

# Unidad 3.A. Diseño de sistemas mecatrónicos basado en modelos

Dr. Ing. Hernán Garrido

Control y sistemas  
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería

*carloshernangarrido@gmail.com*

Diciembre de 2023



- 1 Introducción
- 2 Etapas de diseño e integración
- 3 Verificación y validación de modelos
- 4 Conceptos de model-in-the-loop, software-in-the-loop, processor-in-the-loop y hardware-in-the-loop
- 5 Modelado de sistemas físicos: Modelado de la planta
- 6 Metodología para el modelado en espacio de estados

- 1 Introducción
- 2 Etapas de diseño e integración
- 3 Verificación y validación de modelos
- 4 Conceptos de model-in-the-loop, software-in-the-loop, processor-in-the-loop y hardware-in-the-loop
- 5 Modelado de sistemas físicos: Modelado de la planta
- 6 Metodología para el modelado en espacio de estados

# Introducción: Sistemas y modelos

## Sistema (concreto)

Es un recorte de la realidad. Esto implica una *frontera* con el resto de la realidad, lo cual define:

- Entradas
- Salidas

## Modelo (abstracto)

Es una representación *simplificada* de un recorte de la realidad, lo cual define:

- Entradas
- Salidas
- Suposiciones

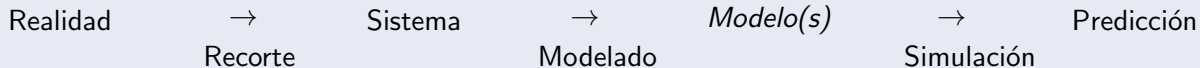


Figura: Tomada de [https://moorepants.github.io/resonance/07/07\\_vertical\\_vibration\\_of\\_a\\_quarter\\_car.html](https://moorepants.github.io/resonance/07/07_vertical_vibration_of_a_quarter_car.html)

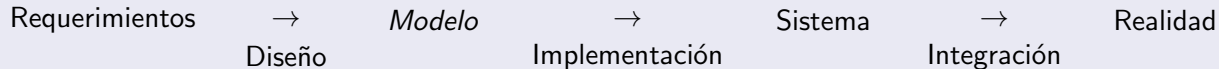
- 1 Introducción
- 2 Etapas de diseño e integración
- 3 Verificación y validación de modelos
- 4 Conceptos de model-in-the-loop, software-in-the-loop, processor-in-the-loop y hardware-in-the-loop
- 5 Modelado de sistemas físicos: Modelado de la planta
- 6 Metodología para el modelado en espacio de estados

# Etapas de diseño e integración

## Análisis (conocer)



## Síntesis (crear)



- 1 Introducción
- 2 Etapas de diseño e integración
- 3 Verificación y validación de modelos**
- 4 Conceptos de model-in-the-loop, software-in-the-loop, processor-in-the-loop y hardware-in-the-loop
- 5 Modelado de sistemas físicos: Modelado de la planta
- 6 Metodología para el modelado en espacio de estados

# Verificación y validación

Modelos en el contexto de simulaciones:

- Modelo matemático (analítico): Ecuaciones diferenciales que aproximan la respuesta real.
- Modelo de simulación (numérico): Ecuaciones en diferencias que aproximan la solución analítica.

## Verificación

Asegurar que el modelo numérico es una buena aproximación del modelo analítico.

- Se realiza mediante simulaciones de escenarios cuya solución es conocida, empezando por los obvios o intuitivos.
- Se comparan predicciones numéricas y analíticas.

## Validación

Asegurar que los modelos (numérico y/o analítico) son una buena aproximación del sistema real.

- Se realiza mediante simulaciones y/o cálculos y ensayos experimentales.
- Se comparan predicciones y mediciones.



# Predecir con modelos

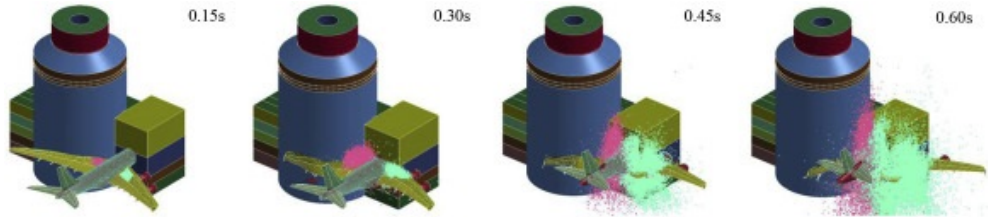
¿Para qué predecir con modelos? – Para ahorrar dinero.

- Predecir el futuro: Pronóstico (forecasting)
- Predecir el pasado: Ingeniería forense
- Predecir escenarios hipotéticos:
  - Diseño iterativo
  - Evaluación de diseños
    - Estabilidad
    - Robustez
    - Durabilidad
    - ...

¿Cómo hacerlo mejor? – Con modelos validados, preferentemente con identificación de sistemas.

- Simular con el modelo → Predicciones
- Ensayar en el sistema → Mediciones
- Comparar: Mediciones  $\langle \rangle$  Predicciones
- Actualizar el modelo:
  - en sus parámetros: calibrar
  - en su estructura: replantear
- Repetir ... hasta la convergencia

# Predecir con modelos: El valor de la información



## Soluciones de compromiso

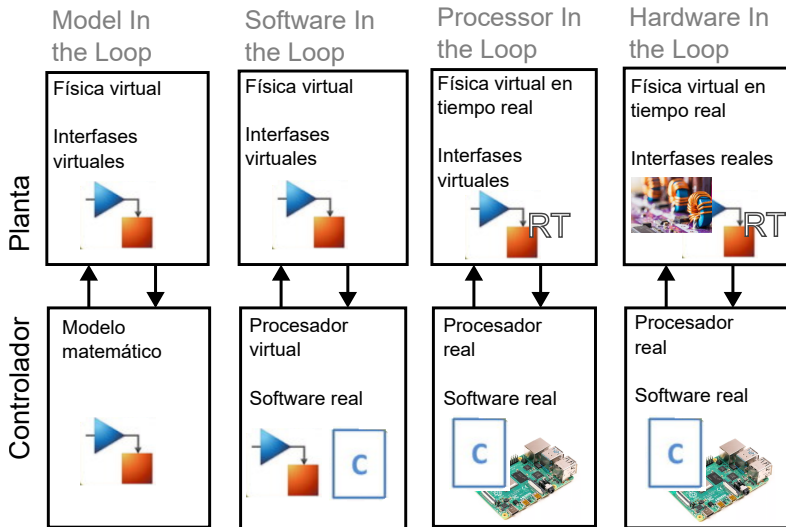
- Ensayos parciales
- Múltiples modelos
  - Multi-escala
  - Multi-fidelidad
  - Multi-dominio (multifísica)
- Múltiples simulaciones

Recomendación: Lo mínimo que se espera de un trabajo profesional con control lineal son dos modelos:

- Un modelo de diseño, de fidelidad baja (e.g., CP - CT - LTI): Para ajustar los parámetros del controlador.
- Un modelo de evaluación, de fidelidad media (e.g., CP - CT/DT - NL/TV): Para evaluar el diseño (en especial su rango de validez) antes de invertir en ensayos experimentales.

- 1 Introducción
- 2 Etapas de diseño e integración
- 3 Verificación y validación de modelos
- 4 Conceptos de model-in-the-loop, software-in-the-loop, processor-in-the-loop y hardware-in-the-loop
- 5 Modelado de sistemas físicos: Modelado de la planta
- 6 Metodología para el modelado en espacio de estados

# Conceptos de MIL, SIL, PIL y HIL



- 1 Introducción
- 2 Etapas de diseño e integración
- 3 Verificación y validación de modelos
- 4 Conceptos de model-in-the-loop, software-in-the-loop, processor-in-the-loop y hardware-in-the-loop
- 5 Modelado de sistemas físicos: Modelado de la planta
- 6 Metodología para el modelado en espacio de estados

# Método de las tres fases

## 1 Sub-estructuración

- Dividir el sistema en subsistemas
- Reconocer las variables del sistema
  - Señales de entrada y salida
  - Variables de estado

## 2 Ecuaciones básicas

- Leyes de conservación
- Leyes constitutivas

## 3 Espacio de estados

- Elegir las variables de estado
- Formar las ecuaciones de estado:

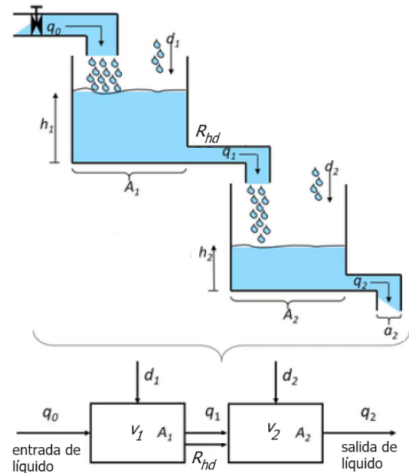
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t), \mathbf{u}_d(t), t)$$

$$\approx \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c(t)$$

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t) + \dots$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t) + \dots$$

## Sub-estructuración



# Método de las tres fases

## 1 Sub-estructuración

- Dividir el sistema en subsistemas
- Reconocer las variables del sistema
  - Señales de entrada y salida
  - Variables de estado

## 2 Ecuaciones básicas

- Leyes de conservación
- Leyes constitutivas

## 3 Espacio de estados

- Elegir las variables de estado
- Formar las ecuaciones de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t), \mathbf{u}_d(t), t)$$

$$\approx \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c(t)$$

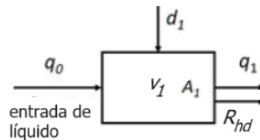
$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t) + \dots$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t) + \dots$$

## Ecuaciones básicas

- Leyes de conservación: Acumuladores, fuentes y sumideros.

|            | En paralelo                     | En serie    |
|------------|---------------------------------|-------------|
| Eléctrico  | voltaje                         | corriente   |
| Mecánico   | velocidad                       | fuerza      |
| Hidráulico | presión diferencial             | caudal vol. |
| Neumático  | presión y temperatura absolutas | caudal más. |



$$\frac{dv_1(t)}{dt} = q_0(t) + d_1(t) - q_1(t)$$

# Método de las tres fases

## 1 Sub-estructuración

- Dividir el sistema en subsistemas
- Reconocer las variables del sistema
  - Señales de entrada y salida
  - Variables de estado

## 2 Ecuaciones básicas

- Leyes de conservación
- Leyes constitutivas

## 3 Espacio de estados

- Elegir las variables de estado
- Formar las ecuaciones de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t), \mathbf{u}_d(t), t)$$

$$\approx \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c(t)$$

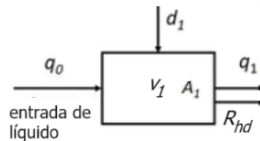
$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t) + \dots$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t) + \dots$$

## Ecuaciones básicas

- Leyes constitutivas: Comportamiento de los componentes.

|            | Leyes  |
|------------|--|
| Eléctrico  | $v_L = L \frac{di}{dt}, v_R = Ri, v_C = \frac{1}{C} \int i dt$ |
| Mecánico   | $f_k = k\Delta x, f_c = c\Delta \dot{x}, f_m = m\ddot{x}$      |
| Hidráulico | $v = Ah, \Delta p = qR_{hd}^a, p = \rho gh$                    |
| Neumático  | $p = Z\rho RT, \dots$  |



$$q_1(t) = \frac{p_1(t) - 0}{R_{hd}}, p_1(t) = \rho gh_1(t), v_1(t) = A_1 h_1(t)$$

<sup>a</sup>Ley de Poiseuille



# Método de las tres fases

## 1 Sub-estructuración

- Dividir el sistema en subsistemas
- Reconocer las variables del sistema
  - Señales de entrada y salida
  - Variables de estado

## 2 Ecuaciones básicas

- Leyes de conservación
- Leyes constitutivas

## 3 Espacio de estados

- Elegir las variables de estado
- Formar las ecuaciones de estado:

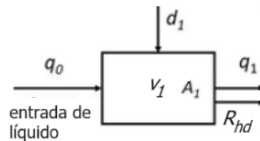
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t), \mathbf{u}_d(t), t)$$

$$\approx \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c(t)$$

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t) + \dots$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t) + \dots$$

## Ecuaciones básicas



$$\frac{dv_1(t)}{dt} = q_0(t) + d_1(t) - q_1(t)$$

$$q_1(t) = \frac{p_1(t) - 0}{R_{hd}}, p_1(t) = \rho g h_1(t), v_1(t) = A_1 h_1(t)$$

Combinando...

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = q_0(t) + d_1(t) - \frac{\rho g}{A_1 R_{hd}} v_1(t)$$

- 1 Introducción
- 2 Etapas de diseño e integración
- 3 Verificación y validación de modelos
- 4 Conceptos de model-in-the-loop, software-in-the-loop, processor-in-the-loop y hardware-in-the-loop
- 5 Modelado de sistemas físicos: Modelado de la planta
- 6 Metodología para el modelado en espacio de estados

## ① Sub-estructuración

- Dividir el sistema en subsistemas
- Reconocer las variables del sistema
  - Señales de entrada y salida
  - Variables de estado

## ② Ecuaciones básicas

- Leyes de conservación
- Leyes constitutivas

## ③ Espacio de estados

- Elegir las variables de estado
- Formar las ecuaciones de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t), \mathbf{u}_d(t), t)$$

$$\approx \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c(t)$$

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t) + \dots$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t) + \dots$$

## Espacio de estados

- Elegir las variables de estado: Al menos una por cada elemento acumulador en el sistema. Por ejemplo, un motor de CC conectado a un brazo flexible tiene:
  - ① Inductancia del motor
  - ② Elasticidad del brazo
  - ③ Energía potencial gravitatoria del brazo
  - ④ Inercia del rotor
  - ⑤ Inercia del brazo

# Método de las tres fases

## 1 Sub-estructuración

- Dividir el sistema en subsistemas
- Reconocer las variables del sistema
  - Señales de entrada y salida
  - Variables de estado

## 2 Ecuaciones básicas

- Leyes de conservación
- Leyes constitutivas

## 3 Espacio de estados

- Elegir las variables de estado
- Formar las ecuaciones de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}_c(t), \mathbf{u}_d(t), t)$$

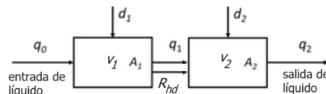
$$\approx \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c(t)$$

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t) + \dots$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t) + \dots$$

## Espacio de estados

- Elegir las variables de estado: Al menos una por cada elemento acumulador en el sistema.



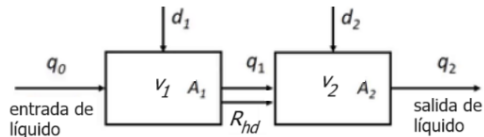
$$\frac{dv_1(t)}{dt} = q_0(t) + d_1(t) - \frac{\rho g}{A_1 R_{hd}} v_1(t)$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{\rho g}{A_1 R_{hd}} v_1(t) + d_2(t) - q_2(t)$$

2 acumuladores, se puede elegir:

- el volumen de cada tanque, o
- la altura de cada tanque, o
- combinaciones (no recomendable).

# Método de las tres fases: Espacio de estados



Elijamos los volúmenes para ...

- Formar las ecuaciones de estado

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_d(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}_c(t)$$

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C}_s\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \mathbf{C}_p\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\rho g}{A_1 R_{hd}} v_1(t) + 0 \cdot v_2(t) + q_0(t) + d_1(t) \\ \frac{\rho g}{A_1 R_{hd}} v_1(t) + 0 \cdot v_2(t) - q_2(t) + d_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_c(t) = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}, \mathbf{u}_d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}_p(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) + v_2(t) \\ v_1(t) - v_2(t) \end{bmatrix}, \mathbf{y}_s(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho g}{A_1 R_{hd}} & 0 \\ \frac{\rho g}{A_1 R_{hd}} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 1/A_1 & 0 \\ 0 & 1/A_2 \end{bmatrix}$$

- ① Karl J. Astrom and Richard M. Murray Feedback Systems. Version v3.0i. Princeton University Press. September 2018. Chapter 3.
- ② Karnopp, Dean et al. Systems Dynamics: Modeling, Simulation, and Control of Mechatronic Systems. Fifth Edition. John Wiley and Sons, Inc. 2012. Chapters 1 - 2.1.
- ③ <https://www.mathworks.com/>