

## 2.A. Etapas esenciales de un sistema DSP

Dr. Ing. Hernán Garrido

Control y sistemas  
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería

*carloshernangarrido@gmail.com*

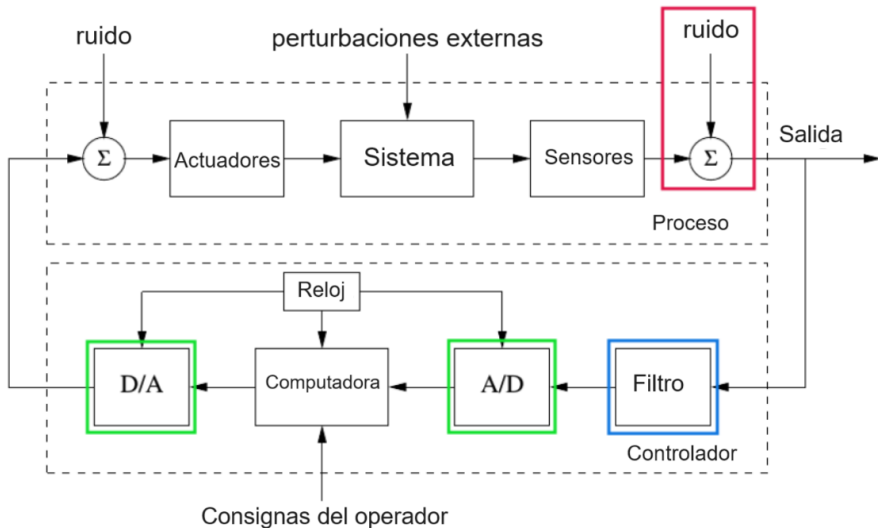
Noviembre de 2023



# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

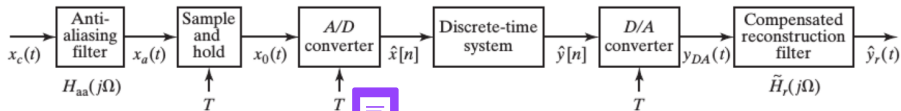
# DSP en el contexto de los sistemas de control



# Etapas de un sistema de procesamiento de señales



(a)



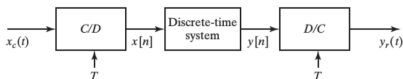
(b)

# Muestreo periódico

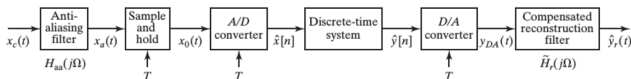
Si una señal en tiempo continuo  $x_c(t)$  se muestrea periódicamente, se obtiene una señal en tiempo discreto:

$$x[n] = x_c(nT)$$

donde  $T$  es el periodo de muestreo,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f_s = 1/T$  es la tasa de muestreo (en radianes,  $\Omega_s = 2\pi f_s$ ).



(a)

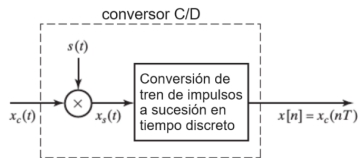


(b)

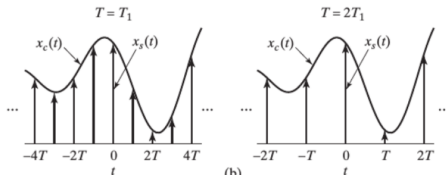
# Proceso de muestreo

El muestreo se puede interpretar como dos operaciones:

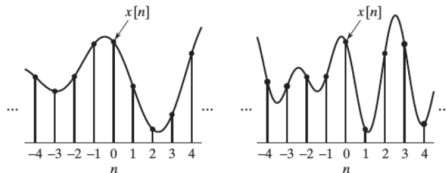
1. Multiplicación por un tren de funciones muestra unitaria (impulsos).
2. Conversión de función discontinua en  $t$  a sucesión en  $n$ .



(a)



(b)



(c)

# Teorema del muestreo de Nyquist-Shannon

## Teorema

Sea  $x_c(t)$  una señal de banda limitada tal que:

$$X_c(j\Omega) = 0, \forall |\Omega| \geq \Omega_N.$$

Entonces,  $x_c(t)$  está determinada por sus muestras  $x[n] = x_c(nT)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  si

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

A la frecuencia  $\Omega_N$  se la llama frecuencia de Nyquist, y a  $2\Omega_N$  tasa de Nyquist.

La tasa de Nyquist es la mínima tasa a la que hay que muestrear la señal  $x_c(t)$  para que luego pueda ser reconstruida.

# Teorema del muestreo en el dominio de la frecuencia

Al multiplicar la señal continua  $x_c(t)$  por el tren periódico de impulsos  $s(t)$ , se obtiene la señal muestreada  $x_s(t)$ :

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

La transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo es:

$$X_c(j\Omega).$$

La transformada de Fourier del tren de impulsos es:

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \Omega_s = 2\pi/T$$

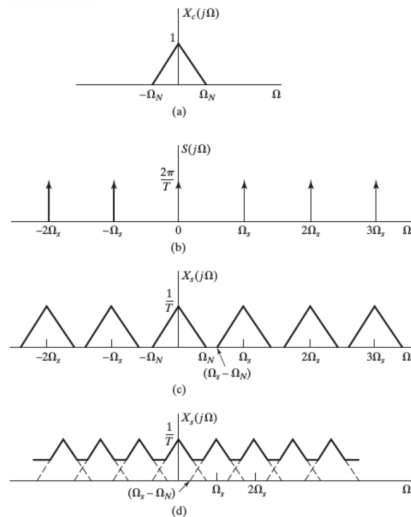
La transformada de Fourier de la señal muestreada es:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$



# Teorema del muestreo en el dominio de la frecuencia: Aliasing

- $X_s(j\Omega)$  son copias periódicamente repetidas de  $X_c(j\Omega)$ .
- Las copias están espaciadas cada  $\Omega_s$ .
- El solapamiento comienza cuando  $\Omega_s - \Omega_N = \Omega_N$
- Si  $\Omega_s \geq 2\Omega_N$ , se evita el solapamiento de las copias.



# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 **Filtro antialiasing**
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización



# Filtro antialiasing: Implementación

FIGURE 3-8

The modified Sallen-Key circuit, a building block for active filter design. The circuit shown implements a 2 pole low-pass filter. Higher order filters (more poles) can be formed by cascading stages. Find  $k_1$  and  $k_2$  from Table 3-1, arbitrarily select  $R_1$  and  $C$  (try 10K and 0.01  $\mu$ F), and then calculate  $R$  and  $R_f$  from the equations in the figure. The parameter,  $f_c$ , is the cutoff frequency of the filter, in hertz.

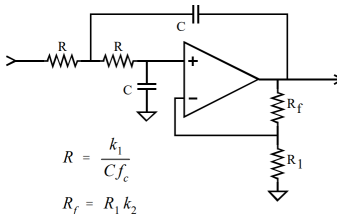


TABLE 3-1

Parameters for designing Bessel, Butterworth, and Chebyshev (6% ripple) filters.

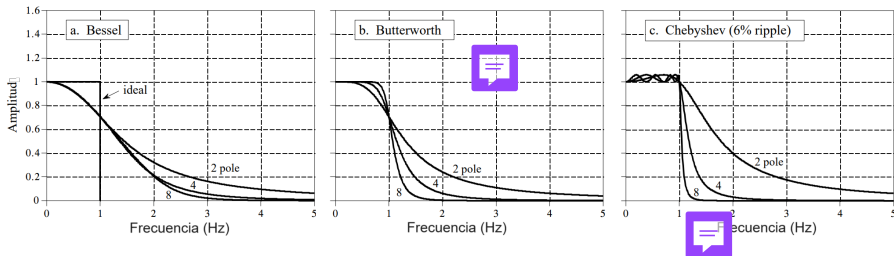
# poles		Bessel		Butterworth		Chebyshev	
		$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$	$k_1$	$k_2$
2	stage 1	0.1251	0.268	0.1592	0.586	0.1293	0.842
4	stage 1	0.1111	0.084	0.1592	0.152	0.2666	0.582
	stage 2	0.0991	0.759	0.1592	1.235	0.1544	1.660
6	stage 1	0.0990	0.040	0.1592	0.068	0.4019	0.537
	stage 2	0.0941	0.364	0.1592	0.586	0.2072	1.448
	stage 3	0.0834	1.023	0.1592	1.483	0.1574	1.846
8	stage 1	0.0894	0.024	0.1592	0.038	0.5359	0.522
	stage 2	0.0867	0.213	0.1592	0.337	0.2657	1.379
	stage 3	0.0814	0.593	0.1592	0.889	0.1848	1.711
	stage 4	0.0726	1.184	0.1592	1.610	0.1582	1.913

**Figura:** Tomado de Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists by Steven W. Smith; disponible en [www.dspguide.com](http://www.dspguide.com)

# Filtro antialiasing: Limitaciones de la implementación analógica

Todo filtro tiene una banda de transición, la cual debe:

- empezar luego de  $\Omega_N$ , para no perder señal útil, y
- terminar antes de  $\Omega_s - \Omega_N$ , para evitar el solapamiento.
- Recordar: diapositiva 9

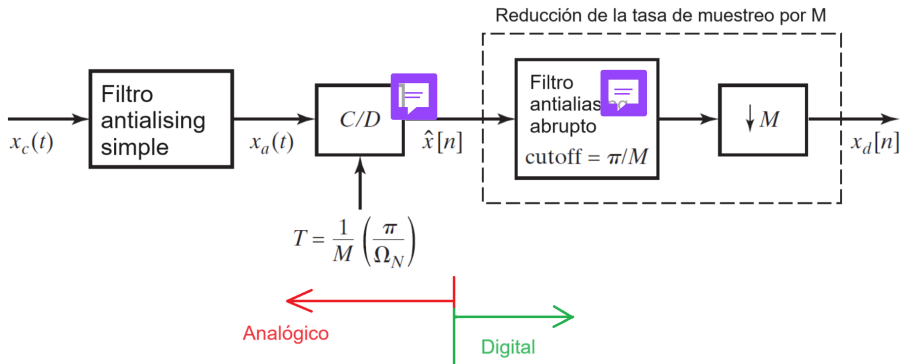


En los filtros analógicos es difícil hacer una banda de transición muy estrecha.

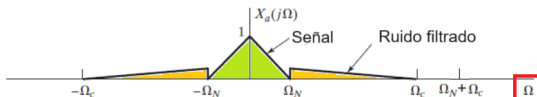
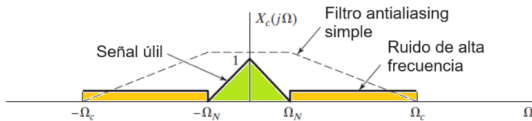
# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling**
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

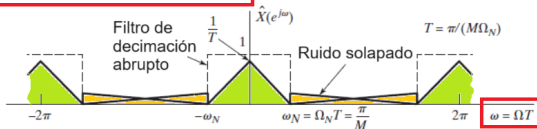
# Técnica de oversampling: diagrama en bloques



# Técnica de oversampling: análisis en la frecuencia

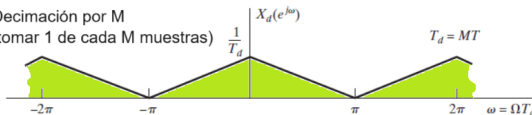


Muestreo con  $\Omega_N + \Omega_c \geq M 2 \Omega_N \neq 2 \Omega_N$



Decimación por M

(tomar 1 de cada M muestras)





# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D**
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

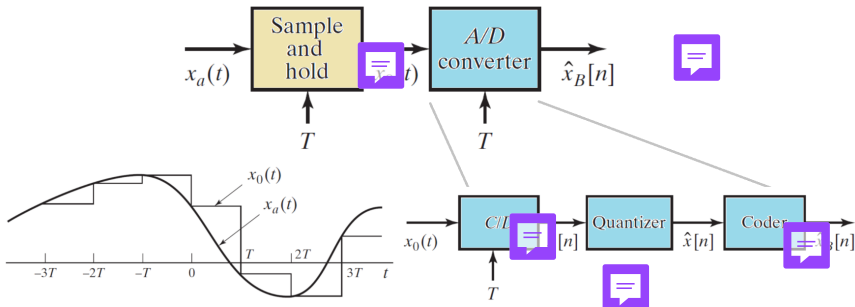
# Conversión A/D

Un conversor analógico a digital (A/D) es un dispositivo físico, discreto o integrado en un microcontrolador, que:

- Recibe una señal analógica de tensión *constante*, y
- la convierte en un código binario que representa un valor cuantizado.

Para trabajar con señales analógicas variables:

- se agrega una etapa de muestreo y retención antes del conversor A/D; normalmente un retenedor de orden cero (zero-order-holder).



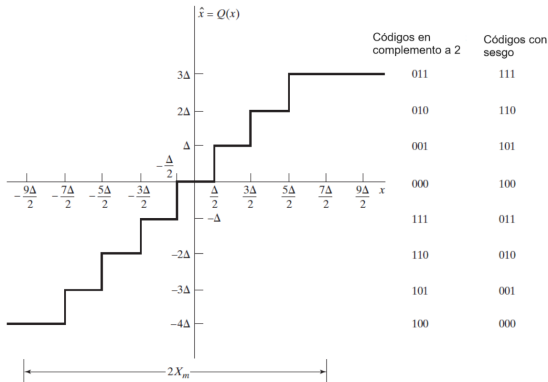
# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización**
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

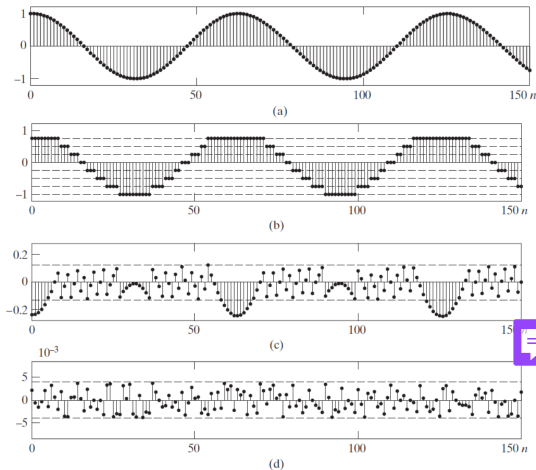
# Cuantizador (quantizer)

Un cuantizador es un sistema no lineal cuyo objetivo es transformar la muestra de entrada  $x[n] \in \mathbb{R}$  en uno  $\hat{x}[n] \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , donde  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son  $n$  valores prescritos.

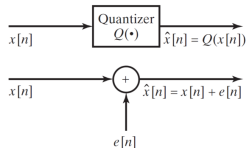
- La cantidad de valores prescritos es  $n = 2^{B+1}$ .
- La precisión del cuantizador es  $\Delta = \frac{V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}}}{2^{B+1}} = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$



# Error de cuantización y su modelo aditivo



Modelo aditivo del error de cuantización



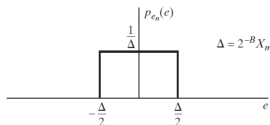
**Figura:** (b) Muestras cuantizadas de (a) con un cuantizador de 3 bits. (c) Error de cuantización con 3 bits. (d) Error de cuantización con 8 bits.

# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits**
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

# Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits

Si  $\Delta$  es pequeño, se puede asumir que el error de cuantización está uniformemente distribuido y su función de densidad de probabilidad es:



Por lo tanto, su varianza se puede calcular como:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Si  $x[n]$  es una señal pura, la relación señal ruido de  $\hat{x}[n]$  resulta:

$$\text{SNR}_{ADC} = 10 \log_{10} \left( \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 6.02B - 20 \log_{10} \left( \frac{X_m}{\sigma_x} \right) + 10.8$$

Un seno de excursión completa ( $\frac{X_m}{\sigma_x} = \sqrt{2}$ ) y 8 bits ( $B = 7$ ) dan  $\approx 50$  dB.

# Selección de la cantidad de bits del conversor A/D

Considere que la señal analógica muestreada, pero aún no cuantizada, es decir  $x[n]$ , no es pura; si no que tiene una relación señal ruido  $\text{SNR}_{x[n]}$ .

- Si  $\text{SNR}_{\text{ADC}} \geq \text{SNR}_{x[n]}$ , entonces la señal cuantizada  $\hat{x}[n]$  tendrá la *misma* relación señal ruido que la señal  $x[n]$ , y los  $B_{\text{noise}}$  bits menos significativos representarán ruido de la señal original, donde:

$$B_{\text{noise}} \approx \frac{\text{SNR}_{\text{ADC}} - \text{SNR}_{x[n]}}{6} = \frac{20 \log_{10} \left( \frac{\text{ruido en } x[n]}{\text{ruido del ADC}} \right)}{6}.$$

- Si  $\text{SNR}_{\text{ADC}} < \text{SNR}$ , entonces la señal cuantizada  $\hat{x}[n]$  tendrá una relación señal ruido *peor* que la señal original  $x[n]$ .
- En la práctica:
  - conviene elegir:

$$B_{\text{noise}} \geq 1.$$

- Si  $B_{\text{noise}} \gg 1$ , se pueden descartar algunos antes de almacenar el dato en memoria u operar con él.



# Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A**
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

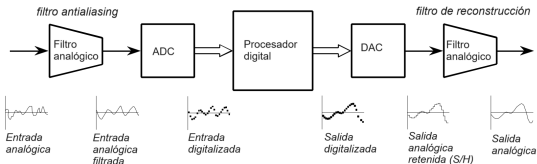
# Conversión D/A

Un conversor digital a analógico (D/A) es un dispositivo físico, discreto o integrado en un microcontrolador, que:

- Recibe un código binario que representa un valor cuantizado, y
- lo convierte en una señal analógica de tensión *constante*.

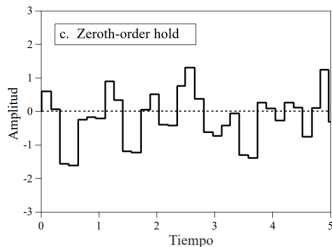
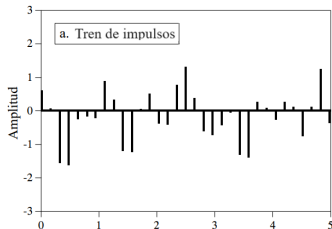
Sus dos principales parámetros son:

- Resolución: Es el número de valores distintos que puede entregar a su salida, normalmente es  $2^{B+1}$  donde  $B + 1$  es el número de bits del ADC.
- Tasa de muestreo máxima: Es el máximo número de muestras por unidad de tiempo que el conversor puede entregar a su salida, de manera correcta.

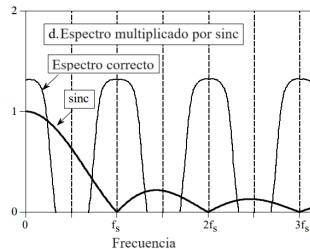
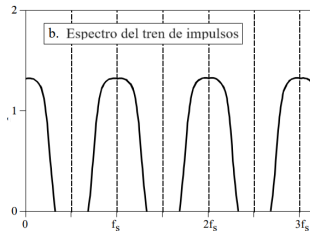


# Conversión D/A en el tiempo y en la frecuencia

## Dominio del tiempo

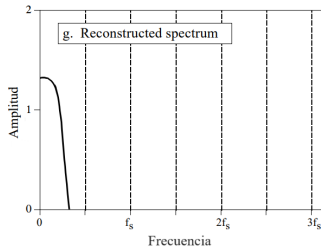
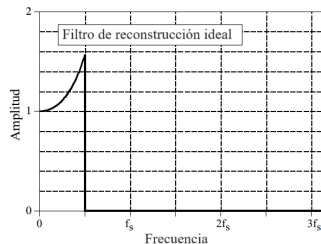
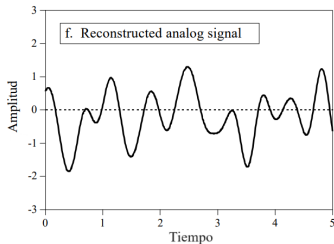


## Dominio de la frecuencia



# Conversión D/A en el tiempo y en la frecuencia

$$H(f) = \left| \frac{\sin(\pi f/f_s)}{\pi f/f_s} \right|$$



# Contenidos

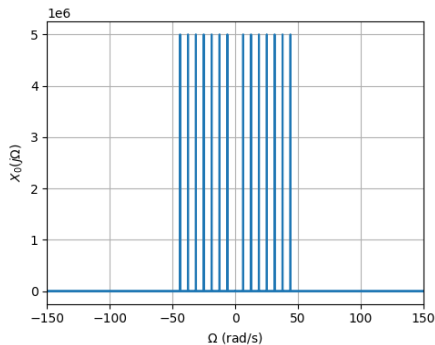
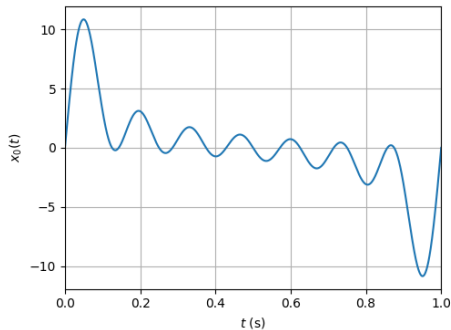
- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

# Técnicas de up-sampling, pre-ecualización y post-ecualización

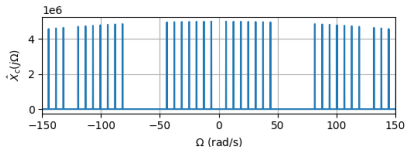
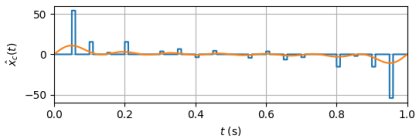
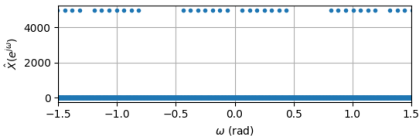
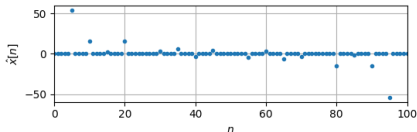
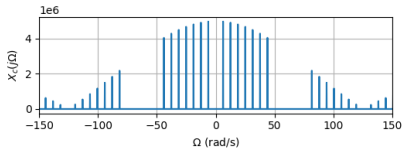
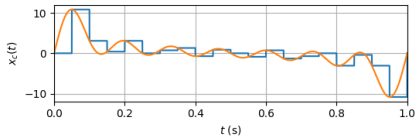
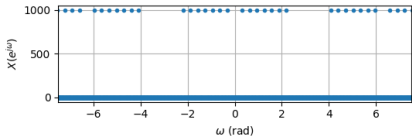
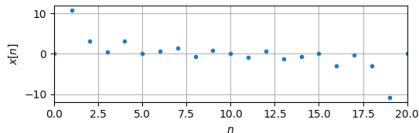
Existen 4 formas de implementar la reconstrucción:

- ① No hacerla, y aceptar las consecuencias.
- ② Post-ecualización: Utilizar un filtro *analógico* con una respuesta en frecuencia tal que no sólo:
  - elimine las altas frecuencias, si no que también
  - refuerce las altas frecuencias dentro de la banda útil que fueron atenuadas por el ZOH.
- ③ Pre-ecualización: Utilizar un filtro digital que refuerce las altas frecuencias de la banda útil antes de ingresar la señal al conversor D/A.
- ④ Up-sampling:
  - Interpolar rellenando con ceros (lo contrario de decimar),
  - aplicar un filtro pasa-bajos digital (opcional),
  - convertir a analógico, y finalmente
  - el filtro analógico de reconstrucción puede ser simple.

# Up-sampling: Ejemplo

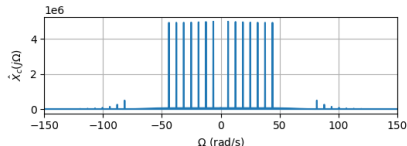
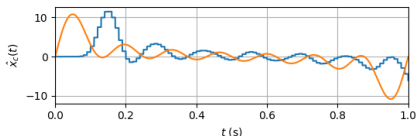
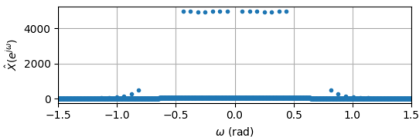
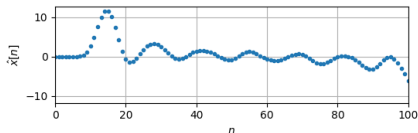
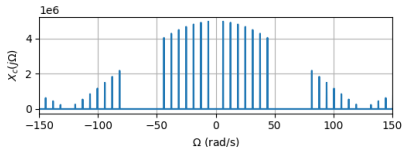
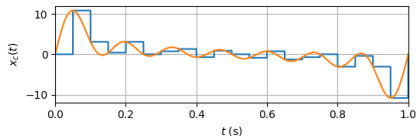
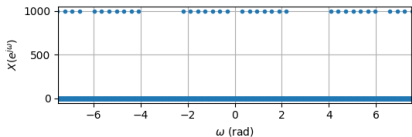
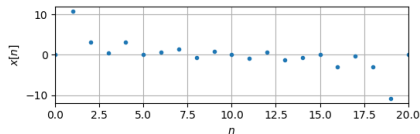


# Interpolando con ceros





# Interpolando con un filtro digital Butterworth de 8vo orden



- ① Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. Discrete-time signal processing, 3rd Ed. Prentice Hall. 2010. Section 4.3.
- ② Steven W. Smith. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. Chapter 3, ADC and DAC. Link.
- ③ Maxim Integrated. Equalizing Techniques Flatten DAC Frequency Response. Application Note 3853. August 2012.