

2.A. Etapas esenciales de un sistema DSP

Dr. Ing. Hernán Garrido

Control y sistemas
Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería

carloshernangarrido@gmail.com

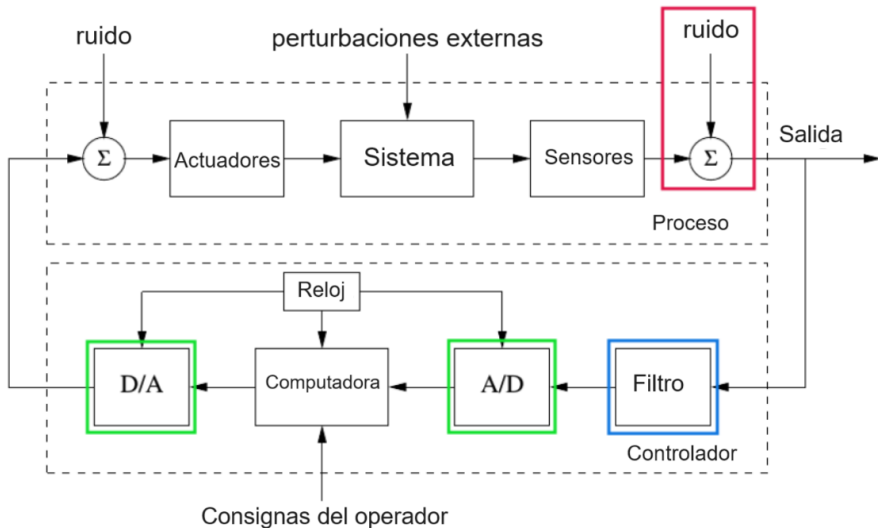
Noviembre de 2023



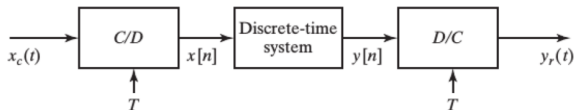
Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

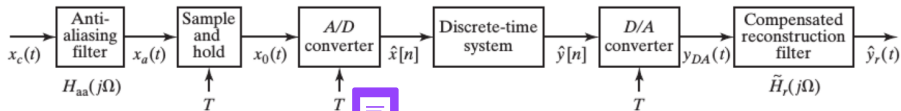
DSP en el contexto de los sistemas de control



Etapas de un sistema de procesamiento de señales



(a)



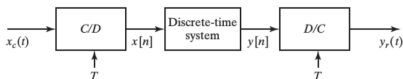
(b)

Muestreo periódico

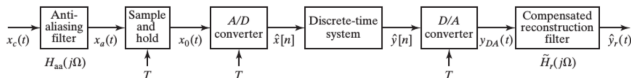
Si una señal en tiempo continuo $x_c(t)$ se muestrea periódicamente, se obtiene una señal en tiempo discreto:

$$x[n] = x_c(nT)$$

donde T es el periodo de muestreo, $n \in \mathbb{Z}$, $f_s = 1/T$ es la tasa de muestreo (en radianes, $\Omega_s = 2\pi f_s$).



(a)

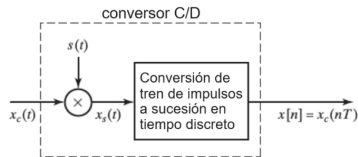


(b)

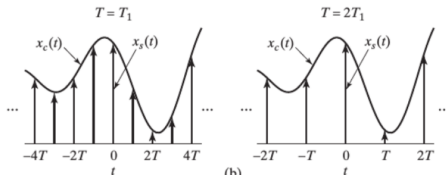
Proceso de muestreo

El muestreo se puede interpretar como dos operaciones:

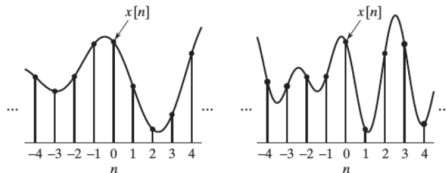
1. Multiplicación por un tren de funciones muestra unitaria (impulsos).
2. Conversión de función discontinua en t a sucesión en n .



(a)



(b)



(c)

Teorema del muestreo de Nyquist-Shannon

Teorema

Sea $x_c(t)$ una señal de banda limitada tal que:

$$X_c(j\Omega) = 0, \forall |\Omega| \geq \Omega_N.$$

Entonces, $x_c(t)$ está determinada por sus muestras $x[n] = x_c(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$ si

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

A la frecuencia Ω_N se la llama frecuencia de Nyquist, y a $2\Omega_N$ tasa de Nyquist.

La tasa de Nyquist es la mínima tasa a la que hay que muestrear la señal $x_c(t)$ para que luego pueda ser reconstruida.

Teorema del muestreo en el dominio de la frecuencia

Al multiplicar la señal continua $x_c(t)$ por el tren periódico de impulsos $s(t)$, se obtiene la señal muestreada $x_s(t)$:

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

La transformada de Fourier de la señal en tiempo continuo es:

$$X_c(j\Omega).$$

La transformada de Fourier del tren de impulsos es:

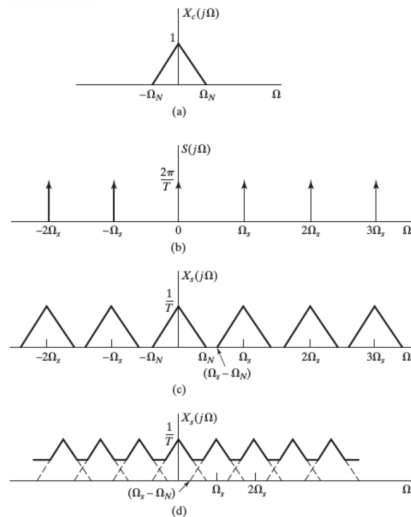
$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s), \Omega_s = 2\pi/T$$

La transformada de Fourier de la señal muestreada es:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))$$

Teorema del muestreo en el dominio de la frecuencia: Aliasing

- $X_s(j\Omega)$ son copias periódicamente repetidas de $X_c(j\Omega)$.
- Las copias están espaciadas cada Ω_s .
- El solapamiento comienza cuando $\Omega_s - \Omega_N = \Omega_N$
- Si $\Omega_s \geq 2\Omega_N$, se evita el solapamiento de las copias.



Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing**
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

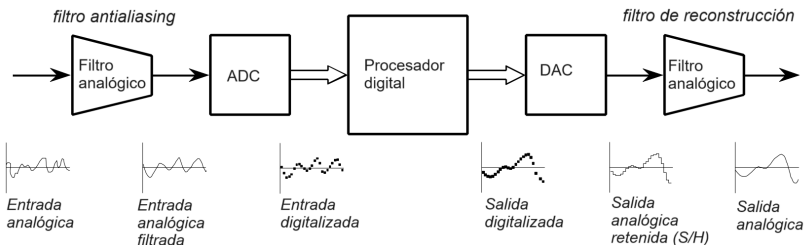
Filtro antialiasing: Necesidad

Para evitar el solapamiento o aliasing has dos caminos:

- Aumentar Ω_s
- Limitar Ω_N

Incluso aumentando mucho Ω_s , puede que no se pueda evitar el aliasing si Ω_N no está limitada.

- Esto puede pasar incluso en señales de banda limitada por naturaleza (ejemplo, música).
 - Debido al ruido de banda ancha, presente en toda medición analógica.



Filtro antialiasing: Implementación

FIGURE 3-8

The modified Sallen-Key circuit, a building block for active filter design. The circuit shown implements a 2 pole low-pass filter. Higher order filters (more poles) can be formed by cascading stages. Find k_1 and k_2 from Table 3-1, arbitrarily select R_1 and C (try 10K and 0.01 μ F), and then calculate R and R_f from the equations in the figure. The parameter, f_c , is the cutoff frequency of the filter, in hertz.

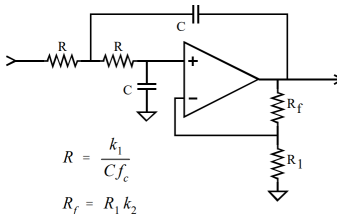


TABLE 3-1

Parameters for designing Bessel, Butterworth, and Chebyshev (6% ripple) filters.

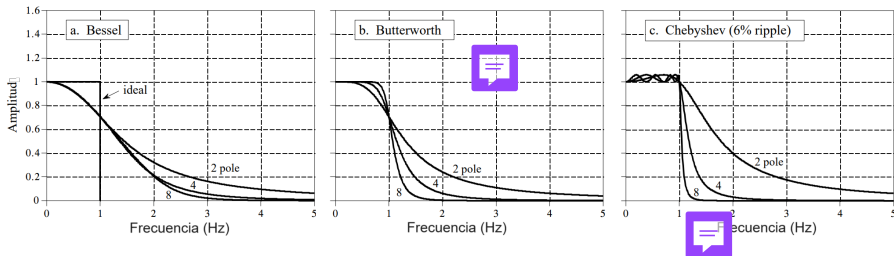
# poles		Bessel		Butterworth		Chebyshev	
		k_1	k_2	k_1	k_2	k_1	k_2
2	stage 1	0.1251	0.268	0.1592	0.586	0.1293	0.842
4	stage 1	0.1111	0.084	0.1592	0.152	0.2666	0.582
	stage 2	0.0991	0.759	0.1592	1.235	0.1544	1.660
6	stage 1	0.0990	0.040	0.1592	0.068	0.4019	0.537
	stage 2	0.0941	0.364	0.1592	0.586	0.2072	1.448
	stage 3	0.0834	1.023	0.1592	1.483	0.1574	1.846
8	stage 1	0.0894	0.024	0.1592	0.038	0.5359	0.522
	stage 2	0.0867	0.213	0.1592	0.337	0.2657	1.379
	stage 3	0.0814	0.593	0.1592	0.889	0.1848	1.711
	stage 4	0.0726	1.184	0.1592	1.610	0.1582	1.913

Figura: Tomado de Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists by Steven W. Smith; disponible en www.dspguide.com

Filtro antialiasing: Limitaciones de la implementación analógica

Todo filtro tiene una banda de transición, la cual debe:

- empezar luego de Ω_N , para no perder señal útil, y
- terminar antes de $\Omega_s - \Omega_N$, para evitar el solapamiento.
- Recordar: diapositiva 9

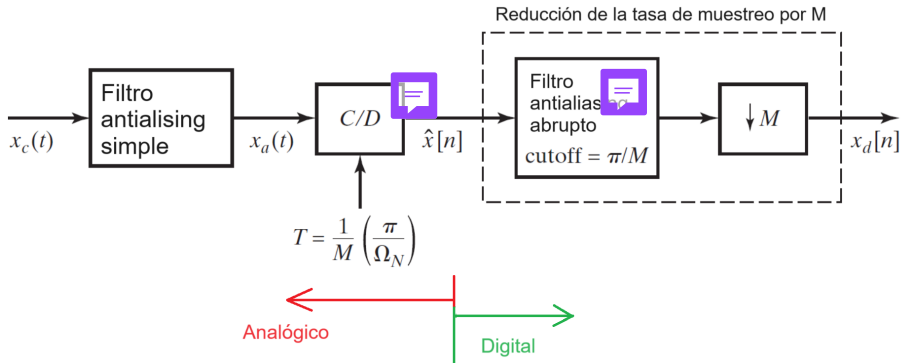


En los filtros analógicos es difícil hacer una banda de transición muy estrecha.

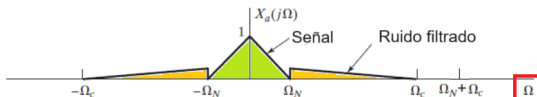
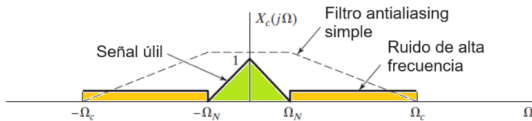
Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling**
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

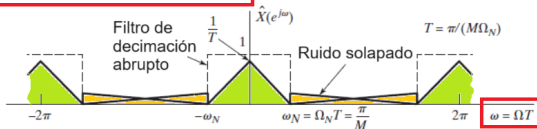
Técnica de oversampling: diagrama en bloques



Técnica de oversampling: análisis en la frecuencia

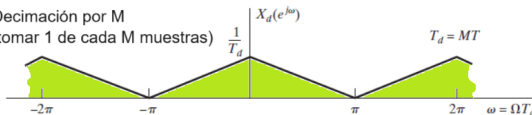


Muestreo con $\Omega_N + \Omega_c \geq M 2 \Omega_N \neq 2 \Omega_N$



Decimación por M

(tomar 1 de cada M muestras)



Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D**
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

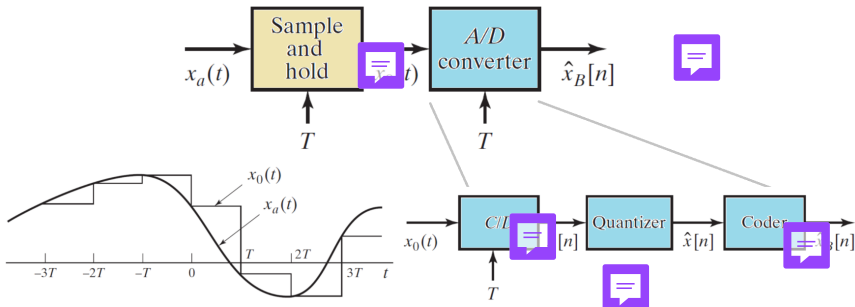
Conversión A/D

Un conversor analógico a digital (A/D) es un dispositivo físico, discreto o integrado en un microcontrolador, que:

- Recibe una señal analógica de tensión *constante*, y
- la convierte en un código binario que representa un valor cuantizado.

Para trabajar con señales analógicas variables:

- se agrega una etapa de muestreo y retención antes del conversor A/D; normalmente un retenedor de orden cero (zero-order-holder).



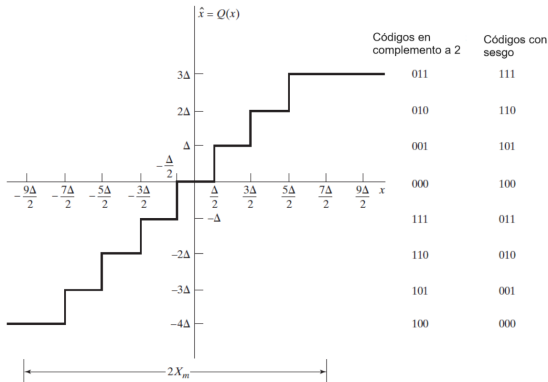
Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización**
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

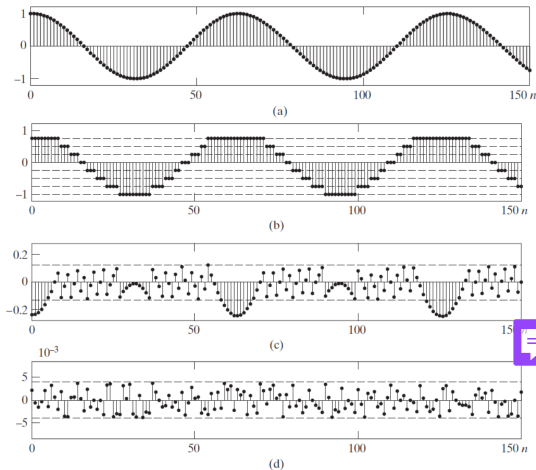
Cuantizador (quantizer)

Un cuantizador es un sistema no lineal cuyo objetivo es transformar la muestra de entrada $x[n] \in \mathbb{R}$ en uno $\hat{x}[n] \in \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, donde v_1, v_2, \dots, v_n son n valores prescritos.

- La cantidad de valores prescritos es $n = 2^{B+1}$.
- La precisión del cuantizador es $\Delta = \frac{V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}}}{2^{B+1}} = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$



Error de cuantización y su modelo aditivo



Modelo aditivo del error de cuantización

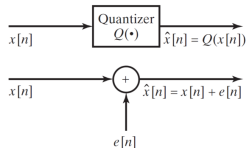


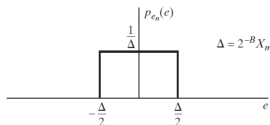
Figura: (b) Muestras cuantizadas de (a) con un cuantizador de 3 bits. (c) Error de cuantización con 3 bits. (d) Error de cuantización con 8 bits.

Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits**
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits

Si Δ es pequeño, se puede asumir que el error de cuantización está uniformemente distribuido y su función de densidad de probabilidad es:



Por lo tanto, su varianza se puede calcular como:

$$\sigma_e^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \frac{1}{\Delta} e^2 de = \frac{\Delta^2}{12}.$$

Si $x[n]$ es una señal pura, la relación señal ruido de $\hat{x}[n]$ resulta:

$$\text{SNR}_{ADC} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \right) = 6.02B - 20 \log_{10} \left(\frac{X_m}{\sigma_x} \right) + 10.8$$

Un seno de excursión completa ($\frac{X_m}{\sigma_x} = \sqrt{2}$) y 8 bits ($B = 7$) dan ≈ 50 dB.

Selección de la cantidad de bits del conversor A/D

Considere que la señal analógica muestreada, pero aún no cuantizada, es decir $x[n]$, no es pura; si no que tiene una relación señal ruido $\text{SNR}_{x[n]}$.

- Si $\text{SNR}_{\text{ADC}} \geq \text{SNR}_{x[n]}$, entonces la señal cuantizada $\hat{x}[n]$ tendrá la *misma* relación señal ruido que la señal $x[n]$, y los B_{noise} bits menos significativos representarán ruido de la señal original, donde:

$$B_{\text{noise}} \approx \frac{\text{SNR}_{\text{ADC}} - \text{SNR}_{x[n]}}{6} = \frac{20 \log_{10} \left(\frac{\text{ruido en } x[n]}{\text{ruido del ADC}} \right)}{6}.$$

- Si $\text{SNR}_{\text{ADC}} < \text{SNR}$, entonces la señal cuantizada $\hat{x}[n]$ tendrá una relación señal ruido *peor* que la señal original $x[n]$.
- En la práctica:
 - conviene elegir:

$$B_{\text{noise}} \geq 1.$$

- Si $B_{\text{noise}} \gg 1$, se pueden descartar algunos antes de almacenar el dato en memoria u operar con él.

Contenidos

- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A**
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

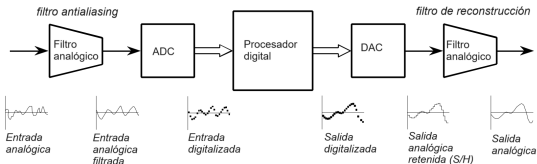
Conversión D/A

Un conversor digital a analógico (D/A) es un dispositivo físico, discreto o integrado en un microcontrolador, que:

- Recibe un código binario que representa un valor cuantizado, y
- lo convierte en una señal analógica de tensión *constante*.

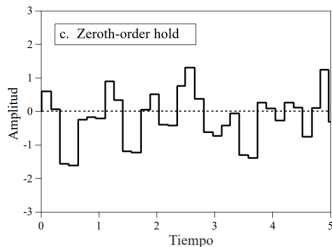
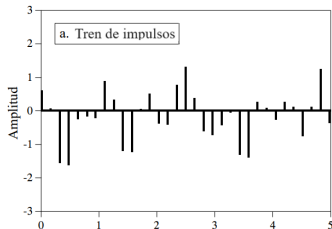
Sus dos principales parámetros son:

- Resolución: Es el número de valores distintos que puede entregar a su salida, normalmente es 2^{B+1} donde $B + 1$ es el número de bits del ADC.
- Tasa de muestreo máxima: Es el máximo número de muestras por unidad de tiempo que el conversor puede entregar a su salida, de manera correcta.

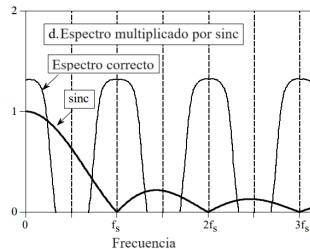
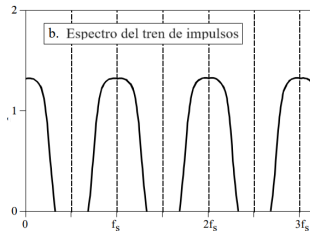


Conversión D/A en el tiempo y en la frecuencia

Dominio del tiempo

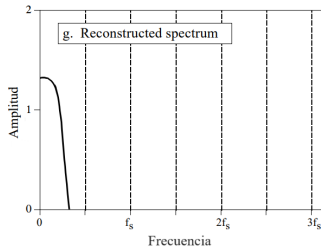
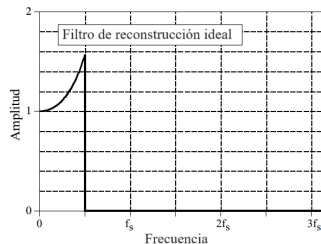
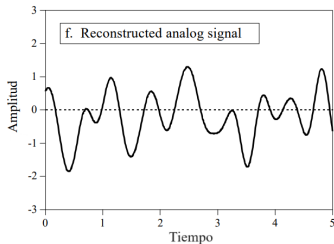


Dominio de la frecuencia



Conversión D/A en el tiempo y en la frecuencia

$$H(f) = \left| \frac{\sin(\pi f/f_s)}{\pi f/f_s} \right|$$



Contenidos

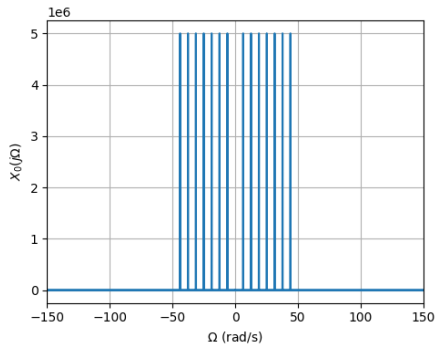
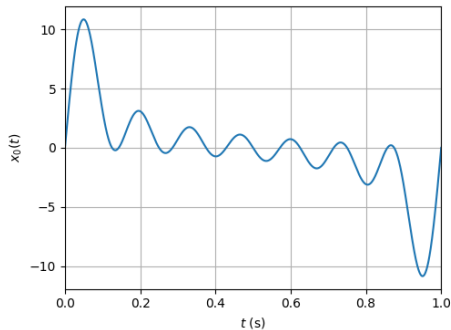
- 1 Introducción
- 2 Filtro antialiasing
- 3 Técnica de oversampling
- 4 Conversión A/D
- 5 Error de cuantización
- 6 Relación señal-ruido de un conversor A/D y su relación con la cantidad de bits
- 7 Conversión D/A
- 8 Técnicas de upsampling, pre-ecualización y post-ecualización

Técnicas de up-sampling, pre-ecualización y post-ecualización

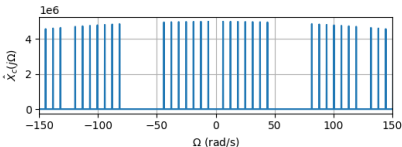
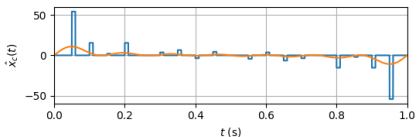
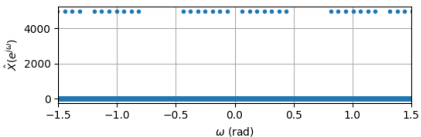
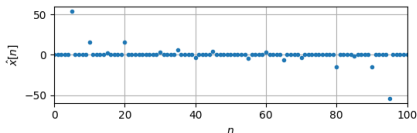
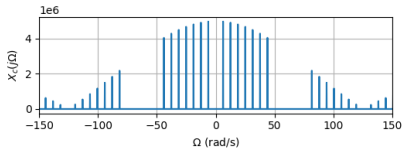
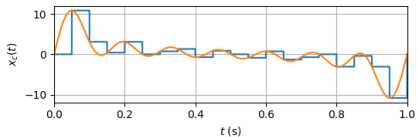
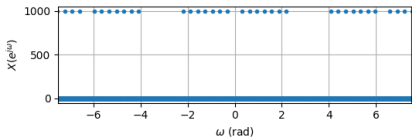
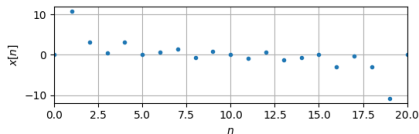
Existen 4 formas de implementar la reconstrucción:

- ① No hacerla, y aceptar las consecuencias.
- ② Post-ecualización: Utilizar un filtro *analógico* con una respuesta en frecuencia tal que no sólo:
 - elimine las altas frecuencias, si no que también
 - refuerce las altas frecuencias dentro de la banda útil que fueron atenuadas por el ZOH.
- ③ Pre-ecualización: Utilizar un filtro digital que refuerce las altas frecuencias de la banda útil antes de ingresar la señal al conversor D/A.
- ④ Up-sampling:
 - Interpolar rellenando con ceros (lo contrario de decimar),
 - aplicar un filtro pasa-bajos digital (opcional),
 - convertir a analógico, y finalmente
 - el filtro analógico de reconstrucción puede ser simple.

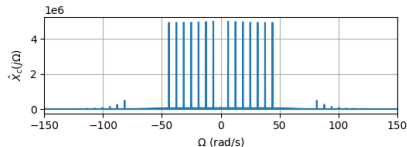
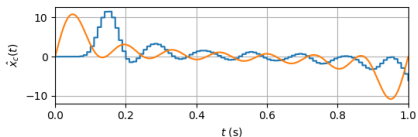
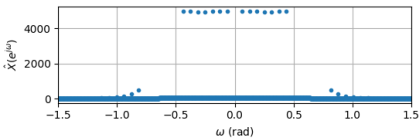
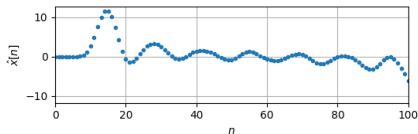
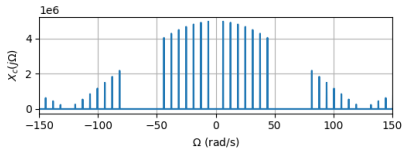
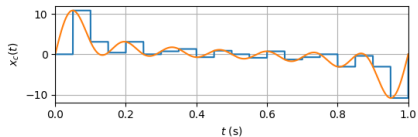
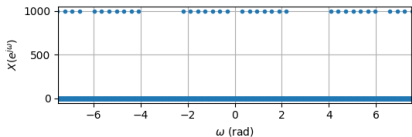
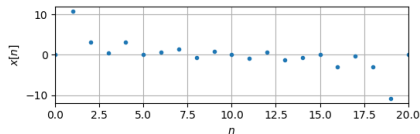
Up-sampling: Ejemplo



Interpolando con ceros



Interpolando con un filtro digital Butterworth de 8vo orden



- ① Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schaffer. Discrete-time signal processing, 3rd Ed. Prentice Hall. 2010. Section 4.3.
- ② Steven W. Smith. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. Chapter 3, ADC and DAC. Link.
- ③ Maxim Integrated. Equalizing Techniques Flatten DAC Frequency Response. Application Note 3853. August 2012.