungsi

- A. $\{ (0,6), (1,6), (2,3), (2,4), (3,5) \}$
- B. $\{ (3,1), (2,5), (3,5), (3,1), (2,4) \}$
- C. $\{ (2,1), (5,3), (4,3), (1,2), (3,3) \}$
- D. $\{ (0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5) \}$
- E. $\{ (3,1), (1,3), (4,1), (3,4), (1,4) \}$

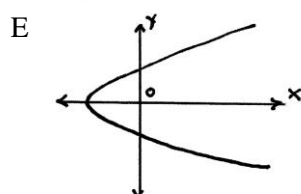
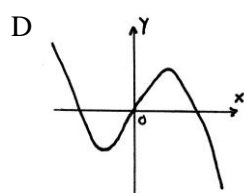
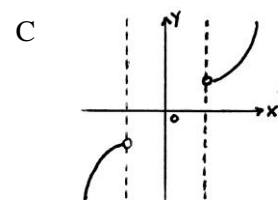
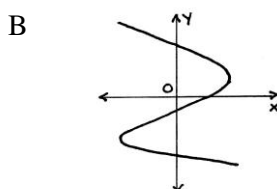
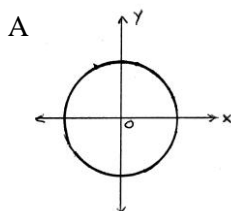
02. Jika $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ dan $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ maka manakah dari relasi berikut ini merupakan fungsi

- A. $f: A \rightarrow B = \{ (1,3), (3,2), (2,5), (4,2), (1,4) \}$
- B. $f: B \rightarrow A = \{ (1,3), (3,2), (4,3), (2,5) \}$
- C. $f: A \rightarrow A = \{ (3,1), (2,4), (3,2), (4,2) \}$
- D. $f: A \rightarrow B = \{ (2,1), (1,3), (3,4), (4,2) \}$
- E. $f: A \rightarrow B = \{ (5,3), (2,1), (3,1), (4,2) \}$

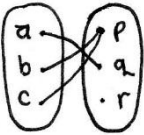
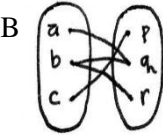
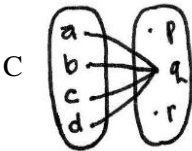
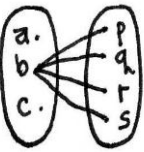
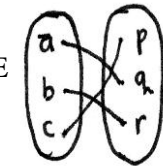
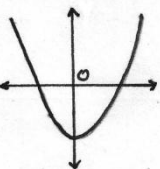
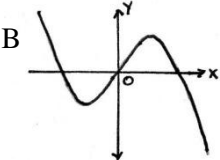
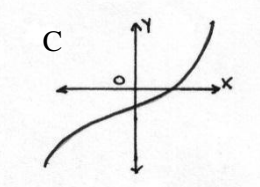
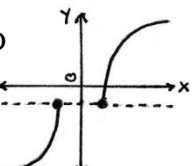
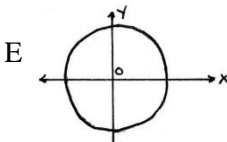
03. Manakah diantara relasi f berikut ini merupakan fungsi



04. Manakah diantara grafik berikut ini merupakan fungsi



05. Daerah asal alamiah dari fungsi $y = \frac{3x+6}{2x-4}$ adalah.
- A. $D_f = \{x \mid x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$ B. $D_f = \{x \mid x > 3, x \in \mathbb{R}\}$
 C. $D_f = \{x \mid x \neq -2, x \in \mathbb{R}\}$ D. $D_f = \{x \mid x > -2, x \in \mathbb{R}\}$
 E. $D_f = \{x \mid x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$
06. Daerah asal alamiah dari $f(x) = \sqrt{2x-6}$ adalah...
- A. $D_f = \{x \mid x \geq 3, x \in \mathbb{R}\}$ B. $D_f = \{x \mid x \leq 3, x \in \mathbb{R}\}$
 C. $D_f = \{x \mid x \geq -3, x \in \mathbb{R}\}$ D. $D_f = \{x \mid x \leq -3, x \in \mathbb{R}\}$
 E. $D_f = \{x \mid x \geq 2, x \in \mathbb{R}\}$
07. Daerah asal alamiah D_f dari fungsi akar $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ adalah...
- A. $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$ B. $D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 2\}$
 C. $D_f = \{x \mid x \leq -2 \text{ atau } x \geq 4\}$ D. $D_f = \{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq 2\}$
 E. $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4\}$
08. Daerah asal alamiah D_f dari fungsi pecahan $y = \frac{\sqrt{3x+6}}{x^2+x-6}$ adalah...
- A. $D_f = \{x \mid x > -2, x \in \mathbb{R}\}$ B. $D_f = \{x \mid x \neq -1, x \neq 3, x \in \mathbb{R}\}$
 C. $D_f = \{x \mid x \neq 2, x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$ D. $D_f = \{x \mid x \geq -2, x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$
 E. $D_f = \{x \mid x \geq -2, x \neq -3, x \in \mathbb{R}\}$
09. Suatu fungsi linier $f(x) = 2x - 4$ dengan daerah asal $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$, maka daerah hasilnya adalah $R_f = \dots$
- A. $\{y \mid -10 \leq y \leq 6\}$ B. $\{y \mid -6 \leq y \leq 3\}$
 C. $\{y \mid 5 \leq y \leq 10\}$ D. $\{y \mid 0 \leq y \leq 6\}$
 E. $\{y \mid 2 \leq y \leq 8\}$
10. Suatu fungsi kuadrat $y = x^2 - 2x - 3$ dengan daerah asal $x \in \text{Real}$, maka daerah hasilnya adalah ...
- A. $\{y \mid y \geq 4\}$ B. $\{y \mid y \leq 4\}$
 C. $\{y \mid y \geq -4\}$ D. $\{y \mid y \leq -4\}$
 E. $\{y \mid y \leq 2\}$
11. Suatu fungsi kuadrat $y = x^2 + 4x - 5$ dengan daerah asal $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$, maka daerah hasilnya adalah $R_f = \dots$
- A. $\{y \mid -8 \leq y \leq 7\}$ B. $\{y \mid -9 \leq y \leq 7\}$
 C. $\{y \mid -7 \leq y \leq 10\}$ D. $\{y \mid -9 \leq y \leq -8\}$
 E. $\{y \mid -9 \leq y \leq 8\}$

12. Jika daerah asal dari fungsi $f(x) = x^2 + 2x - 3$ adalah $1 \leq x \leq 3$, maka daerah hasilnya adalah $R_f =$
- A. $-4 \leq y \leq 12$
B. $-4 \leq y \leq 5$
C. $0 \leq y \leq 12$
D. $0 \leq y \leq 4$
E. $-4 \leq y \leq 0$
13. Jika daerah asal dari fungsi $f(x) = x^2 - 9$ adalah $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$ maka daerah hasilnya adalah $R_f = \dots$
- A. $\{y \mid -8 \leq y \leq 7\}$
B. $\{y \mid -9 \leq y \leq 0\}$
C. $\{y \mid 0 \leq y \leq 7\}$
D. $\{y \mid -9 \leq y \leq 7\}$
E. $\{y \mid -9 \leq y \leq 8\}$
14. Suatu fungsi pecahan $y = \frac{x+4}{x-2}$ dengan daerah asal alamiah $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$, maka daerah hasilnya adalah $R_f = \dots$
- A. $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$
B. $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 1\}$
C. $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \neq -2\}$
D. $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \neq -1\}$
E. $\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \neq 3\}$
15. Yang manakah dari berikut ini merupakan fungsi surjektif
- A 
B 
C 
D 
E 
16. Yang manakah dari berikut ini merupakan fungsi injektif ?
- A 
B 
C 
D 
E 

17. Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ maka yang manakah dari berikut ini merupakan fungsi bijektif ?

- A. $f: A \rightarrow B = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,4)\}$
- B. $f: A \rightarrow A = \{(1,4), (2,3), (3,1), (4,3)\}$
- C. $f: B \rightarrow A = \{(1,3), (2,4), (5,1), (3,3), (4,2)\}$
- D. $f: A \rightarrow B = \{(1,2), (2,5), (3,1), (4,3), (2,4)\}$
- E. $f: B \rightarrow B = \{(1,3), (2,1), (3,2), (4,4), (5,5)\}$

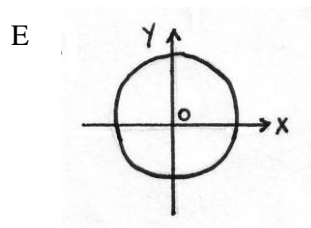
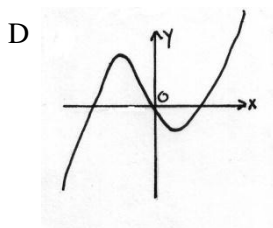
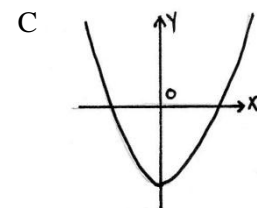
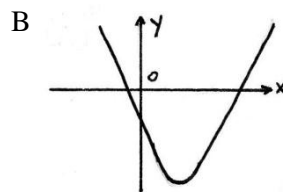
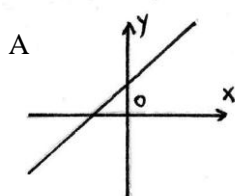
18. Diantara fungsi-fungsi berikut ini manakah yang merupakan fungsi genap ?

- A. $f(x) = 2x - 4$
- B. $f(x) = x^2 + 2x - 1$
- C. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- D. $f(x) = x^2 - 5$
- E. $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$

19. Diantara fungsi-fungsi berikut ini manakah yang merupakan fungsi ganjil ?

- A. $f(x) = x^3 - 2x^2$
- B. $f(x) = x^3 - 2x$
- C. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
- D. $f(x) = 3x + 5$
- E. $f(x) = x^2 + 2$

20. Diantara grafik berikut ini manakah yang termasuk fungsi genap ?



RELASI DAN FUNGSI

B. Macam-macam Fungsi

Bentuk umum fungsi linier adalah $y = f(x)$, dimana x adalah variabel bebas dan y adalah variabel terikat. Artinya pada sistem koordinat Cartesius, sumbu-X adalah sumbu yang memuat nilai-nilai yang membentuk himpunan daerah asal (domain), sedangkan sumbu-Y adalah sumbu yang memuat nilai-nilai yang membentuk himpunan daerah kawan (kodomain). Himpunan nilai y yang merupakan peta dari x membentuk daerah hasil (range).

Jika daerah asal dibatasi oleh interval tertentu pada sumbu-X maka akan berpengaruh pada daerah hasil. Berikut ini akan diberikan beberapa macam fungsi dalam kaitannya dengan daerah asal dan daerah hasil.

(1) Fungsi Linier

Bentuk umum fungsi linier adalah $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$, dimana m adalah gradien garis fungsinya.

Grafik fungsi ini berbentuk garis lurus, sehingga secara umum daerah asal suatu fungsi linier adalah $D_f = \{x \mid x \in \text{bilangan real}\}$ dan daerah hasilnya $R_f = \{y \mid y \in \text{bilangan real}\}$.

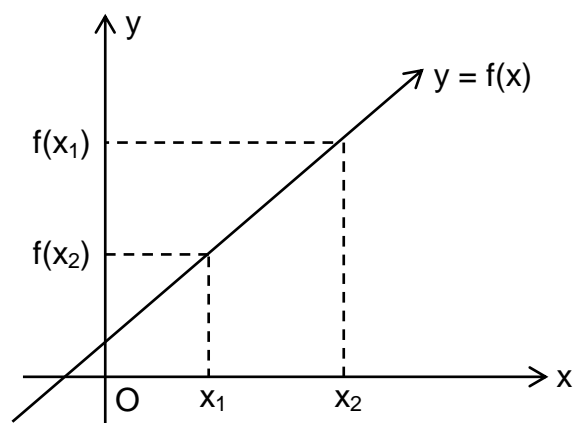
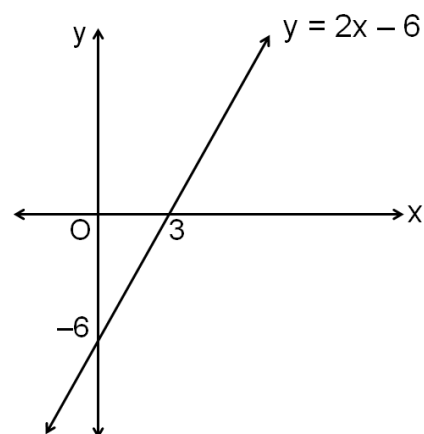
Sebagai contoh pada fungsi $y = 2x - 6$ disamping terlihat bahwa daerah asalnya adalah sumbu-X dan daerah hasilnya adalah sumbu-Y.

Namun jika daerah asal dibatasi dengan interval tertentu pada sumbu-X maka daerah hasilnya akan mengalami perubahan.

Terdapat dua macam fungsi linier, yaitu fungsi linier monoton naik (ditandai dengan $m > 0$), dan fungsi linier monoton turun (ditandai dengan $m < 0$)

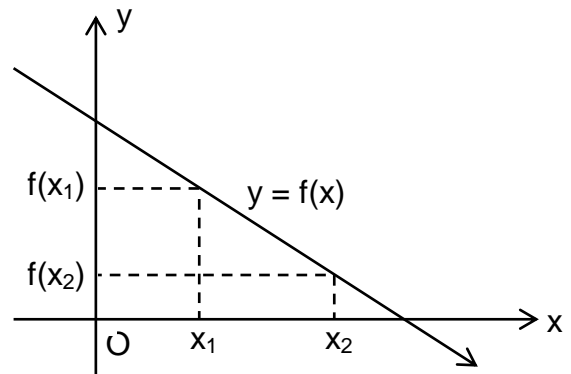
Syarat fungsi linier $f(x)$ monoton naik adalah jika x_1 dan x_2 adalah anggota himpunan daerah asal serta $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) < f(x_2)$. Seperti contoh pada gambar disamping

Dalam hal ini, Misalkan daerah asalnya dibatasi $D_f = \{a \leq x \leq b\}$ maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{f(a) \leq y \leq f(b)\}$



Syarat fungsi linier $f(x)$ monoton turun adalah jika x_1 dan x_2 adalah anggota himpunan daerah asal serta $x_1 < x_2$ maka $f(x_1) > f(x_2)$ Seperti contoh pada gambar disamping

Dalam hal ini, Misalkan daerah asalnya dibatasi $D_f = \{a \leq x \leq b\}$ maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{f(b) \leq y \leq f(a)\}$



Untuk jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini:

01. Jika daerah asal fungsi $f(x) = 3x - 6$ dibatasi pada $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 4, x \in \text{real}\}$ maka tentukanlah interval daerah hasilnya

Jawab

$$x_1 = -2 \text{ maka } f(-2) = 3(-2) - 6 = -12$$

$$x_2 = 4 \text{ maka } f(4) = 3(4) - 6 = 6$$

$$\text{Jadi } R_f = \{y \mid -12 \leq y \leq 6, y \in \text{bilangan real}\}$$

02. Jika daerah asal fungsi $f(x) = 5 - 2x$ dibatasi pada $D_f = \{x \mid -3 \leq x \leq 6, x \in \text{real}\}$ maka tentukanlah interval daerah hasilnya

Jawab

$$x_1 = -3 \text{ maka } f(-3) = 5 - 2(-3) = 11$$

$$x_2 = 6 \text{ maka } f(6) = 5 - 2(6) = -7$$

$$\text{Jadi } R_f = \{y \mid -7 \leq y \leq 11, y \in \text{bilangan real}\}$$

03. Diketahui fungsi linier monoton naik $f(x) = 4x + 2$. Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid 14 \leq y \leq 26, y \in \text{bilangan real}\}$, maka tentukanlah daerah asalnya

Jawab

$$y_1 = 14 \text{ maka } 14 = 4x + 2. \text{ Diperoleh } x = 3$$

$$y_2 = 26 \text{ maka } 26 = 4x + 2. \text{ Diperoleh } x = 6$$

$$\text{Jadi } D_f = \{x \mid 3 \leq x \leq 6, x \in \text{bilangan real}\}$$

04. Sebuah fungsi linier monoton naik dibatasi daerah asalnya dengan interval $D_f = \{x \mid 1 \leq x \leq 5, x \in \text{real}\}$ sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid 8 \leq y \leq 20, y \in \text{real}\}$. Tentukanlah persamaan fungsi liniernya

Jawab

$$\text{Misalkan } y = mx + c$$

$$\text{Maka } (1, 8) \text{ sehingga } 8 = m + c$$

$$(5, 20) \text{ sehingga } 20 = 5m + c$$

$$-12 = -4m \text{ diperoleh } m = 3$$

$$20 = 5(3) + c \text{ diperoleh } c = 5$$

$$\text{Jadi } y = 3x + 5$$

05. Sebuah fungsi linier monoton turun dibatasi daerah asalnya dengan interval $\{x \mid -5 \leq x \leq 4, x \in \text{real}\}$, sehingga diperoleh daerah hasil $\{y \mid -2 \leq y \leq 16, y \in \text{real}\}$. Tentukanlah persamaan fungsi liniernya

Jawab

Misalkan $y = mx + c$

Maka $(-5, 16)$ sehingga $16 = -5m + c$

$(4, -2)$ sehingga $-2 = 4m + c$

$$18 = -9m \text{ diperoleh } m = -2$$

$$-2 = 4(-2) + c \text{ diperoleh } c = 6$$

Jadi $y = -2x + 6$

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, fungsi linier dapat ditentukan dengan dua rumus, yaitu :

Fungsi linier yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dengan gradien m dirumuskan :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Fungsi linier yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ dirumuskan :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Selanjutnya ikutilah contoh soal berikut ini:

06. Diketahui fungsi linier yang melalui titik $(5, -2)$ dengan gradien -3 . Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi dengan interval $-6 \leq x \leq 4$, maka tentukanlah daerah hasilnya

Jawab

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = -3(x - 5)$$

$$y = -3x + 17$$

$$\text{Untuk } x = -6 \text{ maka } y = -3(-6) + 17 = 35$$

$$\text{Untuk } x = 4 \text{ maka } y = -3(4) + 17 = 5$$

Jadi $R_f = \{y \mid 5 \leq y \leq 35, y \in \text{real}\}$

07. Diketahui fungsi linier yang melalui titik $A(3, 2)$ dan $B(4, 5)$. Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi $x \geq 0$, maka tentukanlah daerah hasilnya

Jawab

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 2}{5 - 2} = \frac{x - 3}{4 - 3}$$

$$\frac{y - 2}{3} = \frac{x - 3}{1}$$

$$y - 2 = 3x - 9 \text{ diperoleh fungsi : } y = 3x - 7 \text{ (monoton naik)}$$

Untuk $x = 0$ maka $y = 3(0) - 7 = -7$

Jadi karena fungsinya monoton naik, maka $R_f = \{y \mid y \geq -7, y \in \text{real}\}$

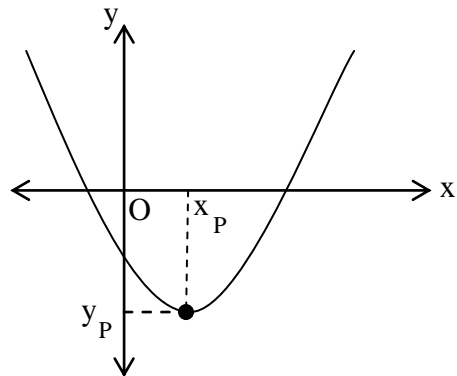
(2) Fungsi Kuadrat

Bentuk umum fungsi Kuadrat adalah

$f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a \neq 0$.

Pada fungsi kuadrat terdapat dua macam titik balik, yakni titik balik maksimum dan titik balik minimum (seperti tampak pada contoh gambar disamping).

Terdapat dua macam fungsi kuadrat yaitu :



1. Fungsi kuadrat yang grafiknya membuka ke atas (syaratnya $a > 0$). Pada fungsi kuadrat ini memiliki titik balik minimum.
2. Fungsi kuadrat yang grafiknya membuka ke bawah (syaratnya $a < 0$). Pada fungsi kuadrat ini memiliki titik balik maksimum.

Rumus menentukan titik balik (maksimum atau minimum) suatu fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ telah diuraikan pada bab terdahulu, yaitu :

$$P\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{-4a}\right)$$

Secara umum, daerah asal dari fungsi kuadrat adalah $D_f = \{x \mid x \in \text{bilangan real}\}$. Namun daerah hasilnya tergantung pada bentuk grafiknya. Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini :

08. Tentukanlah daerah hasil dari setiap fungsi kuadrat berikut :

(a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

(b) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

Jawab

(a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ mempunyai titik minimum, yaitu:

$$P\left(\frac{-(-2)}{2(1)}, \frac{(-2)^2 - 4(1)(-8)}{-4(1)}\right)$$

$$P(1, -9)$$

Jadi daerah hasilnya adalah: $R_f = \{y \mid y \geq -9, y \in \text{real}\}$

(b) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ mempunyai titik maksimum, yaitu:

$$P\left(\frac{-6}{2(-1)}, \frac{(6)^2 - 4(-1)(-5)}{-4(-1)}\right)$$

$$P(3, 4)$$

Jadi daerah hasilnya adalah: $R_f = \{y \mid y \leq 4, y \in \text{real}\}$

09. Jika daerah hasil fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 - 4x - 2a$ adalah $R_f = \{y \mid y \leq 4\}$ maka tentukanlah nilai a

Jawab

$f(x) = ax^2 - 4x - 2a$ mempunyai titik maksimum, maka $a < 0$ sehingga

$$y_{\max} = \frac{(-4)^2 - 4(a)(-2a)}{-4(a)}$$

$$6 = \frac{16 + 8a^2}{-4a}$$

$$-24a = 16 + 8a^2$$

$$a^2 + 3a + 2 = 0$$

$$(a + 2)(a + 1) = 0 \quad \text{Jadi } a = -2 \text{ atau } a = -1$$

Jika daerah asal suatu fungsi kuadrat dibatasi dalam interval tertentu, maka daerah hasilnya juga akan terbatas pada interval tertentu. Untuk pemahaman selanjutnya ikutilah contoh soal berikut ini:

10. Jika daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x - 3$ adalah $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$ maka tentukanlah daerah hasilnya

Jawab

Diketahui $f(x) = x^2 - 4x - 3$ mempunyai titik maksimum, sehingga

$$x = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Karena $x = 2$ berada didalam interval $-2 \leq x \leq 4$, maka

$$x = -2 \text{ diperoleh } y = (-2)^2 - 4(-2) - 3 = 4 + 8 - 3 = 9$$

$$x = 2 \text{ diperoleh } y = (2)^2 - 4(2) - 3 = 4 - 8 - 3 = -7$$

$$x = 4 \text{ diperoleh } y = (4)^2 - 4(4) - 3 = 16 - 16 - 3 = -3$$

Jadi daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid -7 \leq y \leq 9, y \in \text{real}\}$

11. Jika daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ adalah $D_f = \{x \mid 3 \leq x \leq 6\}$ maka tentukanlah daerah hasilnya

Jawab

Diketahui $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ mempunyai titik maksimum, sehingga

$$x = \frac{-8}{2(-2)} = \frac{8}{4} = 2$$

Karena $x = 2$ berada didalam interval $3 \leq x \leq 6$, maka

$$x = 3 \text{ diperoleh } y = -2(3)^2 + 8(3) - 5 = -18 + 24 - 5 = 1$$

$$x = 6 \text{ diperoleh } y = -2(6)^2 + 8(6) - 5 = -72 + 48 - 5 = -29$$

Jadi daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid -29 \leq y \leq 1, y \in \text{real}\}$

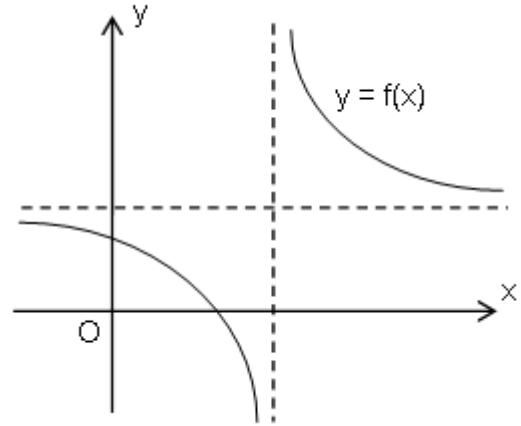
(3) Fungsi Pecahan Linier

Bentuk umum fungsi pecahan linier

adalah $f(x) = \frac{ax + b}{px + q}$ dengan $x \neq -p/q$.

Salah satu contoh grafik fungsi ini tertera pada gambar disamping.

Secara umum daerah asal alamiah untuk fungsi ini adalah $D_f = \{x \mid x \neq -p/q \text{ dan } x \in \text{bilangan real}\}$



Namun pembatasan daerah asalnya tidak akan dibahas pada bab ini. Selanjutnya untuk menentukan daerah hasilnya akan diuraikan pada contoh soal berikut ini :

12. Tentukan daerah asal dan daerah hasil alamiah setiap fungsi pecahan linier berikut ini :

(a) $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 4}$

(b) $f(x) = \frac{5 - 2x}{3x + 6}$

(c) $f(x) = \frac{3}{2x - 8}$

Jawab

(a) $y = \frac{3x + 2}{x - 4}$ maka $xy - 4y = 3x + 2$

$$xy - 3x = 4y + 2$$

$$x(y - 3) = 4y + 2$$

$$x = \frac{4y + 2}{y - 3}$$

Jadi $R_f = \{y \mid y \neq 3, y \in \text{real}\}$ dan $D_f = \{x \mid x \neq 4, x \in \text{real}\}$

(b) $y = \frac{5 - 2x}{3x + 6}$ maka $3xy + 6y = 5 - 2x$

$$3xy + 2x = 5 - 6y$$

$$x(3y + 2) = 5 - 6y$$

$$x = \frac{5 - 6y}{3y + 2}$$

Jadi $R_f = \{y \mid y \neq -2/3, y \in \text{real}\}$ dan $D_f = \{x \mid x \neq -2, x \in \text{real}\}$

(c) $y = \frac{3}{2x - 8}$ maka $2xy - 8y = 3$

$$2xy = 8y + 3$$

$$x = \frac{8y + 3}{2y}$$

Jadi $R_f = \{y \mid y \neq 0, y \in \text{real}\}$ dan $D_f = \{x \mid x \neq 4, x \in \text{real}\}$

13. Jika daerah hasil alamiah fungsi $f(x) = \frac{ax + 5}{2x - 3}$ adalah $R_f = \{y \mid y \neq 4, y \in \text{real}\}$

maka tentukanlah nilai a

Jawab

$$y = \frac{ax + 5}{2x - 3}$$

$$2xy - 3y = ax + 5$$

$$2xy - ax = 3y + 5$$

$$x(2y - a) = 3y + 5$$

$$x = \frac{3y + 5}{2y - a}$$

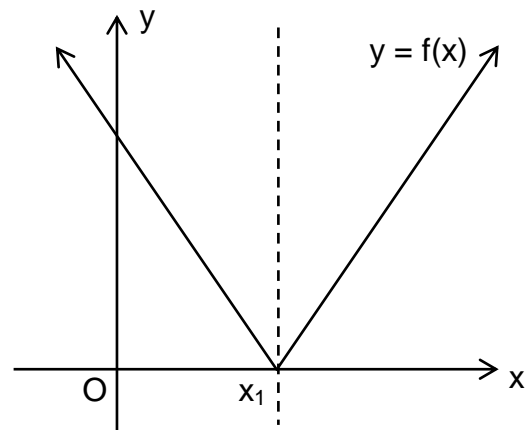
Sehingga $y \neq \frac{a}{2} = 4$. Jadi $a = 8$

(3) Fungsi Nilai Mutlak Linier

Bentuk umum fungsi pecahan linier adalah $f(x) = |ax + b|$. Salah satu contoh grafik fungsi ini tertera pada gambar disamping.

Ciri khas grafik fungsi ini adalah selalu membuka ke atas, dengan titik minimum (misalnya) $P(x_1, 0)$.

Sehingga untuk daerah asal $D_f = \{x \mid x \text{ bilangan real}\}$ maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid y = f(x_1) \geq 0, y \in \text{real}\}$



Untuk lebih jelasnya ikutilah contoh soal berikut ini

14. Jika daerah asal fungsi $f(x) = |2x - 6|$ dibatasi oleh interval $\{-2 \leq x \leq 5\}$ maka tentukanlah daerah hasilnya

Jawab

$$2x - 6 = 0 \quad \text{maka } x = 3$$

$$\text{Untuk } x = -2 \text{ maka } f(-2) = |2(-2) - 6| = |-10| = 10$$

$$\text{Untuk } x = 5 \text{ maka } f(5) = |2(5) - 6| = 4$$

Karena $x = 3$ berada didalam interval $-2 \leq x \leq 5$, maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid y = 0 \leq y \leq 10, y \in \text{real}\}$

15. Jika daerah asal fungsi $f(x) = |8 - 2x|$ dibatasi oleh interval $\{-3 \leq x \leq 2\}$ maka tentukanlah daerah hasilnya

Jawab

$$8 - 2x = 0 \quad \text{maka } x = 4$$

$$\text{Untuk } x = -3 \text{ maka } f(-3) = |8 - 2(-3)| = |14| = 14$$

$$\text{Untuk } x = 2 \text{ maka } f(2) = |8 - 2(2)| = 4$$

Karena $x = 4$ berada diluar interval $-3 \leq x \leq 2$, maka daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \mid y = 4 \leq y \leq 14, y \in \text{real}\}$

SOAL LATIHAN 02

B. Macam-Macam Fungsi

01. Jika daerah asal fungsi $f(x) = -3x + 8$ dibatasi pada $D_f = \{x \mid 5 \leq x \leq 12, x \in \text{real}\}$ maka interval daerah hasilnya adalah
- A. $R_f = \{y \mid 7 \leq y \leq 28, y \text{ bilangan real}\}$ B. $R_f = \{y \mid -7 \leq y \leq 28, y \text{ bilangan real}\}$
C. $R_f = \{y \mid -28 \leq y \leq -7, y \text{ bilangan real}\}$ D. $R_f = \{y \mid -5 \leq y \leq 12, y \text{ bilangan real}\}$
E. $R_f = \{y \mid -12 \leq y \leq -5, y \text{ bilangan real}\}$
02. Diketahui fungsi linier monoton naik $f(x) = 4x - 3$. Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid 5 \leq y \leq 29, y \text{ bilangan real}\}$, maka daerah asalnya adalah
- A. $D_f = \{x \mid -12 \leq x \leq 2, x \text{ bilangan real}\}$
B. $D_f = \{x \mid 4 \leq x \leq 12, x \text{ bilangan real}\}$
C. $D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 12, x \text{ bilangan real}\}$
D. $D_f = \{x \mid 2 \leq x \leq 8, x \text{ bilangan real}\}$
E. $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 8, x \text{ bilangan real}\}$
03. Sebuah fungsi linier monoton naik dibatasi daerah asalnya dengan interval $D_f = \{x \mid 2 \leq x \leq 3, x \in \text{real}\}$ sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid 4 \leq y \leq 7, y \in \text{real}\}$. Persamaan fungsi liniernya adalah
- A. $y = 2x + 4$ B. $y = 3x - 8$ C. $y = 3x - 2$
D. $y = -3x + 5$ E. $y = 2x - 5$
04. Sebuah fungsi linier monoton turun dibatasi daerah asalnya dengan interval $D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq -2, x \in \text{real}\}$ sehingga diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \mid 6 \leq y \leq 10, y \in \text{real}\}$. Persamaan fungsi liniernya adalah
- A. $y = -2x + 2$ B. $y = 2x - 5$ C. $y = -3x - 5$
D. $y = 3x + 1$ E. $y = -4x - 3$
05. Diketahui fungsi linier yang melalui titik $(-3, 4)$ dengan gradien -2 . Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi dengan interval $-1 \leq x \leq 5$, maka tentukanlah daerah hasilnya
- A. $R_f = \{y \mid -6 \leq y \leq 10, y \in \text{bilangan real}\}$
B. $R_f = \{y \mid -8 \leq y \leq 6, y \in \text{bilangan real}\}$
C. $R_f = \{y \mid -12 \leq y \leq 0, y \in \text{bilangan real}\}$
D. $R_f = \{y \mid -10 \leq y \leq 8, y \in \text{bilangan real}\}$
E. $R_f = \{y \mid -10 \leq y \leq 12, y \in \text{bilangan real}\}$
06. Diketahui fungsi linier yang melalui titik $A(3, -1)$ dan $B(2, 6)$. Jika daerah asal fungsi tersebut dibatasi $x \geq 2$, maka tentukanlah daerah hasilnya
- A. $R_f = \{y \mid y \leq 6, y \in \text{bilangan real}\}$ B. $R_f = \{y \mid y \geq 6, y \in \text{bilangan real}\}$
C. $R_f = \{y \mid y \leq 4, y \in \text{bilangan real}\}$ D. $R_f = \{y \mid y \geq 4, y \in \text{bilangan real}\}$
E. $R_f = \{y \mid y \geq 8, y \in \text{bilangan real}\}$

07. Daerah hasil dari setiap fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$ adalah
- A. $R_f = \{y \mid y \leq 5, y \in \text{bilangan real}\}$ B. $R_f = \{y \mid y \geq 5, y \in \text{bilangan real}\}$
 C. $R_f = \{y \mid y \leq 10, y \in \text{bilangan real}\}$ D. $R_f = \{y \mid y \geq 4, 10 \in \text{bilangan real}\}$
 E. $R_f = \{y \mid y \geq -5, y \in \text{bilangan real}\}$
08. Jika daerah hasil dari fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 - 6x - a$ adalah $R_f = \{y \mid y \leq 13/2\}$ maka nilai $a = \dots$
- A. 6 B. 4 C. 3
 D. -2 E. -5
09. Jika daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$ adalah $D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$ maka daerah hasilnya adalah
- A. $R_f = \{y \mid -3 \leq y \leq 13, \}$ B. $R_f = \{y \mid -5 \leq y \leq 13\}$
 C. $R_f = \{y \mid -5 \leq y \leq 3\}$ D. $R_f = \{y \mid -3 \leq y \leq 4\}$
 E. $R_f = \{y \mid 2 \leq y \leq 8\}$
10. Jika daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 8x + 2$ adalah $D_f = \{x \mid 3 \leq x \leq 6\}$ maka daerah hasilnya adalah
- A. $R_f = \{y \mid -13 \leq y \leq -10, \}$ B. $R_f = \{y \mid -10 \leq y \leq 13\}$
 C. $R_f = \{y \mid -8 \leq y \leq 12\}$ D. $R_f = \{y \mid 5 \leq y \leq 15\}$
 E. $R_f = \{y \mid -2 \leq y \leq 10\}$
11. Daerah asal alamiah dari fungsi pecahan linier $f(x) = \frac{2x-7}{3x-9}$ adalah ...
- A. $D_f = \{x \mid x \neq 6, x \in \text{bilangan real}\}$ B. $D_f = \{x \mid x \neq -6, x \in \text{bilangan real}\}$
 C. $D_f = \{x \mid x \neq 3, x \in \text{bilangan real}\}$ D. $D_f = \{x \mid x \neq -3, x \in \text{bilangan real}\}$
 E. $D_f = \{x \mid x \neq 2/3, x \in \text{bilangan real}\}$
12. Daerah hasil alamiah dari fungsi pecahan linier $f(x) = \frac{6x-4}{3x-2}$ adalah ...
- A. $R_f = \{y \mid y \neq 2/3, y \in \text{bilangan real}\}$ B. $R_f = \{y \mid y \neq 3/2, y \in \text{bilangan real}\}$
 C. $R_f = \{y \mid y \neq 2, y \in \text{bilangan real}\}$ D. $R_f = \{y \mid y \neq 3, y \in \text{bilangan real}\}$
 E. $R_f = \{y \mid y \neq 6, y \in \text{bilangan real}\}$
13. Daerah hasil alamiah dari fungsi pecahan linier $f(x) = \frac{5}{2x-8}$ adalah ...
- A. $R_f = \{y \mid y \neq 0, y \in \text{bilangan real}\}$ B. $R_f = \{y \mid y \neq 4, y \in \text{bilangan real}\}$
 C. $R_f = \{y \mid y \neq 1/2, y \in \text{bilangan real}\}$ D. $R_f = \{y \mid y \neq 3, y \in \text{bilangan real}\}$
 E. $R_f = \{y \mid y \neq 5, y \in \text{bilangan real}\}$

14. Jika daerah hasil alamiah fungsi $f(x) = \frac{ax-3}{2x-5}$ adalah $R_f = \{y \mid y \neq 3, y \in \text{real}\}$ maka nilai a adalah ...
- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6
15. Jika daerah asal fungsi $f(x) = |2x - 8|$ dibatasi oleh interval $\{-2 \leq x \leq 6\}$ maka daerah hasilnya adalah ...
- A. $R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 4, y \in \text{bilangan real}\}$
B. $R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 12, y \in \text{bilangan real}\}$
C. $R_f = \{y \mid 4 \leq y \leq 12, y \in \text{bilangan real}\}$
D. $R_f = \{y \mid -12 \leq y \leq 4, y \in \text{bilangan real}\}$
E. $R_f = \{y \mid -12 \leq y \leq 0, y \in \text{bilangan real}\}$
16. Jika daerah asal fungsi $f(x) = |12 - 3x|$ dibatasi oleh interval $\{-3 \leq x \leq 3\}$ maka daerah hasilnya adalah ...
- A. $R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 21, y \in \text{bilangan real}\}$
B. $R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 3, y \in \text{bilangan real}\}$
C. $R_f = \{y \mid 3 \leq y \leq 21, y \in \text{bilangan real}\}$
D. $R_f = \{y \mid -2 \leq y \leq 18, y \in \text{bilangan real}\}$
E. $R_f = \{y \mid 3 \leq y \leq 18, y \in \text{bilangan real}\}$

RELASI DAN FUNGSI

C. Operasi Aljabar Fungsi

Operasi aljabar pada fungsi yang akan dijelaskan disini meliputi: penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

Jika f dan g adalah fungsi yang terdefinisi pada bilangan real, maka keempat operasi diatas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$1. (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2. (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$3. (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$4. \left[\frac{f}{g} \right](x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

Sedangkan operasi pemangkatan dengan pangkat bulat, mengikuti aturan operasi perkalian.

Adapun penjelasan tentang tatacaranya akan diuraikan pada contoh soal berikut ini

01. Diketahui fungsi $f(x) = (x + 2)^2$ dan $g(x) = (2x + 4)^2$, maka tentukanlah hasil dari :

(a) $f(x) + g(x)$

(b) $f(x) \cdot g(x)$

(c) $\frac{f(x)}{g(x)}$

Jawab

$$\begin{aligned} \text{(a) } f(x) + g(x) &= (x + 2)^2 + (2x + 4)^2 \\ &= (x + 2)^2 + (2[x + 2])^2 \\ &= (x + 2)^2 + 4 \cdot (x + 2)^2 \\ &= 5(x + 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } f(x) \cdot g(x) &= (x + 2)^2 \cdot (2x + 4)^2 \\ &= (x + 2)^2 \cdot (2[x + 2])^2 \\ &= (x + 2)^2 \cdot 4 \cdot (x + 2)^2 \\ &= 4(x + 2)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{(x + 2)^2}{(2x + 4)^2} \\ &= \frac{(x + 2)^2}{4(x + 2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

02. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{2x+6}{x-4}$ dan $g(x) = \frac{2x-8}{x+3}$, maka tentukanlah hasil dari :

(a) $f(x) - g(x)$

(b) $f(x) \cdot g(x)$

(c) $\frac{f(x)}{g(x)}$

Jawab

$$\begin{aligned} \text{(a) } f(x) - g(x) &= \frac{2x+6}{x-4} - \frac{2x-8}{x+3} \\ &= \left(\frac{2x+6}{x-4} \right) \left(\frac{x+3}{x+3} \right) - \left(\frac{2x-8}{x+3} \right) \left(\frac{x-4}{x-4} \right) \\ &= \frac{(2x+6)(x+3) - (2x-8)(x-4)}{(x+3)(x-4)} \\ &= \frac{(2x^2 + 12x + 18) - (2x^2 - 16x + 32)}{x^2 - x - 12} \\ &= \frac{2x^2 + 12x + 18 - 2x^2 + 16x - 32}{x^2 - x - 12} \\ &= \frac{28x - 14}{x^2 - x - 12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } f(x) \cdot g(x) &= \left(\frac{2x+6}{x-4} \right) \cdot \left(\frac{2x-8}{x+3} \right) \\ &= \frac{(2x+6)(2x-8)}{(x-4)(x+3)} \\ &= \frac{2(x+3) \cdot 2(x-4)}{(x-4)(x+3)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \frac{f(x)}{g(x)} &= \left(\frac{2x+6}{x-4} \right) : \left(\frac{2x-8}{x+3} \right) \\ &= \left(\frac{2x+6}{x-4} \right) \times \left(\frac{x+3}{2x-8} \right) \\ &= \frac{(2x+6)(x+3)}{(x-4)(2x-8)} \\ &= \frac{2(x+3)(x+3)}{2(x-4)(x-4)} \\ &= \left(\frac{x+3}{x-4} \right)^2 \end{aligned}$$

03. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{5}{3x-9}$ dan $g(x) = \sqrt{2x+4}$, tentukanlah daerah asal dari :

(a) $f(x)$

(b) $g(x)$

(c) $f(x) \cdot g(x)$

Jawab

$$(a) f(x) = \frac{5}{3x-9}$$

$$\text{Syarat : } 3x - 9 \neq 0$$

$$3x \neq 9$$

$$x \neq 3$$

$$\text{Jadi daerah asalnya } D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \neq 3 \}$$

$$(b) g(x) = \sqrt{2x+4}$$

$$\text{Syarat : } 2x + 4 \geq 0$$

$$2x \geq -4$$

$$x \geq -2$$

$$\text{Jadi daerah asalnya } D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \geq -2 \}$$

$$(c) f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{5}{3x-9} \right) (\sqrt{2x+4})$$

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{5\sqrt{2x+4}}{3x-9}$$

$$\text{Syarat : } 3x - 9 \neq 0 \quad \text{dan} \quad 2x + 4 \geq 0$$

$$3x \neq 9$$

$$2x \geq -4$$

$$x \neq 3$$

$$x \geq -2$$

$$\text{Jadi daerah asalnya } D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \geq -2 \text{ dan } x \neq 3 \}$$

04. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{3x-6}$ dan $g(x) = \sqrt{2x-8}$, tentukanlah daerah asal dari :

(a) $f(x)$

(b) $g(x)$

(c) $f(x) + g(x)$

Jawab

$$(a) f(x) = \sqrt{3x-6}$$

$$\text{Syarat : } 3x - 6 \geq 0$$

$$3x \geq 6$$

$$x \geq 2$$

$$\text{Jadi daerah asalnya } D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \geq 2 \}$$

$$(b) g(x) = \sqrt{2x-8}$$

$$\text{Syarat : } 2x - 8 \geq 0$$

$$2x \geq 8$$

$$x \geq 4$$

$$\text{Jadi daerah asalnya } D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \geq 4 \}$$

$$(c) f(x) + g(x) = \sqrt{3x-6} + \sqrt{2x-8}$$

$$\text{Syarat : } 3x - 6 \geq 0 \quad \text{dan} \quad 2x - 8 \geq 0$$

$$3x \geq 6$$

$$2x \geq 8$$

$$x \geq 2$$

$$x \geq 4$$

$$\text{Jadi daerah asalnya } D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \geq 4 \}$$

05. Diketahui $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$, maka tentukanlah daerah asal dari :

(a) $f(x)$

(b) $g(x)$

(c) $f(x) - g(x)$

Jawab

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

Syarat : $x^2 - 2x - 8 \geq 0$

$(x - 4)(x + 2) \geq 0$

$x_1 = -2$ dan $x_2 = 4$

jadi $x \leq -2$ atau $x \geq 4$

Jadi daerah asalnya $D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \leq -2 \text{ atau } x \geq 4 \}$

(b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 6}$

Syarat : $x^2 - 7x + 6 \geq 0$

$(x - 6)(x - 1) \geq 0$

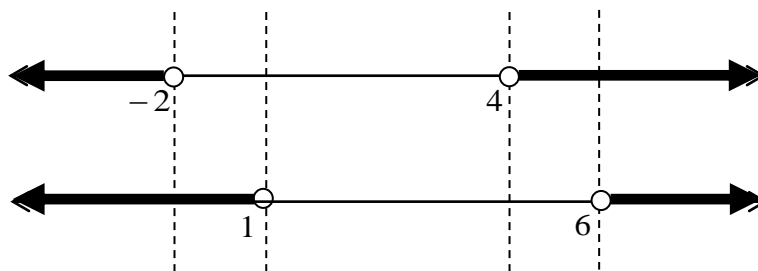
$x_1 = 1$ dan $x_2 = 6$

jadi $x \leq 1$ atau $x \geq 6$

Jadi daerah asalnya $D_g = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \leq 1 \text{ atau } x \geq 6 \}$

(c) $f(x) - g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8} - \sqrt{x^2 - 7x + 6}$

Daerah asalnya merupakan irisan dari syarat (a) dan (b), sehingga:



Jadi daerah asalnya $D_f = \{ x \mid x \in \text{Real}, x \leq -2 \text{ atau } x \geq 6 \}$

06. Diketahui $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x - 5$, maka tentukanlah daerah hasil dari :

(a) $f(x) \cdot g(x)$

(b) $\frac{f(x)}{g(x)}$

Jawab

(a) $f(x) \cdot g(x) = (x + 3)(x - 5)$

$f(x) \cdot g(x) = x^2 + 2x - 15$

Tinjau : $y_{\min} = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$

$y_{\min} = \frac{2^2 - 4(1)(-15)}{-4(1)}$

$$y_{\min} = \frac{4 + 60}{-4}$$

$$y_{\min} = -16$$

Jadi daerah hasilnya $R = \{ y \mid y \in \text{Real}, y \geq -16 \}$

$$(b) \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + 3}{x - 5}$$

$$\text{Misal : } y = \frac{x + 3}{x - 5}$$

$$\text{Maka : } y(x - 5) = x + 3$$

$$xy - 5y = x + 3$$

$$xy - x = 5y + 3$$

$$(y - 1)x = 5y + 3$$

$$x = \frac{5y + 3}{y - 1}$$

Jadi daerah hasilnya $R = \{ y \mid y \in \text{Real}, y \neq 1 \}$

08. Jika $f(x) = \frac{3}{x-4}$ dan $g(x) = \sqrt{3x-6}$ maka daerah asal dari $f - g$ adalah ...
- A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 4\}$ B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 \leq x < 4\}$
 C. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 2, x \neq 4\}$ D. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 4\}$
 E. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 4\}$
09. Jika $f(x) = x^2 - 7x + 10$ dan $g(x) = x^2 - 6x + 8$ maka daerah asal dari $\frac{f}{g}$ adalah ...
- A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$ B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 4\}$
 C. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq 4\}$ D. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq 4, x \neq 5\}$
 E. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 2, x \neq 5\}$
10. Jika $f(x) = \sqrt{x+5}$ dan $g(x) = \sqrt{4-2x}$ maka daerah asal dari $f(x) + g(x)$ adalah ...
- A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq 2\}$ B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 5\}$
 C. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq -2\}$ D. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 5\}$
 E. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 2\}$
11. Jika fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 12}$ dan fungsi $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 12}$ maka daerah asal dari $f(x) + g(x)$ adalah ...
- A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 6\}$ B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 4\}$
 C. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq -2\}$ D. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 3\}$
 E. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -6 \leq x \leq 4\}$
12. Jika $f(x) = \sqrt{x+3}$ dan $g(x) = \sqrt{4x+12}$ maka daerah asal dari $f(x) + g(x)$ adalah ...
- A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$ B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 4\}$
 C. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$
 E. $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$
13. Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x + 5$. maka daerah hasil dari $(f \cdot g)(x)$ adalah...
- A. $\{y \mid y \geq 4, y \in \mathbb{R}\}$ B. $\{y \mid y \leq 4, y \in \mathbb{R}\}$
 C. $\{y \mid y \geq -4, y \in \mathbb{R}\}$ D. $\{y \mid y \leq -4, y \in \mathbb{R}\}$
 E. $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$
14. Jika $f(x) = \sqrt{x+1}$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ maka daerah asal alamiah dari $[f + g](x) = \dots$
- A. $\{-1 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ B. $\{x \leq -1 \text{ atau } x \geq 4, x \in \mathbb{R}\}$
 C. $\{-4 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ D. $\{x \leq -4, x \in \mathbb{R}\}$
 E. $\{x \geq 4, x \in \mathbb{R}\}$