

Control de Accionamiento de CA con Motor Síncrono de Imanes Permanentes

Dalessandro Francisco y Panonto Valentín

19 de abril de 2025

Resumen

Este trabajo presenta el modelado, diseño y simulación de un sistema de control automático de posición y movimiento para un accionamiento eléctrico de cuatro cuadrantes, basado en la técnica de control vectorial. El sistema está compuesto por un motor síncrono de imanes permanentes (PMSM), un inversor trifásico, una caja reductora y sensores de posición, temperatura y corriente. El objetivo principal es desarrollar un control eficiente que garantice el cumplimiento de consignas de posición, velocidad y torque sin comprometer la integridad del motor. Para ello, se modelaron matemáticamente los distintos componentes del sistema y se implementaron estrategias de control, evaluadas mediante simulaciones. Se analizaron modelos no lineales y linealizados, comparando distintas metodologías. Los resultados obtenidos demuestran que el control diseñado permite un seguimiento preciso de las consignas y una adecuada estabilidad del sistema ante pequeñas variaciones de los parámetros. Esto valida la efectividad del modelo matemático y la estrategia de control implementada, mostrando su viabilidad para una aplicación real mediante un microcontrolador y sensores comerciales.

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es el modelado, diseño y simulación de un Sistema de Control Automático de Posición y Movimientos para un Accionamiento Eléctrico de 4 cuadrantes, utilizando la técnica de Control Vectorial, para un sistema compuesto por una máquina eléctrica de corriente alterna (CA) trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM), alimentada por un inversor trifásico desde fuente de tensión continua; una caja reductora de engranajes planetarios conectada a la carga mecánica, un sensor de posición en el eje del motor, uno de temperatura ubicado en el bobinado del estator de la máquina y tres sensores de corriente instantánea de fases en la salida del inversor trifásico al estator. Se espera lograr un control lo suficientemente eficiente para cumplir consignas de posición, velocidad y torque sin poner en peligro la integridad del motor.

El presente informe se estructura en tres bloques principales. El primer bloque comprende las secciones 2 y 3, donde se desarrolla el modelo matemático del sistema, abordando la formulación de sus ecuaciones fundamentales. El segundo bloque, sección 4.1, donde a partir de dichas ecuaciones se modela la planta linealmente, utilizando Linealización Jacobiana alrededor de puntos de operación y Linealización por Retroalimentación No Lineal, realizando comparaciones entre ellas y con el modelo no lineal. Por último, el tercer bloque, comprendido por la sección 4.2, se enfoca en el diseño y modelado del controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente, detallando su implementación y ajuste para optimizar el desempeño del sistema.

2. Presentación del problema

El problema a tratar se describe con precisión en la guía de trabajo [1]. A continuación se presentan los aspectos y detalles más relevantes de las secciones correspondientes.

2.1. Carga mecánica

Aplicación mecatrónica simplificada: control de movimiento de 1 eje (control descentralizado) para la articulación de un brazo manipulador robótico elemental (péndulo rígido actuado) con un solo grado de libertad (1 GDL), con eje de rotación horizontal fijo a una base en el sistema de referencia inercial (Figura 1); sometido a la acción externa de la aceleración de gravedad (perturbación externa vertical constante), con parámetros equivalentes variables según sea la carga útil transportada en el extremo.

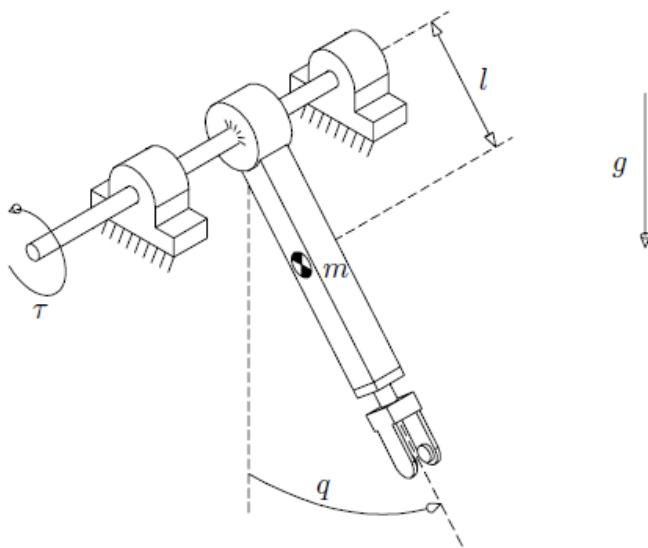


Figura 1: Robot manipulador elemental de 1 GDL en plano vertical (péndulo rígido actuado).[1]

2.2. Tren de transmisión

Caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios, asumiendo acoplamiento rígido (sin elasticidad torsional y sin juego, holgura o “backlash”); momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejadas al eje de entrada y consideradas junto con el motor.

2.3. Máquina Eléctrica PMSM

Máquina eléctrica de CA trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM) y estator simétrico y equilibrado, con bornes de fases abc (coordenadas reales y “estacionarias”) conectados externamente en estrella (Y), con centro de estrella O (punto “neutro”) flotante (no accesible) y bornes de línea ABC accesibles desde el inversor electrónico trifásico.

2.3.1. Subsistema térmico

Modelo simplificado equivalente de primer orden, que considera sólo pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule (calor) en bobinado de estator, y desprecia pérdidas magnéticas en el núcleo; transferencia de calor al ambiente sólo por conducción y convección natural, sin ventilación forzada.

2.4. Inversor trifásico de alimentación (modulador de tensión)

Inversor trifásico de 4 cuadrantes (regenerativo), consistente en un puente trifásico con llaves electrónicas semiconductoras (transistores de potencia MOSFETs ó IGBTs) alimentado desde una fuente de CC de tensión constante, conmutado con modulación de ancho de pulso (PWM).

No es parte de este proyecto el análisis de detalle de operación PWM del inversor ni su fuente de energía de CC. Se considerará al inversor trifásico y la fuente de tensión continua (CC) como un Modulador idealizado de tensión trifásico (vectorial) (modelo promediado a continuación) para alimentar al estator de la Máquina eléctrica.

2.4.1. Modelo Instantáneo Promediado

Se considera un modelo promediado equivalente de tensiones sintetizadas de salida (componente fundamental, sin armónicos). Se trata de un sistema trifásico de tensiones de fase en bornes de fase de estator, senoidales de secuencia positiva abc, equilibrado o balanceado (igual módulo, desfasaje 120° eléctricos), variable en módulo $V_{sl}(t)$ y frecuencia $w_e(t)$.

2.5. Sensores de retroalimentación

El sistema cuenta con los siguientes dispositivos físicos y sus canales de medición y acondicionamiento:

- 1 sensor de posición angular (codificador incremental o “encoder”) montado en el eje de motor, asumiendo proceso de “homing” y decodificación idealizados. Variable medida: $\theta_m(t)$ (posición angular absoluta “rectificada”)
- 3 sensores de corriente instantánea de fase, montados en salida trifásica del inversor hacia bornes del estator. Variables medidas: $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$, $i_{cs}(t)$
- 1 sensor de temperatura (ej. RTD) en bobinado de estator, para el monitoreo de calentamiento y estimación de resistencia de estator $R_s(T_s^\circ(t))$. Variable medida: $T_s^\circ(t)$

2.6. Variables principales en el Modelo Dinámico completo

Para el modelo del sistema dinámico completo, se utilizan las siguientes variables que representan el estado, las entradas y las salidas.

a) Excitaciones (entradas) externas:

- Variable manipulada (vectorial): Sistema trifásico de tensiones de fase reales en bornes de estator $v_{abcs}(t)$, con $V_{sl}(t)$ y $w_e(t)$ ajustables a través de manipulación de la modulación PWM del inversor.

- Variables de perturbación: Torque externo de carga mecánica $T_l(t)$ aplicado en la articulación del brazo manipulador. Temperatura ambiente $T_{\text{amb}}^\circ(t)$. Aceleración de la gravedad g también es considerada entrada pero a los efectos de este trabajo, es constante.
- b) Estado interno: Posición $\theta_m(t)$ y velocidad $w_m(t)$ en eje del motor. Corrientes virtuales equivalentes de estator $i_{qd0s}^r(t)$; temperatura de estator $T_s^\circ(t)$.
- c) Respuestas (salidas) externas:
- Variable controlada, no medida directamente (efector final): Posición angular de eje de la articulación robótica $q(t) \equiv \theta_l(t)$.
 - Variables medidas (para retroalimentación): Posición angular de eje del motor $\theta_m(t)$. Sistema trifásico de corrientes de fase reales en bornes de estator $i_{abcs}(t)$. Temperatura de estator $T_s^\circ(t)$.

3. Planteo de ecuaciones

A continuación se detallan de manera resumida las ecuaciones que modelan cada componente del sistema, extraídas de [1], donde se define qué significa cada variable.

1. Modelo matemático simplificado equivalente no lineal de parámetros variables referido al eje de salida del tren de transmisión:

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (1)$$

$$T_l(t) = g \cdot k_l \cdot \sin(\theta_l(t)) + T_{ld}(t) \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_l(t)}{dt} \equiv \omega_l(t) \iff \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) d\xi + \theta_l(0) \quad (3)$$

2. Modelo equivalente (rígido) del tren de transmisión:

$$w_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (4)$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (5)$$

3. Modelo equivalente del subsistema mecánico del PMSM:

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (6)$$

$$\frac{d\theta_m(t)}{dt} \equiv \omega_m(t) \iff \theta_m(t) = \int_0^t \omega_m(\xi) d\xi + \theta_m(0) \quad (7)$$

4. Coordenadas electromagnéticas de rotor $qd0^r$ (sincrónico solo en régimen estacionario):

$$\frac{d\theta_r(t)}{dt} \equiv \omega_r(t) \iff \theta_r(t) = \int_0^t \omega_r(\xi) d\xi + \theta_r(0) \quad (8)$$

$$\theta_r(t) \equiv P_p \cdot \theta_m(t) \therefore \omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \quad (9)$$

5. Torque electromagnético:

$$T_m = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m'^r \cdot i_{qs}^r(t) + \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t) \cdot i_{qs}^r(t) \quad (10)$$

6. Balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator (referido a coordenadas $qd0^r$):

$$v_{qs}^r(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m'^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \quad (11)$$

$$v_{ds}^r(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \quad (12)$$

$$v_{0s}(t) = R_s(T_s^\circ(t)) \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} \quad (13)$$

7. Ecuación de resistencia dependiente de la temperatura:

$$R_s(T_s^\circ(t)) = R_{sREF} \cdot (1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ)) \quad (14)$$

8. Potencia de pérdidas real abc (Joule) o equivalente virtual qd0 (para análisis):

$$P_{s\text{ perd}}(t) = R_s(T_s^\circ(t)) (i_{as}^2(t) + i_{bs}^2(t) + i_{cs}^2(t)) = \frac{3}{2} R_s(T_s^\circ(t)) [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2i_{0s}^2(t)] \quad (15)$$

9. Balance térmico:

$$P_{s\text{ perd}}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (16)$$

10. Sistema trifásico de tensiones de fase en bornes de fase de estator (salida del inversor):

$$v_{as}(t) \cong \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl}(t)}{\sqrt{3}} \cdot \cos(\theta_{ev}(t)) \quad (17)$$

$$v_{bs}(t) \cong \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl}(t)}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (18)$$

$$v_{cs}(t) \cong \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl}(t)}{\sqrt{3}} \cdot \cos\left(\theta_{ev}(t) + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (19)$$

11. Frecuencia eléctrica y ángulo eléctrico del sistema de tensiones trifásico:

$$\omega_e(t) \equiv 2\pi \cdot f_e(t) \equiv \frac{d\theta_{ev}(t)}{dt} \iff \theta_{ev}(t) = \int_0^t \omega_e(\xi) d\xi + \theta_{ev}(0) \quad (20)$$

12. Angulo de desfase electromagnético (ángulo eléctrico) de rotor:

$$\delta(t) \equiv \theta_{ev}(t) - \theta_r(t) = \int_0^t [\omega_e(\xi) - \omega_r(\xi)] d\xi + [\theta_{ev}(0) - \theta_r(0)] \quad (21)$$

13. Vector de estado interno del sistema físico:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (22)$$

14. Vector de entradas manipuladas del sistema físico (en coordenadas virtuales y reales respectivamente):

$$\mathbf{u}_{\mathbf{c}(\mathbf{qd0s})}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{\mathbf{c}(\mathbf{abcs})}(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

15. Vector de entradas de perturbación del sistema físico:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{d}}(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

16. Vector completo de entradas del sistema físico (en coordenadas virtuales y reales respectivamente):

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{c}}(t) \\ \mathbf{u}_{\mathbf{d}}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{\mathbf{(qd0s)}}(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_{\mathbf{(abcs)}}(t) = \begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \\ T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Previo a la resolución del problema planteado, se realiza la siguiente aclaración. Con el objetivo de evitar confusiones, falta de claridad en la definición de variables en tablas, gráficos y demás; se describe a continuación un detalle de las unidades adoptadas para la realización de este informe y su caracterización técnica.

Magnitud	Unidad utilizada (SI)
Capacitancia térmica de estator	$\text{W s } ^\circ\text{C}^{-1}$
Coef. aumento de resistencia con temperatura	$^\circ\text{C}^{-1}$
Coef. de fricción viscosa	N m s rad^{-1}
Corriente	A
Flujo magnético concatenado	V s rad^{-1}
Inductancia	H
Momento de inercia	kg m^2
Pares de polos, relación de reducción	Adimensional
Posición angular	rad
Resistencia	Ω
Resistencia térmica estator-ambiente	$^\circ\text{C W}^{-1}$
Temperatura	$^\circ\text{C}$
Torque	N m
Velocidad	rad s^{-1}
Voltaje	V

Tabla 1: Unidades del Sistema Internacional utilizadas en las gráficas y esquemas.

4. Desarrollo de actividades

- 4.1. Modelado, análisis y simulación dinámica del sistema físico a “lazo abierto” (sin controlador externo de movimiento)**
- 4.1.1. Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo referido al eje del motor**

Teniendo en cuenta la Ecuación (1), despejando $T_q(t)$ y reemplazando dicho término según (5), se puede obtener:

$$r \cdot T_d(t) = J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t) \quad (26)$$

De (6) es posible despejar $T_d(t)$ y reemplazarlo en (26):

$$r \cdot (T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt}) = J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} + b_l \cdot \omega_l(t) + T_l(t) \quad (27)$$

Reordenando:

$$J_l \frac{d\omega_l(t)}{dt} + r \cdot J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -(b_l \cdot \omega_l(t) + r \cdot b_m \cdot \omega_m(t)) - T_l(t) + r \cdot T_m(t) \quad (28)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (4) se puede escribir:

$$\frac{J_l}{r} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + r \cdot J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = - \left(\frac{b_l}{r} \cdot \omega_l(t) + r \cdot b_m \cdot \omega_m(t) \right) - T_l(t) + r \cdot T_m(t) \quad (29)$$

Finalmente, multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{r}$ y reordenando:

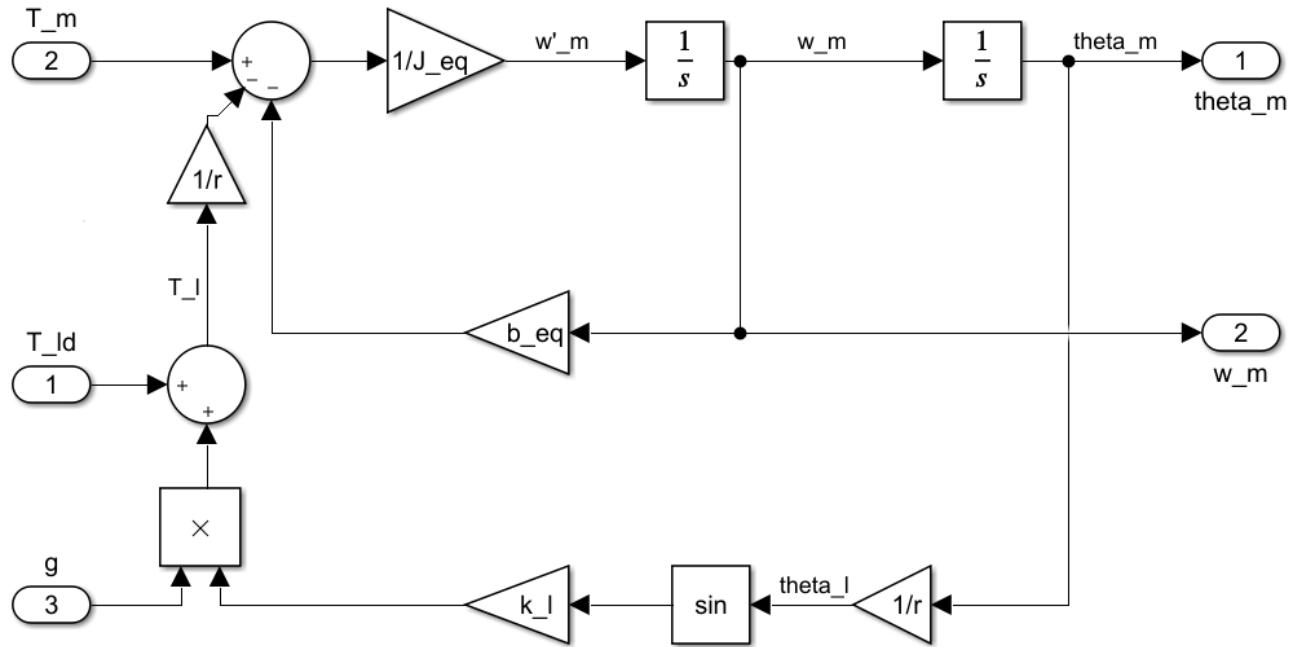


Figura 2: Diagrama de bloques del subsistema mecánico referido al eje del motor.

$$\left(\frac{J_l}{r^2} + J_m\right) \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - \left(\frac{b_l}{r^2} + b_m\right) \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (30)$$

Se define la inercia equivalente J_{eq} y coeficiente de fricción viscosa equivalente b_{eq} como:

$$J_{eq} = \frac{J_l}{r^2} + J_m \quad (31)$$

$$b_{eq} = \frac{b_l}{r^2} + b_m \quad (32)$$

Así:

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m(t) - b_{eq}\omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \quad (33)$$

La Ecuación (33) describe la dinámica rotacional equivalente del sistema mecánico, desde el punto de vista del eje del motor. El diagrama de bloques correspondiente puede observarse en la Figura 2.

Dado que se tiene en cuenta que el tren de transmisión es ideal, pues se desprecian efectos como el backlash y la elasticidad torsional, es posible modelarlo como un acoplamiento rígido. De esta forma, las variables dinámicas (como velocidad angular y torque) pueden reflejarse directamente al eje del motor usando la relación de reducción r .

4.1.2. Modelo dinámico del sistema físico completo

4.1.2.a Modelo global no lineal (NL)

El sistema en cuestión, trata de uno no lineal de parámetros variables, con relaciones de no-linealidad entre sus variables de estado. Esto impide que se pueda plantear las ecuaciones de estado y salida del sistema de la forma:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (34)$$

A pesar de ello, es posible plantear los campos vectoriales del modelo matemático:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases} \quad (35)$$

Para encontrar $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$, se despejan las derivadas de cada una de las variables de estado la siguiente forma:

$$\frac{d\theta_m}{dt}(t) = \omega_m(t) \quad (36)$$

De (33) y reemplazando $T_m(t)$ según (10), es posible obtener $\frac{d\omega_m}{dt}$:

$$\frac{d\omega_m}{dt}(t) = \frac{3}{2} \frac{P_p}{J_{eq}} i_{qs}^r(t) [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] - \frac{b_{eq}}{J_{eq}} \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r J_{eq}} \quad (37)$$

Para las derivadas de las corrientes, se hace uso de las ecuaciones (11), (12) y (13):

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(T_s^\circ(t)) i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p \omega_m(t) [\lambda_m'^r + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \quad (38)$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(T_s^\circ(t)) i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \quad (39)$$

$$\frac{di_{0s}(t)}{dt} = -\frac{R_s(T_s^\circ(t)) i_{0s}(t)}{L_{ls}} + \frac{v_{0s}(t)}{L_{ls}} \quad (40)$$

Por último, la tasa de cambio de la temperatura del estator, es decir, $\frac{dT_s^\circ(t)}{dt}$, se despeja a partir de las ecuaciones (15) y (16):

$$\frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \frac{3}{2} R_s(T_s^\circ(t)) [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2i_{0s}(t)^2] - \frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} [T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ] \quad (41)$$

Es oportuno notar que, aunque en las ecuaciones aparecen términos no lineales que involucran productos entre variables de estado, en los términos correspondientes a las entradas, ya sean de control o de perturbación, no aparecen productos de tipo $u_i(t) \cdot u_i(t)$ ni $u_i(t) \cdot x_i(t)$ (aunque $T_l(t)$ depende de θ_l y por lo tanto de θ_m). Además, la salida de la ecuación puede ser expresada en una muy sencilla forma matricial, ya que la salida de interés es θ_m . Teniendo en cuenta las ecuaciones (3), (4) y (7), es posible escribir:

$$\theta_l(t) - \theta_l(0) = \int_0^t \omega_l(\xi) d\xi = \frac{1}{r} \int_0^t \omega_m(\xi) d\xi = \frac{\theta_m(t) - \theta_m(0)}{r} \quad (42)$$

Si se considera que se cumple que $\frac{\theta_m(0)}{r} = \theta_l(0)$, se obtiene que:

$$\frac{\theta_m(t)}{r} = \theta_l(t) \quad (43)$$

Matricialmente, el sistema vectorial de estados puede expresarse:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A'(\mathbf{x}(t)) + B_c \mathbf{u}_{c(qd0s)}(t) + B_d \mathbf{u}_d(t), & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (44)$$

Donde:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d\theta_m}{dt} \\ \frac{d\omega_m}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$A'(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ \frac{3}{2} \frac{P_p}{J_{eq}} i_{qs}^r(t) [\lambda_m'^r + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] - \frac{b_{eq}}{J_{eq}} \omega_m(t) \\ -\frac{1}{L_q} R_s(T_s^\circ(t)) i_{qs}^r(t) - \frac{P_p}{L_q} \omega_m(t) [\lambda_m'^r + L_d i_{ds}^r(t)] \\ -\frac{1}{L_d} R_s(T_s^\circ(t)) i_{ds}^r(t) + \frac{L_q}{L_d} P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t) \\ -\frac{1}{L_{ls}} R_s(T_s^\circ(t)) i_{0s}^r(t) \\ \frac{1}{C_{ts}} \frac{3}{2} R_s(T_s^\circ(t)) [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2i_{0s}^r(t)^2] - \frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{r J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^\circ \end{bmatrix} \quad (49)$$

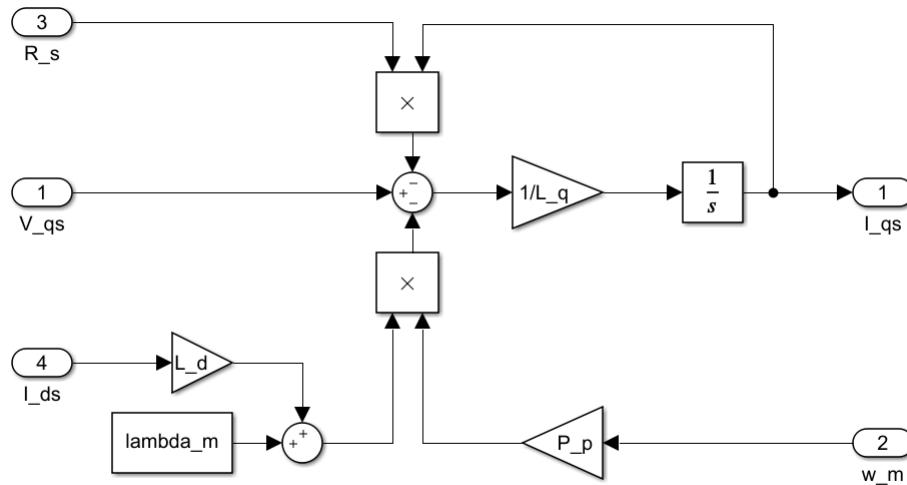


Figura 3: Diagrama de bloques del subsistema eléctrico, corriente en el eje de cuadratura $I_{qs}(t)$.

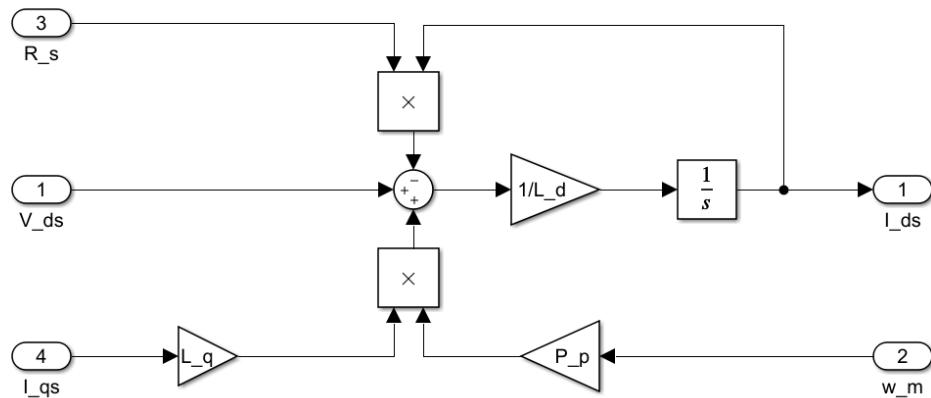


Figura 4: Diagrama de bloques del subsistema eléctrico, corriente en el eje directo $I_{ds}(t)$.

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (50)$$

Y los vectores de estados $\mathbf{x}(t)$ y entradas $\mathbf{u}_{c(qd0s)}(t)$ y $\mathbf{u}_d(t)$ dados por (22) y (23) respectivamente.

En la Figura 3, Figura 4 y Figura 5 se muestran los diagramas de bloques para las corrientes en el sistema virtual de coordenadas. La Figura 6 muestra el subsistema magnético del estator del motor, de donde se genera el torque electromagnético $T_m(t)$ en función de las corrientes (Ecuación (10)) y la Figura 7 integra los subsistemas antes mencionados para formar el electromagnético. La Figura 8 muestra el subsistema térmico, las Figuras 9 y 10 muestran las transformaciones de Park y Park inversa respectivamente. Finalmente, la Figura 11 integra todos los subsistemas mencionados anteriormente.

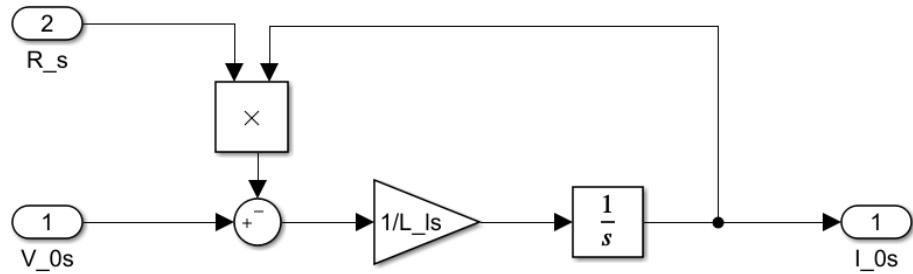


Figura 5: Diagrama de bloques del subsistema eléctrico, corriente $I_{0s}(t)$.

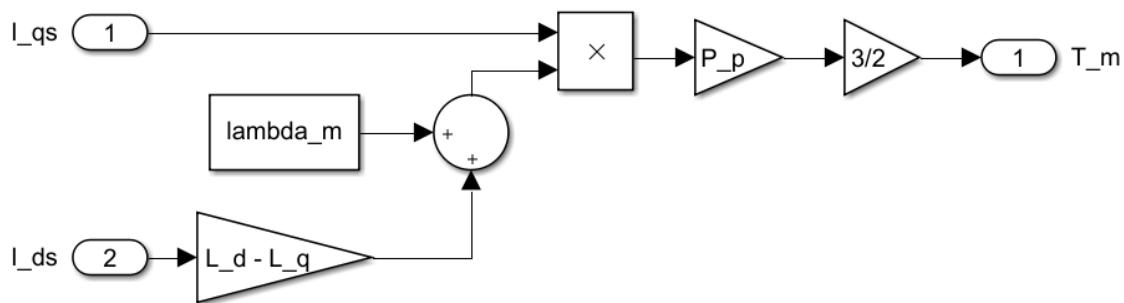


Figura 6: Diagrama de bloques del subsistema magnético del estator.

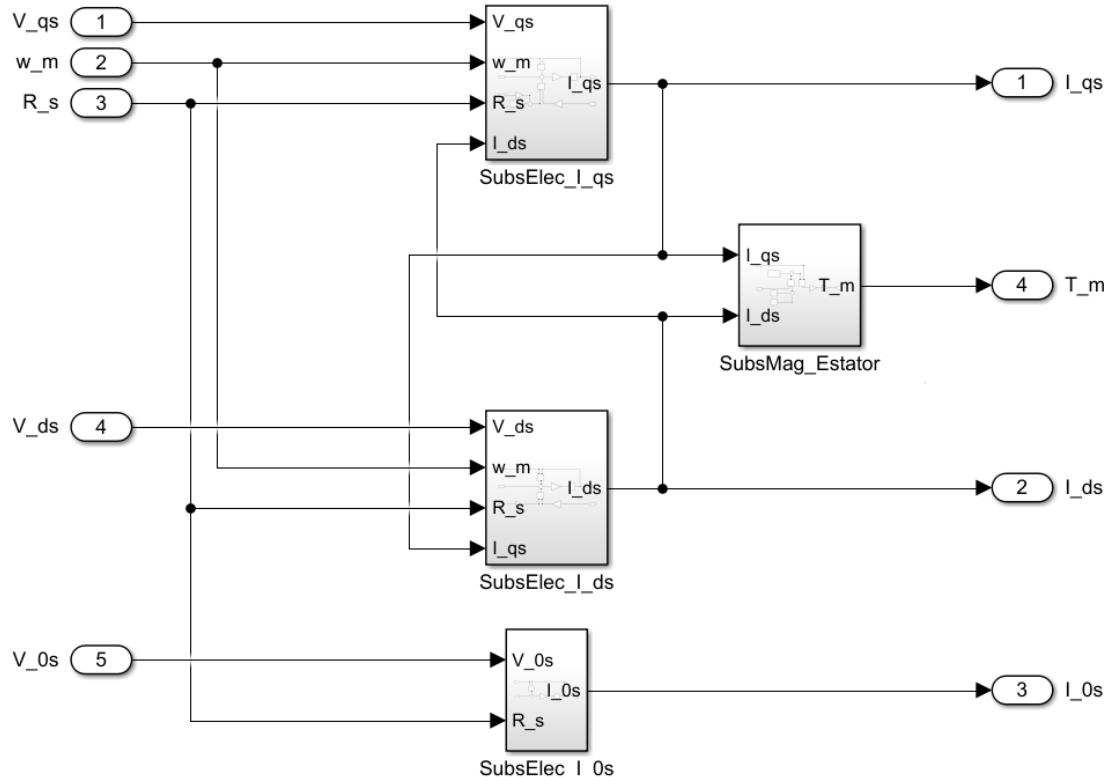


Figura 7: Diagrama de bloques del subsistema electromagnético del estator del motor.

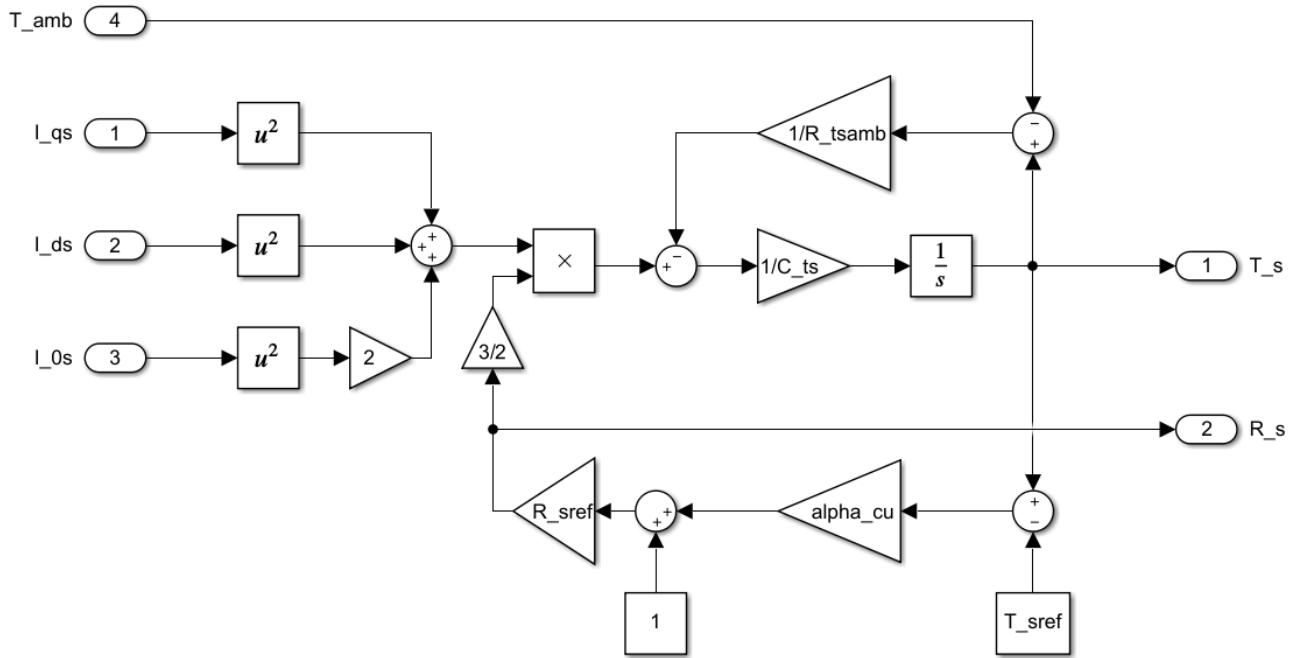


Figura 8: Diagrama de bloques del subsistema térmico.

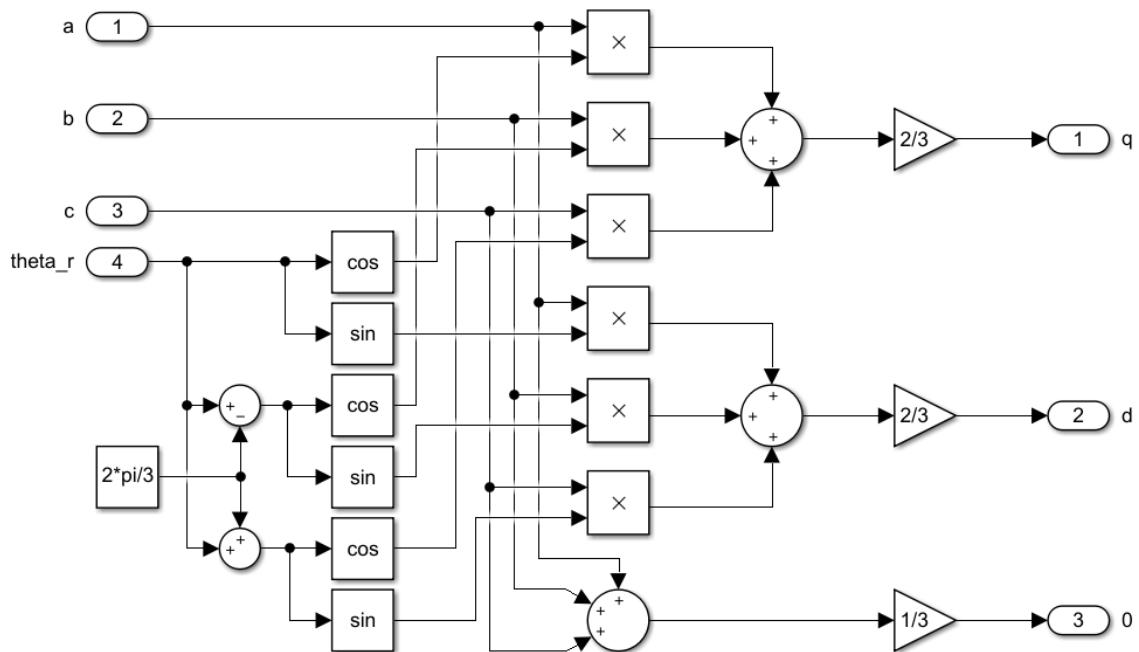


Figura 9: Diagrama de bloques transformación de Park.

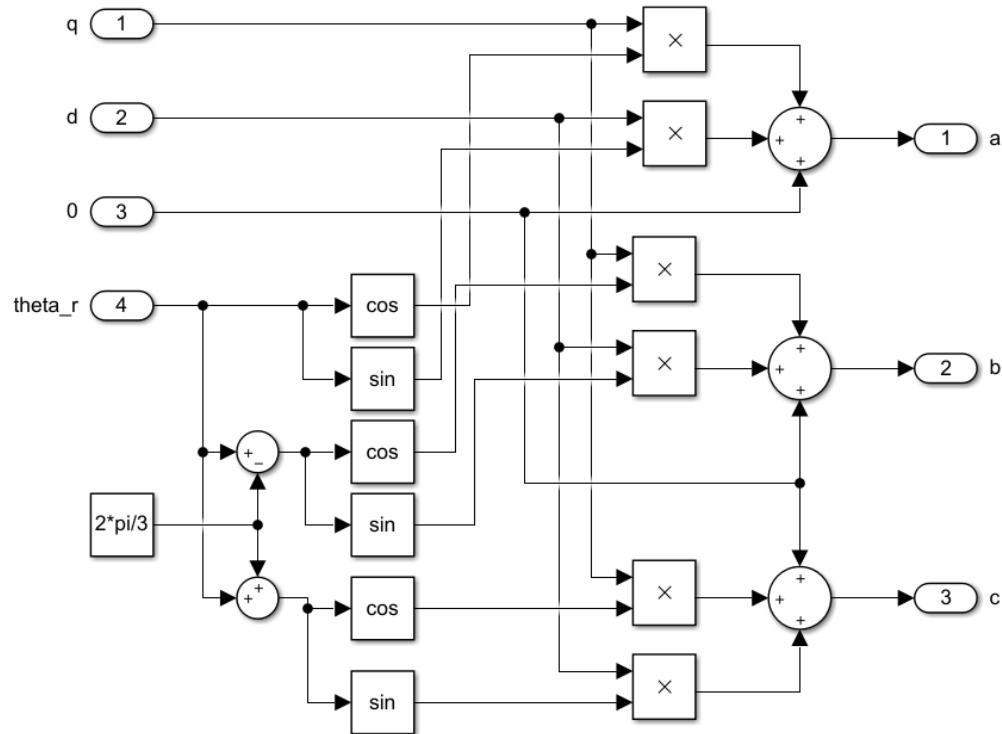


Figura 10: Diagrama de bloques transformación de Park inversa.

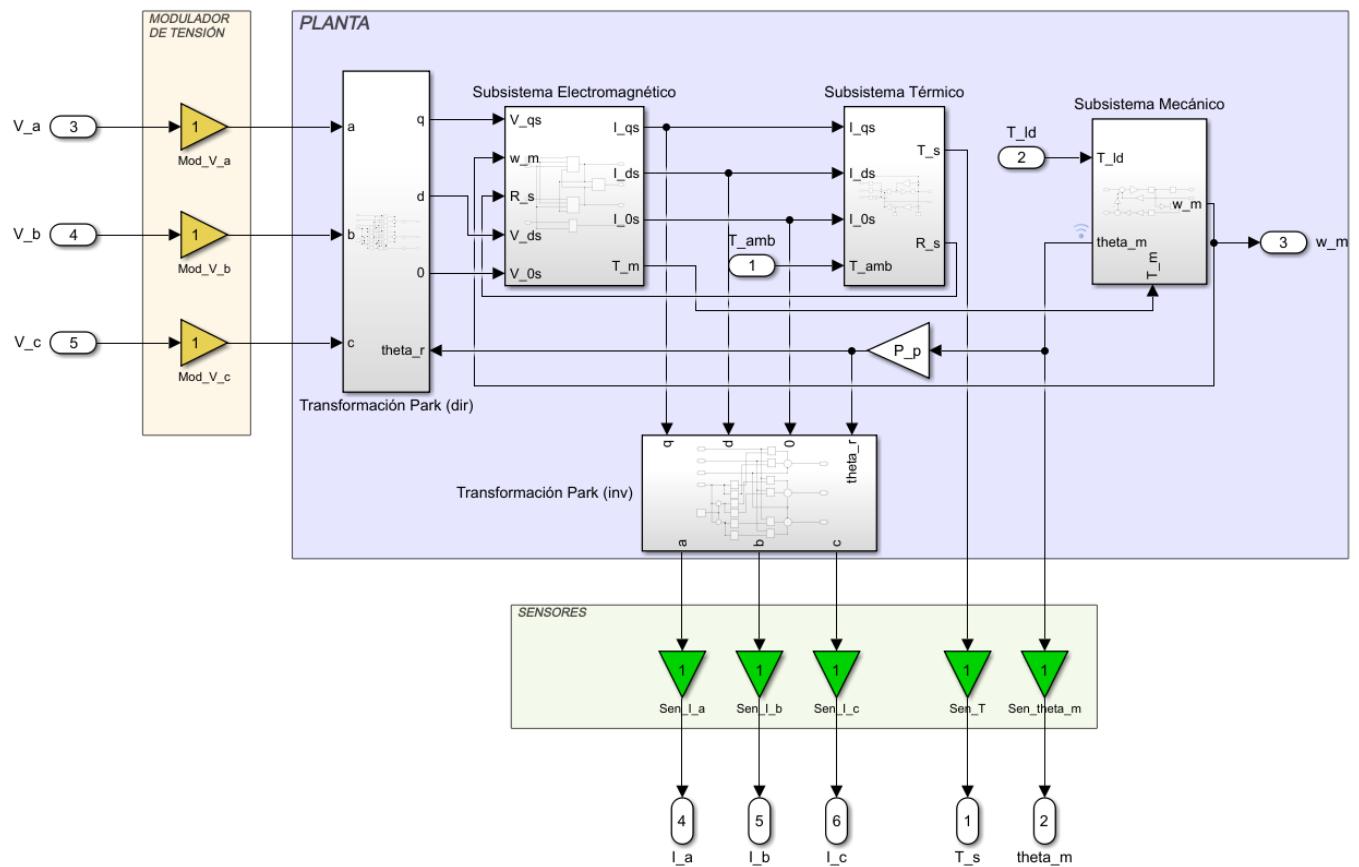


Figura 11: Diagrama de bloques de la planta completa.

4.1.2.b Linealización Jacobiana

Dado que el sistema objeto de este estudio presenta comportamiento entre sus variables de naturaleza no lineal, se procede a realizar un arreglo matemático de linealización. En este proceso se simplificará el estudio del comportamiento del sistema, al convertirlo en un modelo lineal aproximado, válido en un rango de operación cercano a ciertos puntos de operación (puntos de equilibrio naturales del sistema).

Como primera suposición, y básica para esta aproximación, se asume que todas las variables del modelo tienen la forma:

$$z(t) \equiv Z_o(t) + \delta z(t)$$

Lo cual expresa que cada variable está compuesta por:

- Una componente no lineal cuasi-estacionaria, que varía lentamente en el tiempo y describe el comportamiento en torno a los puntos de equilibrio.
- Una componente dinámica lineal, que varía rápidamente y representa las pequeñas desviaciones o perturbaciones locales alrededor de esos puntos de equilibrio.

Para llevar a cabo la linealización, se expande en series de Taylor alrededor de un punto de operación. En este caso, la serie se trunca al primer orden, descartando los términos de mayor grado debido a que son no lineales ni de aporte significativo (se supone pequeño valor de $\delta z(t)$).

Se intenta obtener un sistema que tenga la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{X}}_o(t) + \delta \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (51)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx f(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)} \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)} \delta \mathbf{u}(t) + (\text{h.o.t}) \quad (52)$$

Se define el **espacio de operación global no lineal cuasi-estacionario** como:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_o(t) = f(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) \cong 0 / \text{cte}, & \mathbf{X}_o(0) = \mathbf{x}_o, \\ y(t) = C\mathbf{X}_o(t) \end{cases} \quad (53)$$

Se puede observar que $\dot{\mathbf{X}}_o(t)$ se define igual que el primer término del lado derecho de la Ecación (52). Este espacio depende del punto de operación que se fije, el cual se considera que varia muy lentamente con el tiempo. Así, se considerará que el sistema operará alrededor de este punto cuasiestático. De este modo, es conveniente hacer que el estado inicial sea el que corresponde al punto de operación:

$$\mathbf{X}_o(0) = \begin{bmatrix} \theta_{m-o}(0) \\ \omega_{m-o}(0) \\ i_{qs-o}^r(0) \\ i_{ds-o}^r(0) \\ i_{0s-o}(0) \\ T_{s-o}^\circ(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^\circ \end{bmatrix} = \mathbf{x}_o \quad (54)$$

El subíndice “-o” indica que las variables están evaluadas en el punto de operación global. La ecuación $f(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) \cong 0$ es:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_{m-o}(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_{m-o}(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs-o}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{ds-o}^r(t)}{dt} \\ \frac{di_{0s-o}(t)}{dt} \\ \frac{dT_{s-o}^\circ(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{cases} \omega_{m-o}(t) & \approx w_{m0} \\ \frac{1}{J_{eq}} \left[\frac{3}{2} P_p i_{qs-o}^r(t) [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds-o}^r(t)] - b_{eq} \omega_{m-o}(t) - \frac{1}{r} T_{l-o}(t) \right] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_q} \left[-R_{s-o}(t) i_{qs-o}^r(t) - P_p \omega_{m-o}(t) [\lambda_m^r + L_d i_{ds-o}^r(t)] + v_{qs-o}^r(t) \right] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_d} \left[-R_{s-o}(t) i_{ds-o}^r(t) + P_p \omega_{m-o}(t) L_q i_{qs-o}^r(t) + v_{ds-o}^r(t) \right] & \approx 0 \\ \frac{1}{L_{ls}} [-R_{s-o}(t) i_{0s-o}(t) + v_{0s-o}(t)] & \approx 0 \\ \frac{3}{2} \frac{R_{s-o}(t)}{C_{ts}} [i_{qs-o}^r(t)^2 + i_{ds-o}^r(t)^2 + 2i_{0s-o}(t)^2] + \frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} [T_{amb-o}^\circ(t) - T_{s-o}^\circ(t)] & \approx 0 \end{cases} \quad (55)$$

Cabe indicar que por motivos de espacio, se escribió que $R_{s-o}(T_{s-o}^\circ(t)) = R_{s-o}(t)$

A continuación, se define el **modelo dinámico lineal para pequeñas variaciones locales** como:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) \approx A_o(t) \delta \mathbf{x}(t) + B(t) \delta \mathbf{u}(t), & \delta \mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{0}, \\ \delta y(t) = C \delta \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (56)$$

Donde:

$$A_o(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0(t), \mathbf{U}_0(t)} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_o = \left[\frac{\partial f}{\partial \theta_m} \Big|_o \quad \frac{\partial f}{\partial \omega_m} \Big|_o \quad \frac{\partial f}{\partial i_{qs}^r} \Big|_o \quad \frac{\partial f}{\partial i_{ds}^r} \Big|_o \quad \frac{\partial f}{\partial i_{0s}^r} \Big|_o \quad \frac{\partial f}{\partial T_s^\circ} \Big|_o \right] \quad (57)$$

Para mejor legibilidad, se escribirán las columnas de A por separado, de forma transpuesta:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_m} \Big|_o = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (58)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_m} \Big|_o = \left[1 \ -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \ -\frac{P_p}{L_q} [\lambda_m^r + L_d i_{ds-o}] \ \frac{P_p}{L_d} L_q i_{qs-o}^r \ 0 \ 0 \right]^T \quad (59)$$

$$\frac{\partial f}{\partial i_{qs}^r} \Big|_o = \left[0 \ \frac{1}{J_{eq}} \frac{3}{2} P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) i_{ds-o}^r] \ -\frac{R_{s-o}}{L_q} \ \frac{P_p \omega_{m-o} L_q}{L_d} \ 0 \ \frac{3 R_{s-o} i_{qs-o}^r}{C_{ts}} \right]^T \quad (60)$$

$$\frac{\partial f}{\partial i_{ds}^r} \Big|_o = \left[0 \ \frac{1}{J_{eq}} \frac{3}{2} i_{qs-o}^r P_p (L_d - L_q) \ -\frac{P_p \omega_{m-o} L_d}{L_q} \ -\frac{R_{s-o}}{L_d} \ 0 \ \frac{3 R_{s-o} i_{ds-o}^r}{C_{ts}} \right]^T \quad (61)$$

$$\frac{\partial f}{\partial i_{0s}^r} \Big|_o = \left[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -\frac{R_{s-o}}{L_{ls}} \ \frac{6 R_{s-o} i_{0s-o}^r}{C_{ts}} \right]^T \quad (62)$$

$$\frac{\partial f}{\partial T_s^\circ} \Big|_o = R_{sREF} \alpha_{Cu} \left[0 \ 0 \ -\frac{i_{qs-o}}{L_q} \ -\frac{i_{ds-o}}{L_d} \ -\frac{i_{0s-o}}{L_{ls}} \ \frac{\frac{3}{2} \left[(i_{qs-o}^r)^2 + (i_{ds-o}^r)^2 + 2(i_{0s-o})^2 \right]}{C_{ts}} - \frac{1}{R_{sREF} \alpha_{Cu} R_{ts-amb} C_{ts}} \right]^T \quad (63)$$

$$\delta \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \delta \theta_m(t) \\ \delta \omega_m(t) \\ \delta i_{qs}^r(t) \\ \delta i_{ds}^r(t) \\ \delta i_{0s}^r(t) \\ \delta T_s^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$B(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{X}_0(t), \mathbf{U}_0(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{rJ_{eq}} & 0 \\ \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_{ts-amb}C_{ts}} \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\delta \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_c(t) \\ \delta \mathbf{u}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta v_{qs}^r(t) \\ \delta v_{ds}^r(t) \\ \delta v_{0s}(t) \\ \delta T_l(t) \\ \delta T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix} \quad (66)$$

La matriz C en todos los casos es la misma de la Ecuación (50). El modelo descripto anteriormente corresponde al segundo y tercer término del lado derecho de la expresión dada en la Ecuación (52). Se considera que es un modelo LPV pues la matriz A, principalmente, depende de los valores que tome el vector de estados en el punto de operación. Como este punto varía con el tiempo, así sea lentamente, la matriz también lo hará. Si se considerase estrictamente que $f(\mathbf{X}_o(t), \mathbf{U}_o(t)) = 0$, el sistema sería LTI y la matriz A sería siempre constante. Las matrices B y C son constantes independientemente del punto de operación que se elija.

4.1.2.c Linealización por Retroalimentación NL

Antes de realizar la linealización, es necesario aclarar algunas consideraciones preliminares.

En primer lugar, el subsistema térmico presenta una dinámica significativamente más lenta en comparación con el resto del sistema físico. Esta diferencia temporal en las dinámicas permite asumir que la variable de estado $T_s^\circ(t)$ (y, por ende, la resistencia $R_s(t)$) varía de forma suficientemente lenta como para descartar su acoplamiento no lineal con los subsistemas.

A partir de este análisis, los rangos de temperaturas de trabajo y los intervalos de tiempo en los que se analiza el sistema, se decide asumir R_s como constante e igual a $R_{sREF} = 1.02\Omega$ [1].

En segundo lugar, se impone el requisito de que $i_{ds}^r(t) \equiv 0$, es decir, aplicar la estrategia de **control vectorial con campo orientado** que permite desacoplar los canales de flujo magnético y torque. A su vez, y dado que el sistema de tensiones del estator $v_{abcs}(t)$ se encuentra en una conexión de tipo estrella trifilar con punto neutro flotante (no accesible), se puede demostrar que la Ecuación (13) no tiene influencia para el sistema, aun si este no fuera simétrico ni equilibrado¹. Es por esto que se puede asumir que $v_{0s}(t) \equiv 0$ y $i_{0s} \equiv 0$.

¹Tanto para el caso con neutro flotante en conexión estrella o conexión triángulo, aunque el sistema se encuentre desbalanceado y sea no simétrico. Según la ley de mallas de Kirchhoff, se debe cumplir: $i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$. Luego, aplicando la Transformación de Park correspondiente, se obtiene:

$$i_{0s}(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (i_a(t) + i_b(t) + i_c(t))$$

Entonces, $i_{0s}(t) = 0 \forall t$. Siendo $i_{0s}(t) \equiv 0 \Rightarrow \frac{di_{0s}(t)}{dt} = 0$, por lo que la Ecuación (13) sigue sin influir y entonces $v_{0s} = 0$.

Teniendo en cuenta las consideraciones planteadas anteriormente, el modelo LTI equivalente, resulta:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq}} i_{qs}^r(t) - \frac{b_{eq}}{J_{eq}} \omega_m(t) - \frac{1}{r J_{eq}} T_l(t) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{qs}^r(t) - \frac{P_p \lambda'_m}{L_q} \omega_m(t) + \frac{1}{L_q} v_{qs}^r(t) \end{cases} \quad (67)$$

Las ecuaciones matriciales LTI del espacio de estados con estado inicial genérico son:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \lambda'_m}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{r J_{eq}} \\ 0 \end{bmatrix} T_l(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (68)$$

Al considerar al sistema con las características particulares mencionadas, se puede observar cómo la Ecuación (41) pasa a tener una dependencia únicamente lineal con respecto al cuadrado de i_{qs}^r

$$P_{s \text{ perd}}(t) = \frac{3}{2} R_s i_{qs}^r(t)^2$$

$$\frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{R_s}{C_{ts}} i_{qs}^r(t)^2 + \frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} [T_{amb}^\circ(t) - T_s^\circ(t)] \quad (69)$$

El diagrama de bloques de estado en su forma desagregada o escalar puede apreciarse en la Figura 12.

El modelo LTI equivalente es análogo a aquel del motor de corriente continua con escobillas. La constante $\lambda'_m P_p$ (marcada en naranja en Figura 12) es equivalente a la constante electromagnética del motor DC, así como $\frac{3}{2} \lambda'_m P_p$ (marcada en celeste en Figura 12) lo es a la constante de torque, aunque a diferencia del modelo del motor DC, estas constantes no tienen el mismo valor. Aun así, tratar al PMSM como uno de corriente continua es muy útil para simplificar su control.

Para que este modelo LTI simplificado tenga validez, es necesario encontrar una **ley de control mínima** que fuerce a $i_{ds}(t)$ a anularse ($i_{ds}(t) = 0$) y a mantenerse así ($\frac{di_{ds}(t)}{dt} = 0$). Partiendo de la hipótesis de que $i_{ds}(0) = 0$ y de la Ecuación (39):

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0 = -\frac{R_s}{L_d} \cdot 0 + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \Rightarrow v_{ds}^r(t) = -L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t) \quad (70)$$

Es posible implementar la ley de control mínima mediante un controlador parcial en el modelo NL completo de la Figura 11, incorporando nuevas instancias de transformación de Park y teniendo en cuenta que el sensado de $\omega_m(t)$ puede ser posible también a través del encoder. La implementación puede ser observada en la Figura 13.

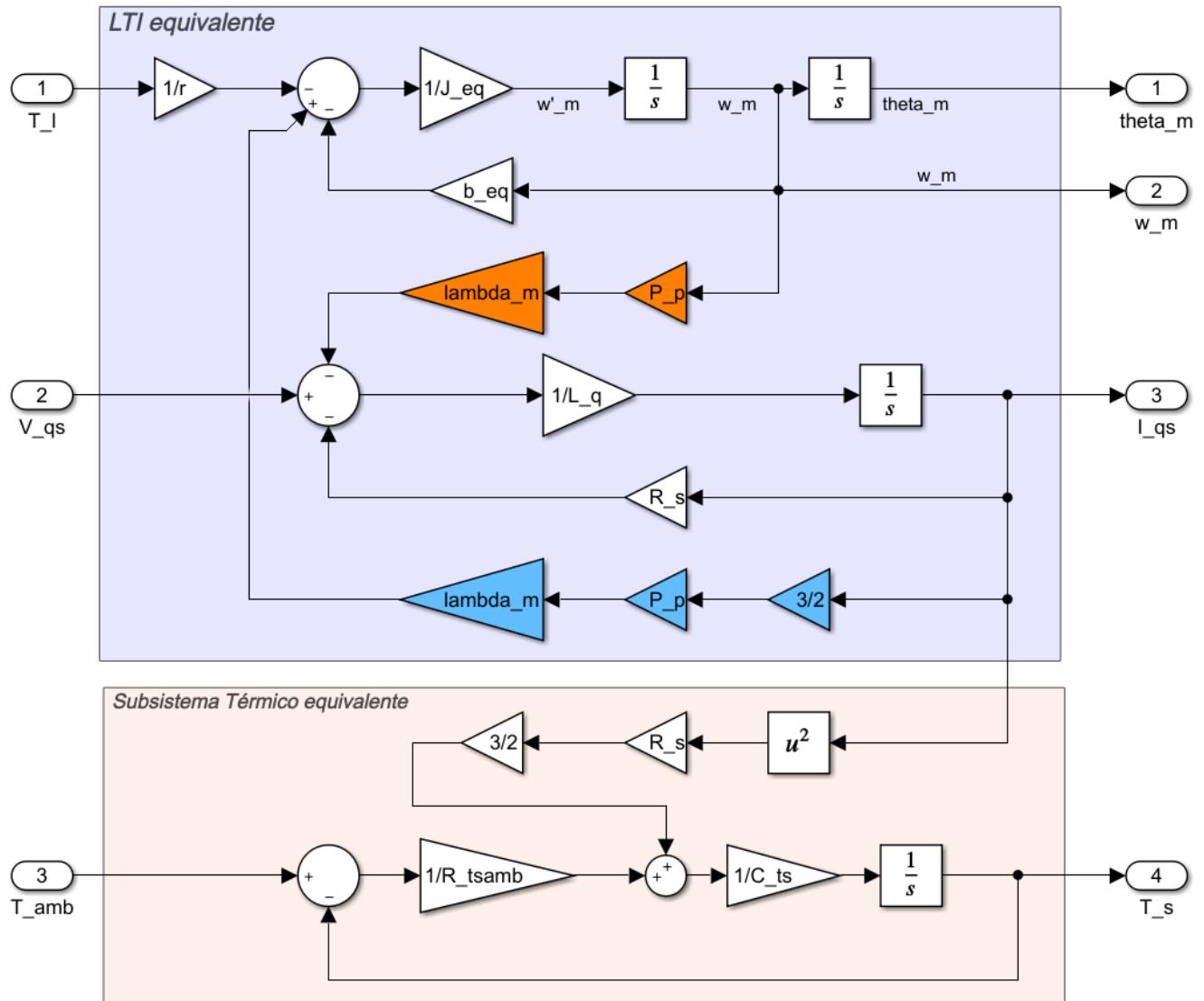


Figura 12: Diagrama de bloques del sistema LTI y subsistema térmico equivalentes.

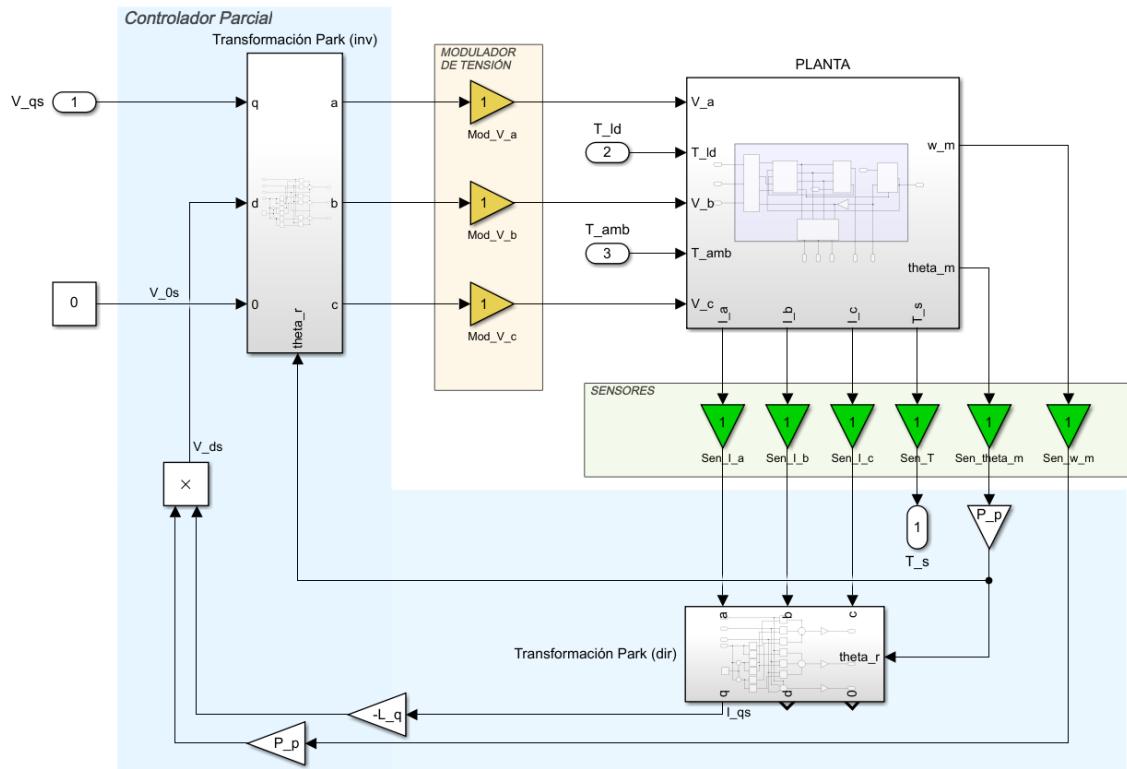


Figura 13: Diagrama de bloques de la implementación de la ley de control mínima por retroalimentación NL en la planta.

En la mayoría de los casos, $i_{ds}^r(0) \neq 0$, por lo que no se cumple la hipótesis asumida anteriormente para el estado inicial. Como consecuencia, aparece una **dinámica residual** que puede representarse reemplazando $v_{ds}^r(t)$ en la Ecuación (39) con la dada en la Ecuación (70).

$$\begin{aligned} \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) + \frac{L_q P_p \omega_m(t)}{L_d} i_{qs}^r(t) + \frac{-L_q P_p \omega_m(t)}{L_d} i_{qs}^r(t) \\ 0 &= \frac{R_s}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) + \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \end{aligned} \quad (71)$$

Naturalmente, la Ecuación (71) tiene como solución:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) e^{-\frac{R_s}{L_d} t} \quad (72)$$

Que tiene la forma de una curva exponencial decreciente que tiende a 0 a medida que t crece. La constante de tiempo de este transitorio es $\tau = \frac{L_d}{R_s} = \frac{6.6mH}{1.02\Omega} = 6.47ms$. Dicho transitorio provoca un comportamiento no lineal en el eje q (acoplamiento residual) que puede ser despreciado en régimen forzado sin cometer errores significativos. El acoplamiento residual puede verse reflejado en la Ecuación (38), en el término que incluye a $i_{ds}(t)$, el cual es diferente de 0 en $t = 0$. Es posible, sin embargo, deshacerse de ese acoplamiento con una **ley complementaria mínima** y obtener un modelo equivalente completamente lineal, independientemente del estado inicial de $i_{ds}(t)$.

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{qs}^r(t) - \frac{P_p \lambda_m^r}{L_q} \omega_m(t) - \frac{P_p L_d}{L_q} \omega_m(t) i_{ds}^r(t) + \frac{1}{L_q} v_{qs}^r(t) \quad (73)$$

Si se define una consigna $v_{qs}^{r*}(t)$ tal que:

$$v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + P_p L_d \omega_m(t) i_{ds}^r(t) \quad (74)$$

Si se reemplaza (74) en (73):

$$\frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{qs}^r(t) - \frac{P_p \lambda_m'^r}{L_q} \omega_m(t) + \frac{1}{L_q} v_{qs}^{r*}(t) \quad (75)$$

Un modelo LTI equivalente aumentado puede definirse tomando en cuenta la dinámica residual del eje d (Ecuación (71)), la dinámica de $i_{0s}(t)$ y el subsistema térmico de la Ecuación (69) (teniendo en cuenta también las pérdidas debidas al transitorio de i_{ds}), en el cual se considera el término de pérdidas como una entrada de perturbación. En este modelo no se considera la ley complementaria mínima, ya que se desprecia el acoplamiento residual NL, pero sí la ley de control mínima. Para aplicarla, se define la consigna:

$$v_{ds}^{r*}(t) = v_{ds}^r(t) + L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t) = 0 \quad (76)$$

Luego:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m'^r}{J_{eq}} i_{qs}^r(t) - \frac{b_{eq}}{J_{eq}} \omega_m(t) - \frac{1}{r J_{eq}} T_l(t) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_q} i_{qs}^r(t) - \frac{P_p \lambda_m'^r}{L_q} \omega_m(t) + \frac{1}{L_q} v_{qs}^r(t) \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_d} i_{ds}^r(t) + \frac{1}{L_d} v_{ds}^{r*}(t) \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = -\frac{R_s}{L_{ls}} i_{0s}(t) + \frac{1}{L_{ls}} v_{0s}(t) \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{3}{2} \frac{R_s}{C_{ts}} [i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2 + 2i_{0s}(t)^2] + \frac{1}{R_{ts-amb} C_{ts}} [T_{amb}^\circ(t) - T_s^\circ(t)] \end{array} \right. \quad (77)$$

El modelo no lineal desacoplado completo con ley de control no lineal puede verse en la Figura 14. Luego el sistema LTI equivalente aumentado (subsistema térmico modificado incluído) puede verse en la Figura 15.

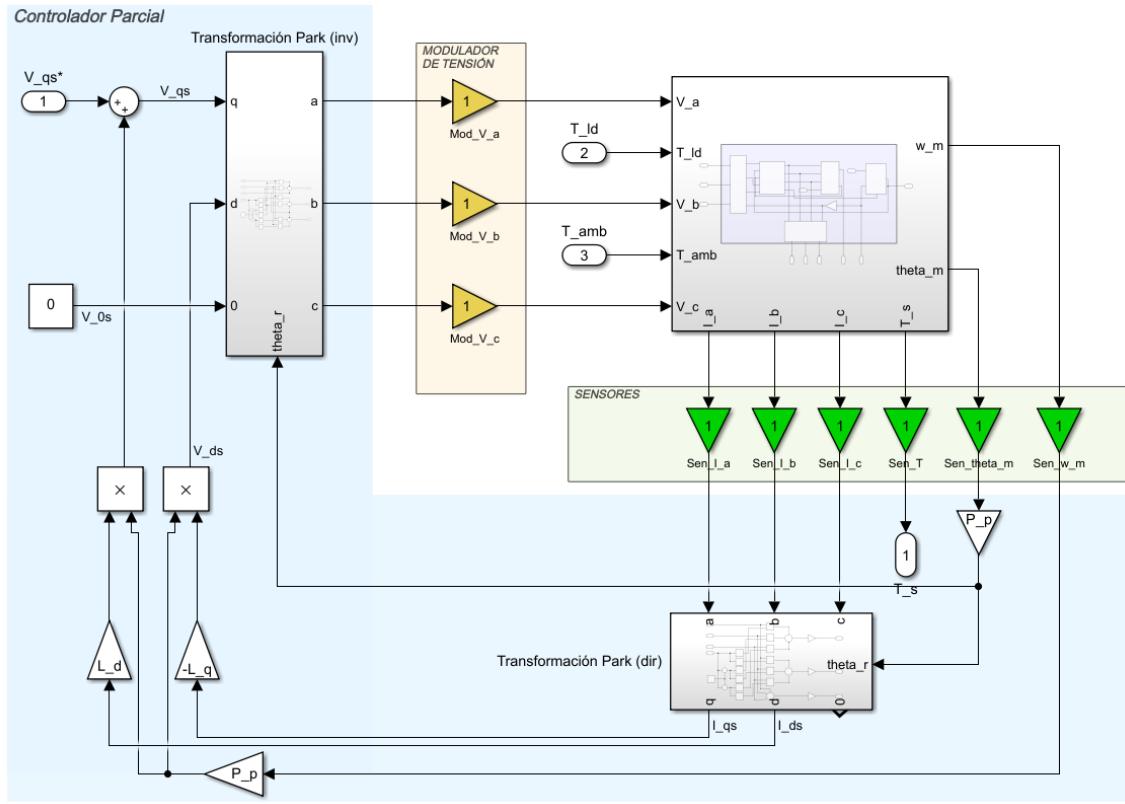


Figura 14: Diagrama de bloques de la implementación de la ley de control complementaria mínima por retroalimentación NL en la planta.

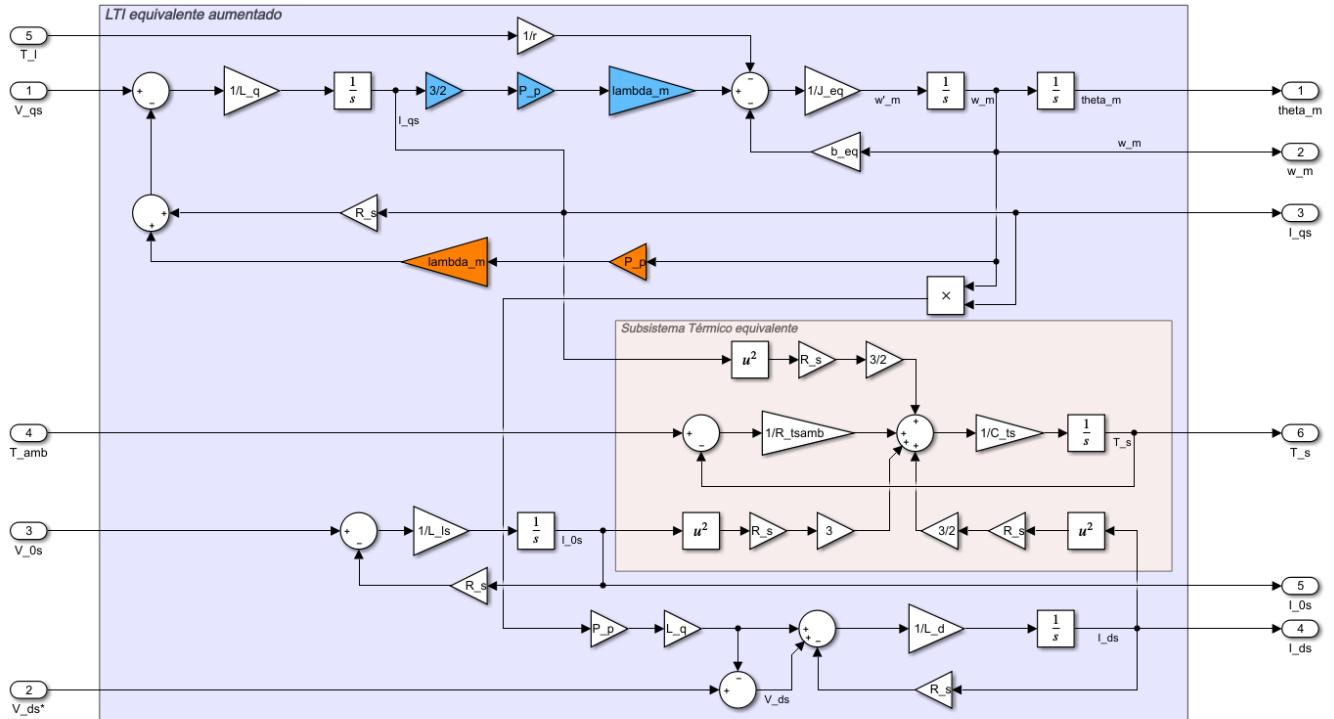


Figura 15: Diagrama de bloques del sistema LTI equivalente aumentado.

4.1.2.d Comparación de modelo global LPV vs LTI aumentado

A continuación, se realiza una comparación entre el modelo dinámico global LPV (Ecuación (51)) y el modelo LTI equivalente aumentado (Ecuación (77)). El diagrama de bloques del primero se puede ver en la Figura 16 mientras que el del segundo se puede ver en la Figura 15. La Figura 17 muestra el diagrama que realiza la comparación de ambos modelos. Se simulará la respuesta de ambos modelos para el caso $i_{ds}^r(t) = 0$ y se comentarán algunos casos especiales. Para los casos $i_{ds}^r(t) \neq 0$, solo se tendrá en cuenta la respuesta del modelo global LPV. En todos los casos y en ambos modelos, las condiciones iniciales son los puntos de operación:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{m-o} \\ \omega_{m-o} \\ i_{qs-o}^r \\ i_{ds-o}^r \\ i_{0s-o} \\ T_{s-o}^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi r}{2} \\ 0 \\ \frac{v_{qs-o}^r}{R_{s-o}} \\ \frac{v_{ds-o}^r}{R_{s-o}} \\ 0 \\ T_{amb-o} + \frac{3}{2} R_{ts-amb} R_{s-o} (i_{qs-o}^2 + i_{ds-o}^2) \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$\delta \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \delta \theta_m(0) \\ \delta \omega_m(0) \\ \delta i_{qs}^r(0) \\ \delta i_{ds}^r(0) \\ \delta i_{0s}(0) \\ \delta T_s^\circ(0) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (79)$$

Las igualdades de la Ecuación (78) se obtienen despejándolas de (55). Las variables que se eligen arbitrariamente son:

- $\omega_{m-o} = 0 \frac{rad}{s}$ (para simplificación de cálculos, se mantendrá en 0 en todas las simulaciones)
- $\theta_{m-o} = \frac{\pi r}{2} rad$ (es decir, $\theta_{l-o} = \frac{\pi}{2} rad$)
- $v_{0s-o}^r = v_{ds-o}^r = 0V$ (para forzar $i_{ds-o}^r = i_{0s-o}^r = 0$)
- $v_{qs-o}^r = 0.3V$
- $T_{amb-o} = 25^\circ C$
- $T_{l-o} = T_{ld-o} + g * k_l * \sin(\frac{\theta_{m-o}}{r}) = \frac{3}{2} r P_p i_{qs-o}^r [\lambda'_m + (L_d - L_q) * i_{ds-o}^r]$
- $R_{s-o} = 1.02\Omega$. Este valor se toma constante para ambos modelos. En el modelo LPV debería considerarse variable, pero para evitar una recursividad (se necesita T_{s-o}° para obtener R_{s-o} , y para obtener T_{s-o}° se necesita i_{qs-o}^r , para la cual se necesita R_{s-o}) y para la simplificación de cálculos, se lo deja constante.

Ambos modelos tienen el mismo vector \mathbf{x}_0 de condiciones iniciales.

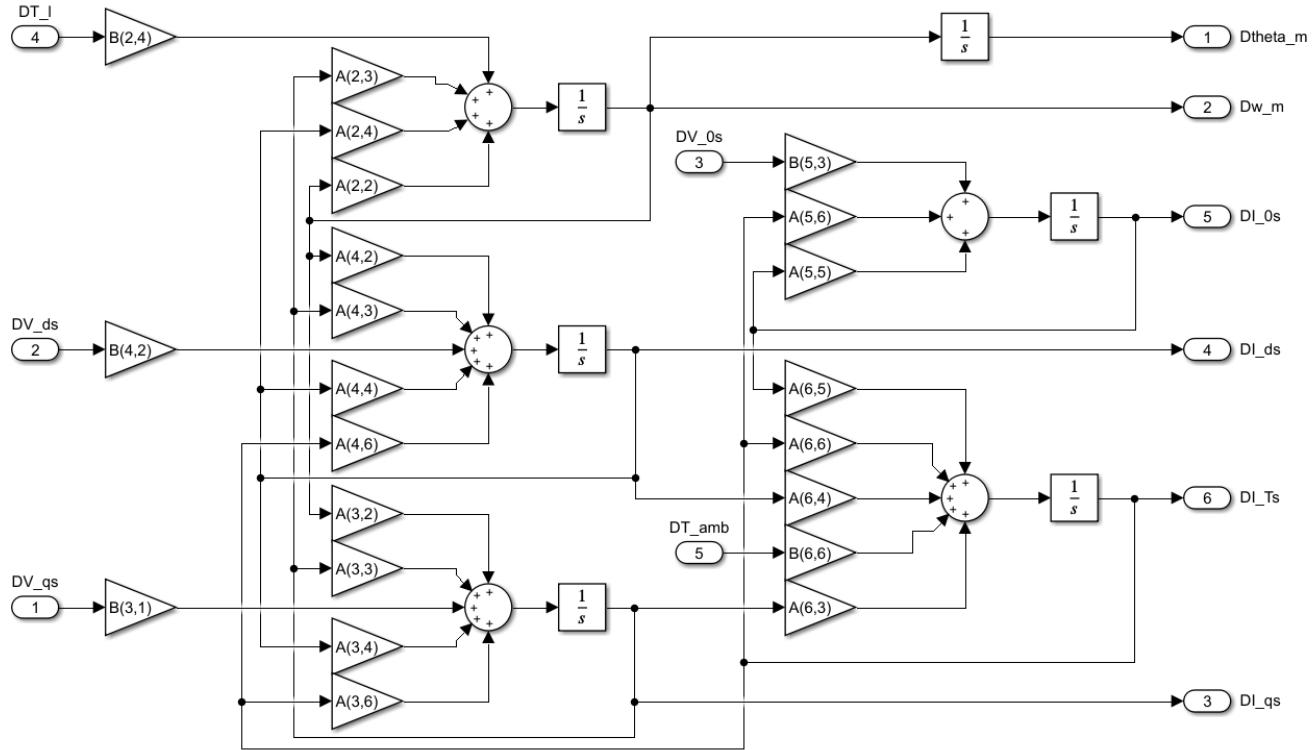


Figura 16: Diagrama de bloques del modelo dinámico global LPV.

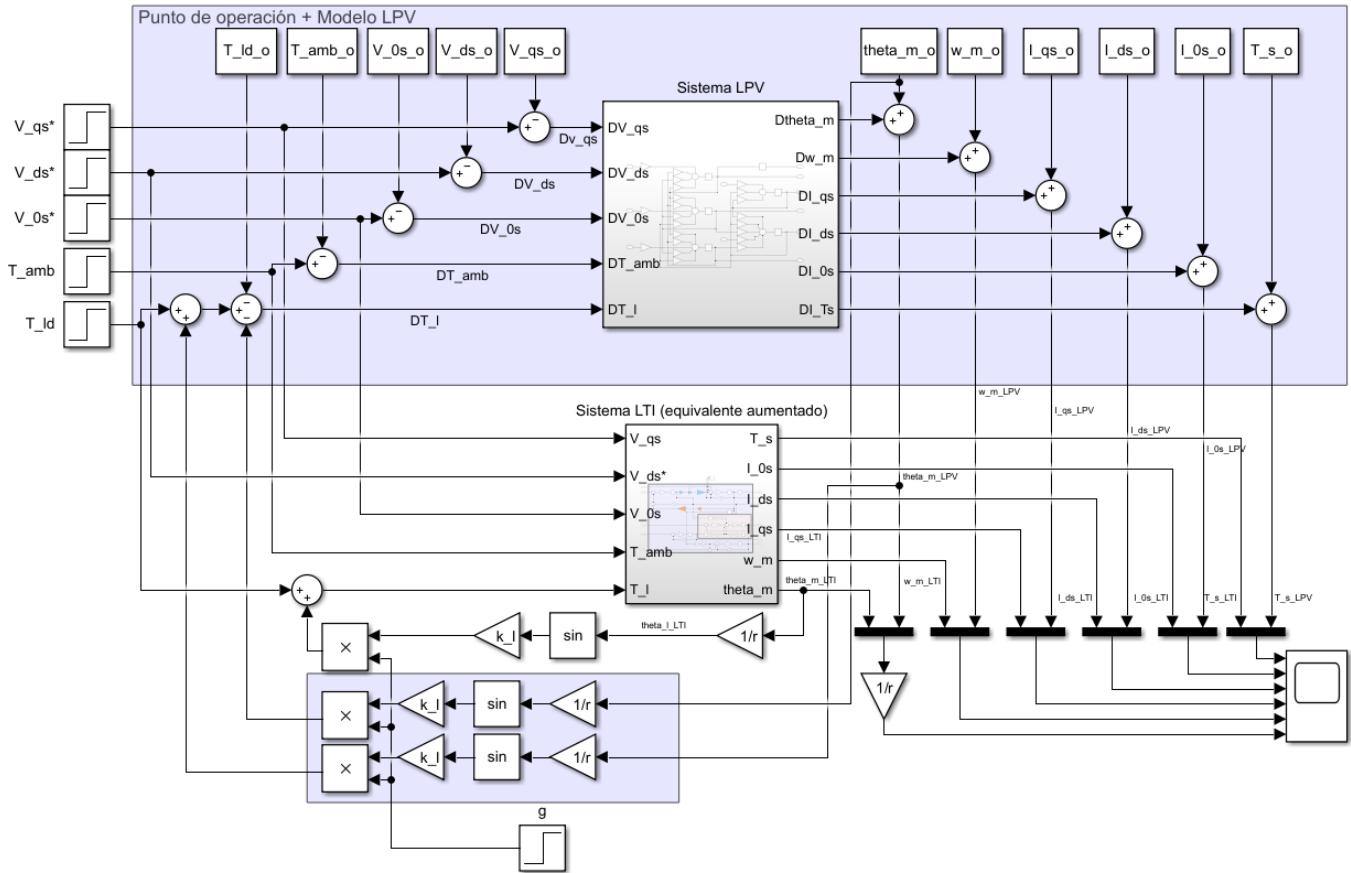


Figura 17: Diagrama de bloques del modelo dinámico global LPV + punto de operacion vs LTI.
Pág. 24 de 103

En primer lugar se muestra para las condiciones iniciales ya mencionadas (entradas en el punto de operación Figura 18), la comparativa entre el sistema LTI y LPV (Figura 19).

Luego, en un segundo caso donde $T_{ld-o}(t) > T_{ld}(t)$, (entradas en la Figura 20), se muestra la respuesta comparativa de los sistemas en la Figura 21.

Por último, un tercer caso donde $T_{ld-o}(t) < T_{ld}(t)$, entradas en la Figura 22. Se muestra la respuesta comparativa de los sistemas en la Figura 23. Se considera en todas las figuras que el tiempo t está en segundos y para todos los casos que $v_{ds-o}^r = 0$.

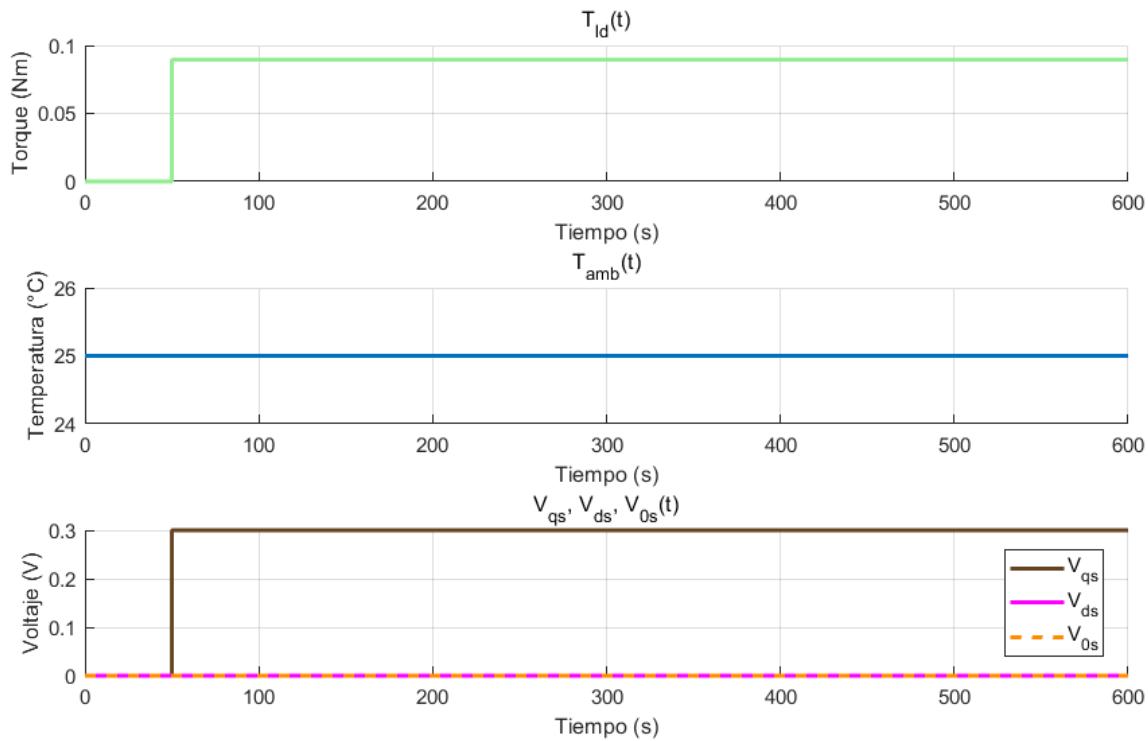


Figura 18: Entradas iguales al punto de operación.

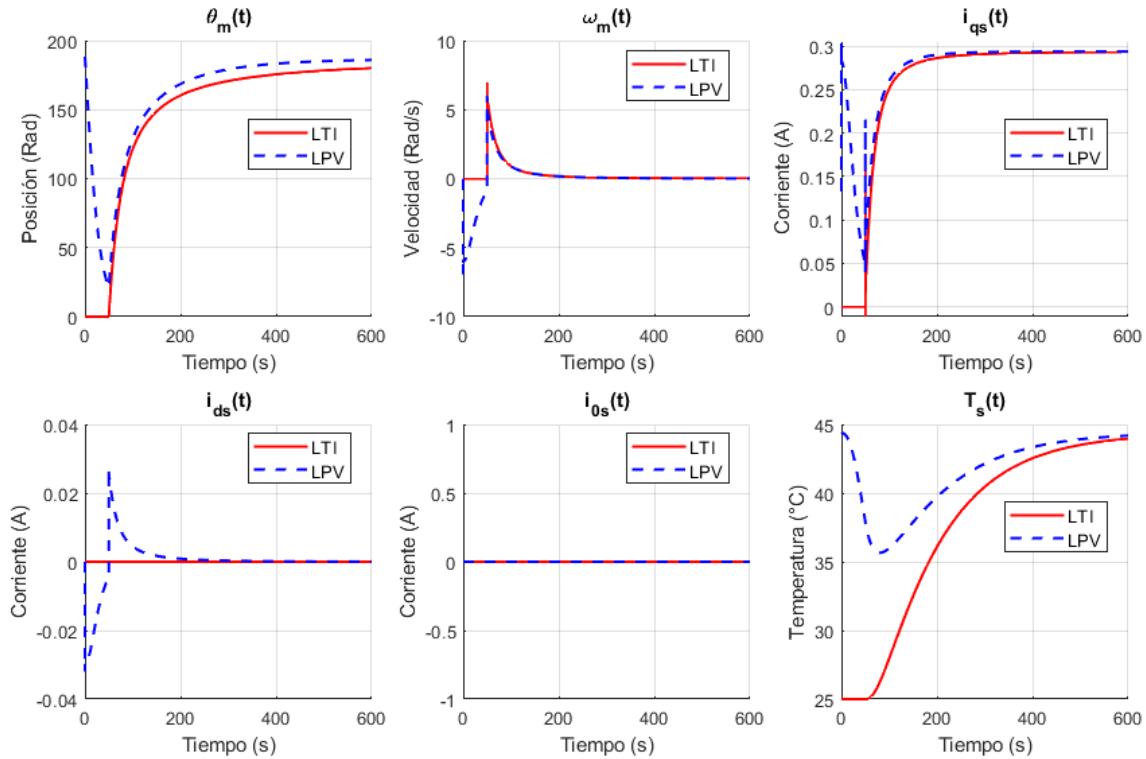


Figura 19: Respuestas del modelo dinámico global LPV + punto de operación vs LTI.

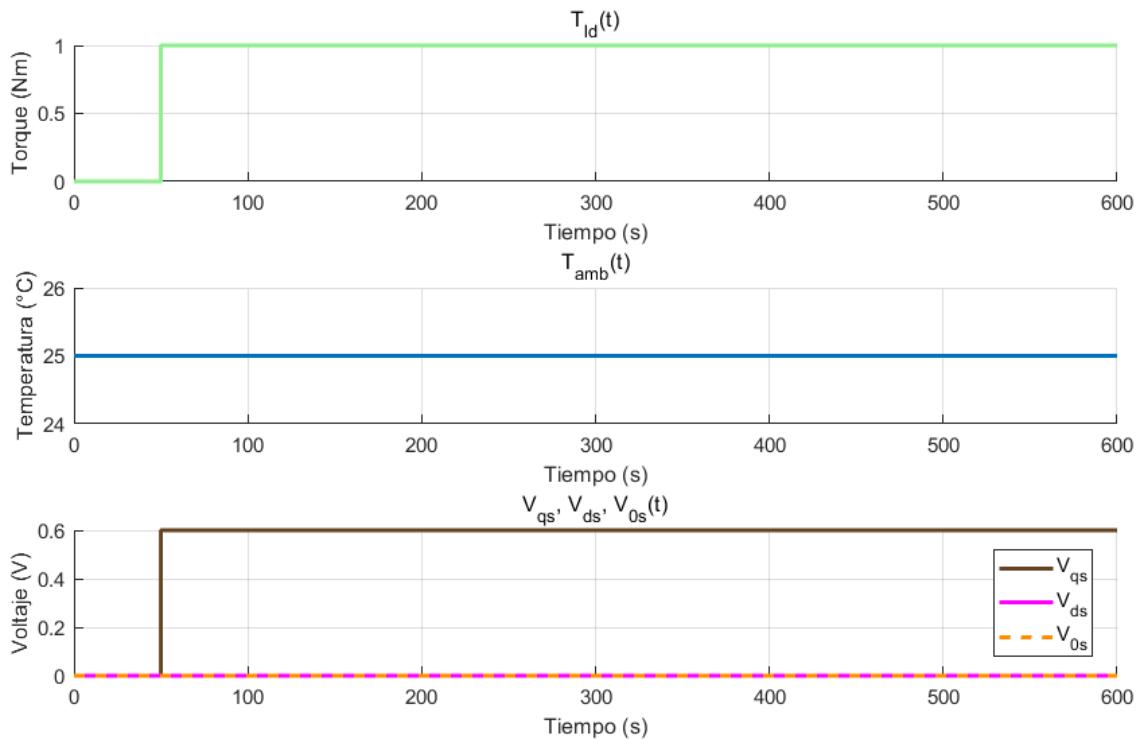


Figura 20: Entradas por encima del punto de operación ($T_{ld-o}(t) > T_{ld}(t)$).

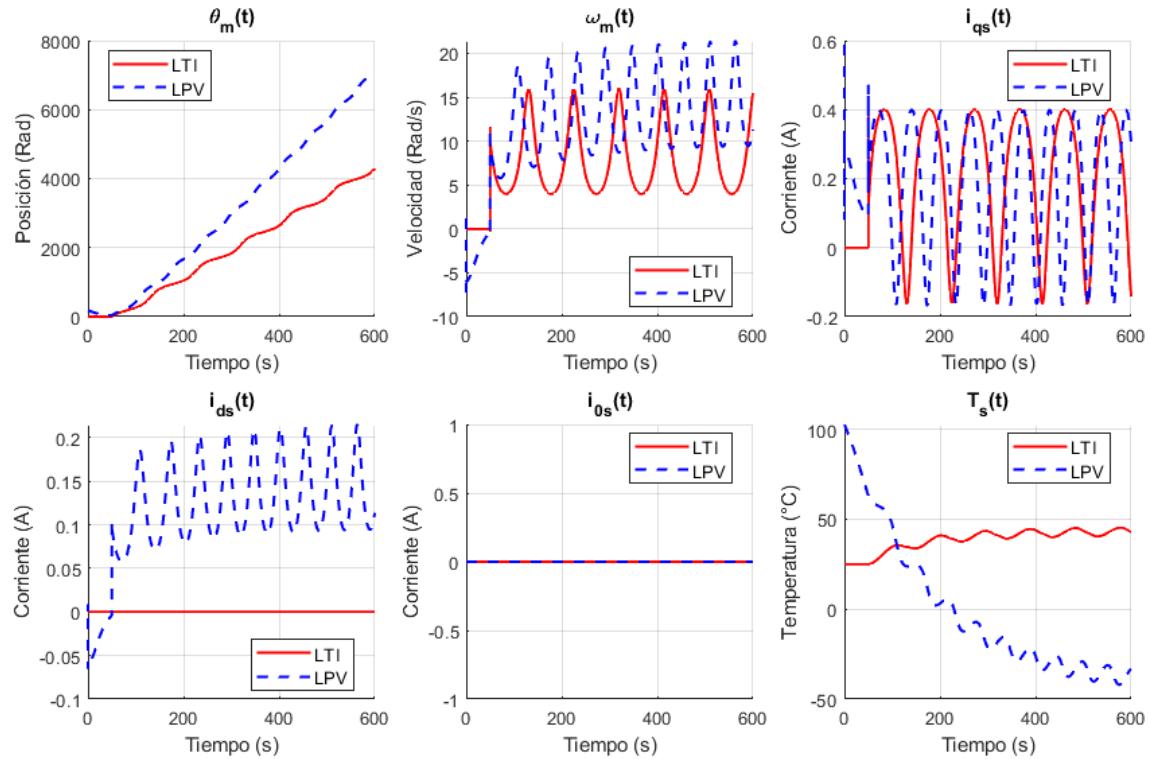


Figura 21: Respuestas del modelo frente a condición $T_{ld-o}(t) > T_{ld}(t)$.

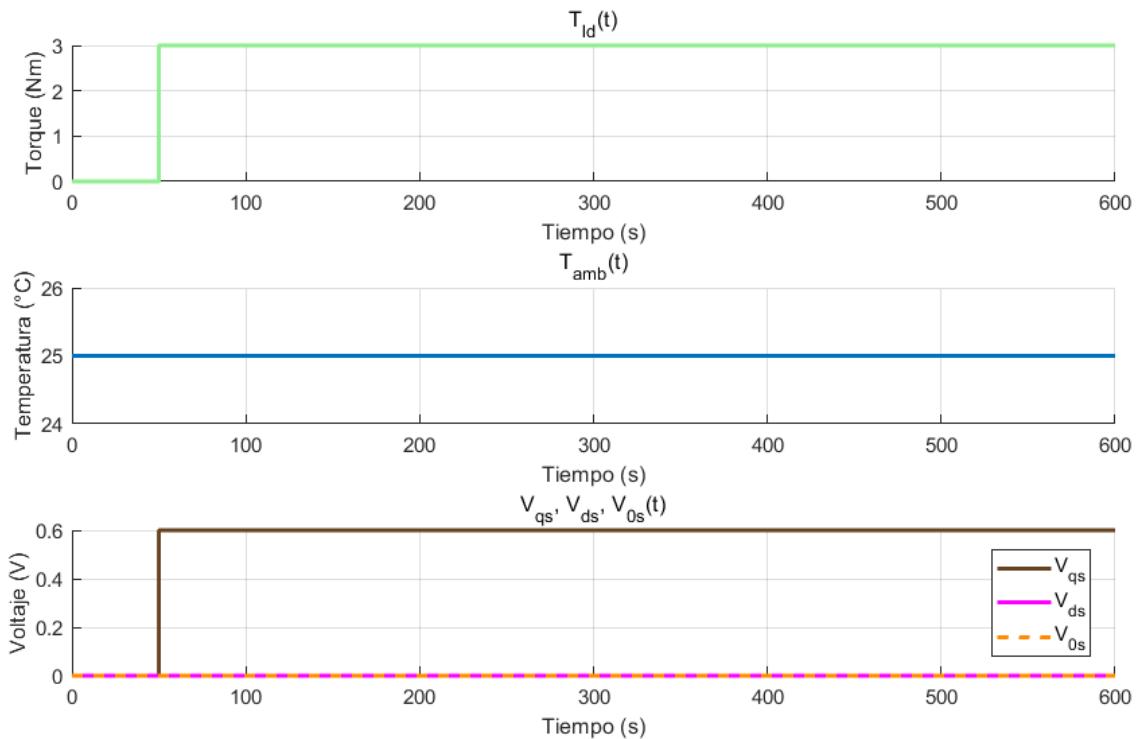


Figura 22: Entradas por encima del punto de operación ($T_{ld-o}(t) < T_{ld}(t)$).

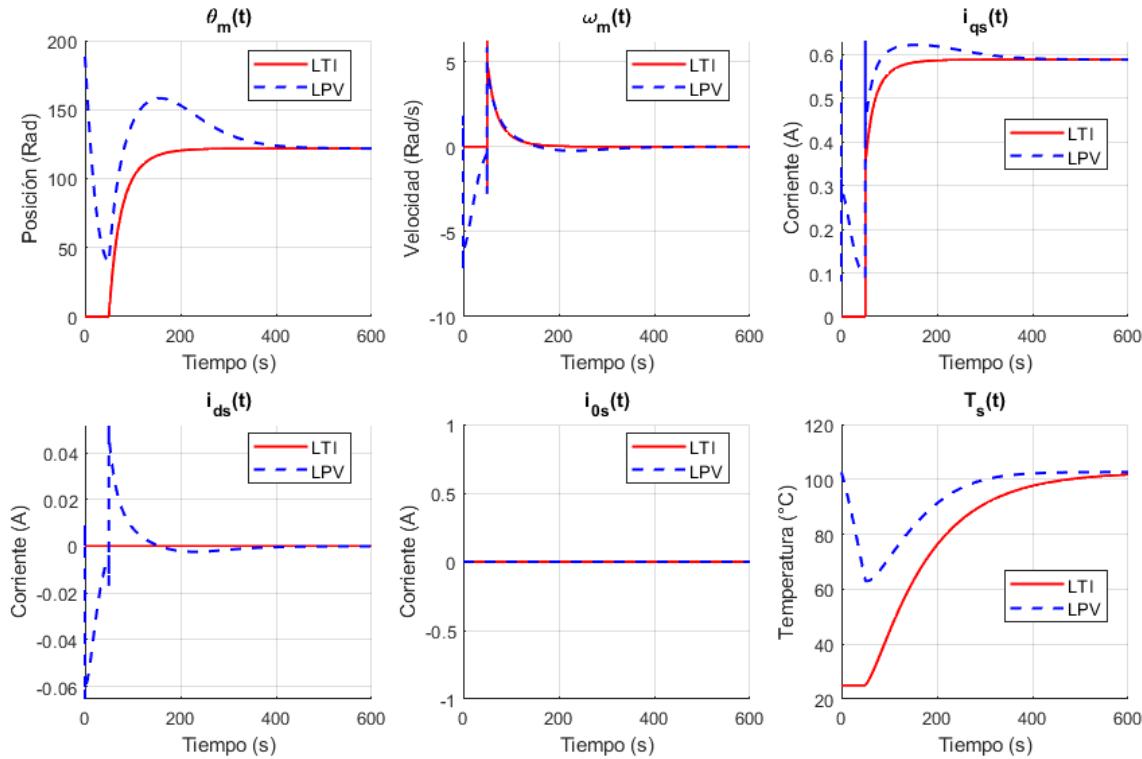


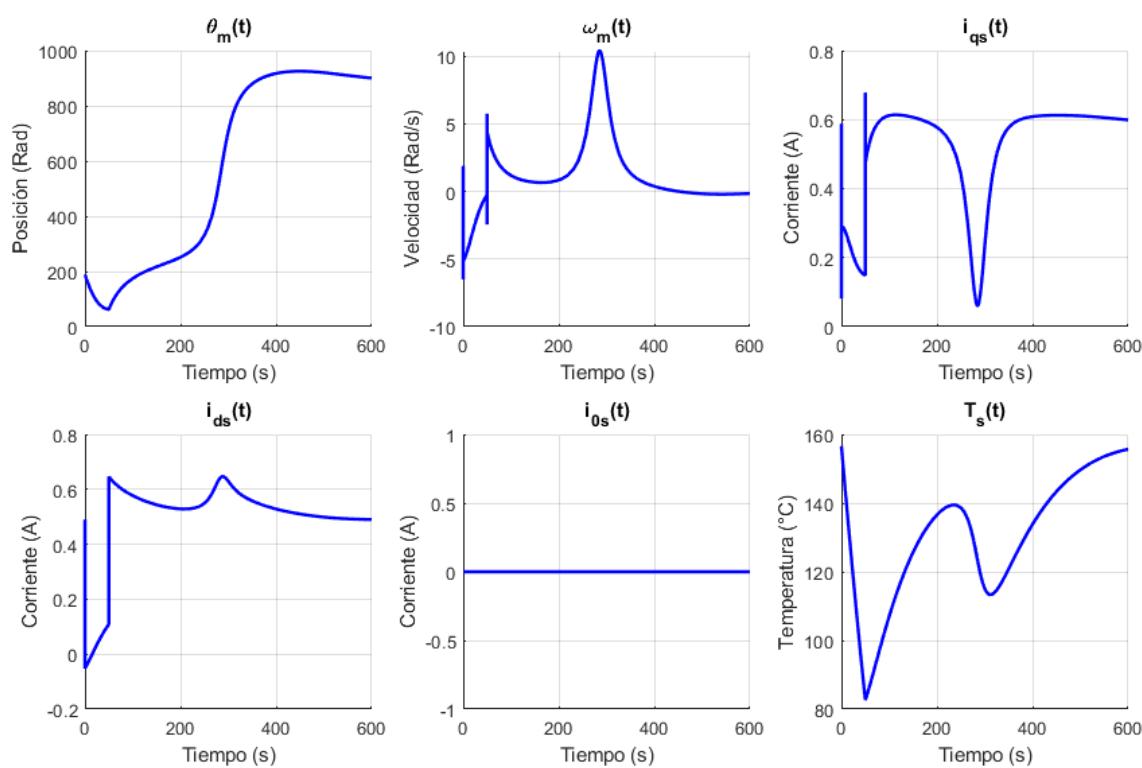
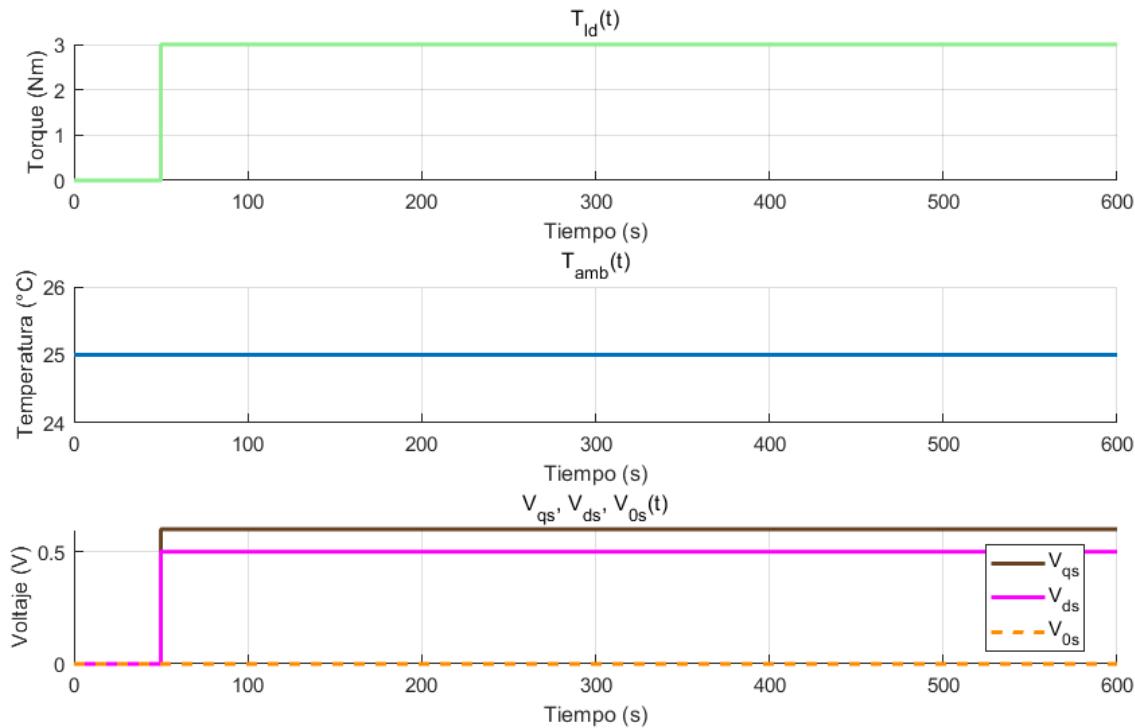
Figura 23: Respuestas del modelo frente a condición $T_{ld-o}(t) < T_{ld}(t)$.

Se puede observar que para el punto de operación, las respuestas de los sistemas a largo plazo, son prácticamente idénticas. Se aprecia únicamente una pequeña diferencia transitoria alrededor del momento en el que se le impone el punto de operación ($t = 50s$).

En el caso en que $T_{ld-o}(t) > T_{ld}(t)$ (Figura 21), el sistema es capaz de aumentar la corriente para vencer incluso hasta al torque gravitatorio máximo sumado a un $T_{ld}(t)$ constante. Se puede observar cómo esta mayor magnetización conlleva a una respuesta más fiel al cambio, por lo que el sistema responde oscilando en el tiempo. Lo que sucede es que el torque electromagnético compensa la carga, por lo que el rotor gira indefinidamente, pero aparece un comportamiento oscilatorio en la velocidad, en la posición y en las corrientes debido al término senoidal de la carga. Las variables de estado de los modelos se comportan de manera similar, al menos a corto plazo, salvo en los casos de $i_{ds}^r(t)$ y $T_s^o(t)$. A largo plazo, se puede notar un cierto desfase entre las curvas dado por la influencia de un $i_{ds} \neq 0A$ para el modelo LPV.

En el caso donde $T_{ld-o}(t) < T_{ld}(t)$ (Figura 23), $T_m(t)$ apenas puede compensar el torque $T_{ld}(t)$ constante, lo que le hace difícil compensar el peso del brazo. Consecuentemente, el sistema tiende a frenarse, el término senoidal a ser una constante, por lo que no aparecen oscilaciones.

A continuación se muestran (Figura 25 con entradas Figura 24 y Figura 27 con entradas Figura 26) las respuestas comparativas del sistema ante el reforzamiento y debilitamiento del campo electromagnético de la máquina.



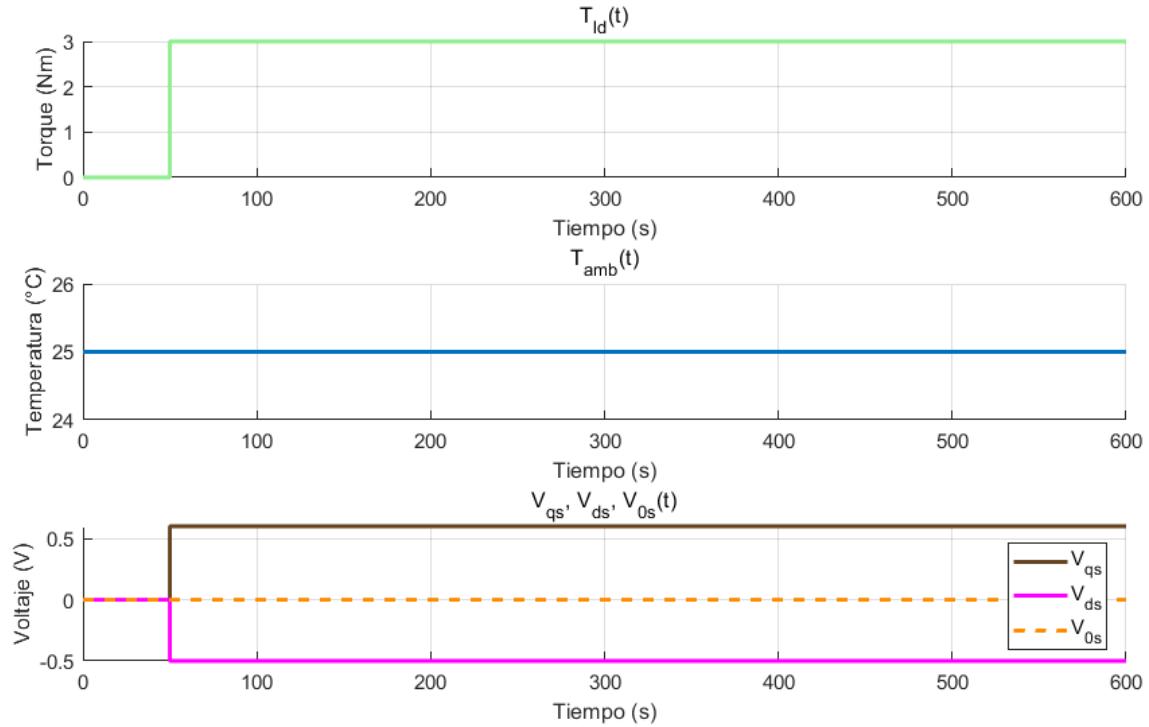


Figura 26: Entradas del modelo para condición de debilitamiento de campo.

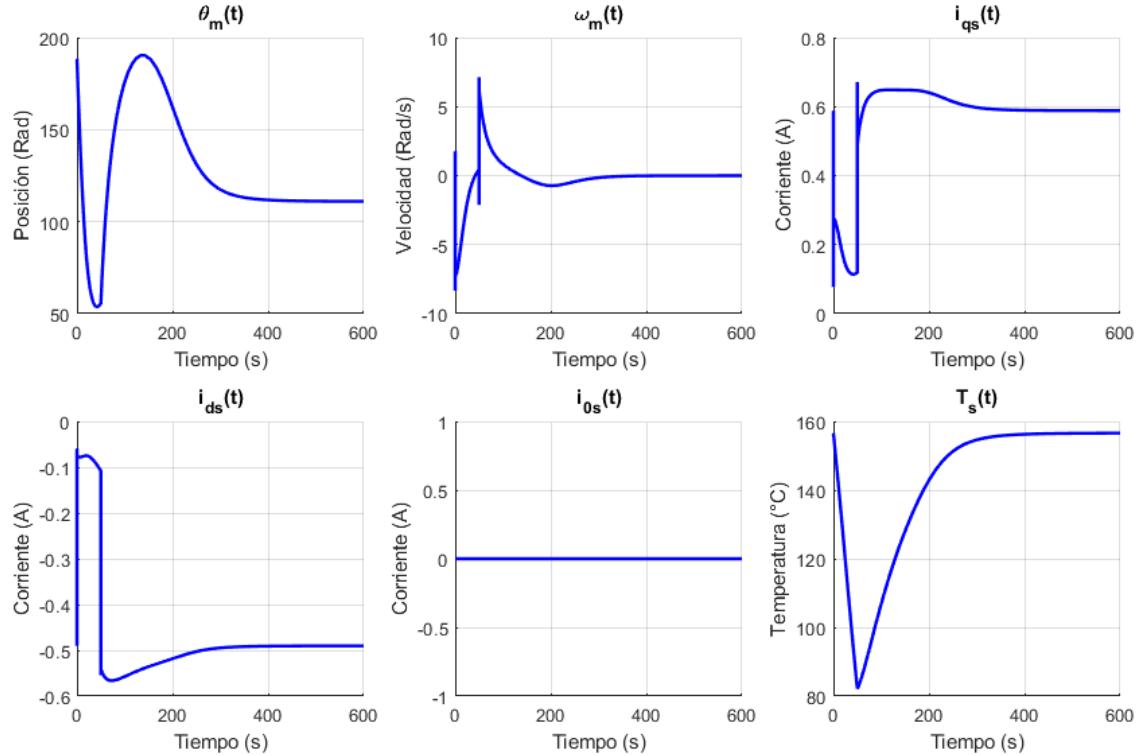


Figura 27: Respuestas del modelo frente a condición de debilitamiento de campo ($v_{ds} = -0.5V$).

Se concluye que con el modelo LPV se puede modelar la influencia del reforzamiento y debilitamiento del campo, en la respuesta dinámica del sistema.

4.1.2.e Modelo LTI: Funciones de transferencia

Las función de transferencia para el modelo LTI equivalente aumentado pueden analizarse desde ambas entradas $v_{qs}(t)$ y $T_l(t)$ hacia la salida $\theta_m(t)$. En primer lugar se procede a realizar la correspondiente respecto a la entrada $v_{qs}(t)$.

Aplicando la Transformada de Laplace a las ecuaciones correspondientes al sistema LTI equivalente aumentado (Ecuación (67)), considerando salida $\theta_m(t)$ y condiciones iniciales nulas:

$$\begin{cases} s\Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s\Omega_m(s) = \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq}} I_{qs}^r(s) - \frac{b_{eq}}{J_{eq}} \Omega_m(s) - \frac{1}{r J_{eq}} T_l(s) \\ sI_{qs}^r(s) = -\frac{R_s}{L_q} I_{qs}^r(s) - \frac{P_p \lambda'_m}{L_q} \Omega_m(s) + \frac{1}{L_q} V_{qs}^r(s) \end{cases}$$

Despejando a la salida en función de las entradas, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Theta_m(s) = \frac{-\frac{1}{r}(R_s + L_qs)T_l(s) + \frac{3}{2}P_p(\lambda'_m)^r V_{qs}^r(s)}{J_{eq}L_qs^3 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq})s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda'_m)^2)s}$$

De la que se deduce la función de transferencia respecto a la entrada de control:

$$\frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2}P_p \lambda'_m}{J_{eq}L_qs^3 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq})s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda'_m)^2)s} \quad (80)$$

Y respecto a la entrada de perturbación:

$$\frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r}(R_s + L_qs)}{J_{eq}L_qs^3 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq})s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda'_m)^2)s} \quad (81)$$

Para posteriores análisis, se calculan también las funciones de transferencia de la velocidad $\Omega_m(s)$ y la corriente $I_{qs}^r(s)$ con respecto a ambas entradas:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2}P_p \lambda'_m}{J_{eq}L_qs^2 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq})s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda'_m)^2)} \quad (82)$$

$$\frac{\Omega_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r}(R_s + L_qs)}{J_{eq}L_qs^2 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq})s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda'_m)^2)} \quad (83)$$

$$\frac{I_{qs}^r(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{b_{eq} + J_{eq}s}{J_{eq}L_qs^2 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq})s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda'_m)^2)} \quad (84)$$

$$\frac{I_{qs}^r(s)}{T_l(s)} = \frac{P_p \lambda'^r \frac{1}{r}}{J_{eq}L_qs^2 + (J_{eq}R_s + L_q b_{eq})s + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda'_m)^2)} \quad (85)$$

4.1.3. Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado

Con el polinomio característico del sistema, obtenido a partir de las expresiones de funciones de transferencia (Ecuaciones (80) y (81)), se plantea la siguiente ecuación característica:

$$(J_{eq}L_q)s^3 + (J_{eq}R_s + L_qb_{eq})s^2 + \left(R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda_m'^r)^2\right)s = 0 \quad (86)$$

Resolviendo la ecuación cúbica expresada en función de la variable compleja s , se obtiene el valor correspondiente a cada uno de los polos del sistema:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = \frac{-(J_{eq}R_s + L_qb_{eq}) \pm \sqrt{(J_{eq}R_s + L_qb_{eq})^2 - 4 \cdot (J_{eq}L_q) \cdot (R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda_m'^r)^2)}}{2J_{eq}L_q} \end{cases} \quad (87)$$

Considerando los siguientes rangos de valores para cada una de las constantes correspondientes en la Tabla 2, es posible obtener diferentes ubicaciones de polos y ceros haciendo variar parámetros.

Parámetro	Valor mínimo	Valor intermedio	Valor máximo	Variable dependiente - Rango
$b_{eq}[\text{N m s rad}^{-1}]$	$1.9861 \cdot 10^{-5}$	$2.1944 \cdot 10^{-5}$	$2.4028 \cdot 10^{-5}$	$b_l \in [0.07, 0.13] [\text{N m s rad}^{-1}]$
$J_{eq}[\text{kg m}^2]$	$1.9785 \cdot 10^{-5}$	$3.2806 \cdot 10^{-5}$	$4.5826 \cdot 10^{-5}$	$m_l \in [0, 1.5] [\text{kg}]$
$R_s[\Omega]$	0.9097	1.02	1.3194	$T_s \in [-15, 115] [\text{°C}]$

Tabla 2: Parámetros y rangos considerados para constantes.

Hasta aquí se ha trabajado con los valores intermedios para b_{eq} y R_s , y el valor mínimo para J_{eq} ; además, $P_p = 3$, $\lambda_m'^r = 0.016 \frac{\text{V}}{\text{rad/s}}$ y $L_q = 5.8 \text{ mH}$, por lo que para los mismos se obtiene la siguiente configuración de polos:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -88.49 + 149.94i \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \\ s_3 = -88.49 - 149.94i \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \end{cases} \quad (88)$$

Además se considera, producto de la entrada de perturbación que afecta al sistema, la existencia de un cero (numerador de Ecuación (81)) en:

$$R_s + L_q s = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_s}{L_q} = -175.86 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (89)$$

Gráficamente se pueden ver los polos y ceros en la Figura 28.

Observando la forma de la Ecuación (90), se puede reordenar la expresión del polinomio característico (Ecuación (86)) para lograr obtener de manera casi inmediata, los valores correspondientes del amortiguamiento relativo y de la frecuencia natural de oscilación propios del sistema:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (90)$$

$$s^2 + \frac{J_{eq}R_s + L_qb_{eq}}{J_{eq}L_q}s + \frac{R_s b_{eq} + \frac{3}{2}P_p^2(\lambda_m'^r)^2}{J_{eq}L_q} = 0$$

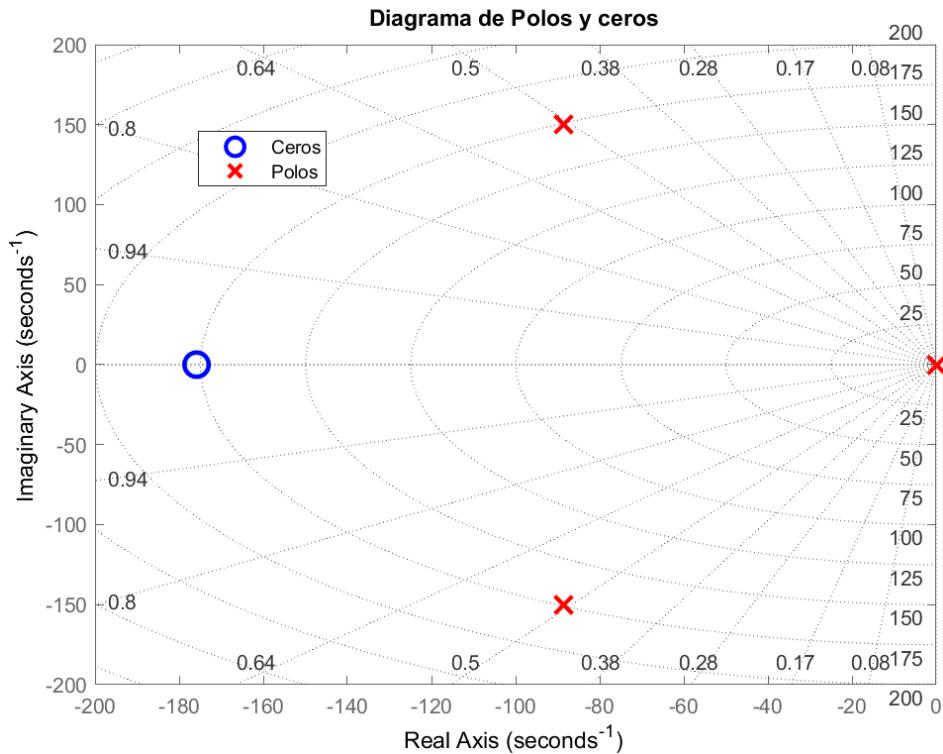


Figura 28: Diagrama de polos y ceros propios del sistema a lazo abierto.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 (\lambda_m^{tr})^2}{J_{eq} L_q}} = 174.1 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (91)$$

$$\zeta = \frac{J_{eq} R_s + L_q b_{eq}}{2 \sqrt{J_{eq} L_q (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 (\lambda_m^{tr})^2)}} = 0.5082 \quad (92)$$

En base a todo lo mencionado anteriormente, se procede con algunas conclusiones:

- **Estabilidad a lazo abierto:** El sistema presenta sus tres polos y su cero en el semiplano izquierdo del eje imaginario en el mapa de polos, con uno de los polos ubicado en el origen. Que la parte real de los polos sea negativa indica que el sistema es estable a lazo abierto, y siempre lo será independientemente de los valores de sus parámetros.
- **Amortiguamiento:** El sistema tiene un coeficiente de amortiguamiento menor que la unidad, lo que lo clasifica como subamortiguado.

Respecto a la variación de parámetros en la carga, esto afecta en el sistema, originando la migración de parámetros que se comenta a continuación. En primer lugar, se muestra cómo se modifica la posición de los polos y ceros al contemplar la variación de la $R_s(t)$ dentro de su rango [0.9097 Ω (-15°C) ; 1.3194 Ω (115°C)]:

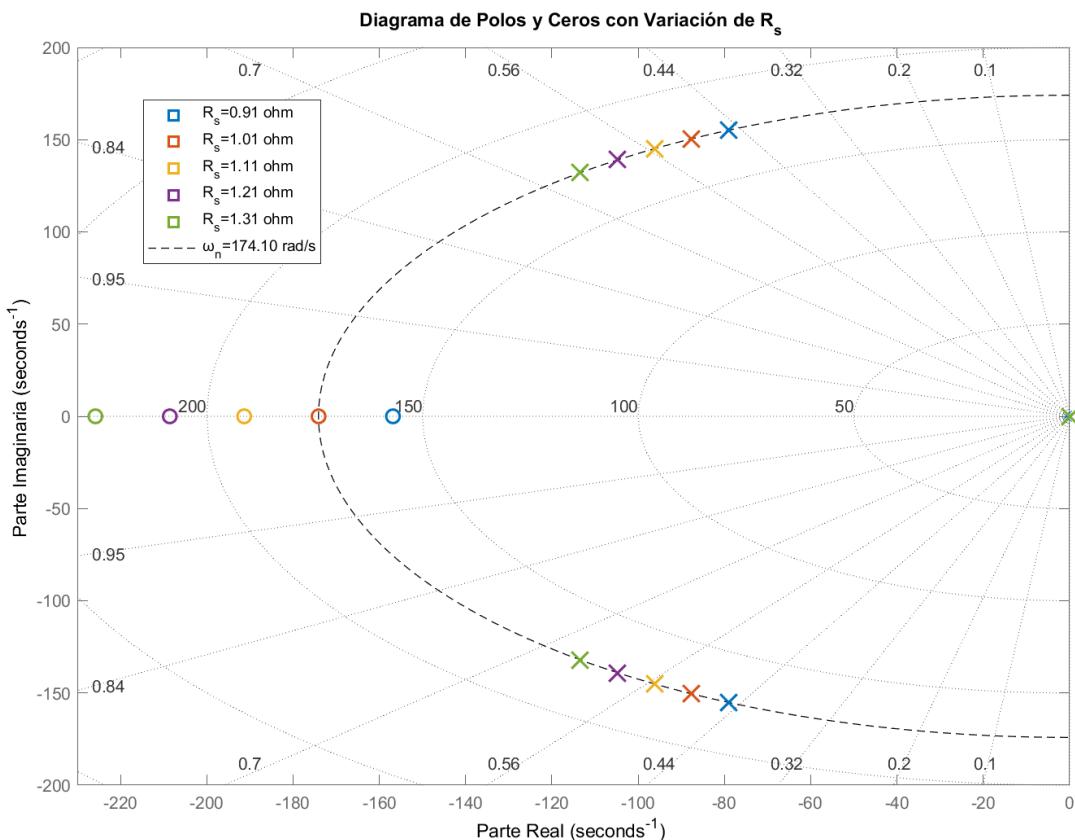


Figura 29: Movimiento de los polos y ceros a partir de la variación del parámetro R_s .

A partir de la observación de la Figura 29 se puede concluir a medida que la temperatura aumenta (R_s en aumento), los polos y ceros del sistema se corren hacia la izquierda, llevando al sistema a una condición de mayor amortiguamiento, alejándose de una posible condición de inestabilidad (semiplano derecho). Además, se puede notar que la variación no afecta significativamente a la frecuencia natural de oscilación del sistema, por ello es que todos los polos se encuentran ubicados prácticamente sobre la isolínea de frecuencia natural de temperatura nominal.

Manteniendo el valor intermedio (según Tabla 2) de $R_s(t) = 1.02\Omega$ y el valor intermedio de b_{eq} , se procede a variar J_{eq} (Figura 30).

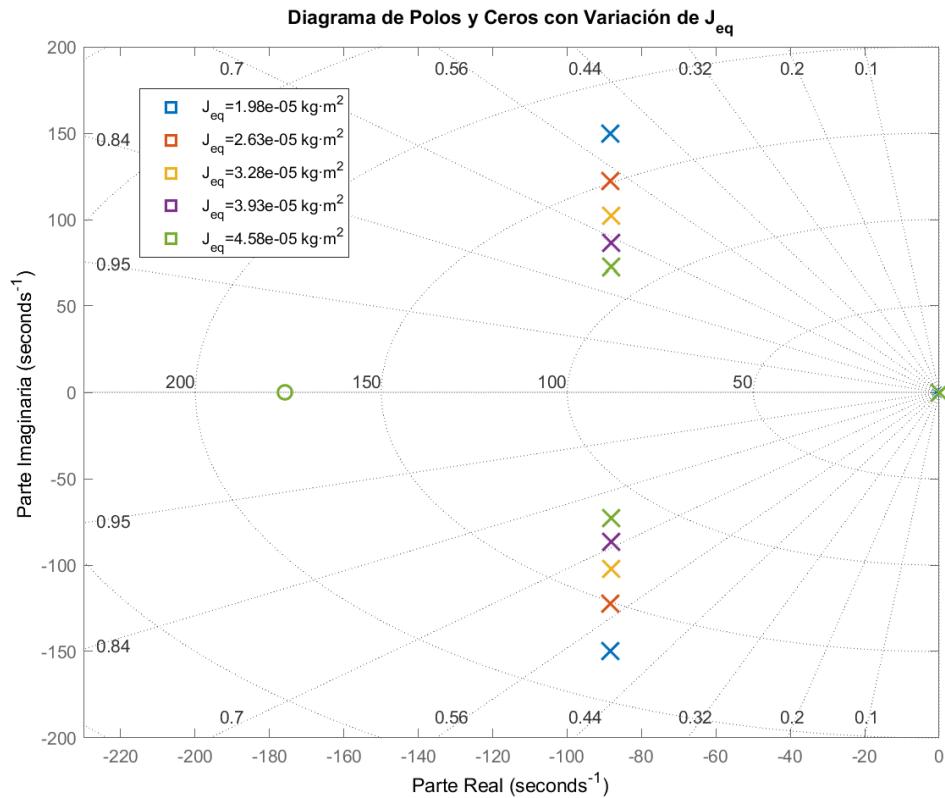
La variación en el parámetro de la inercia equivalente de la carga se ve reflejada en el movimiento en dirección del eje imaginario de los polos, manteniendo la parte real casi invariante, pero afectando el amortiguamiento relativo propio.

Manteniendo el valor intermedio (según Tabla 2) de $R_s(t) = 1.02\Omega$ y el valor mínimo de J_{eq} , se procede a variar b_{eq} (Figura 31)

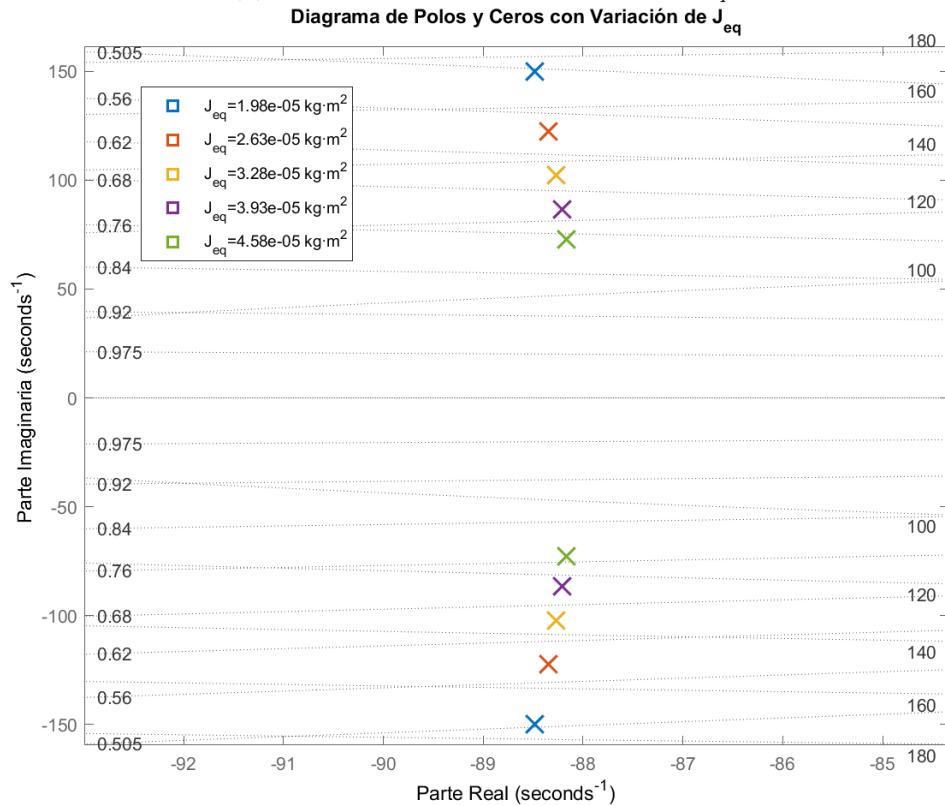
Por último, se observa en esta corrida de variación de parámetros que modificar b_{eq} tiene un efecto similar a la variación de J_{eq} , pero mucho menos significativo. En la Figura 31a se puede apreciar a simple vista que los polos están prácticamente en el mismo lugar, y en la Figura 31b se observa que el cambio en la dirección del eje real es del orden de la centésima, lo que hace despreciable la variación de b_{eq} al menos sobre ese eje.

Ni la variación de J_{eq} ni la de b_{eq} modifican la posición de los ceros, sólo la de R_s . Esto es claro si se observa la Ecuación (89). Es por eso que solo se observa un cero en las Figuras 30 y 31, pues están todos superpuestos.

Es interesante analizar más detenidamente cómo afecta la variación de parámetros a ω_n y ζ . Es evidente, gracias a la Figura 29, que la variación de ω_n debida a R_s es despreciable. De hecho, esta

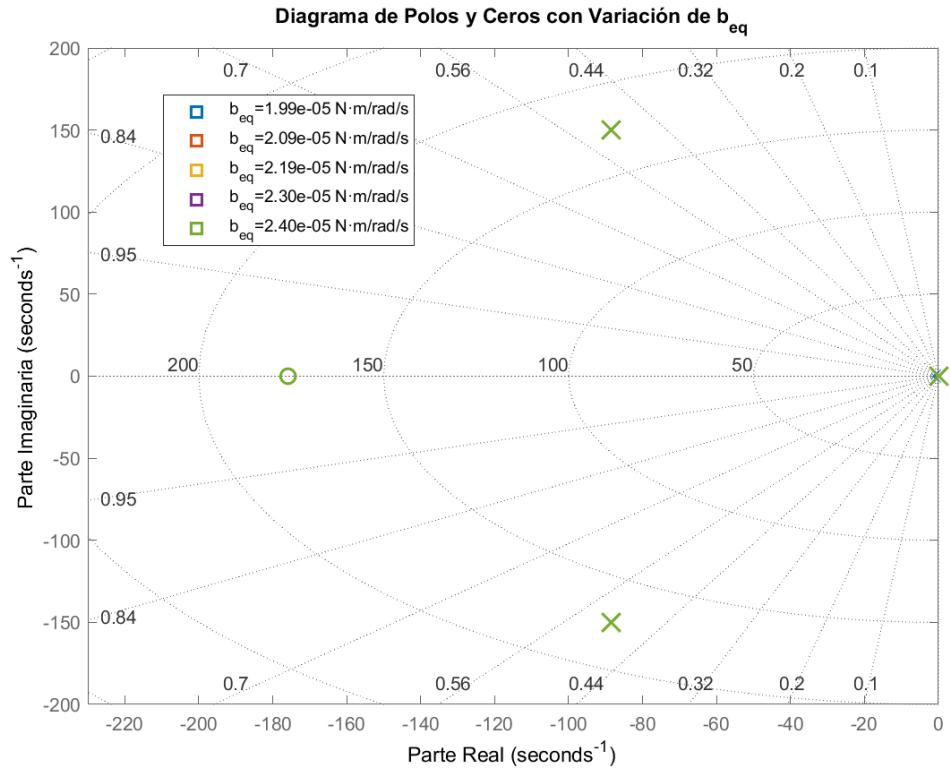


(a) Mapa de polos y ceros variando J_{eq}

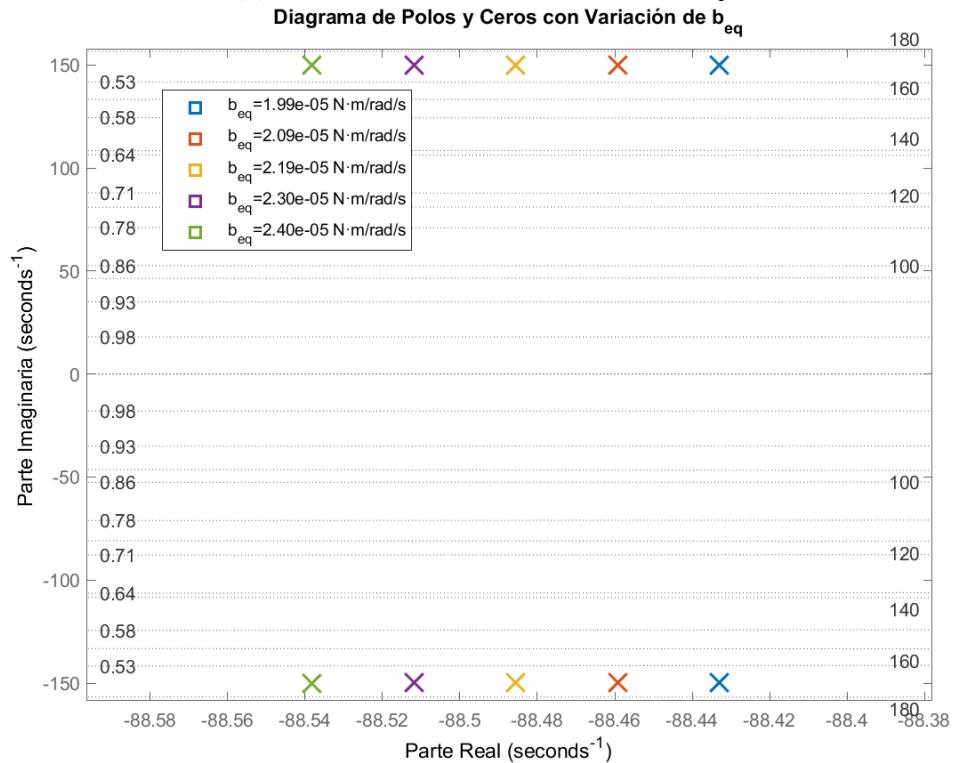


(b) Zoom aplicado en el eje real.

Figura 30: Movimiento de los polos a partir de la variación del parámetro J_{eq} .



(a) Mapa de polos y ceros variando b_{eq}



(b) Zoom aplicado en el eje real.

Figura 31: Movimiento de los polos a partir de la variación del parámetro b_{eq} .

conclusión puede obtenerse también observando la Figura 32a. También se muestra el impacto de R_s sobre ζ , obteniendo valores entre 0.45 y 0.66 para los valores mínimos y máximos de temperatura, respectivamente. Se mantuvieron $J_{eq} = 1.9785 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ y $b_{eq} = 2.1944 \cdot 10^{-5} \text{ N m s rad}^{-1}$.

La Figura 32b demuestra que J_{eq} tiene un impacto relativamente significativo sobre ambas variables. En la medida que decrece la frecuencia natural, el amortiguamiento relativo crece. Para un J_{eq} mínimo, se obtienen los valores $\omega_n = 174.1$ y $\zeta = 0.51$, y para un J_{eq} máximo, se tienen los valores $\omega_n = 114.4$ y $\zeta = 0.77$. Se mantuvieron $R_s = 1.02\Omega$ y $b_{eq} = 2.1944 \cdot 10^{-5} \text{ N m s rad}^{-1}$.

El parámetro b_{eq} no produce variaciones importantes en ningún aspecto. Esto es ostensible en Figura 32c, donde se ve que ω_n varía en solo 0.1 unidades, y ζ en solo 0.003. Se mantuvieron $J_{eq} = 1.9785 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ y $R_s = 1.02\Omega$.

El sistema, como se dijo anteriormente, es subamortiguado en la mayoría de los casos. Sin embargo, existe un caso donde está al borde de ser críticamente amortiguado, con un $\zeta = 0.99$. Este se presenta combinando los valores máximos de R_s y J_{eq} .

Respecto a la dinámica de los ceros del sistema, se puede observar en la Figura 33 cómo es que esta variación de parámetros afecta la forma que tendrá la respuesta del mismo. Para verlo, se debe tener en cuenta que la salida en este caso no es $\theta_m(t)$ sino $\omega_m(t)$, puesto que $\theta_m(t)$ es considerada una pseudovariable de estado no acotada, razón por la cual existe un polo en el origen. En estado estacionario, $\omega_m(t)$ tiende a una constante mientras que $\theta_m(t)$, siendo su integral, tiende a infinito. Esto no quiere decir que el sistema sea inestable.

Ante una entrada $T_l(t)$ de tipo escalón unitario y considerando condiciones iniciales nulas, ambos sistemas tienen una oscilación y luego una tendencia a establecerse en el correspondiente valor de estado estacionario propio de cada función de transferencia. A pesar de ello, se puede observar cómo el cero más cercano al origen (correspondiente a R_s mínimo) tiene menor amortiguamiento, por ende un mayor sobrepico (amplificado aún más por el cero) y por lo que la oscilación perdura más en el tiempo. A diferencia del caso anterior, ahora analizando el cero más alejado del origen (R_s máximo), éste tiene un comportamiento bastante más amortiguado, menor sobrepico y una duración del transitorio inicial menos extendida en el tiempo. El valor de estado estacionario diferente que se advierte entre las dos respuestas se debe a la interacción que produce esta variación con el resto de los valores característicos del sistema en cada función de transferencia, aunque el cero también tiene una incidencia importante.

La respuesta a una entrada escalón, considerando ahora la variación de J_{eq} , se muestra en la Figura 34. Se observa que, para el valor mínimo de J_{eq} , la respuesta presenta un sobrepico mayor en comparación con la correspondiente al valor máximo, debido a un menor amortiguamiento. Además, la curva asociada al valor mínimo exhibe una mayor rapidez en su evolución, lo cual se debe a una mayor frecuencia natural.

A pesar de estas diferencias dinámicas, ambas curvas convergen al mismo valor en estado estacionario. Esto se debe a que, al aplicar el teorema del valor final en la Ecuación (83), se verifica que J_{eq} no afecta dicho valor. Por otro lado, aunque la posición del cero de la función de transferencia no se ve alterada, puede interpretarse que la variación de J_{eq} tiene un efecto casi equivalente a la modificación de un cero del sistema.

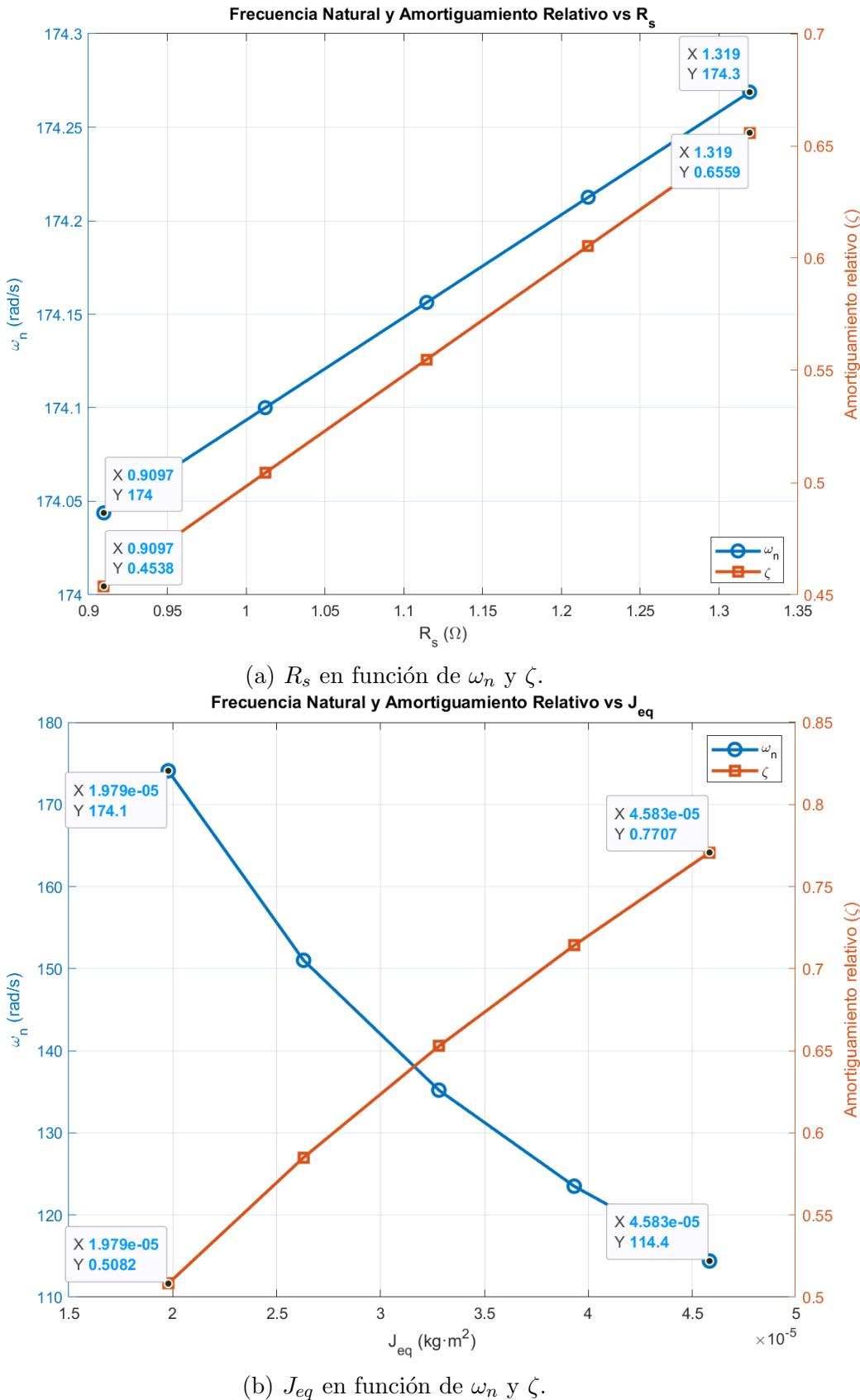
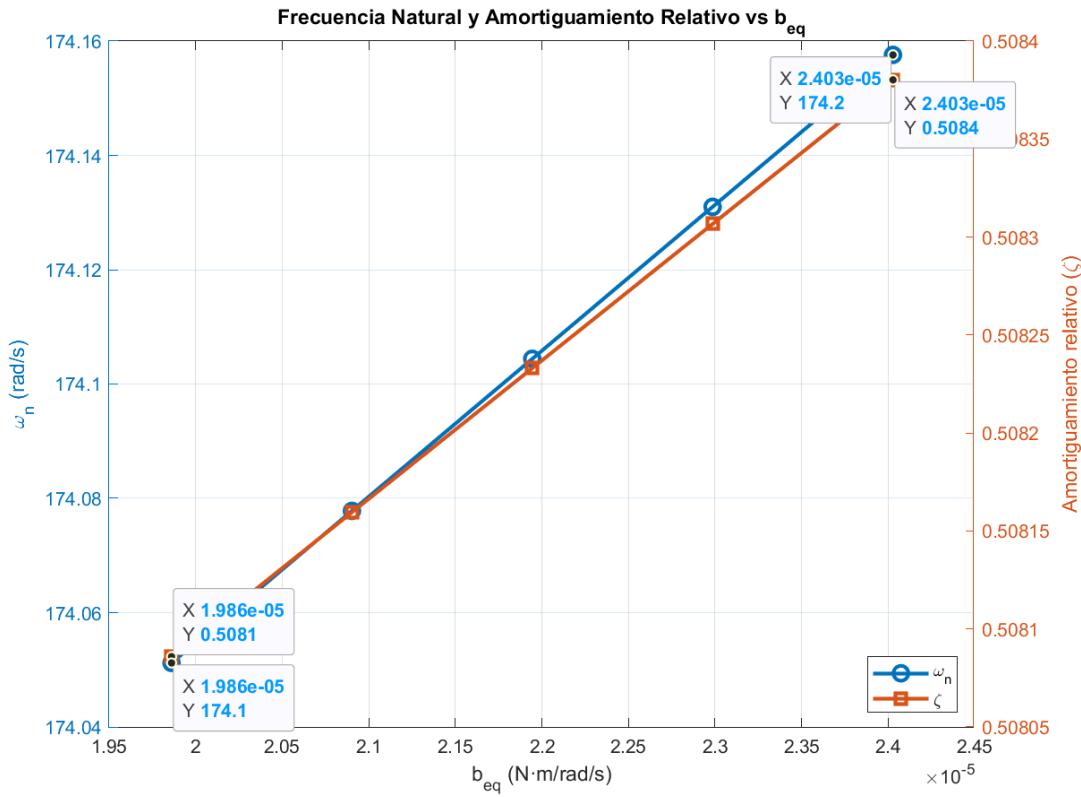


Figura 32: Efecto de la variación de R_s , J_{eq} y b_{eq} en ω_n y ζ naturales del sistema.



(c) b_{eq} en función de ω_n y ζ .

Figura 32: (Continuación) Efecto de la variación de R_s , J_{eq} y b_{eq} en ω_n y ζ naturales del sistema.

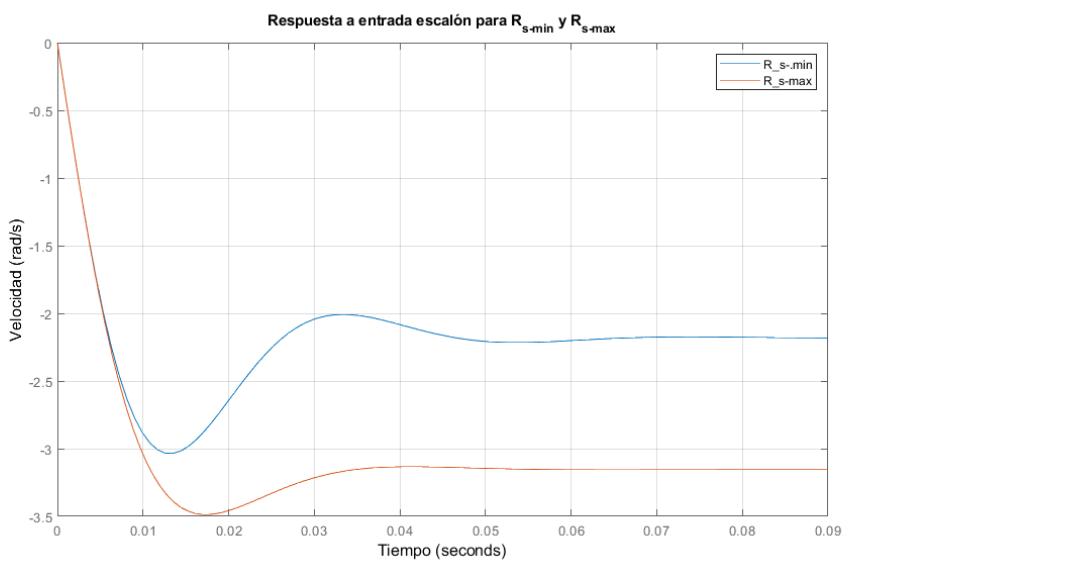


Figura 33: Respuesta de $\omega_m(t)$ a una entrada escalón variando R_s .

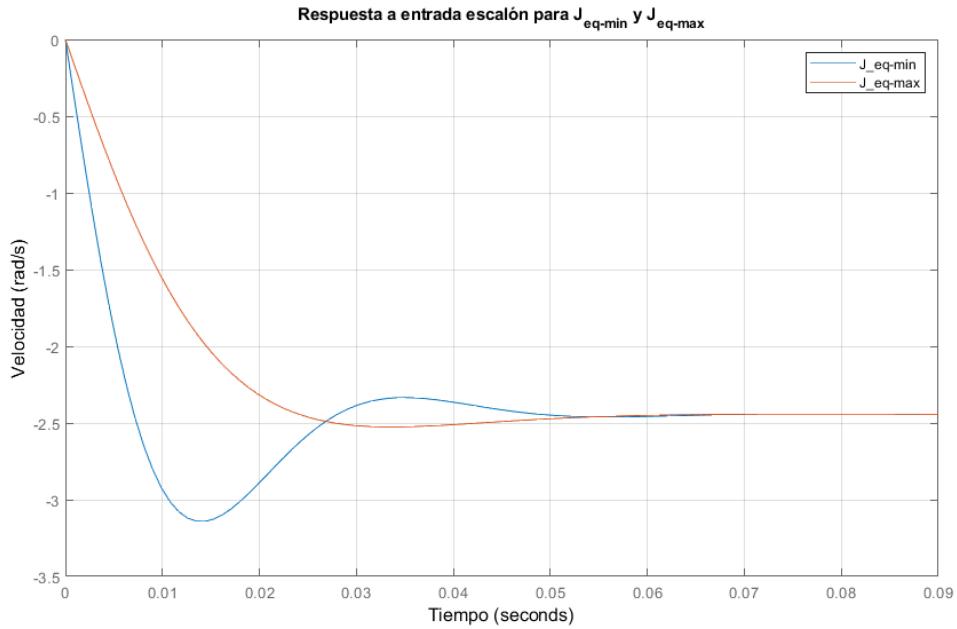


Figura 34: Respuesta de $\omega_m(t)$ a una entrada escalón variando J_{eq} .

4.1.4. Análisis de Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Siguiendo con el estudio del sistema, se procede a realizar el análisis de la observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde la salida medida $\theta_m(t)$. El determinante de la matriz de observabilidad es:

$$\det(O) = \det \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \quad (93)$$

Donde:

$$C = [1 \ 0 \ 0], \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m'^r}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \lambda_m'^r}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix},$$

$$C \cdot A = [0 \ 1 \ 0], \quad C \cdot A^2 = \left[0 \ -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \ \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m'^r}{J_{eq}} \right]$$

Por lo tanto:

$$\det(O) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m'^r}{J_{eq}} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m'^r}{J_{eq}} \quad (94)$$

Observando los resultados obtenidos, se puede concluir que el rango de la matriz de observabilidad es de orden 3, tiene determinante distinto de 0 para toda amplitud de operación de la planta, por lo que será completamente observable desde la posición.

Como alternativa, se plantea el caso de un reemplazo de sensor (tacogenerador por encoder) con lo cual en vez de medir posición, se mediría velocidad $\omega_m(t)$. Se procede con el cálculo siguiendo esta nueva premisa.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \lambda'_m}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix},$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3J_{eq}(P_p \lambda'_m)^2 + 2L_q b_{eq}^2}{2J_{eq}^2 L_q} & \frac{-3P_p \lambda'_m (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s)}{2J_{eq}^2 L_q} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$\det(O) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq}} \\ 0 & \frac{-3J_{eq}(P_p \lambda'_m)^2 + 2L_q b_{eq}^2}{2J_{eq}^2 L_q} & \frac{-3P_p \lambda'_m (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s)}{2J_{eq}^2 L_q} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (95)$$

Observando los resultados obtenidos, se puede concluir que el rango de la matriz de observabilidad es de orden menor a 3, tiene determinante igual 0 para cualquier configuración de parámetros de la planta, por lo que el estado de la variable $\theta_m(t)$ no será observable en el vector de estados y por lo tanto, el sistema no será completamente observable desde la medición de la velocidad $\omega_m(t)$.

Cabe destacar que, en ambos casos, si se considera el sistema LTI aumentado con sistemas autónomos desacoplados, estados como $i_{ds}(t)$, $i_{0s}(t)$ y $T_s(t)$ no son observables desde la salida $\theta_m(t)$, por lo que se podría decir que el sistema es parcialmente observable desde $\theta_m(t)$

4.1.5. Análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado

Se procede a realizar el análisis de la controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde la entrada manipulada $v_{qs}^r(t)$, sin considerar la perturbación de la carga mecánica. Para ello, se calcula el determinante de la matriz de controlabilidad:

$$\det(\mathcal{C}) = \det \left(\begin{bmatrix} B & AB & : & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) \quad (96)$$

Donde:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq}} \\ 0 & -\frac{P_p \lambda'_m}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq} L_q} \\ -\frac{R_s}{L_q^2} \end{bmatrix}, \quad A^2 \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda'_m}{J_{eq} L_q} \\ -\frac{3P_p \lambda'_m (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s)}{2J_{eq}^2 L_q^2} \\ -\frac{3L_q P_p^2 (\lambda'_m)^2 + 2J_{eq} R_s^2}{2J_{eq} L_q^3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\det(\mathcal{C}) = \det \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m'^r}{J_{eq} L_q} \\ 0 & \frac{3}{2} \frac{P_p \lambda_m'^r}{J_{eq} L_q} & -\frac{3P_p \lambda_m'^r (L_q b_{eq} + J_{eq} R_s)}{2J_{eq}^2 L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & -\frac{3L_q P_p^2 (\lambda_m'^r)^2 + 2J_{eq} R_s^2}{2J_{eq} L_q^3} \end{bmatrix} \right) = -\frac{9P_p^2 (\lambda_m'^r)^2}{4J_{eq}^2 L_q^3} \quad (97)$$

El determinante de la matriz \mathcal{C} es distinto de 0, por lo que el rango de la matriz es de 3 y por lo tanto el sistema es completamente controlable desde la entrada de control $v_{qs}^r(t)$. Se hace el mismo comentario que con la matriz de observabilidad, ya que no es posible controlar $i_{ds}(t)$ a menos de que se consideren otras entradas de control, como por ejemplo $v_{ds}^{r*}(t) \neq 0$ de la Ecuación (76).

4.1.6. Simulación dinámica en el dominio del tiempo

En esta sección se hará una comparación entre el modelo NL completo desacoplado con ley de control NL (Figura 14) y el modelo LTI equivalente aumentado (Figura 15).

4.1.6.a Respuesta del estado interno a pulso de consigna tensión de estator en eje q

Para realizar esto, se estableció un pulso de consigna de tensión, de amplitud $v_{qs}^{r*}(t) = 19.596V_{cc}$, superpuesto con un doble pulso de torque de carga, de amplitud $T_l(t) = \pm 6.28Nm$, según se muestra en la Figura 35. La temperatura ambiente es de 20°C.

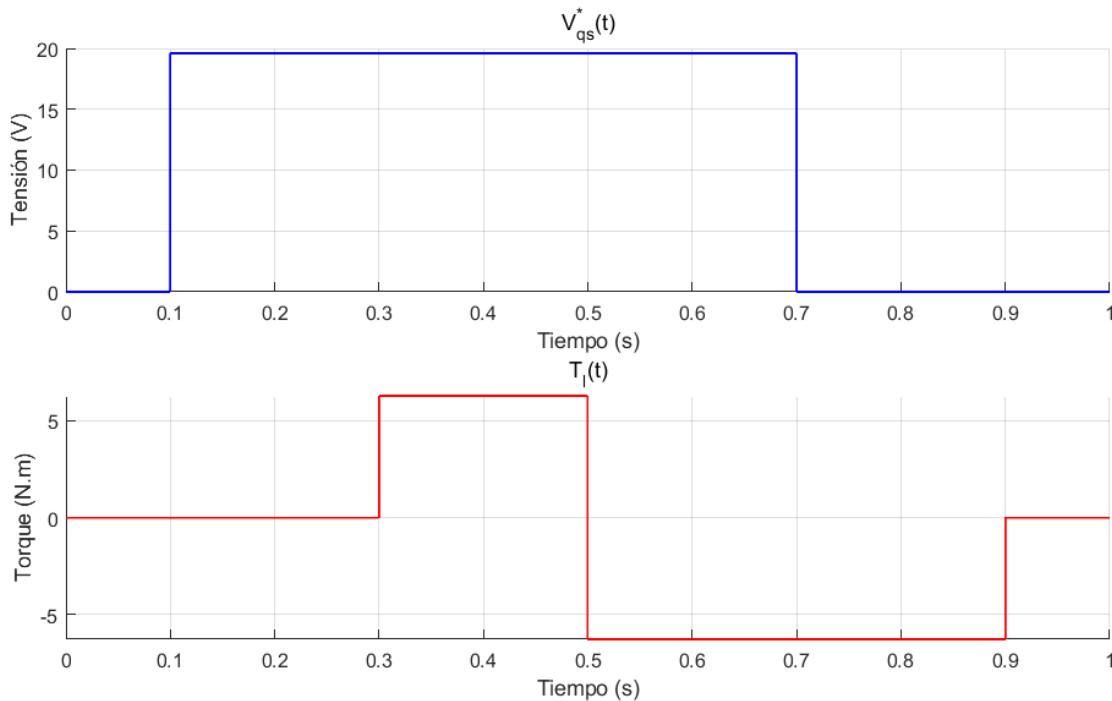


Figura 35: Pulso consigna de $v_{qs}^{r*}(t)$ (arriba) y doble pulso de torque de carga $T_l(t)$ (abajo).

A partir de esto, se muestra la evolución de las variables (corrientes y tensiones) en el tiempo, en el sistema de coordenadas abc y qd0. Las Figuras 40, 41 y 42 muestran una comparativa entre las variables del modelo global NL y el modelo LTI aumentado.

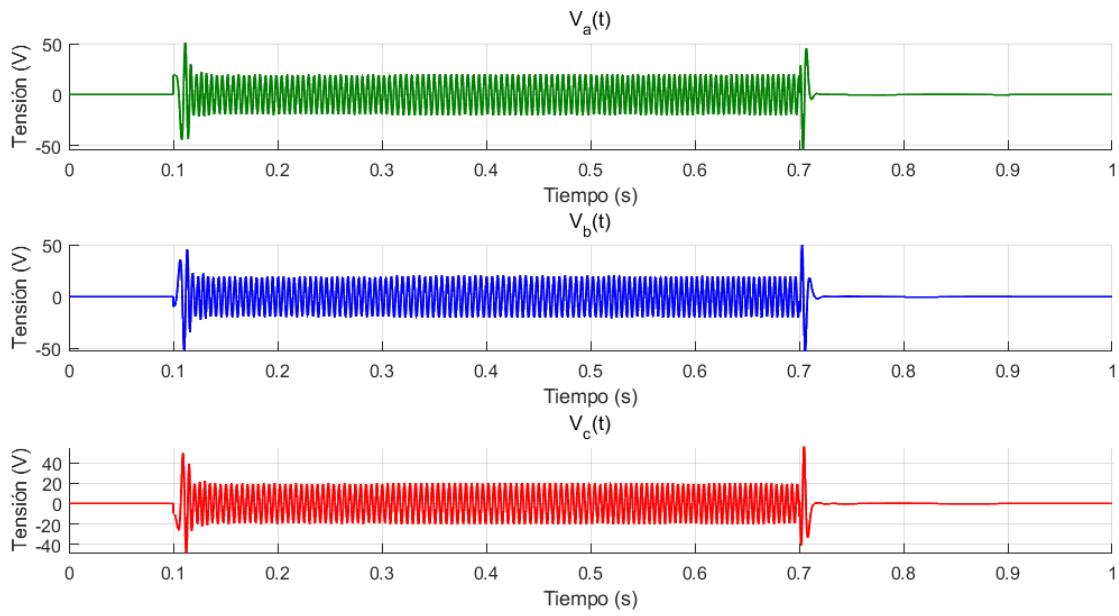


Figura 36: Tensiones del sistema LTI equivalente aumentado (coordenadas abc).

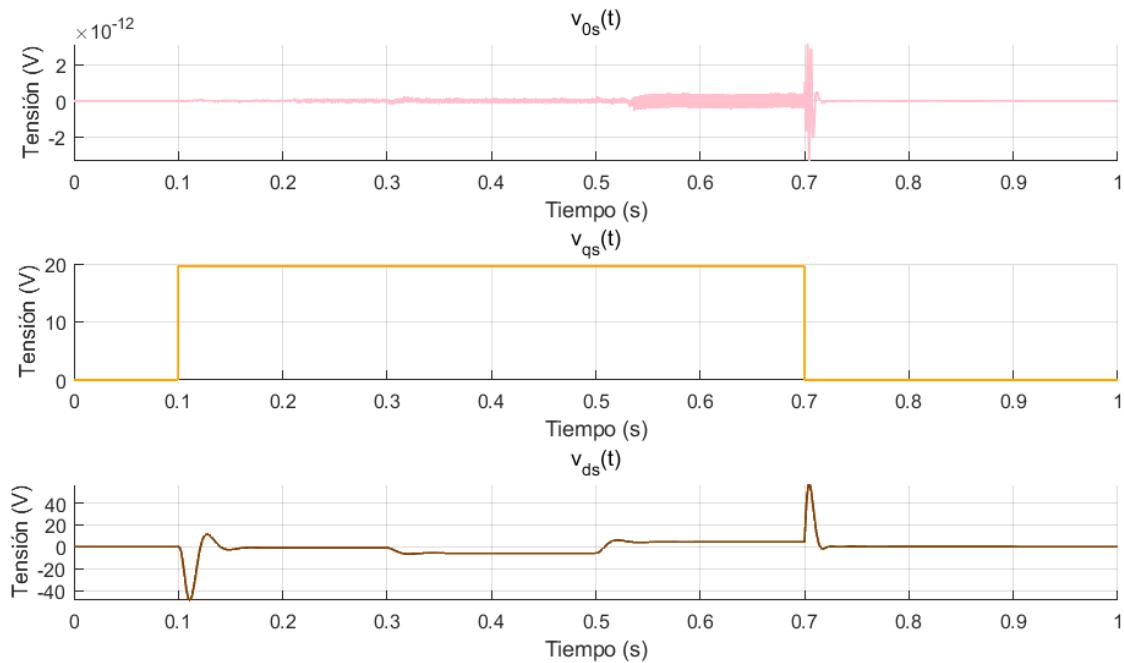


Figura 37: Tensiones del sistema global NL (coordenadas qd0).

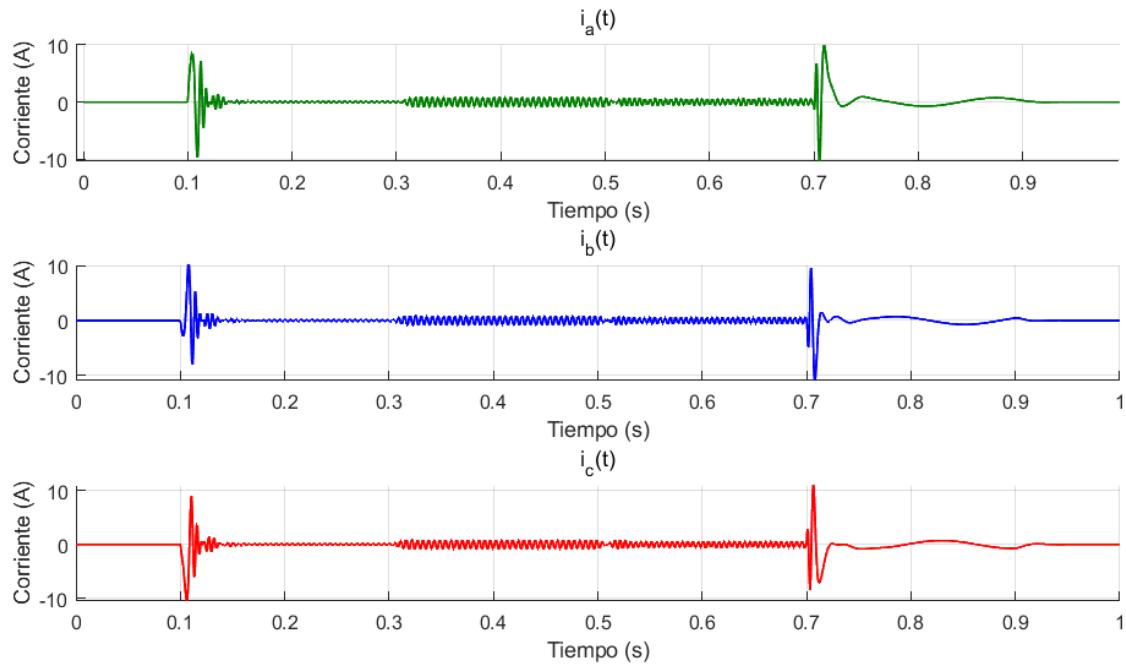


Figura 38: Corrientes del sistema global NL (coordenadas abc).

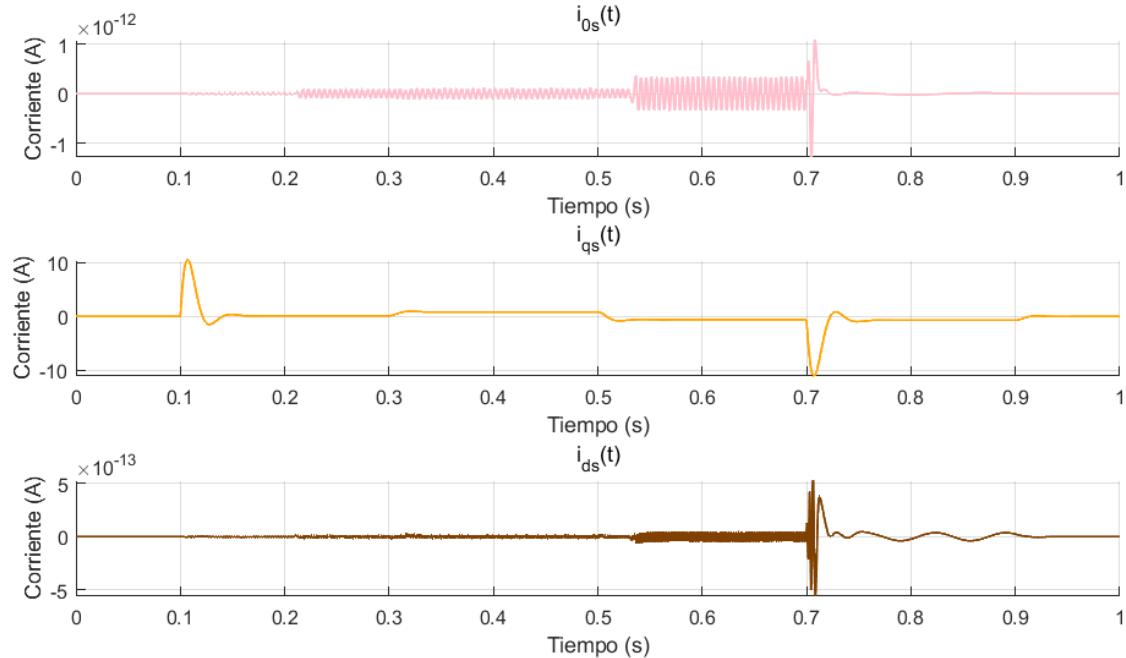


Figura 39: Corrientes del sistema global NL (coordenadas qd0).

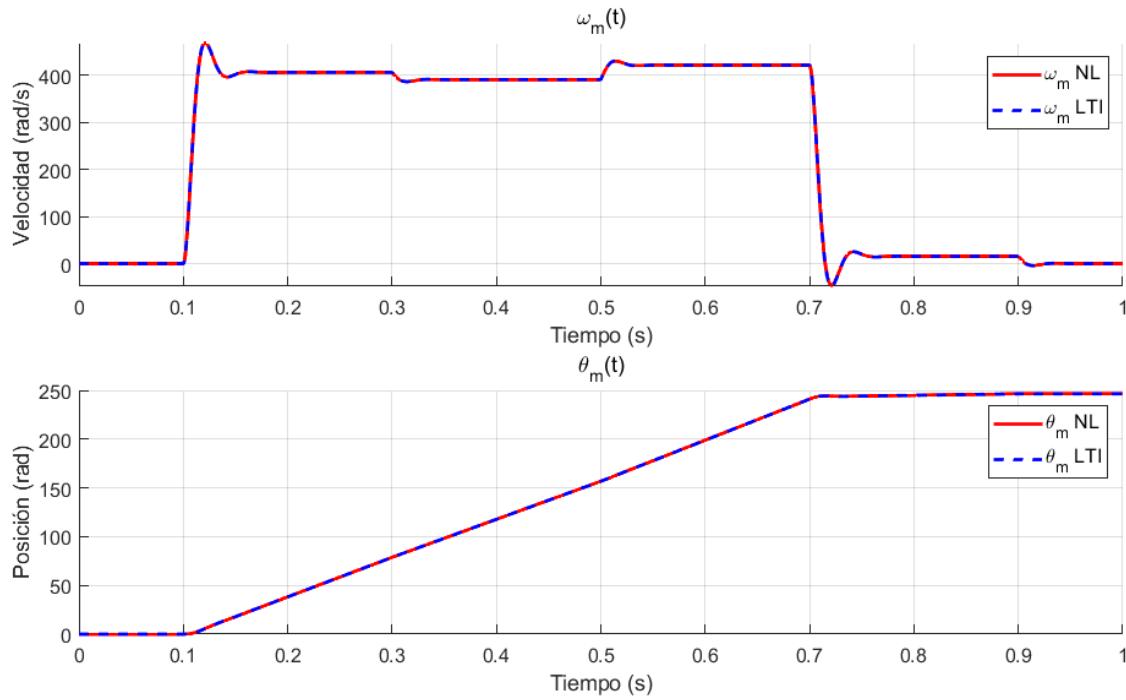


Figura 40: Comparativa de la evolución temporal de las variables $\omega_m(t)$ y $\theta_m(t)$.

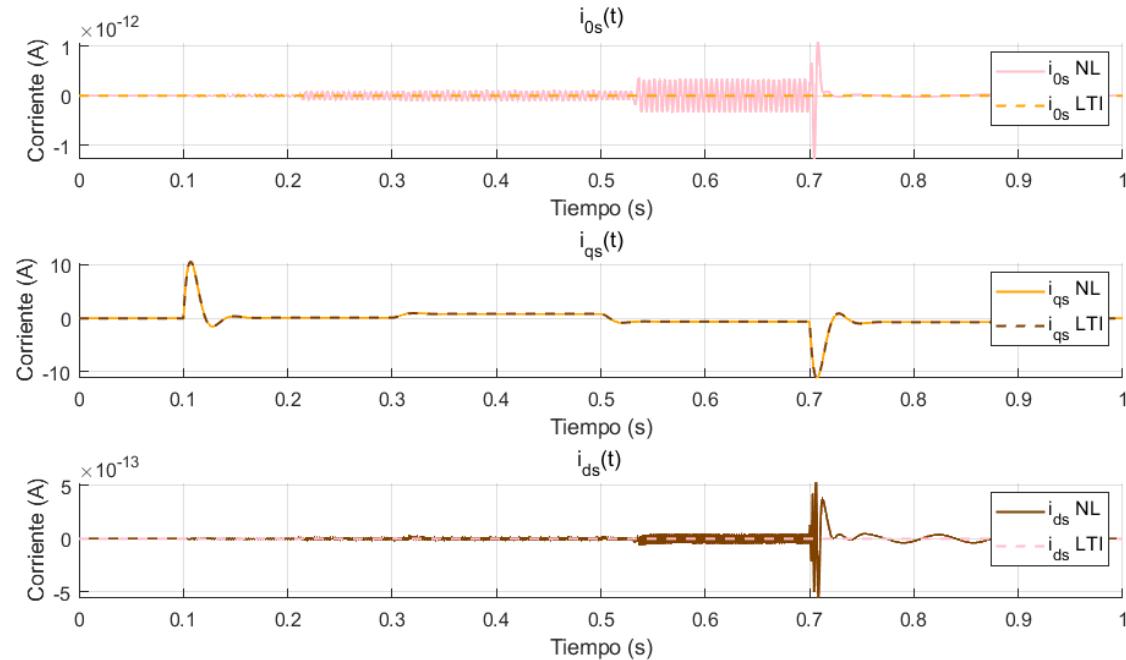


Figura 41: Comparativa de la evolución temporal de las variables $i_{qs}(t)$, $i_{ds}(t)$ y $i_{0s}(t)$.

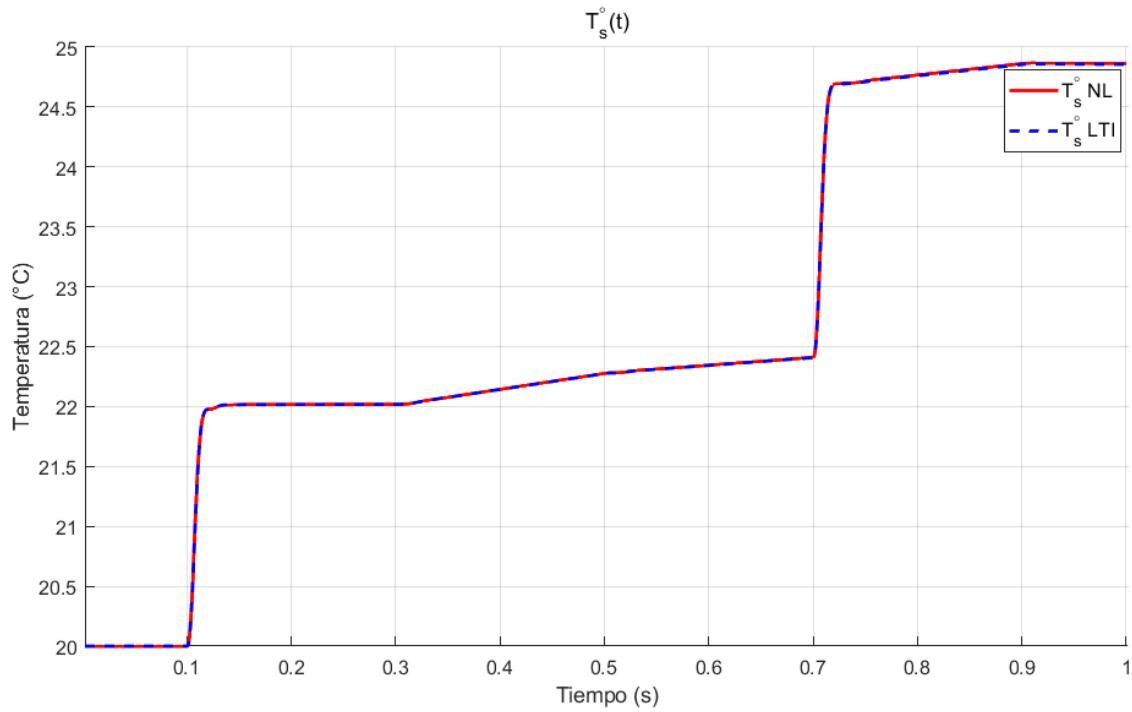


Figura 42: Comparativa de la evolución temporal de la variable $T_s(t)$

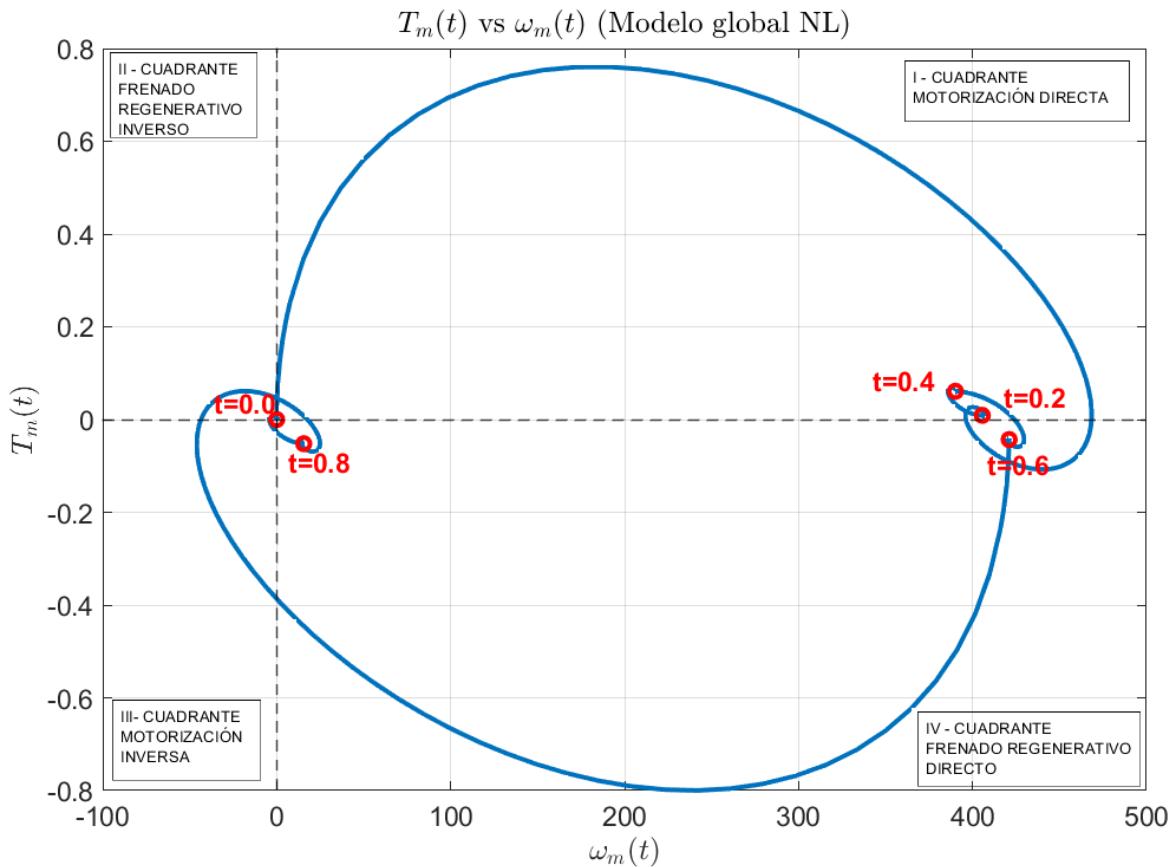


Figura 43: Curva paramétrica $T_m(t)$ vs $\omega_m(t)$.

Comparativamente, los modelos se desempeñan de manera prácticamente indistinguible. El gráfico de comparación de la variable $T_s(t)$ muestra que no hay mucha diferencia entre tomar R_s como constante a tomarla de acuerdo con su variación lineal con la temperatura como sucede en el modelo global NL, al menos para pequeñas variaciones de temperatura. Como detalle a remarcar, se destaca que existen valores tanto de corrientes como de tensiones (en sistema de coordenadas abc) que se encuentran por fuera de los límites aceptados como máximos por la máquina, llegando a valores pico como 10A para las corrientes y entre 50 y 60V para las tensiones.

Al observar Figura 43 y Figura 44, también es evidente concluir que durante este pequeño ciclo de trabajo y en el mayor tiempo del mismo, la máquina funcionó tanto como motor (motorización en directo), que como generador (freno regenerativo en directo). La Figura 44 muestra la evolución temporal del torque electromagnético, que tiene la misma forma que la de la corriente $i_{qs}^r(t)$ multiplicada por un factor de escalamiento.

En Figura 45 se puede ver la evolución del ángulo de desfase que existe entre la velocidad del campo electromagnético de la máquina (estator) y la del rotor ($\delta(t) = \theta_{ev}(t) - \theta_r(t)$). Se calculó de la forma que aparece en la Ecuación (98) (razonada a partir de la teoría de la máquina síncrona de [3]), teniendo en cuenta que el ángulo eléctrico del campo electromagnético del estator es el ángulo que barre el voltaje de fase, así como el ángulo del rotor es el ángulo que barre el voltaje inducido en la fase.

$$\delta(t) = \arctan \frac{v_{qs}^r(t)}{v_{ds}^r(t)} - \arctan \frac{E_{qs}^r(t)}{E_{ds}^r(t)} \quad (98)$$

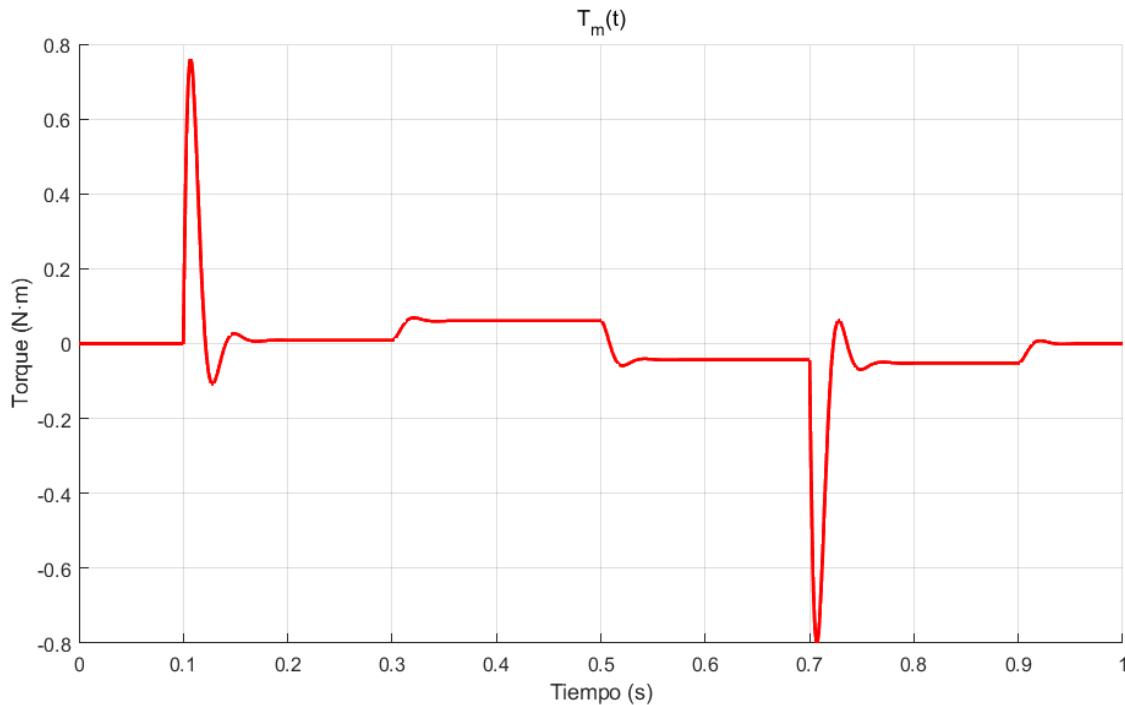


Figura 44: Torque electromagnético $T_m(t)$.

Considerando que los términos de los voltajes inducidos generados son:

$$\begin{aligned} E_{qs}^r(t) &= P_p \omega_m(t) [L_d i_{ds}^r(t) + \lambda_m^r] \\ E_{ds}^r(t) &= P_p L_q \omega_m(t) i_{qs}^r(t) \end{aligned} \quad (99)$$

En primera instancia, se hace notar que el sistema incluso funcionando sin cargas aplicadas ($t_1 = 0.1s$ hasta $t_3 = 0.3s$), tiene un pequeño desfase (retraso del rotor) debido a una 'carga resistente' inherente de la no idealidad del sistema tal como por ejemplo podría considerarse a la fricción interna del mismo. En la Figura 43, en estado estacionario ($t_2 = 0.2s$), el punto de operación se ubica en el primer cuadrante, muy poco por encima del eje $\omega_m(t)$.

Luego, se pueden observar cuatro principales alteraciones a esta condición anterior. La primera en la cual se le agrega un torque de carga resistente ($t_3 = 0.3s$), y por esto se genera un desfase positivo (rotor retrasado, \mathbf{E} está en retraso con respecto a \mathbf{V}) entre el rotor y el campo electromagnético del estator. Esto genera una motorización, pues el motor aumenta su torque para no perder la velocidad de sincronismo ante una carga que lo intenta frenar, lo que hace que sobre la curva paramétrica de la Figura 43, en estado estacionario ($t_4 = 0.4s$), el punto de operación se ubique en el primer cuadrante.

La segunda alteración ($t_5 = 0.5s$) se da cuando éste torque pasa de ser resistente a impulsor, por lo que el ángulo se vuelve negativo indicando que el rotor se ha adelantado respecto al campo electromagnético del estator. El motor genera un torque negativo (comienza a frenar) para mantener el sincronismo, pues ahora la carga tiende a acelerar el rotor, ubicándose ahora en el cuarto cuadrante ($t_6 = 0.6s$). Se observan pequeños transitorios, consecuencia inmediata de los repentinos cambios en el sistema, pero que se estabilizan rápidamente logrando recuperar el sincronismo en la máquina.

La tercera de estas grandes alteraciones se observa cuando se realiza la desconexión de la tensión en el estator ($t_7 = 0.7s$), lo cual deja al rotor a que se comporte según la carga le indique, convirtiendo al motor completamente en un generador. En la curva paramétrica de torque vs velocidad, se ubica

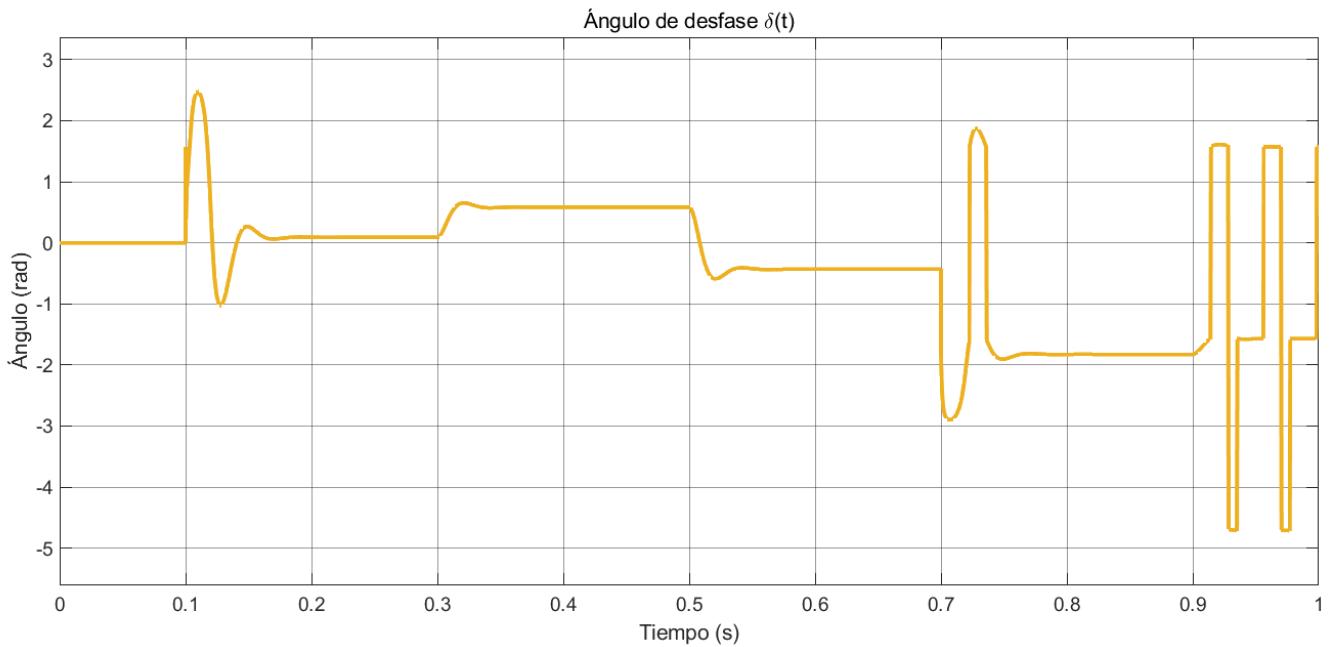


Figura 45: Evolución del ángulo de desfase $\delta(t)$ en el tiempo.

aún en el cuarto cuadrante, pero el transitorio entre t_7 y t_8 ubica a la máquina en puntos de operaciones transitorios que atraviesan el segundo y tercer cuadrante.

Por último, cuando la carga cesa en $t_9 = 0.9s$, la máquina se posiciona en el origen de coordenadas en la curva paramétrica como al inicio. La gráfica de $\delta(t)$ comienza a tener saltos entre $-\frac{3\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, debido a que los denominadores de la Ecuación (98) tienden a 0, lo que hace que \mathbf{E} fluctúe entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, y \mathbf{V} entre 0 y $-\pi$, todo esto gracias a que la función atan2 produce descontinuidades si el denominador tiende a 0 y si además hay cambios de signo, como es el caso.

Se destaca también que ninguna de estas variaciones (analizando en el tiempo, sin tener en cuenta pequeños transitorios) afecta a la velocidad del rotor, en el sentido que es siempre la de sincronismo, pese a encontrarse adelantado o retrasado el rotor, ya que frente a cambios, el motor acelera o desacelera para mantenerla. Pero debido a que el motor no está conectado a una fuente rígida, como una red de frecuencia física, sino a un modulador que recibe consignas de un controlador primitivo, la velocidad no se mantiene estrictamente constante. Esto se pudo haber previsto observando la Ecuación (83), donde se puede ver aplicando el teorema del valor final, la velocidad tiene un valor de estado estacionario diferente de cero.

Como se mencionó anteriormente, el torque electromagnético es proporcional a la corriente $i_{qs}^r(t)$. En la Figura 46 se puede observar en régimen cuasiestacionario la relación de linealidad entre el torque $T_m(t)$ y la corriente $i_{qs}^r(t)$ para distintos valores de $i_{ds}^r(t)$.

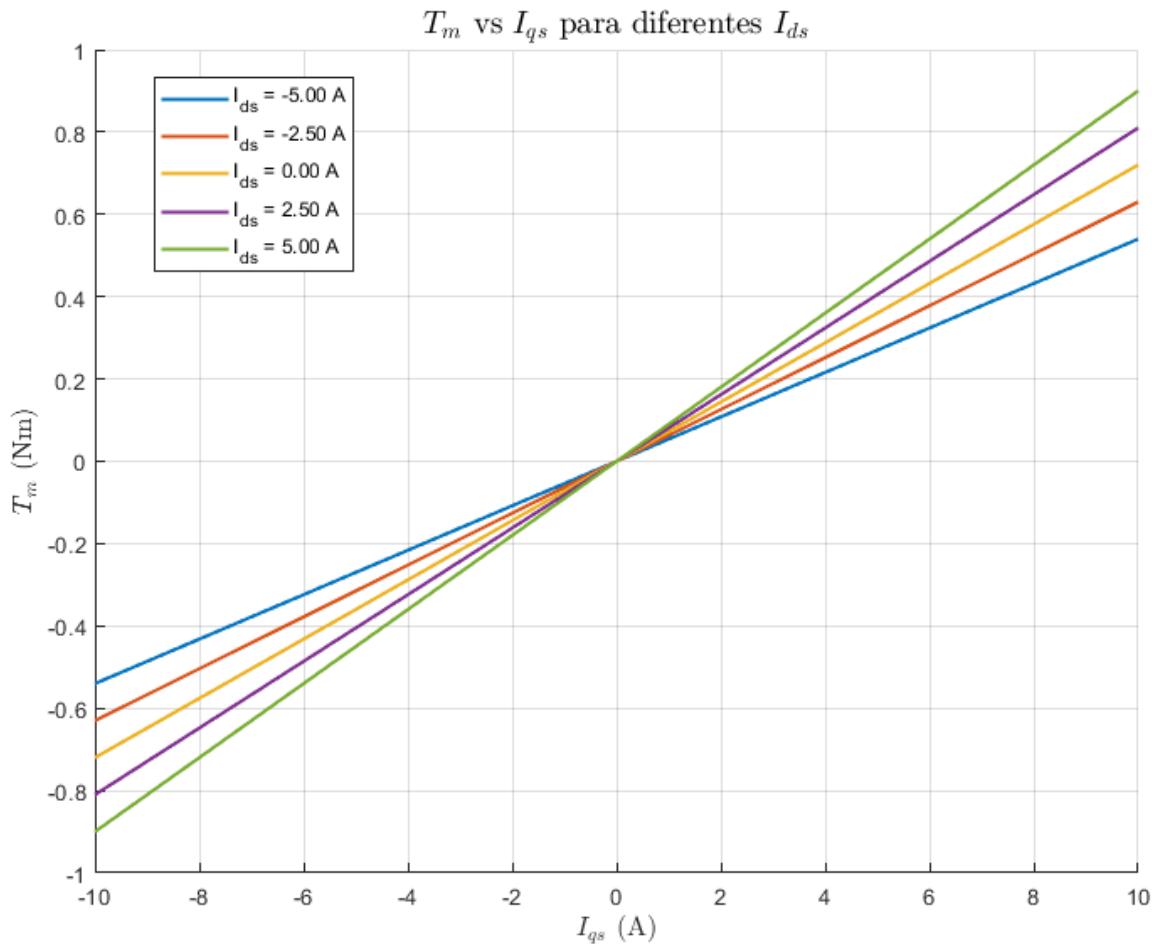


Figura 46: Curvas cuasiestacionarias de torque T_m contra corriente I_{qs}

4.1.6.b Determinación de la velocidad y corriente final de establecimiento

Para cada transitorio, se realiza la recolección de datos clave para caracterizar el comportamiento dinámico del sistema. Los parámetros evaluados son:

- **Tiempo de crecimiento:** Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el intervalo del 10 % al 90 % del cambio entre los valores inicial y final.
- **Tiempo de establecimiento:** Es el tiempo que tarda el sistema en que sus transitorios decaigan y permanezca dentro de un margen de $\pm 1\%$ alrededor del valor final.
- **Sobrepico:** Es la máxima cantidad en que el sistema supera su valor final, dividido por dicho valor final, y se expresa como un porcentaje.
- **Tiempo de pico:** Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar el punto de máximo sobrepico.

Con esta información, se confecciona la Tabla 3, que resume estos parámetros y permite analizar la respuesta dinámica del sistema.

Analizando los valores obtenidos y comparando, es posible realizar algunas conclusiones. En primer lugar se puede observar que el cambio del tensión $v_{qs}^{r*}(t)$ afecta de manera más significativa

VELOCIDAD	0.1s	0.3s	0.5s	0.7s	0.9s
Valor final de establecimiento [rad/s]	405.6	385.0	424.7	19.81	0.000
Tiempo de crecimiento [ms]	9.442	-	5.579	-	5.476
Tiempo de decrecimiento [ms]	-	5.469	-	9.454	-
Tiempo de establecimiento [ms]	45.90	43.00	43.00	45.90	43.00
Sobreíco [%]	15.70	-29.22	29.22	-15.70	-29.22
Tiempo de pico [ms]	21	14	14	20	14
CORRIENTE	0.1s	0.3s	0.5s	0.7s	0.9s
Valor final de establecimiento [mA]	123.7	845.8	-598.5	-722.2	0.000
Tiempo de crecimiento [ms]	4.147	9.531	-	-	9.555
Tiempo de decrecimiento [ms]	-	-	9.555	4.159	-
Tiempo de establecimiento [ms]	43.06	42.66	42.54	43.11	42.52
Sobreíco [%]	8449	15.70	-15.70	-8449	15.70
Tiempo de pico [ms]	7	21	21	7	21

Tabla 3: Parámetros dinámicos de velocidad y corriente en respuesta a perturbaciones.

a la velocidad. Por otro lado, se puede observar cómo el cambio en el valor del torque de carga $T_l(t)$ tiene mayor influencia sobre la corriente del motor y por consiguiente, al ser proporcional, sobre el torque del motor.

Otra conclusión es que los parámetros extraídos no dependen de la carga, excepto el valor final de establecimiento, sino de la planta y de los ceros que puedan haber en las funciones de transferencia. Se sabe que tanto la función de transferencia de la corriente como la de la velocidad tienen los mismos valores de ζ y ω_n . Sin embargo, la función de transferencia de la velocidad con la entrada $V_{qs}^r(s)$, es decir, $G_{\Omega V}(s) = \frac{\Omega_m(s)}{V_{qs}^r(s)}$, no tiene ceros y la función con respecto a $T_l(s)$ sí presenta uno. Asimismo, la función de transferencia de la corriente con respecto a la entrada $V_{qs}^r(s)$ sí presenta un cero, y con respecto a $T_l(s)$ no. El efecto de estos ceros se puede ver reflejado en todos los parámetros estudiados. Por ejemplo, la velocidad tiene tiempos de crecimiento y de pico más bajos y sobreícos mayores con entradas escalón de $T_l(s)$, en comparación con lo que sucede cuando la entrada es $V_{qs}^r(s)$. En la corriente se puede ver el mismo efecto de los ceros, con las entradas invertidas. El tiempo de establecimiento es afectado por los ceros, pero en una cantidad mucho menor. El cero que aparece en $G_{IV} = \frac{I_{qs}^r(s)}{V_{qs}^r(s)}$ está muy cerca del origen, lo que provoca que, gracias a una propiedad bloqueante de los ceros [2], se anulen las componentes de baja frecuencia de la respuesta, lo que hace que la diferencia entre el valor de estado estacionario y el valor que tenía la corriente previo a la aplicación de la entrada sea casi nula (observar Figura 44 en $t = 0.1s$ y $t = 0.7s$).

4.1.6.c Comparativa del comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ para distintos valores de $i_{ds}^r(0)$

A continuación se muestran las respuestas del comportamiento transitorio de $i_{ds}^r(t)$, para las condiciones iniciales de $i_{ds}^r(0) = 0A$ (Figura 41), $i_{ds}^r(0) = -0.5A$ y $i_{ds}^r(0) = 0.5A$ (Figuras 47 y 48)

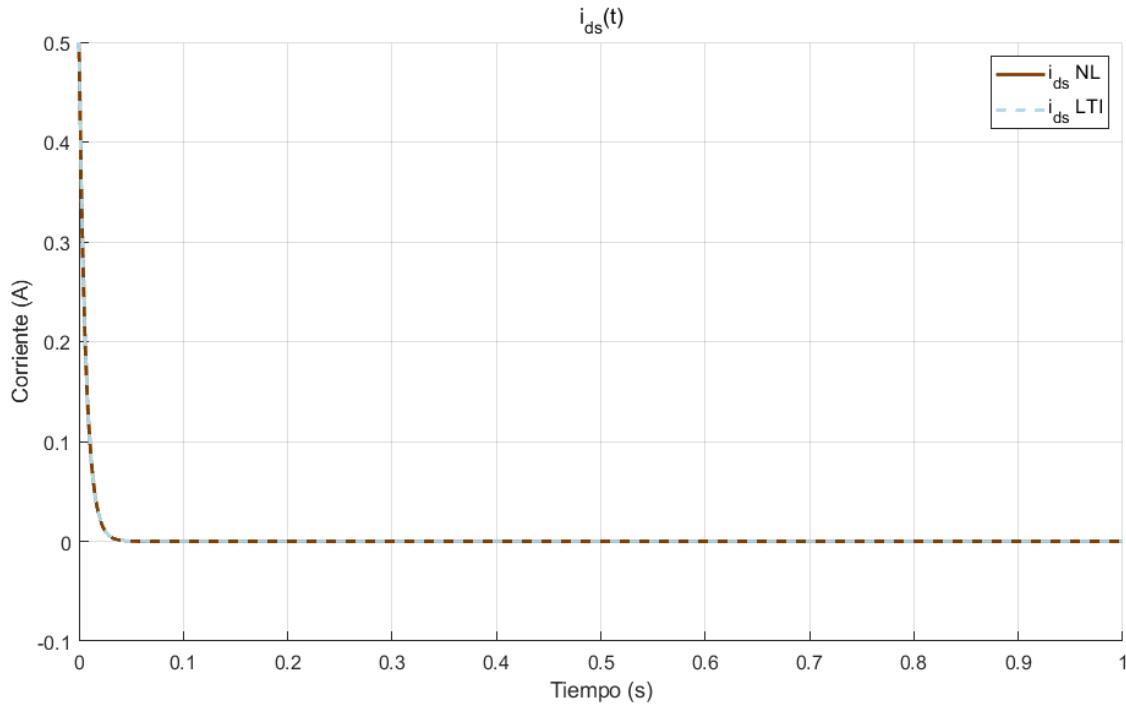


Figura 47: Comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ para $i_{ds}^r(0) = +0.5A$.

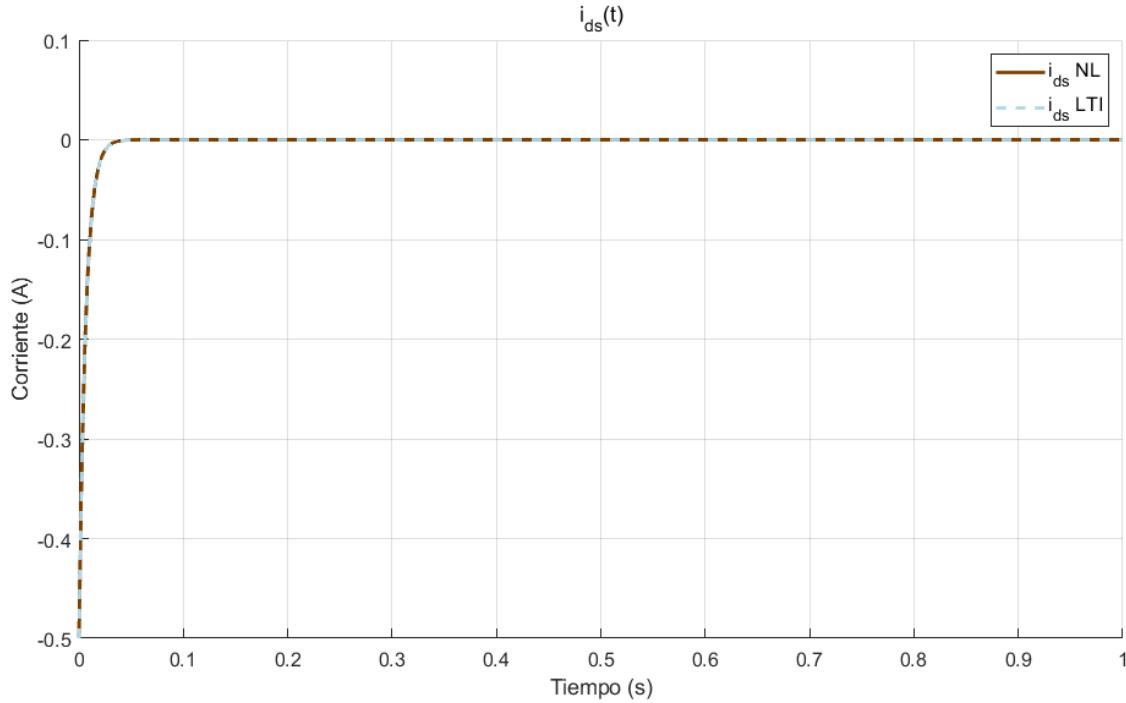


Figura 48: Comportamiento de $i_{ds}^r(t)$ para $i_{ds}^r(0) = -0.5A$.

Una vez más, se corrobora que la diferencia en la respuesta de $i_{ds}^r(t)$ es indistinguible entre los dos modelos. Además, la respuesta de las demás variables del sistema se mantiene invariante,

demonstrando el insignificante efecto de $i_{ds}^r(0) \neq 0A$ en los sistemas. Esto se debe al desacoplamiento que se hizo anteriormente en el modelo NL, utilizando leyes de control no lineal.

4.1.6.d Agregado de consigna de tensión en eje d (Field Forcing/Weakening a lazo abierto)

Se procede a agregar una consigna de tensión $v_{ds}^{r*}(t)$ y observar su efecto. Sumado a la restricción o ley de control no lineal, se propone una entrada escalón en $v_{ds}^{r*}(t = 0.5s) = \pm 1.9596V_{cc}$.

En las gráficas del sistema NL (Figura 50 y Figura 51) se puede apreciar cómo es que varía la respuesta de velocidad $\omega_m(t)$ y torque motor $T_m(t)$, al realizar el reforzamiento y debilitamiento del campo correspondiente. En la Figura 50 se puede observar que al fortalecer el campo ($v_{ds}^r(t) > 0$), la velocidad motor disminuye y de la Figura 51 se puede ver que el torque aumenta. Por el contrario y de las mismas gráficas, se puede concluir que al debilitar el campo ($v_{ds}^r(t) < 0$) la velocidad aumenta pero el torque disminuye. Sea por ejemplo el caso en $t = 0.52s$, donde existe una desaceleración pronunciada, se puede observar cómo aquel sistema con reforzamiento del campo, responde a una menor velocidad, pero con una respuesta de torque mucho más negativa (más marcada) que en los otros casos.

Respecto al sistema LTI (Figura 49), no se produce una diferencia en $\omega_m(t)$ (y por lo tanto tampoco en $T_m(t)$), debido a que, en el modelo, no se contempla la influencia de $i_{ds}^r(t)$ sobre el torque electromagnético, y por consiguiente tampoco sobre la velocidad. No es posible aplicar la técnica de Field Forcing/Weakening en este modelo.

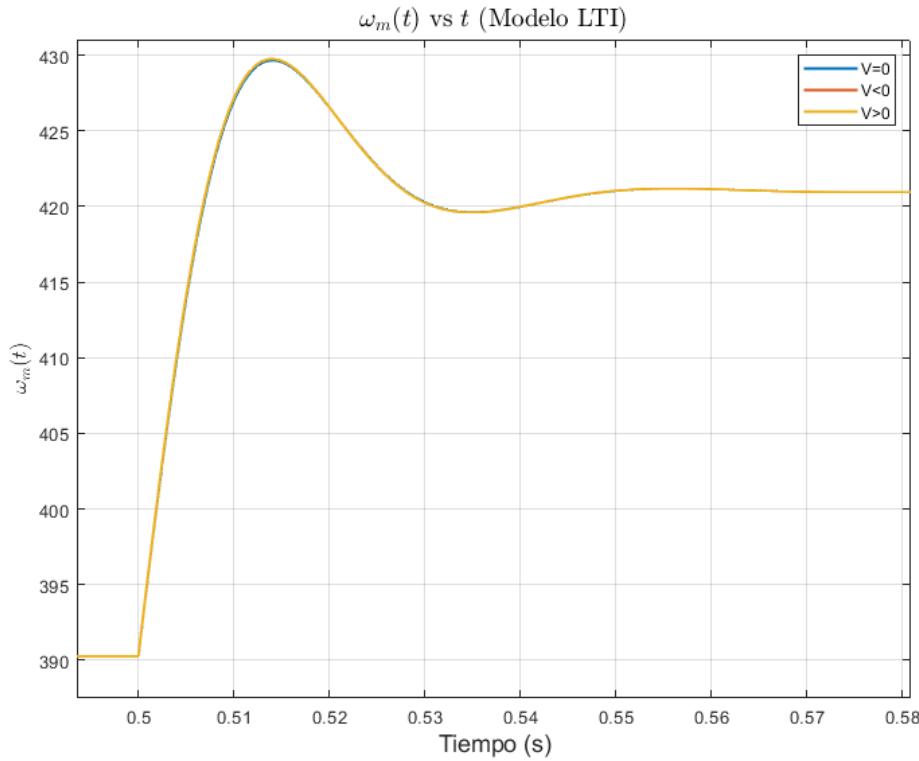


Figura 49: Comportamiento de $\omega_m(t)$ debido a la variación de $v_{ds}^r(t)$ (modelo LTI).

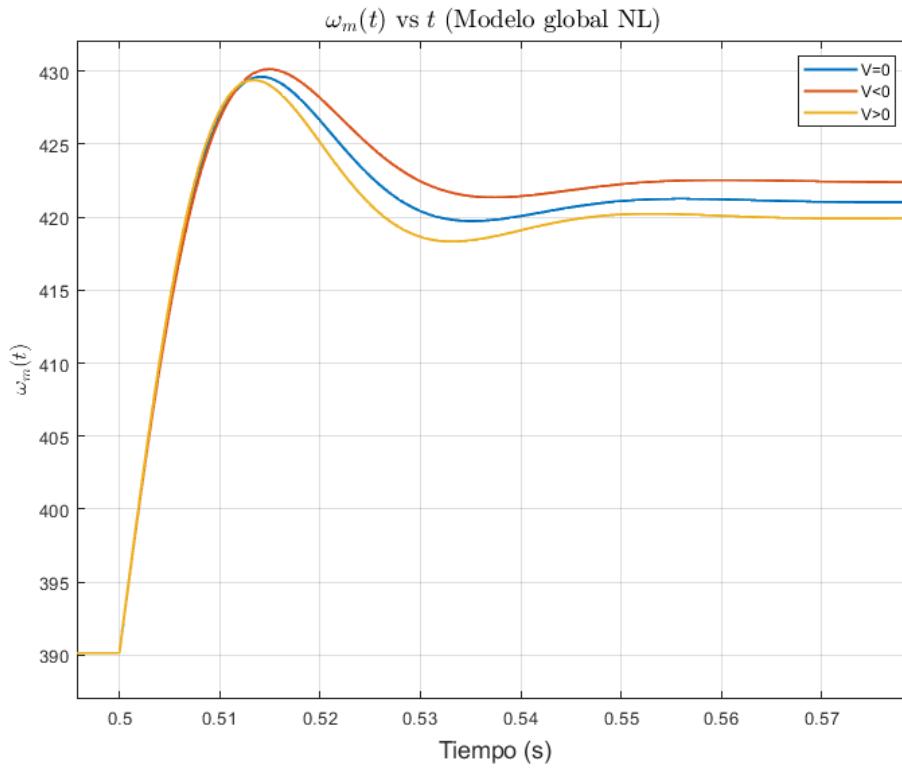


Figura 50: Comportamiento de $\omega_m(t)$ debido a la variación de $v_{ds}^r(t)$ (modelo NL).

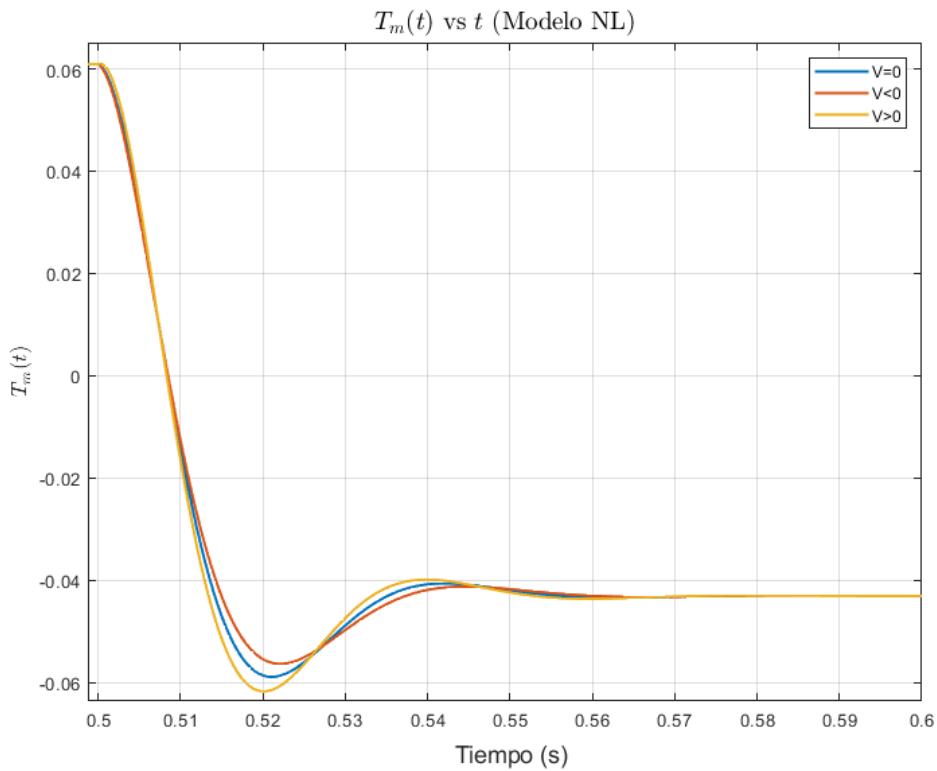


Figura 51: Comportamiento de $T_m(t)$ debido a la variación de $v_{ds}^r(t)$ (modelo NL).

4.2. Diseño, análisis y simulación con controlador de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente (Control Vectorial)

4.2.1. Modulador de torque equivalente (controlador interno vectorial de corriente/torque)

4.2.1.a Compensación de las retroalimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada

Para realizar el desacoplamiento de las retroalimentaciones físicas naturales de estado hacia la entrada, en primer lugar se deben tomar las variables a desacoplar del modelo NL del subsistema electromagnético (Ecuaciones (38), (39) y (40)) y evaluar. A continuación se reescribe su definición:

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(T_s^\circ(t))i_{qs}^r(t)}{L_q} - \frac{P_p\omega_m(t)[\lambda_m' + L_d i_{ds}^r(t)]}{L_q} + \frac{v_{qs}^r(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(T_s^\circ(t))i_{ds}^r(t)}{L_d} + \frac{L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t)}{L_d} + \frac{v_{ds}^r(t)}{L_d} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = -\frac{R_s(T_s^\circ(t))i_{0s}(t)}{L_{ls}} + \frac{v_{0s}(t)}{L_{ls}} \end{cases}$$

Analizando la definición de las variables de estado del sistema NL, las cuales están compuestas de las realimentaciones físicas del sistema y las tensiones de entrada, se procede a compensar estas realimentaciones. Para ello, se proponen un esquema de consignas de tensión ($v_{qds0s}^{r*}(t)$) (controlables desde la entrada), las cuales ya cuentan con las realimentaciones compensadas:

$$\begin{aligned} v_{qs}^r(t) &= v_{qs}^{r*}(t) + R_s(T_s^\circ(t))i_{qs}^r(t) + P_p\omega_m(t)[\lambda_m' + L_d i_{ds}^r(t)] \\ v_{ds}^r(t) &= v_{ds}^{r*}(t) + R_s(T_s^\circ(t))i_{ds}^r(t) - L_q P_p \omega_m(t) i_{qs}^r(t) \\ v_{0s}(t) &= v_{0s}^*(t) + R_s(T_s^\circ(t))i_{0s}(t) \end{aligned} \quad (100)$$

Reemplazando:

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{v_{qs}^{r*}(t)}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{v_{ds}^{r*}(t)}{L_d} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{v_{0s}^*(t)}{L_{ls}} \end{cases} \quad (101)$$

A partir de estas expresiones obtenidas, se concluye que con los correctos sensores ubicados en los respectivos lugares físicos de la planta, es posible mediante las consignas de tensión adecuadas en la entrada del sistema de control, administrar acceso directo a las corrientes del sistema.

En Figura 52 se puede observar una comparativa de la evolución temporal de las variables, del modelo con ley de control complementaria y de aquel con ley de control complementaria compensada, al darle las consignas de Figura 35 al sistema. Se puede notar al analizar y comparar las variables de posición, velocidad y corriente $i_{qs}^r(t)$, la necesidad de implementar un controlador de corriente y posteriormente uno de posición para reducir estos efectos no deseados.

El diagrama de bloques del controlador parcial con las compensaciones realizadas hasta esta instancia, se puede ver en la Figura 53.

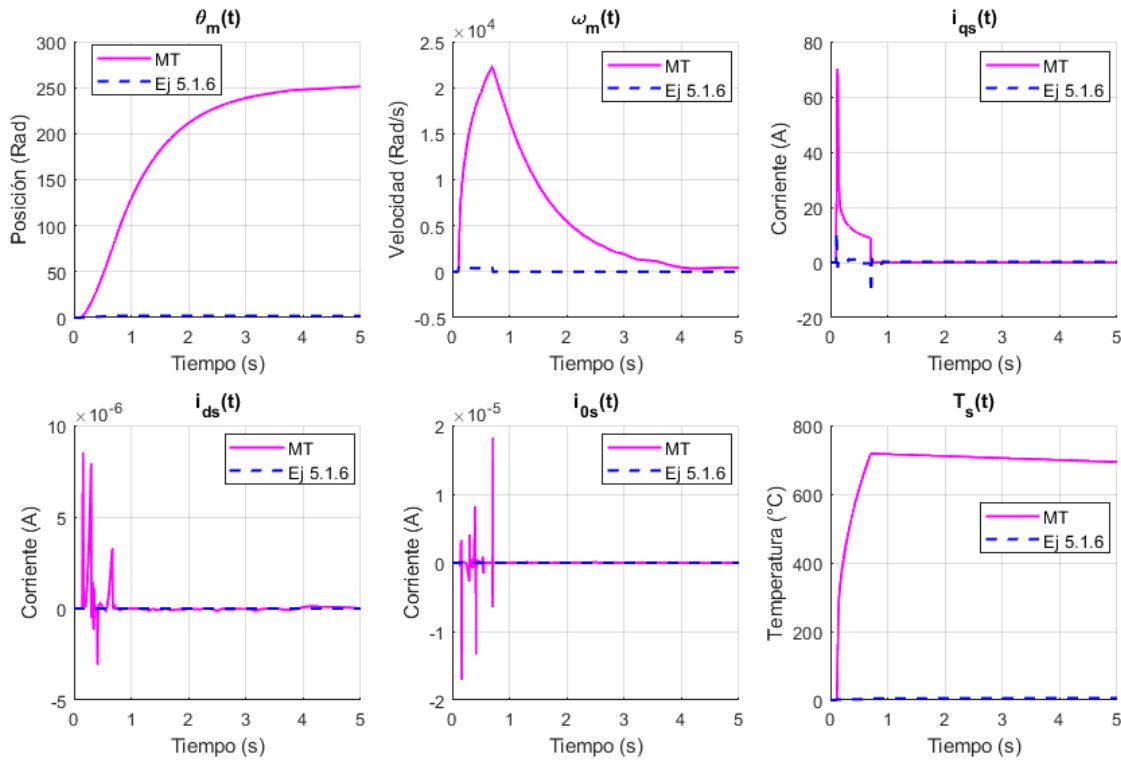


Figura 52: Comparativa de sistema con Ley de Control Complementaria Retroalimentada contra Ley de Control Complementaria.

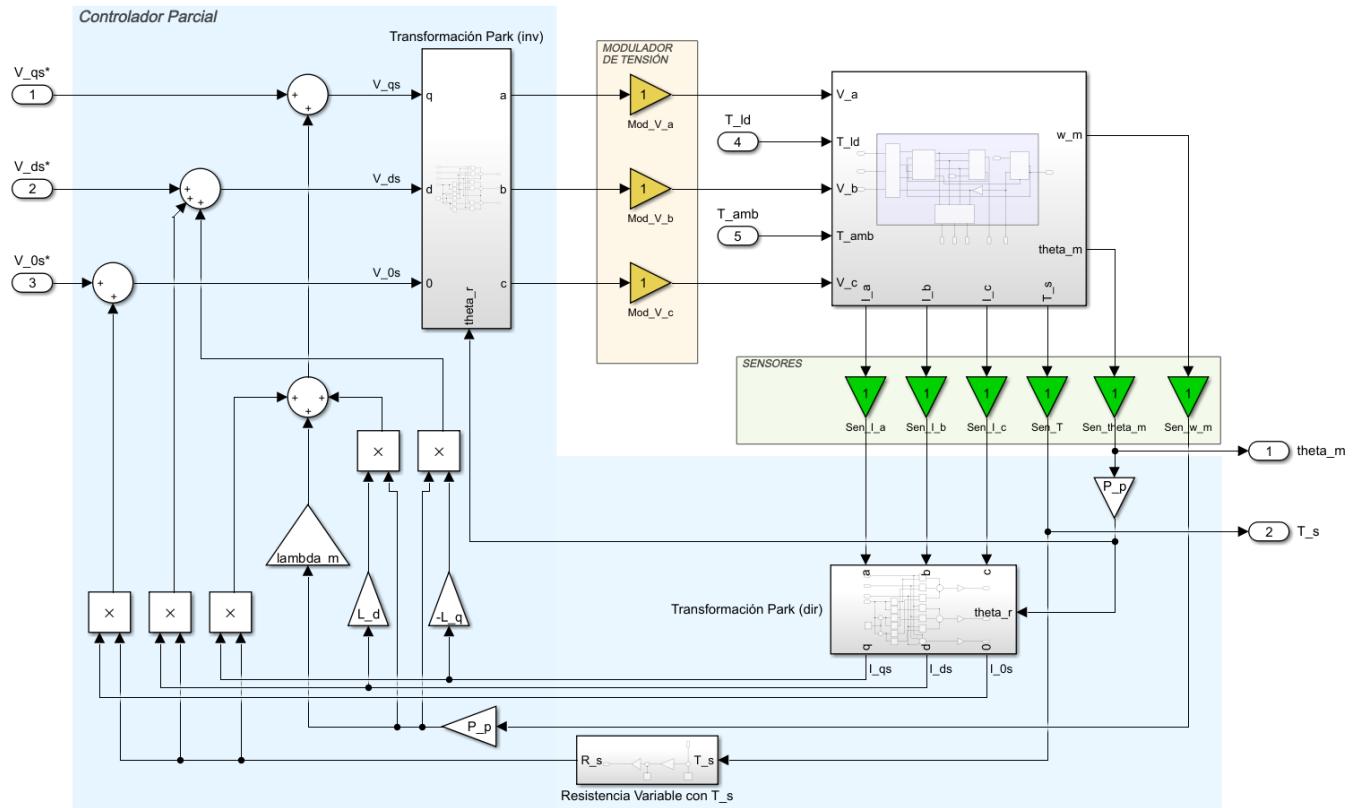


Figura 53: Controlador parcial con compensación de términos del subsistema eléctrico.

4.2.1.b Diseño de lazos de control de corrientes $i_{qd0s}^r(t)$

A continuación se desacoplan los lazos de corriente (entre sí) y se los desacopla también de la velocidad, aplicando un control proporcional solamente. La ley de control consta con un único polo en $p_i = -5000[\frac{rad}{s}]$ ($BW \cong 796Hz$) para todos los ejes. A partir de esto, se plantea:

$$\begin{aligned} v_{qs}^{r*}(t) &= R_q[i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)] \\ v_{ds}^{r*}(t) &= R_d[i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)] \\ v_{0s}^*(t) &= R_0[i_{0s}^*(t) - i_{0s}(t)] \end{aligned} \quad (102)$$

Se reemplazan las ecuaciones (102) en (101):

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{R_q[i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)]}{L_q} \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{R_d[i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)]}{L_d} \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{R_0[i_{0s}^*(t) - i_{0s}(t)]}{L_{ls}} \end{cases} \quad (103)$$

Aplicando la transformada de Laplace a (103) y armando las respectivas funciones de transferencia:

$$\begin{cases} sI_{qs}^r(s) = \frac{R_q[I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)]}{L_q} \Rightarrow \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{L_q}{R_q}} \\ sI_{ds}^r(s) = \frac{R_d[I_{ds}^{r*}(s) - I_{ds}^r(s)]}{L_d} \Rightarrow \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^{r*}(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{L_d}{R_d}} \\ sI_{0s}(s) = \frac{R_0[I_{0s}^*(s) - I_{0s}(s)]}{L_{ls}} \Rightarrow \frac{I_{0s}(s)}{I_{0s}^*(s)} = \frac{1}{1 + s\frac{L_{ls}}{R_0}} \end{cases} \quad (104)$$

Las funciones de transferencia resultantes son de primer orden. Los polos de cada una se encuentran en $-\frac{R_i}{L_i}$. Los valores de R necesarios para ubicar los polos en $p_i = -5000[\frac{rad}{s}]$ son:

$$\begin{aligned} R_q &= 5000 \cdot L_q = 29\Omega \\ R_d &= 5000 \cdot L_d = 33\Omega \\ R_0 &= 5000 \cdot L_{ls} = 4\Omega \end{aligned} \quad (105)$$

La implementación en diagrama de bloques se puede observar en la Figura 54.

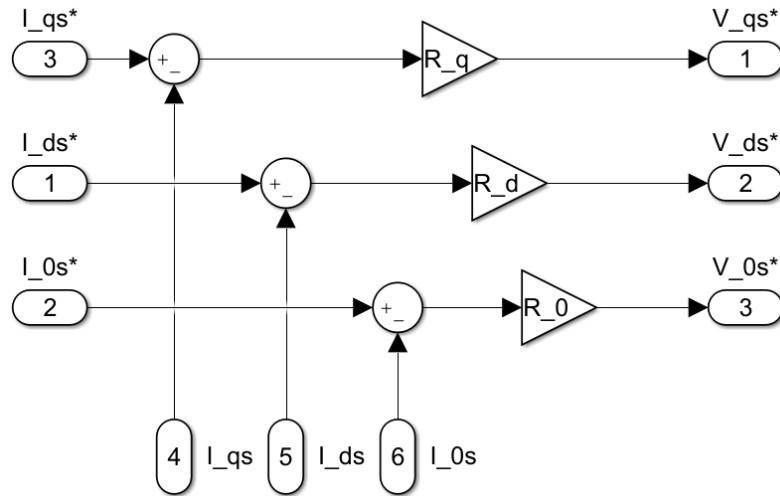


Figura 54: Lazo de control de corriente (diagrama de bloques).

4.2.1.c Incorporación de consigna de torque (nueva variable manipulada) y compensación de fricción viscosa equivalente.

Para realizar la incorporación de la consigna completa de torque y la compensación de la fricción viscosa equivalente del sistema mecánico, se predispone a realimentar al sistema con una nueva consigna. Esto permite cambiar de consignas de corriente a consignas de torque. En el punto anterior se consiguió la consigna de corriente, por lo que ahora y a partir de la expresión del torque electromagnético (Ecuación (10)) se puede obtener:

$$T_m(t) \approx \frac{3}{2} P_p [\lambda'_m + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] i_{qs}^{r*}(t) \quad (106)$$

Se coloca un símbolo \approx porque existe un pequeño intervalo de tiempo donde $i_{qs}^{r*}(t)$ no es igual a $i_{qs}^r(t)$. Luego, para compensar el término de fricción viscosa, se define:

$$T_m(t) = T_m^*(t) + b_{eq}\omega_m(t) \quad (107)$$

Reemplazando (107) en (106):

$$T_m^*(t) + b_{eq}\omega_m(t) = \frac{3}{2} P_p [\lambda'_m + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)] i_{qs}^{r*}(t) \quad (108)$$

Despejando la consigna de corriente:

$$i_{qs}^{r*}(t) = \frac{T_m^*(t) + b_{eq}\omega_m(t)}{\frac{3}{2} P_p [\lambda'_m + (L_d - L_q) i_{ds}^r(t)]} \quad (109)$$

La implementación en diagrama de bloques se puede observar en la Figura 55.

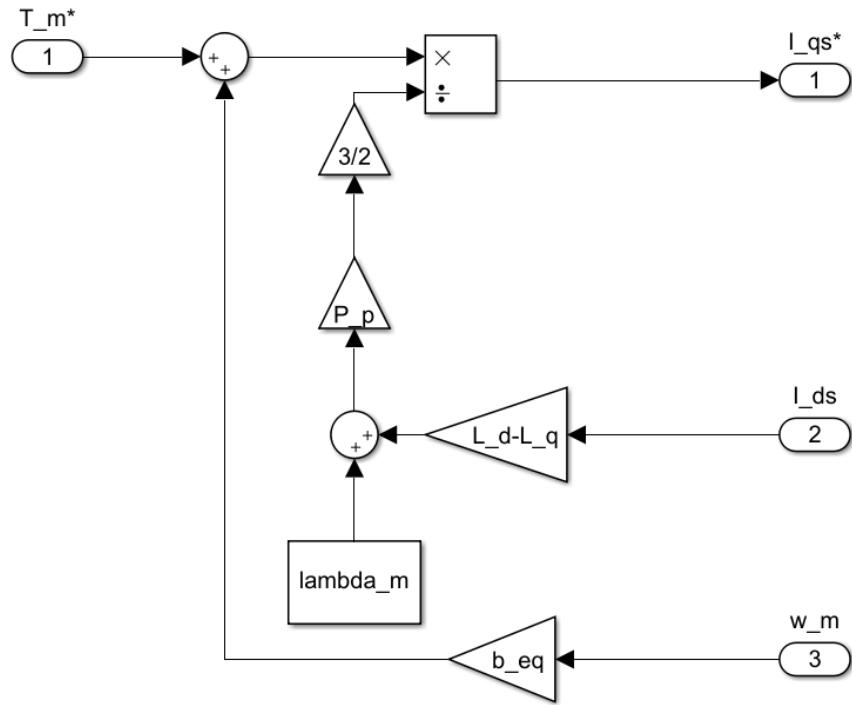


Figura 55: Lazo de control para consigna de torque (diagrama de bloques).

4.2.1.d Compensación del torque de carga por gravedad

Se define una nueva consigna de torque $T_m^{*'}(t)$ tal que:

$$T_m^*(t) = T_m^{*'}(t) + \frac{g \cdot k_l}{r} \cdot \sin\left(\frac{\theta_m}{r}\right) \quad (110)$$

Entonces, teniendo en cuenta la Ecuación (33) y la compensación previa de la fricción viscosa:

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m^{*'}(t) - \frac{T_{ld}(t)}{r} \quad (111)$$

La implementación en diagrama de bloques se puede observar en la Figura 56.

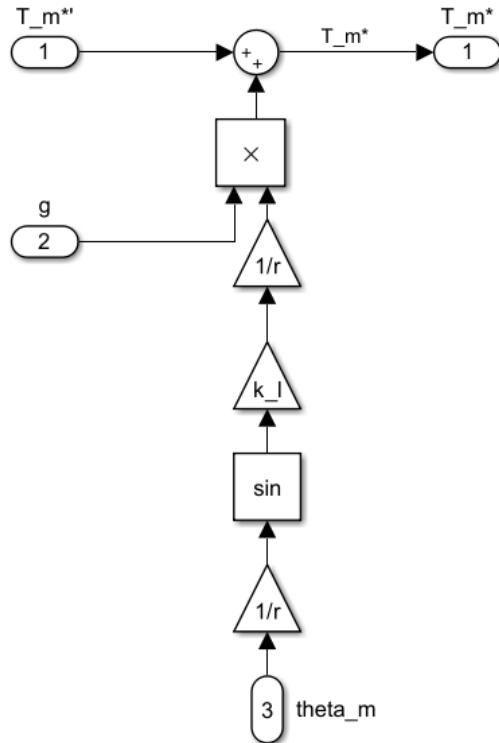


Figura 56: Lazo de compensación de la gravedad (diagrama de bloques).

Finalmente, uniendo los tres lazos de control y aplicándolos al modelo NL completo con retroalimentaciones físicas ya compensadas, se obtiene el diagrama de bloques completo del modulador de torque equivalente para el sistema (Figura 57).

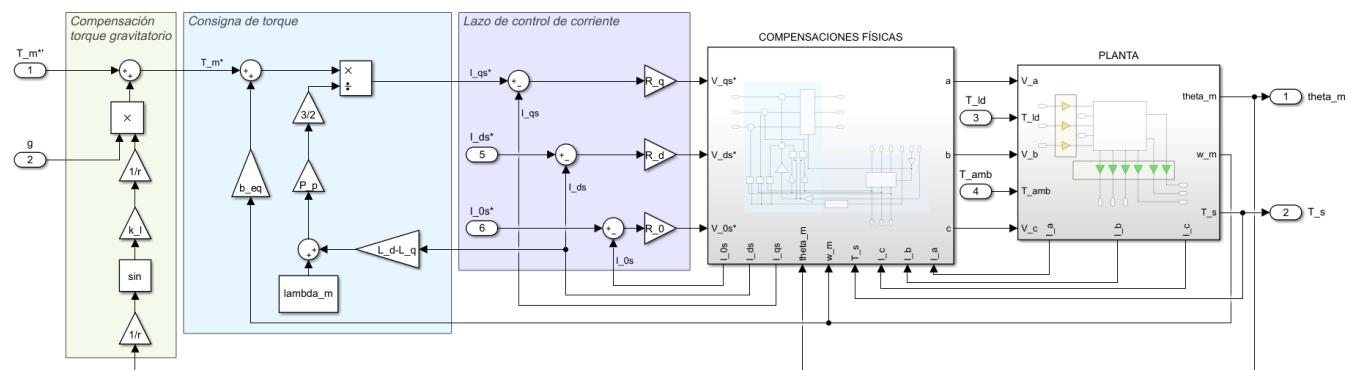


Figura 57: Diagrama de bloques del modulador de torque equivalente aplicado a modelo NL completo compensado.

Comparando el comportamiento dinámico del sistema realizado contra el modelo NL con ley de control complementaria mínima, y teniendo en cuenta que:

- Como consigna de torque ($T_m^*(t)$), se le dió una entrada escalón de 0.005 Nm que comienza en $t = 0.1s$.
- Esta comparativa se realizó contemplando una carga $T_{ld}(t) = 0 \text{ Nm}$ en ambos modelos, una temperatura ambiente de 25°C y corrientes $i_{ds}^*(t) = i_{0s}^*(t) = 0 \text{ A}$.

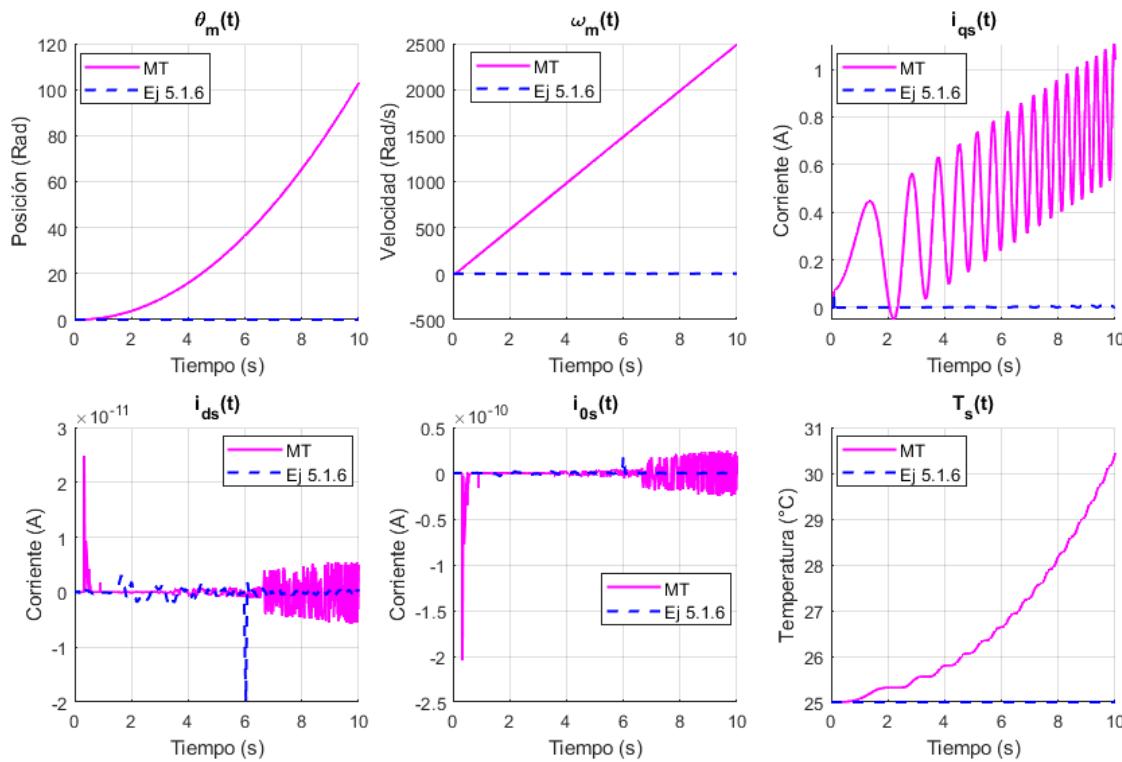


Figura 58: Comparativa entre planta con modulador de torque implementado y planta con solo leyes de control complementarias.

- Como consigna de tensión, al sistema NL con ley de control complementaria mínima, se le dió aquél mismo que ingresa en el otro sistema, luego del modulador de torque y lazo de control de corriente.

Se observa en la Figura 58 que el modulador de torque actúa correctamente respetando la consigna de torque constante, lo que implica aumentar y disminuir la corriente $i_{qs}^r(t)$ acorde a la carga gravitatoria (razón por la que aparece una componente senoidal) y a la fricción viscosa (motivo por el cual la componente senoidal se monta sobre una recta). Esto hace que se tenga un torque neto constante, por lo tanto una aceleración constante, una velocidad que varía linealmente y una posición que varía cuadráticamente.

Por otro lado, el sistema con solo leyes complementarias no logra responder correctamente, con el mismo voltaje $v_{qs}^r(t)$ que se le suministra al otro sistema. Esto ocurre porque la consigna de voltaje que se le da al sistema con LC no tiene en cuenta las compensaciones de términos del subsistema electromagnético.

4.2.2. Controlador externo de movimiento (posición/velocidad)

Como actuar directamente sobre la consigna de torque para lograr un cambio en la posición/velocidad del sistema mecánico, puede ser dificultoso y conlleva inherentemente errores de estado estacionario, se propone a continuación un controlador externo de posición tipo PID que encuentre las consignas de torque ($T_m^*(t)$) adecuadas para ingresar al modulador de torque desarrollado anteriormente.

Partiendo del planteo de la segunda Ley de Newton aplicada al sistema (111), pero ahora en el dominio de Laplace, se formula una consigna de torque que contempla aporte PID:

$$J_{eq}[s \cdot \Omega_m(s)] = T_m^{*'}(s) - \frac{T_{ld}(s)}{r} \quad (112)$$

Se propone:

$$T_m^{*'}(s) = b_a e_\omega + K_{sa} e_\theta + K_{sia} \frac{e_\theta}{s} \quad (113)$$

Con:

$$e_\theta = [\Theta_m^*(s) - \Theta_m(s)] \therefore e_\omega = s e_\theta \quad (114)$$

Reemplazando (113) en (112), teniendo en cuenta (114) y reordenando:

$$\begin{aligned} J_{eq}[s \cdot \Omega_m(s)] &= b_a e_\omega + K_{sa} e_\theta + K_{sia} \frac{e_\theta}{s} - \frac{T_{ld}(s)}{r} \\ J_{eq}[s^2 \cdot \Theta_m(s)] &= e_\theta \left(b_a s + K_{sa} + \frac{K_{sia}}{s} \right) - \frac{T_{ld}(s)}{r} \\ (J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}) \Theta_m(s) &= (b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}) \Theta_m^*(s) - \frac{s T_{ld}(s)}{r} \end{aligned}$$

$$\Theta_m(s) = \frac{b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \Theta_m^*(s) - \frac{s}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \frac{T_{ld}(s)}{r} \quad (115)$$

Expresión de la que se pueden obtener las funciones de transferencia:

$$\begin{aligned} G_\theta(s) &= \frac{\Theta_m(s)}{\Theta_m^*(s)} = \frac{b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \\ G_{T_{ld}}(s) &= \frac{\Theta_m(s)}{T_{ld}(s)} = -\frac{\frac{1}{r}s}{J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}} \end{aligned} \quad (116)$$

Luego, y contemplando $\zeta = 0.75$, $\omega_{pos} = 800 \left[\frac{rad}{s} \right]$ y los valores nominales de J_{eq} y b_{eq} , se aplica el mecanismo de sintonía serie para hallar los valores de las ganancias del controlador PID. Esto se realiza mediante la igualación de los términos de la Ecuación (117) con los mismos pero del polinomio característico obtenido (118).

$$P_{pos} = (s + \omega_{pos})(s^2 + 2\zeta\omega_{pos}s + \omega_{pos}^2) = s^3 + (2\zeta + 1)\omega_{pos}s^2 + (2\zeta + 1)\omega_{pos}^2s + \omega_{pos}^3 \quad (117)$$

$$P_{car} = s^3 + \frac{b_a}{J_{eq}}s^2 + \frac{K_{sa}}{J_{eq}}s + \frac{K_{sia}}{J_{eq}} \quad (118)$$

Igualando término a término:

$$b_a = (2\zeta + 1)\omega_{pos}J_{eq} = 0.0396 \left[\frac{Nm}{rad/s} \right] \quad (119)$$

$$K_{sa} = (2\zeta + 1)\omega_{pos}^2 J_{eq} = 31.656 \left[\frac{Nm}{rad} \right] \quad (120)$$

$$K_{sia} = \omega_{pos}^3 J_{eq} = 10130 \left[\frac{Nm}{rad \cdot s} \right] \quad (121)$$

Con $J_{eq} = 1.9785 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$. El diagrama de bloques del controlador externo de movimiento se puede ver en la Figura 59.

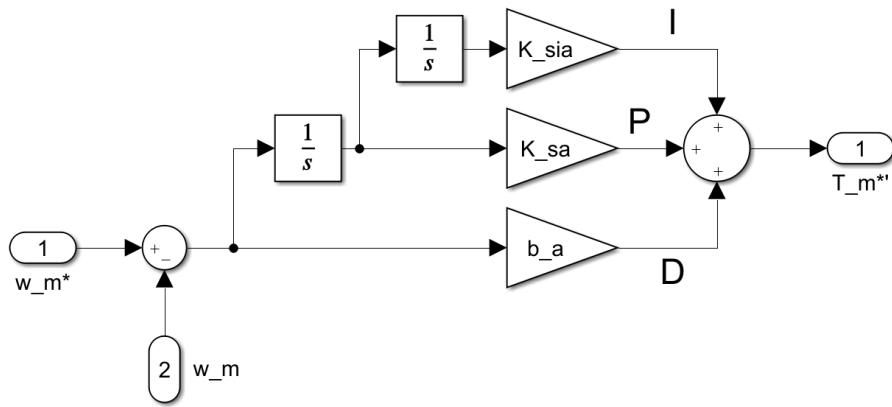


Figura 59: Controlador de posición y velocidad.

Con los valores encontrados para las ganancias del PID, se procede a calcular los polos y ceros del sistema a partir del polinomio característico (118):

$$\begin{aligned} s_1 &= -800 \\ s_2 &= -600 + 529,15i \\ s_3 &= -600 - 529,15i \end{aligned} \quad (122)$$

En la Figura 60 y Figura 61 se muestra comparativamente y en el plano complejo, la ubicación de los polos y ceros del lazo de control de corriente, los polos y ceros del controlador PID y la migración de propiedades que comprende (una vez establecidas las ganancias del controlador para J_l y b_l nominales) la variación del parámetro J_{eq} . Los polos representados con cuadrados son los polos del controlador de posición/velocidad. Los que están en cruces de colores son los de la planta, excepto la cruz negra que representa los polos del lazo de control de corriente. La variación de la posición de los polos del controlador se debe a que las constantes b_a , K_{sa} y K_{sia} son calculadas con J_l nominal (J_{eq} mínimo) y se varía J_{eq} en la Ecuación (118). Cabe destacar que no se muestra el desplazamiento de los polos al variar el parámetro b_{eq} , debido a la poca alteración que ello implica.

En cuanto a los ceros, el controlador presenta un cero en el origen y dos en el semiplano derecho (representados por rombos). Estos ceros no dependen de J_{eq} , tal como sucedía con los ceros de la planta (representados por círculos), por lo que se grafican todos en el mismo lugar. Los ceros en el lado derecho del plano complejo disminuyen el sobrepico y podrían causar que la respuesta a una entrada escalón comience del lado incorrecto.

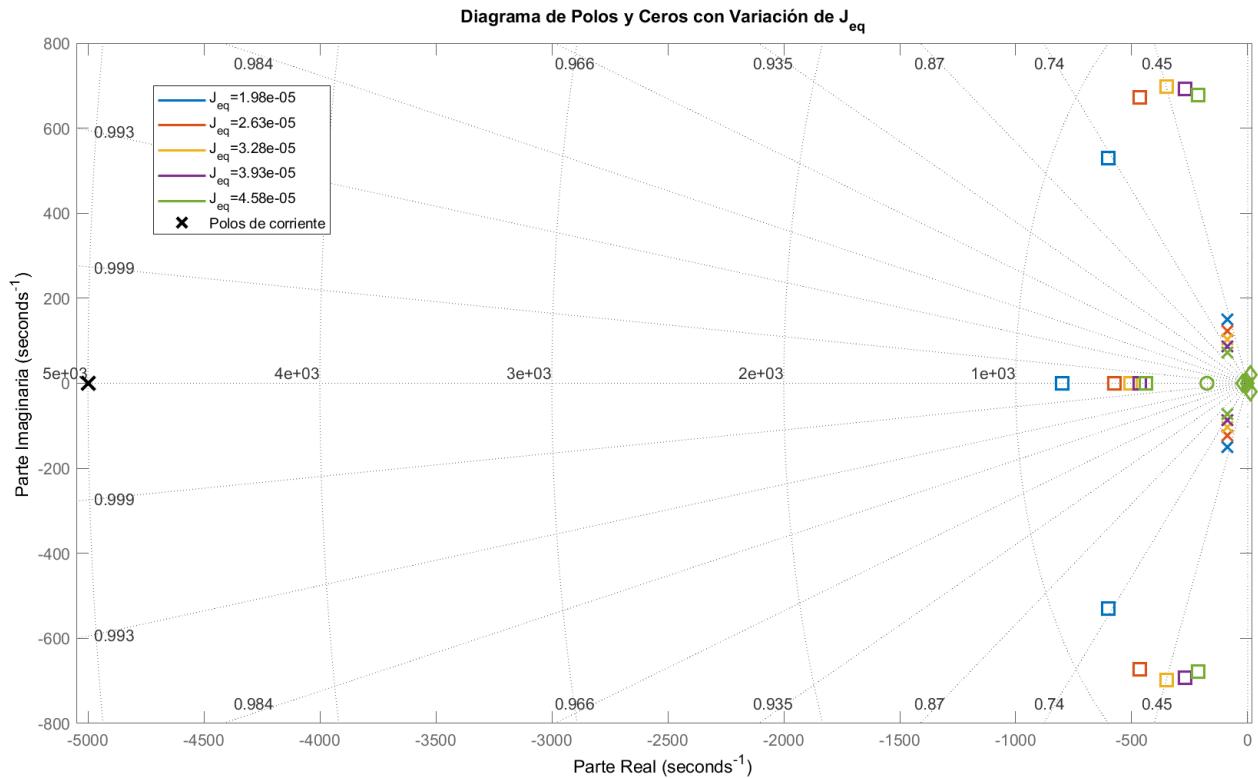


Figura 60: Diagrama de polos y ceros del sistema NL completo, del controlador de corriente y del de posición (PID).

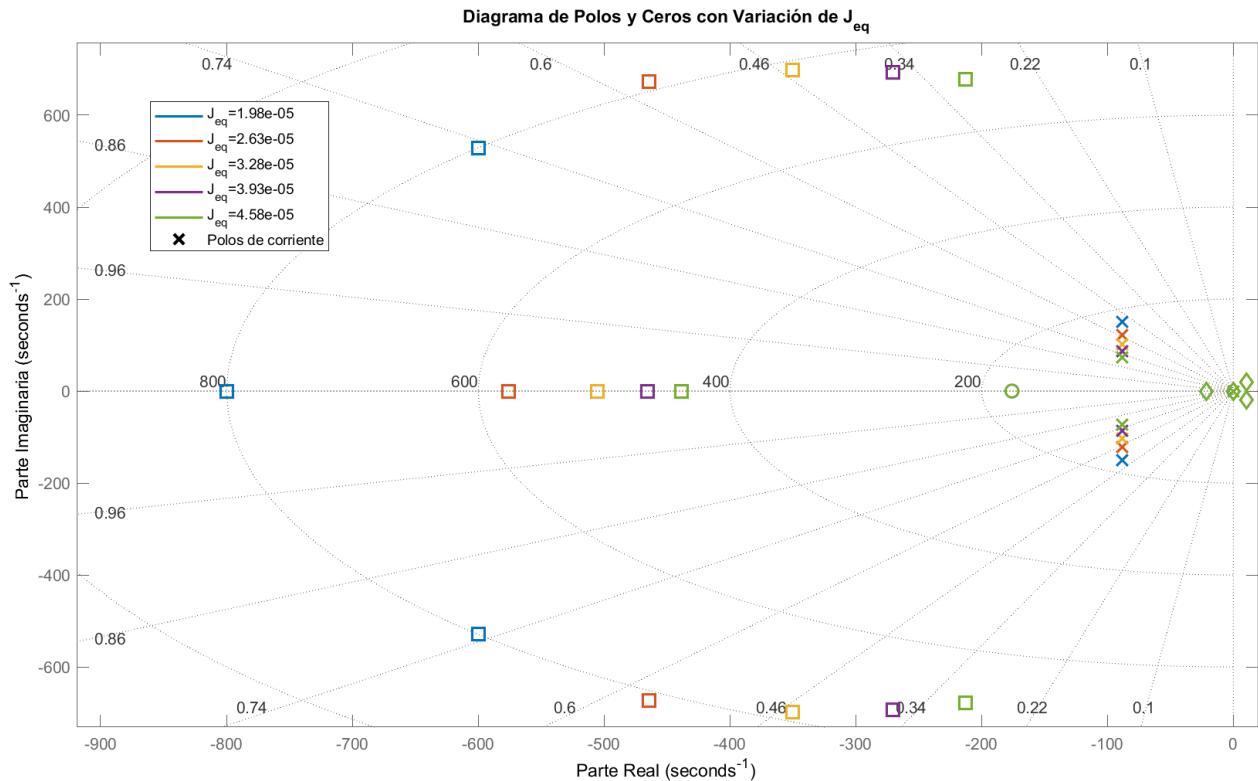


Figura 61: (Zoom) Diagrama de polos y ceros del sistema NL completo, del controlador de corriente y del de posición (PID).

Aumentar J_{eq} hace que el ζ se vea mayormente afectado, pasando de 0.75 para el valor de J_l nominal hasta aproximadamente 0.3 para el J_{eq} máximo. Esto último provocará sobrepicos más elevados.

Como se sabe que los polos están siempre en la mitad izquierda del plano s para todo valor de J_{eq} en su rango establecido, es posible aplicar el teorema del valor final para evaluar la respuesta en estado estable para una entrada escalón.

Para $G_\theta(s)$ y $K_{sia} \neq 0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_\theta(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia}}{(J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia})} \frac{1}{s} \right] = \frac{K_{sia}}{K_{sia}} = 1$$

Para la carga $G_{T_{ld}}(s)$ y $K_{sia} \neq 0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_{T_{ld}}(s) \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{-\frac{1}{r}s}{(J_{eq}s^3 + b_a s^2 + K_{sa}s + K_{sia})} \frac{1}{s} \right] = \frac{-0}{rK_{sia}} = 0$$

lo que significa que cuando t tiende a infinito, el sistema presenta rechazo total a perturbaciones y θ_m tiende a θ_m^* .

Si $K_{sia} = 0$, $\lim_{s \rightarrow 0} G_\theta(s) = 1$ y $\lim_{s \rightarrow 0} G_{T_{ld}}(s) = -\frac{1}{rK_{sa}}$, lo que se traduce en la existencia de un error de estado estacionario ante entrada escalón y demuestra la importancia del término integral.

En la Figura 62 se muestra el esquema de realimentaciones físicas del sistema, el modulador de torque completo y la implementación del controlador de posición/velocidad PID.

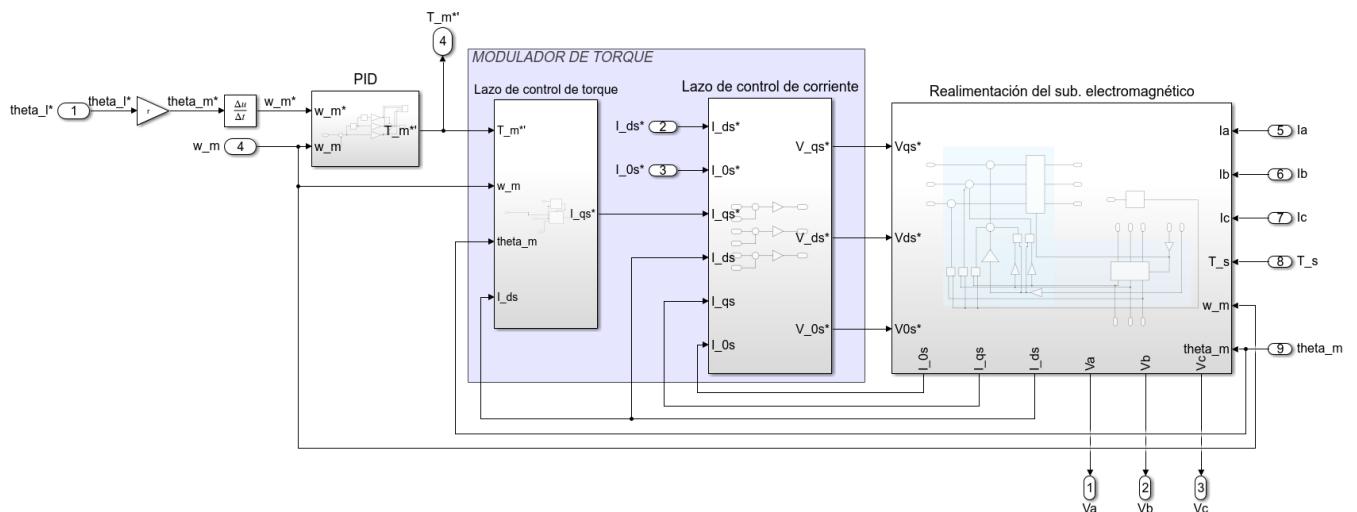


Figura 62: Diagrama de bloques del modulador de torque y controlador de posición PID.

En la Figura 65 se compara el efecto de considerar la variación de la resistencia de las bobinas con la temperatura en el controlador de movimiento, frente a una implementación con resistencia constante, fijada en $R_{sREF} = 1.02\Omega$. Para la prueba, se utilizó un perfil trapezoidal como consigna de posición (Figura 63). La Figura 64 muestra la evolución de las variables de estado en ambos modelos ante esta entrada de referencia.

Se observa que la consigna de posición es seguida exitosamente en ambos casos. Sin embargo, mientras que algunas variables de estado, como $\theta_m(t)$, presentan diferencias insignificantes, otras, como la temperatura, la velocidad y $i_{qs}^r(t)$, muestran variaciones más notorias. En particular, la

corriente $i_{qs}^r(t)$ puede diferir hasta en 1A en los instantes donde la consigna experimenta cambios bruscos.

La diferencia entre ambas configuraciones se calcula como $f_{RVvariable} - f_{RConstante}$. Dado que las curvas obtenidas son prácticamente idénticas, un módulo alto de esta diferencia indica que $f_{RVvariable}$ es mayor en valor absoluto que $f_{RConstante}$. Considerando estos resultados, y con el objetivo de mejorar tanto la precisión como la robustez del sistema a la vez que se adopta un criterio conservador, se optará por implementar el controlador con una resistencia variable, ajustada en función de la medición de $T_s^o(t)$.

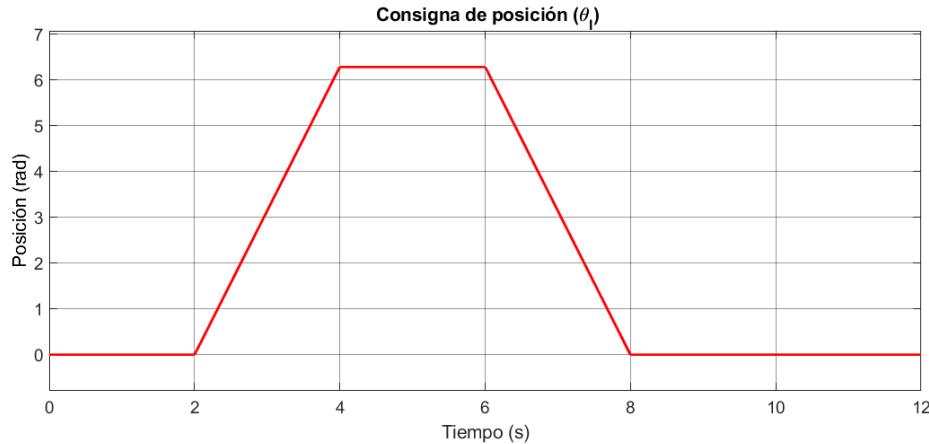


Figura 63: Consigna de posición trapezoidal.

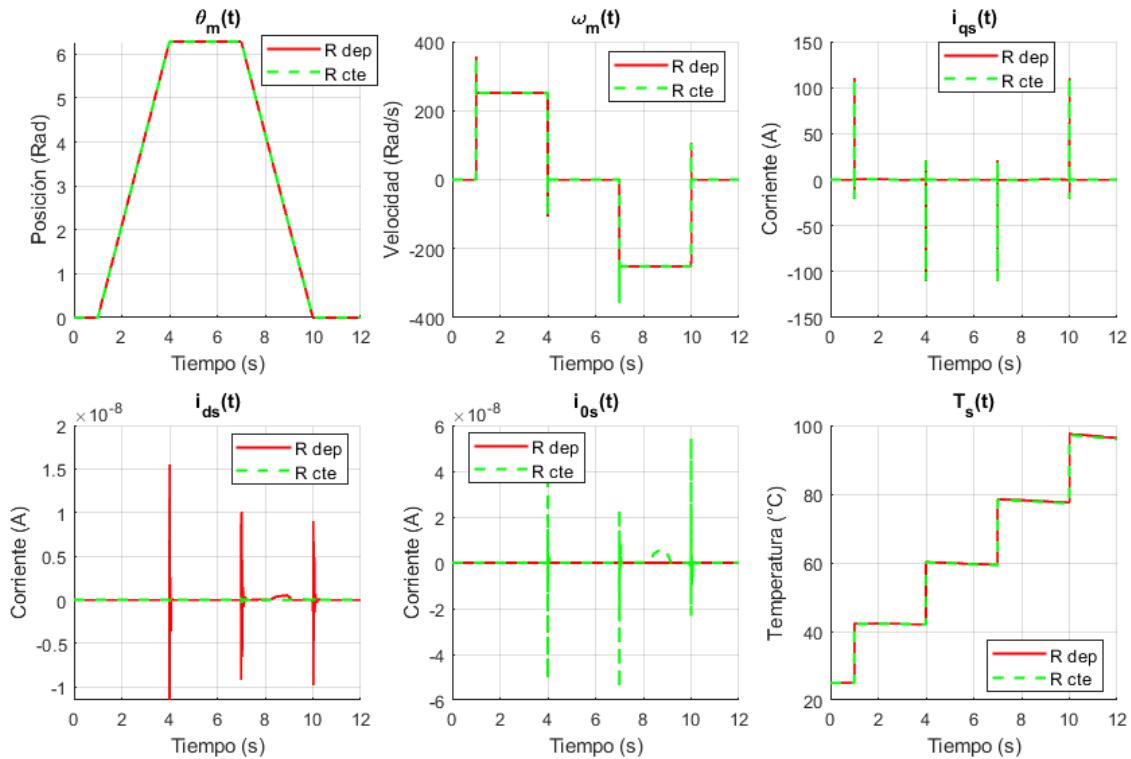


Figura 64: Respuesta a la consigna de posición con controlador de resistencia variable vs de resistencia constante.

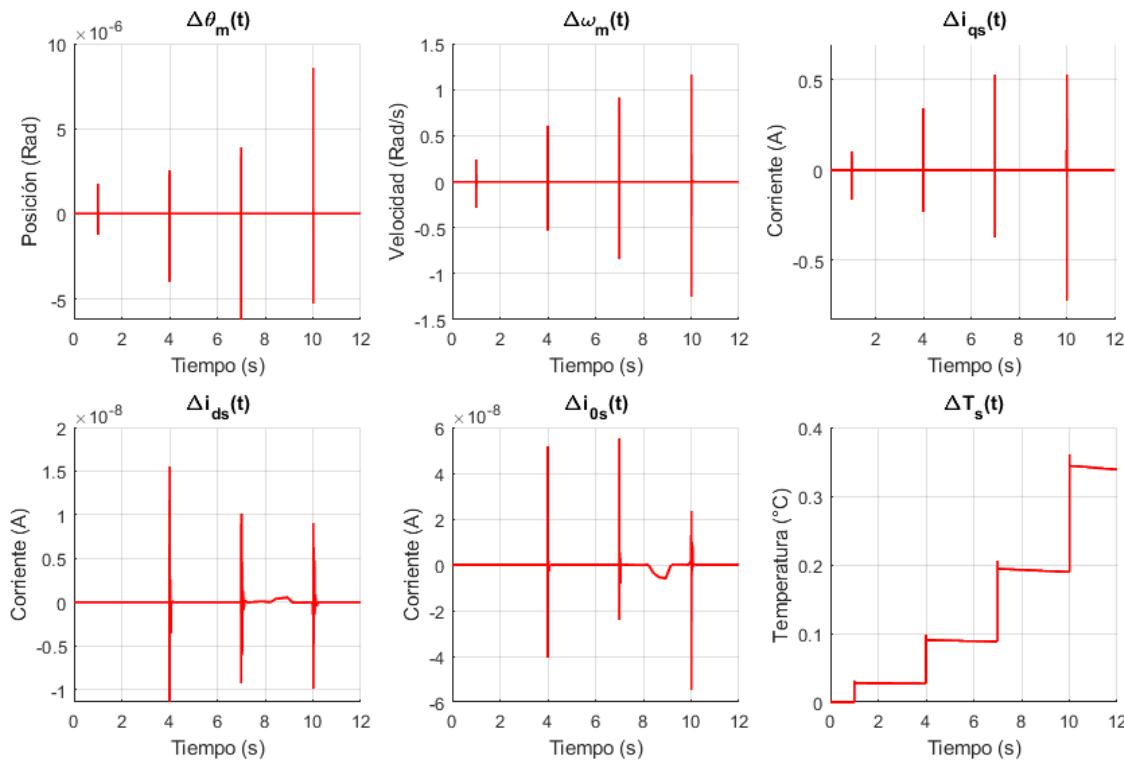


Figura 65: Comparativa de utilizar $R_s(T^o(t))$ contra el uso del valor nominal constante de R_s en el controlador.

4.2.3. Incorporación del observador de estado de orden reducido

El sistema en estudio no cuenta con un sensor de velocidad, sino con un encoder. Es posible medir velocidad con este si se mide la diferencia de tiempo entre pulsos. Sin embargo, es una medición muy sujeta a errores y ruido, por lo que lo más conveniente es estimarla. Como se desarrolló anteriormente, el sistema es completamente observable desde la posición, por lo que se puede construir un observador de estados parcial que estime la velocidad y la realimenta al controlador. Las corrientes no serán estimadas puesto que serán sensadas.

Se puede expresar el subsistema mecánico resultante luego de aplicar todas las compensaciones como una ecuación matricial de espacio de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) + B_d u_d(t) \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (123)$$

Como:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_m}{dt} &= \omega_m(t) \\ \frac{d\omega_m}{dt} &= \frac{T_m^*(t)}{J_{eq}} - \frac{T_{ld}(t)}{J_{eq}r} \end{cases} \quad (124)$$

Entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq}r} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = T_m^*(t), \quad u_d(t) = T_{ld}(t)$$

Se procede a diseñar el observador de estados, partiendo del siguiente sistema genérico de segundo orden planteado en la Ecuación (125).

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A\tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + K_e[y(t) - \tilde{y}(t)] \\ \tilde{y}(t) = C\tilde{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (125)$$

donde:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_m(t) \\ \tilde{\omega}_m(t) \end{bmatrix}, \quad K_e = \begin{bmatrix} k_{e_\theta} \\ k_{e_\omega} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desarrollando (125) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= A\tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + K_e[C\mathbf{x}(t) - C\tilde{\mathbf{x}}(t)] \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= [A - K_eC]\tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + K_eC\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (126)$$

Si se resta $\dot{\mathbf{x}}(t)$ de la Ecuación (123) con $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$ de la Ecuación (126):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) + B_d u_d(t) - [A - K_eC]\tilde{\mathbf{x}}(t) - Bu(t) - K_eC\mathbf{x}(t) \\ &= A[\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)] - K_eC[\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)] + B_d u_d(t) \\ &= (A - K_eC)[\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)] + B_d u_d(t) \end{aligned}$$

Se define al error de estimación/observación como la diferencia entre $\dot{\mathbf{x}}(t)$ y $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)$:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (127)$$

Entonces:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (A - K_eC)\mathbf{e}(t) + B_d u_d(t), \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 \quad (128)$$

Además:

$$A - K_eC = \begin{bmatrix} -k_{e_\theta} & 1 \\ -k_{e_\omega} & 0 \end{bmatrix} \quad (129)$$

Como el sistema es completamente observable, es posible seleccionar una matriz K_e de manera que $A - K_eC$ tenga valores propios arbitrariamente deseados. Se quieren ubicar los polos de la matriz $A - K_eC$ en $p_{obs} = -3200 \frac{rad}{s}$. Para ello se expande el polinomio característico:

$$\det[sI - (A - K_eC)] = \det \begin{pmatrix} s + k_{e_\theta} & -1 \\ k_{e_\omega} & s \end{pmatrix} = (s + k_{e_\theta})s + k_{e_\omega} = s^2 + k_{e_\theta}s + k_{e_\omega} \quad (130)$$

El polinomio al que se quiere llegar es:

$$p(s) = (s + 3200)^2 = s^2 + 6400s + 10240000 \quad (131)$$

De lo cual resulta obvio a partir de (130) y (131) que:

$$k_{e_\theta} = 6400 \left[\frac{1}{s} \right]$$

$$k_{e_\omega} = 10240000 \left[\frac{1}{s^2} \right]$$

El diagrama de bloques del observador de estado reducido resulta como el de Figura 66. No se toma en cuenta la entrada de perturbación para la dinámica del error debido a que es impredecible. Como consecuencia, podría existir un error de estado estacionario si $T_{ld}(t) \neq 0$, o también si hay mucha incertidumbre en las matrices A y B.

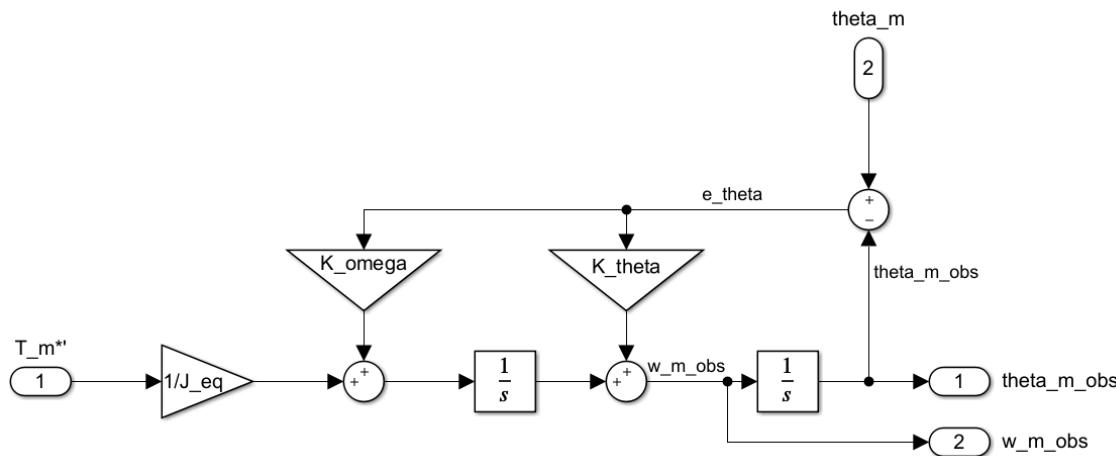


Figura 66: Diagrama de bloques del observador de estados reducido.

4.2.4. Simulación en tiempo continuo con modelo completo NL

En primer lugar, se muestra en Figura 67 el diagrama de bloques completo de la planta y controlador realizados hasta el momento, incluyendo el observador de estados de orden reducido, el modulador de tensión ideal y el bloque de sensores con los que se realimentan los estados al controlador.

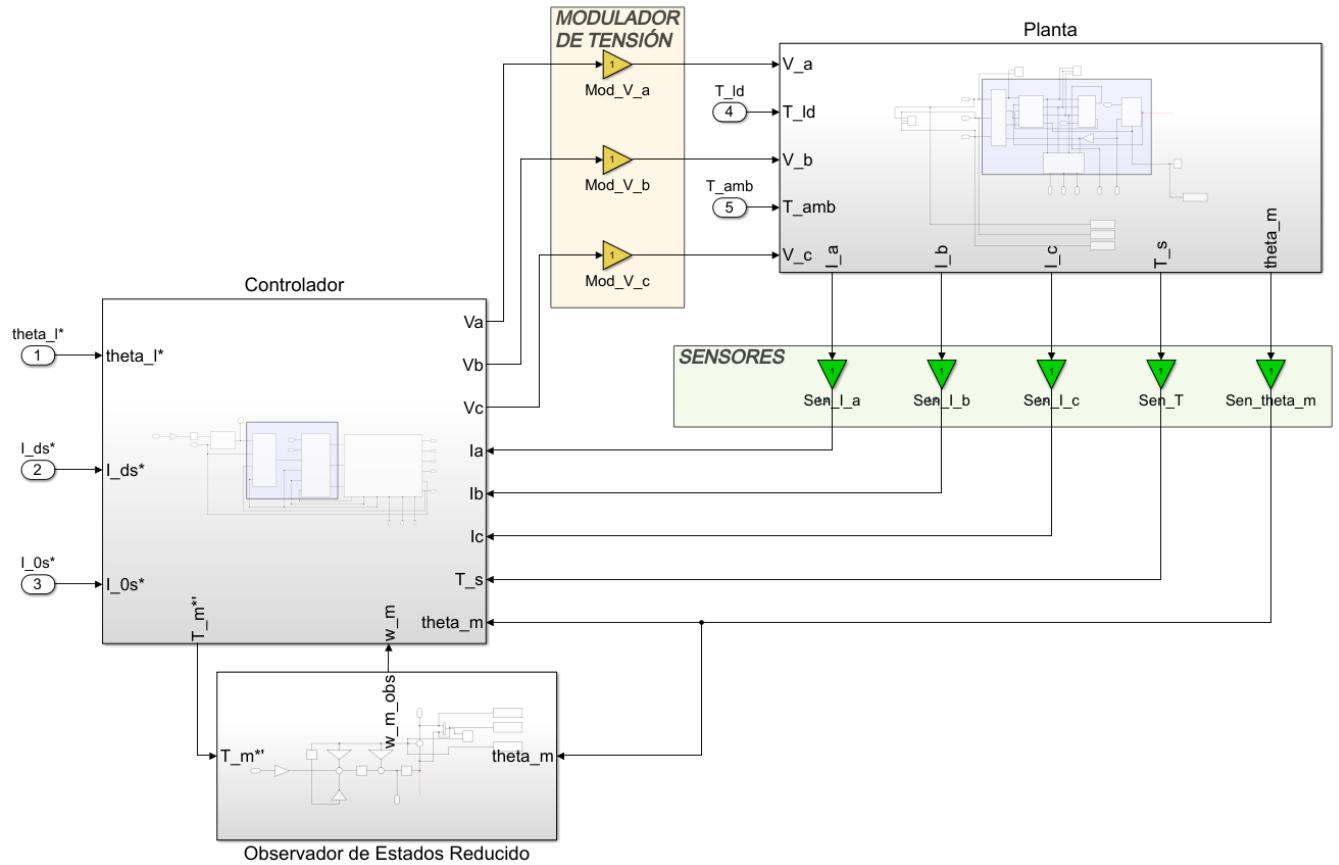


Figura 67: Diagrama de bloques completo con planta, controlador de movimiento y observador.

En la Figura 68 se muestra la gráfica de la consigna de posición dada para la simulación. El valor en la meseta es de 2π radianes. Para las demás entradas, se considera $i_{ds}^*(t) = i_{0s}^*(t) = 0$, $T_{ld}(t) = 0$ y $T_{amb}^o(t) = 25^\circ\text{C}$. Además, $J_{eq} = J_{eq-min} = 1.9785 \cdot 10^{-5}\text{kg m}^2$.

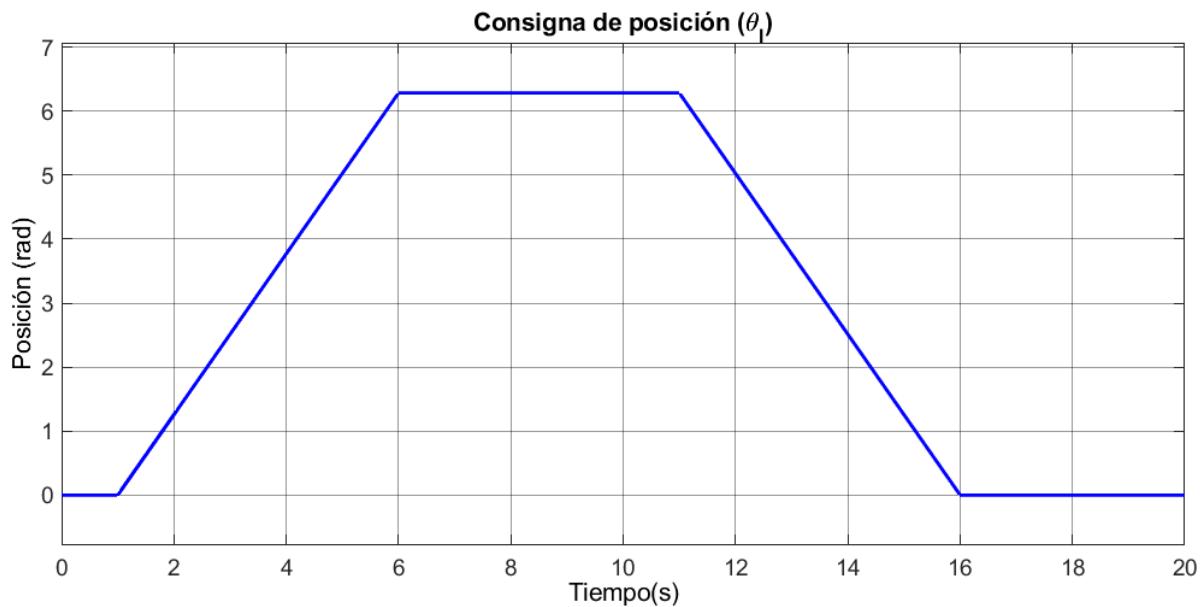


Figura 68: Consigna de posición para $\theta_l(t)$.

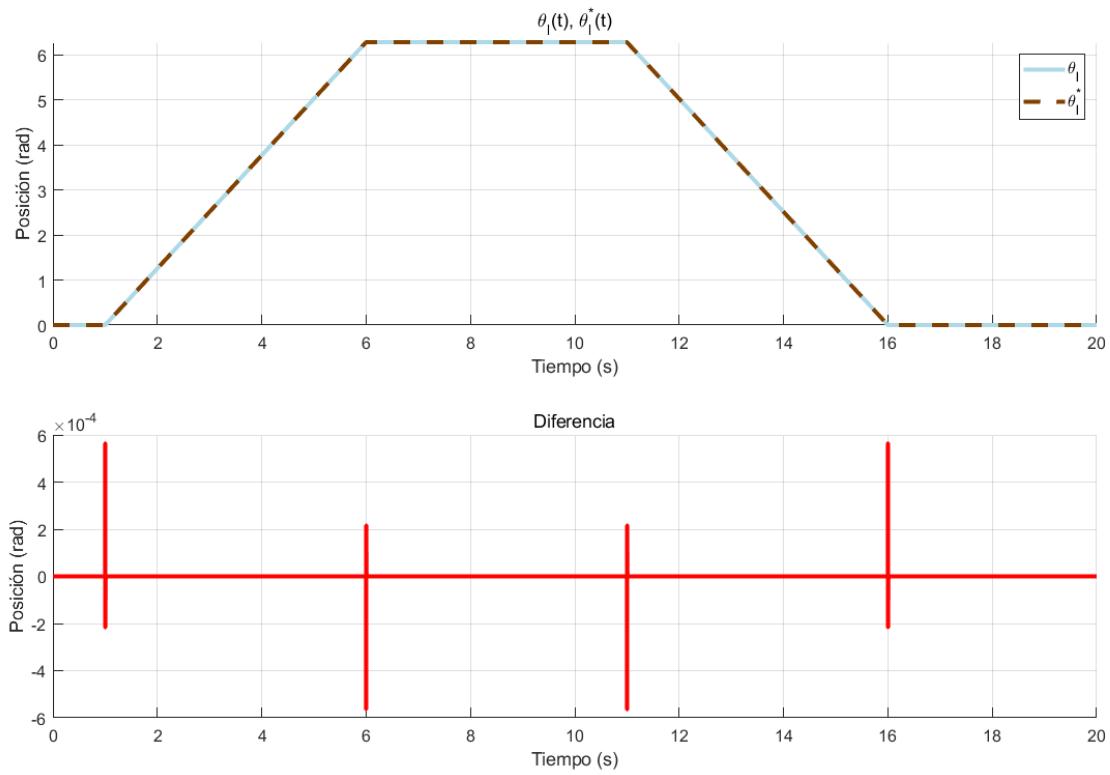


Figura 69: Diferencia entre consigna de posición contra valor de posición medido (no observado).

Los resultados de la simulación a lo largo del tiempo se muestran en la Figura 69. La diferencia se calcula como $\theta_l^* - \theta_l$ y presenta un transitorio muy corto en los cambios bruscos del perfil. Un detalle de uno de estos transitorios puede verse en la Figura 70. La posición tarda menos de 10ms en asentarse, posterior a una pequeña vibración del rotor.

La Figura 71 presenta el seguimiento de la consigna de velocidad, obtenida de derivar la de posición. La Figura 72 demuestra que la velocidad tarda menos de 5ms en asentarse. El perfil tiene una forma más escalonada, a la que el sistema responde con torques y, por consiguiente, corrientes de gran magnitud. Esto se traduce en picos de corriente y voltaje peligrosos para la máquina, como se puede ver en la Figura 73, 74 y 75. Más adelante se explicará cómo reducir estos picos.

Por último, en la Figura 76 y 77 se muestran las gráficas de las comparativas entre los valores estimados y reales de las variables $\theta_l(t)$ y $\omega_m(t)$. Las gráficas de los errores también tienen transitorios cortos como en las figuras anteriores. Como estas simulaciones no presentan cargas de torques resistivos, no existe error de estado estacionario en el error de estimación.

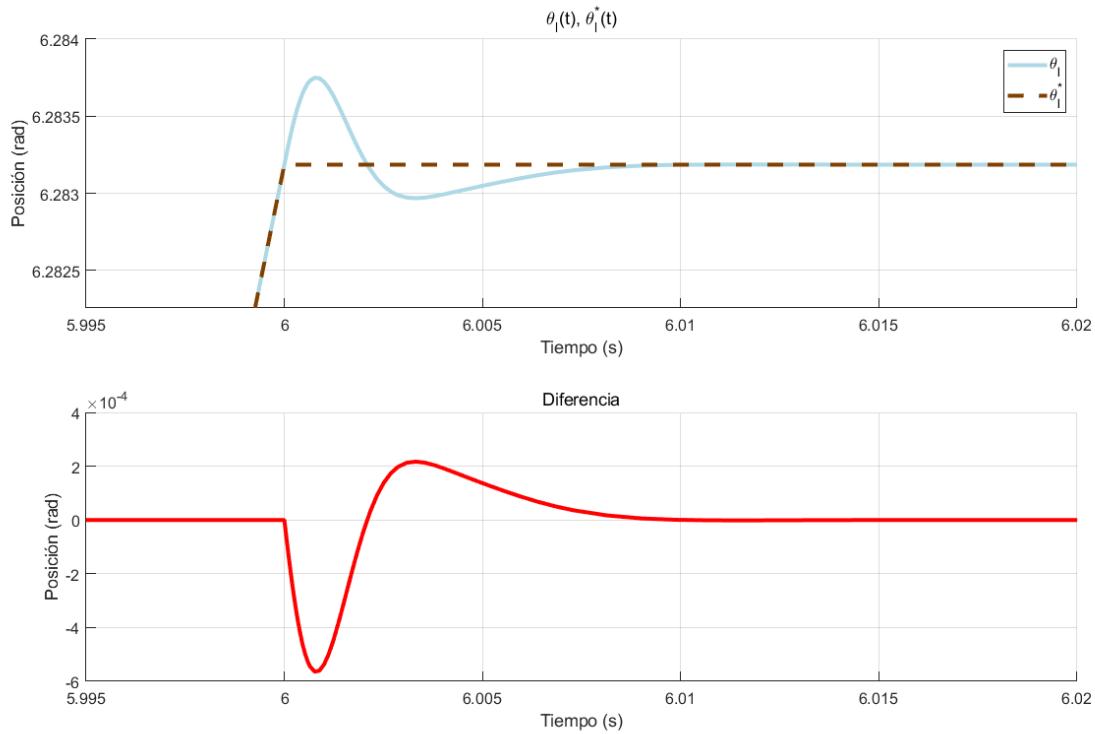


Figura 70: Detalle de diferencia consigna de posición contra valor de posición medido (no observado).

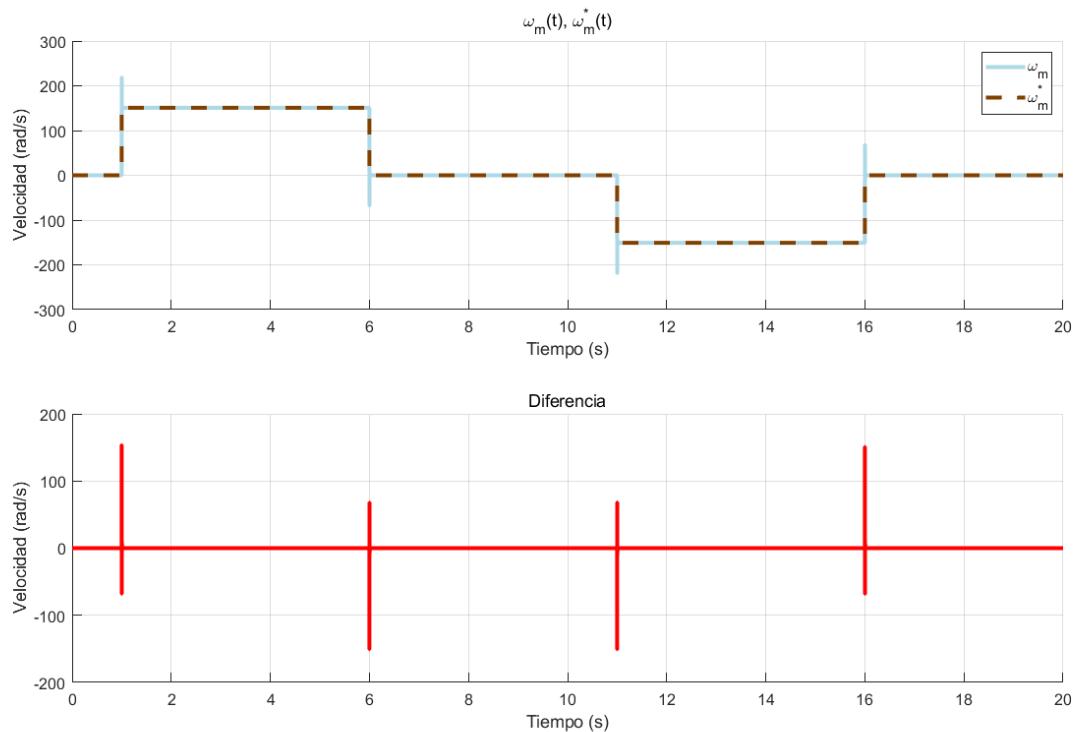


Figura 71: Diferencia entre consigna de velocidad contra velocidad medida (no observada).

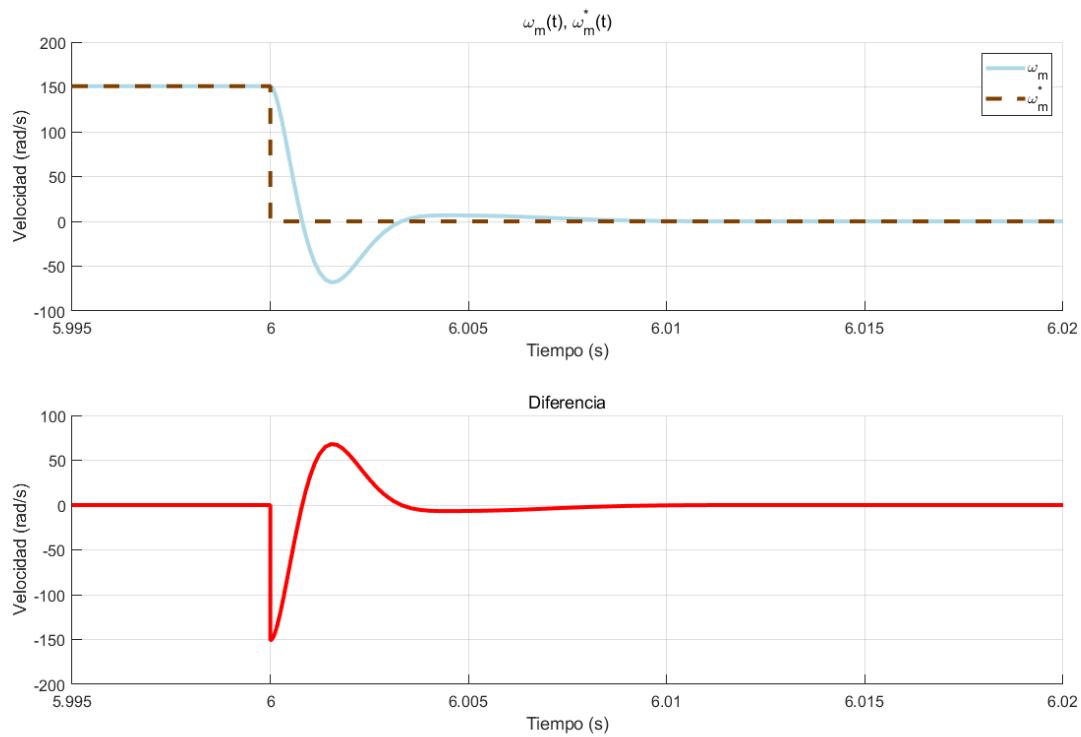


Figura 72: Detalle de diferencia consigna de velocidad contra velocidad medida (no observada).

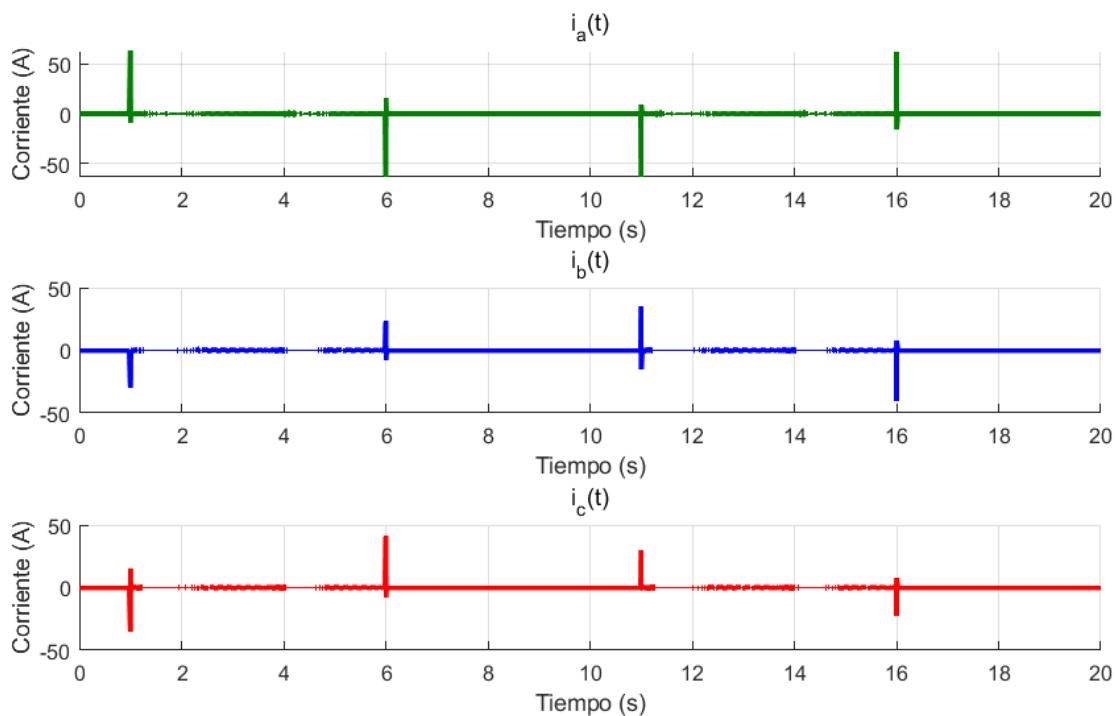


Figura 73: Corrientes en coordenadas reales.

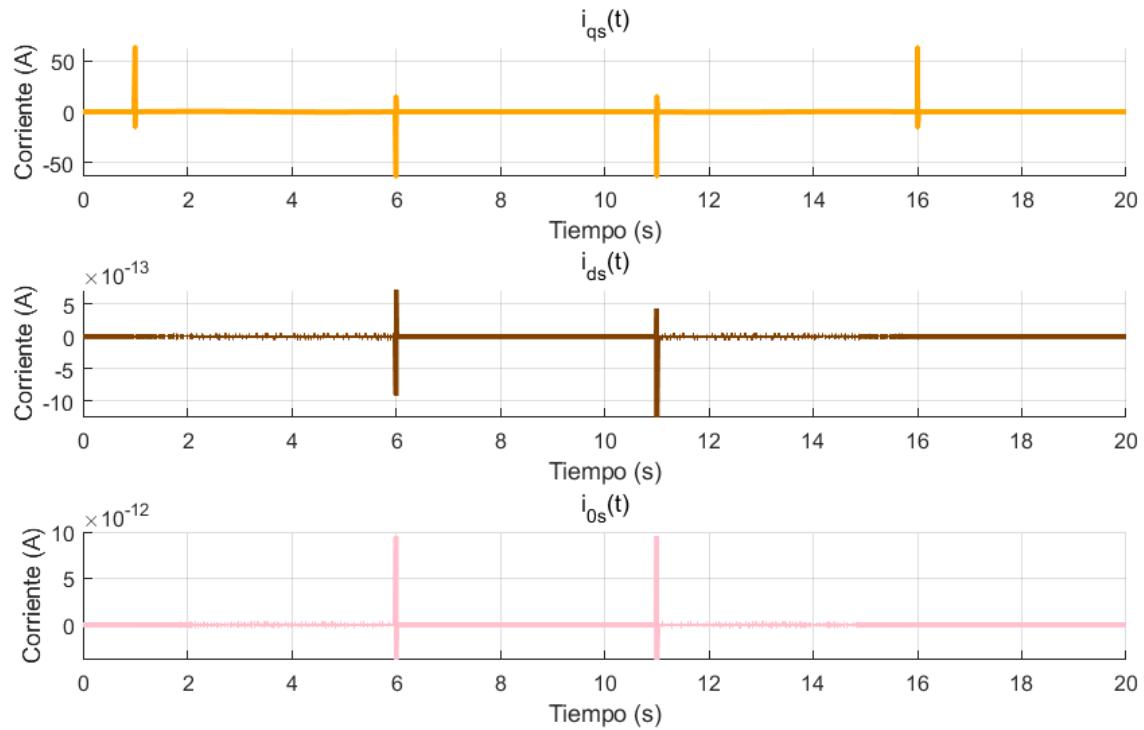


Figura 74: Corrientes en coordenadas virtuales.

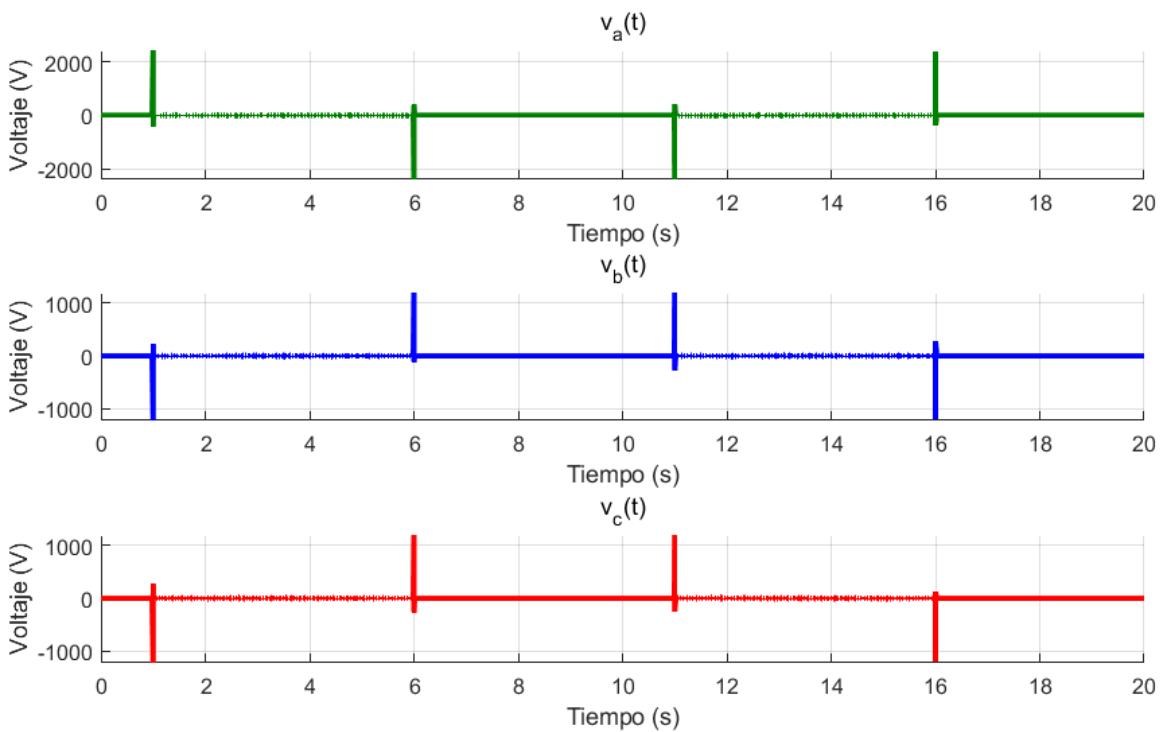


Figura 75: Voltajes en coordenadas reales.

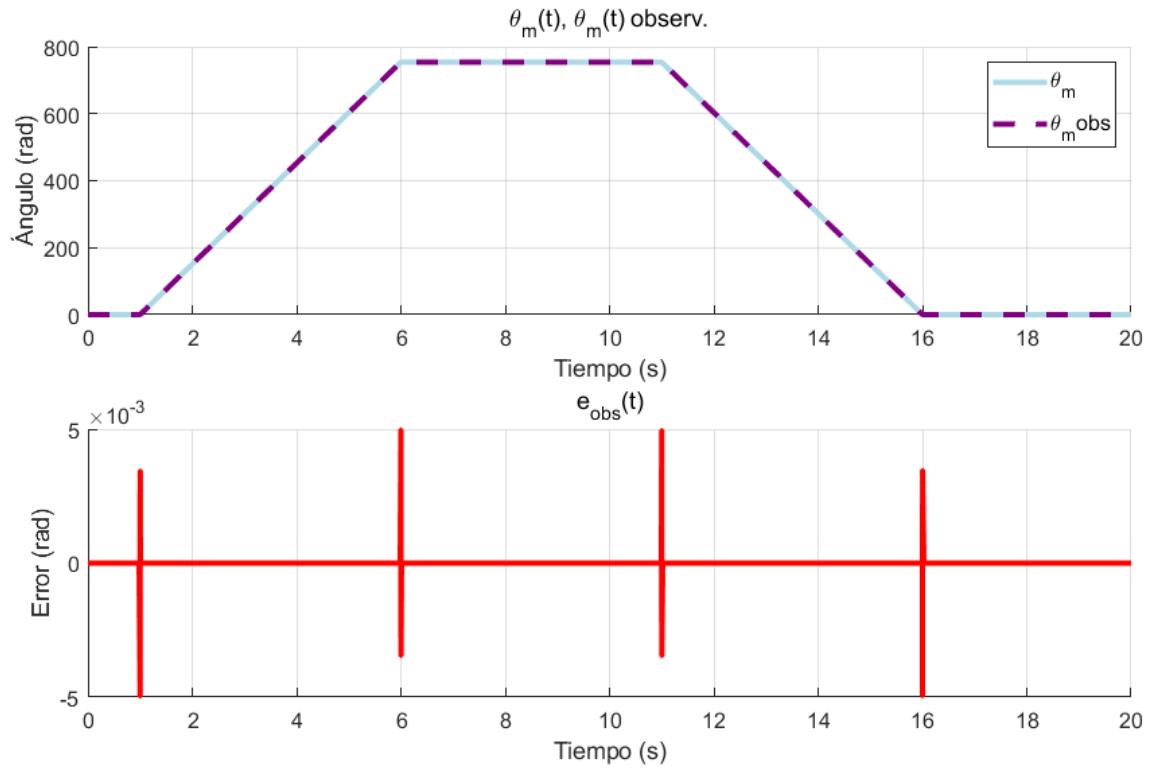


Figura 76: Posición observada vs real.

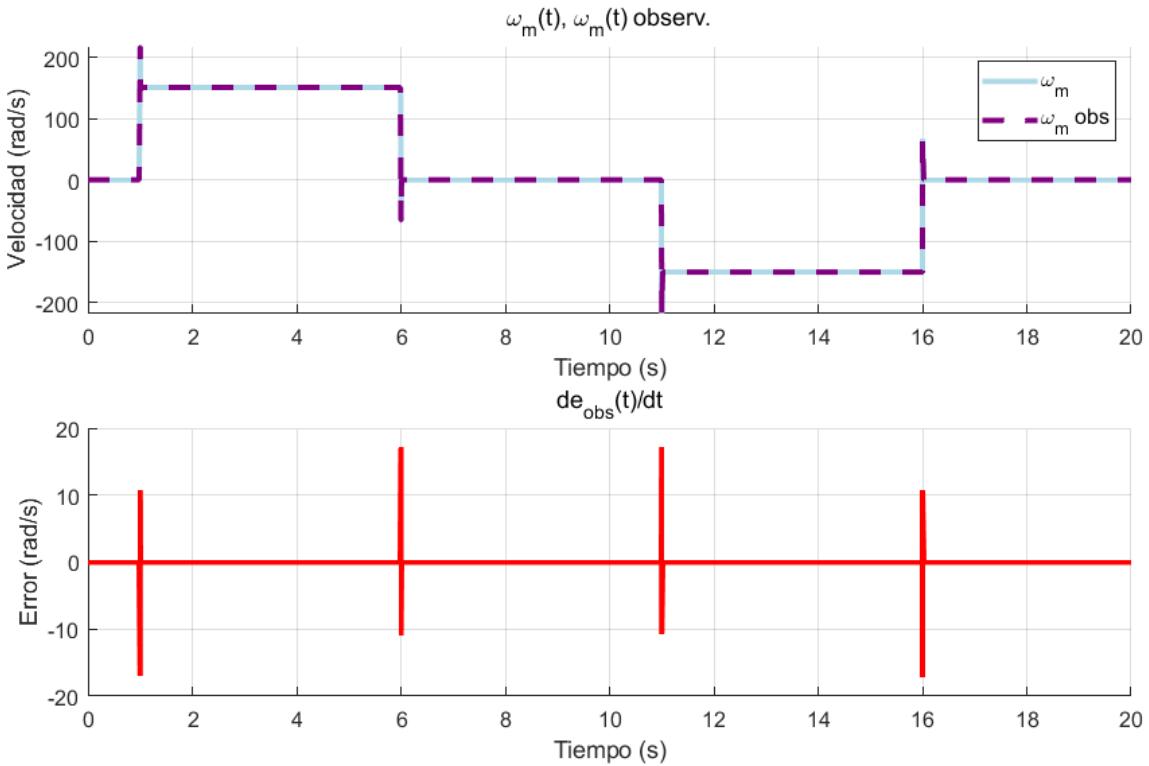


Figura 77: Velocidad observada vs real.

Para evaluar la robustez del sistema frente a perturbaciones, se le aplicará la carga $T_{ld}(t)$ definida en la Ecuación (132). La misma puede verse en la Figura 78.

$$\begin{cases} 0 \text{ Nm} & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 5 \text{ Nm} & \text{si } 2 \leq t < 7 \\ -5 \text{ Nm} & \text{si } 7 \leq t < 13 \\ 5 \text{ Nm} & \text{si } 13 \leq t < 17 \\ 0 \text{ Nm} & \text{si } 17 \leq t \leq 20 \end{cases} \quad (132)$$

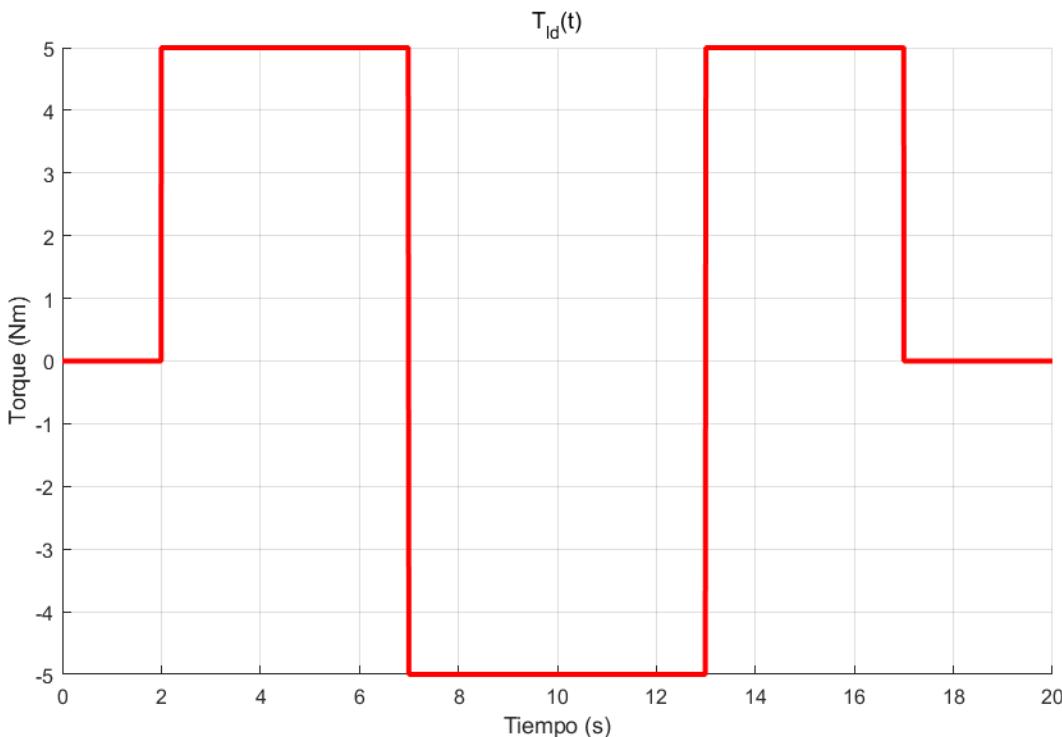


Figura 78: Carga $T_{ld}(t)$.

La Figura 79 muestra los resultados de la simulación en cuanto al seguimiento de la consigna. A simple vista, la carga no parece perturbar en gran medida al sistema, puesto que las curvas de θ_l y θ_l^* siguen estando superpuestas. Los pequeños picos que se ven en la gráfica de la diferencia se deben a los escalones de carga. La Figura 80 muestra un zoom de uno de esos picos, donde luego se puede notar un error de estado estacionario del orden de 10^{-6} .

Para el error de observación ocurre algo similar. Como el observador se comporta como si fuera un controlador PD (proporcional-derivativo), existe un error de estado estacionario observable en la Figura 81 que se puede corregir con una acción integral, lo que se hará un poco más adelante.

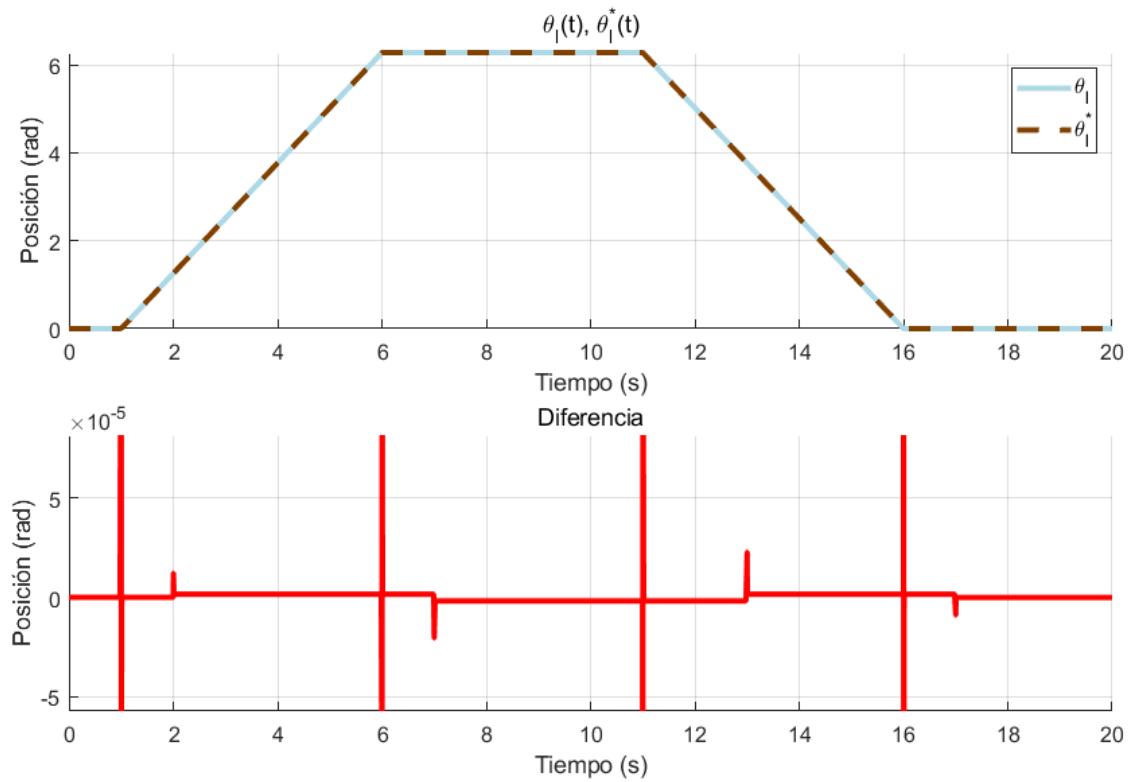


Figura 79: Seguimiento de consigna con carga.

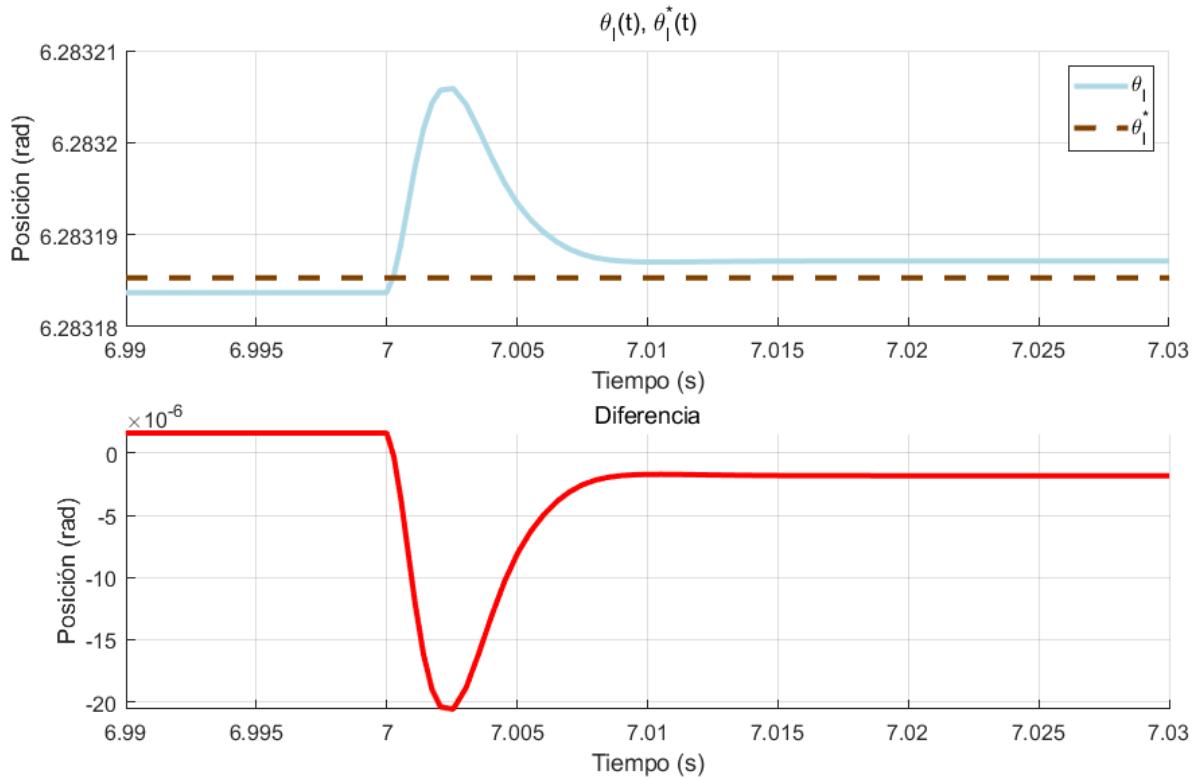


Figura 80: Detalle de seguimiento de consigna con carga.

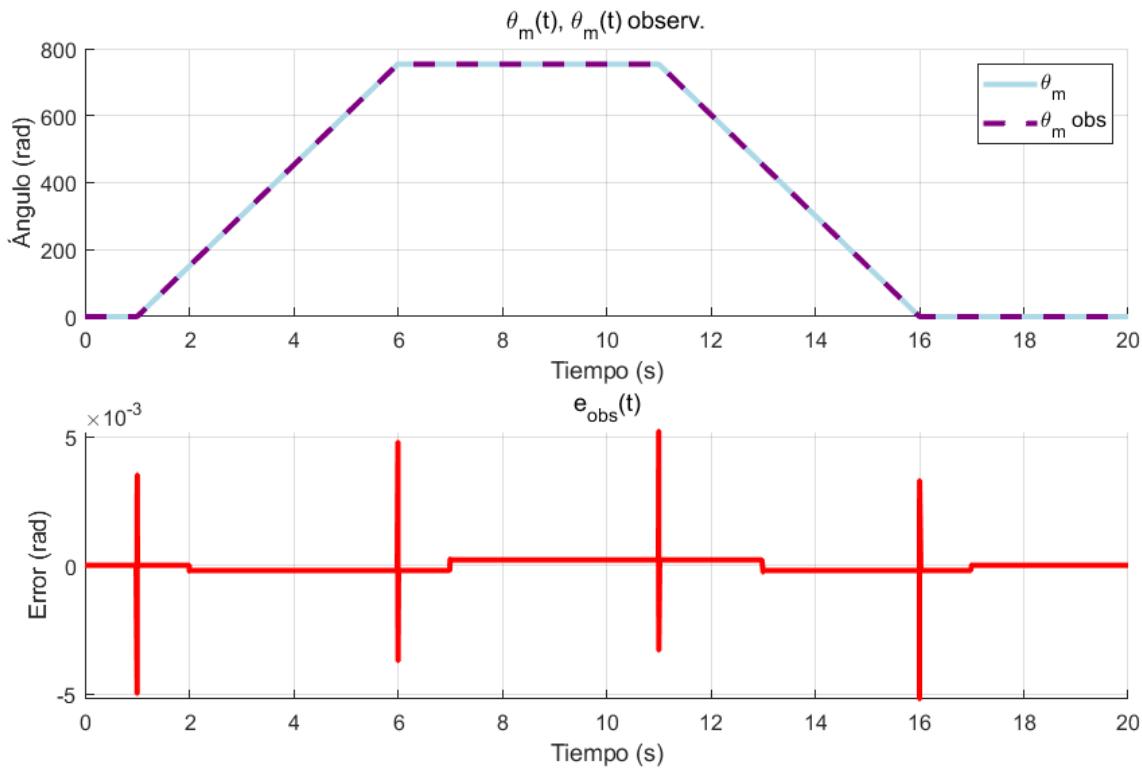


Figura 81: Error de estimación de sistema con carga.

4.2.5. Verificación de desempeño y mejoras a contemplar

4.2.5.a Cumplimiento de especificaciones de operación

Como se dijo anteriormente, el seguimiento de la consigna de tipo trapezoidal implica un salto escalón en las velocidades, y por consiguiente, aceleraciones muy grandes, que podrían darse a partir de torques de gran magnitud, aplicables únicamente a partir de valores de corriente también amplios.

Es por esto que, y a partir de considerar los parámetros límites de la planta física, resumidos en Tabla 4, se proponen las siguientes mejoras.

En primer lugar, y para obtener valores que no sobrepasen los límites, se propone dar una consigna de posición con la forma de un polinomio de quinto grado, con el fin de asegurar que sus derivadas (velocidad, aceleración y jerk) también cambien suavemente en el tiempo. Además, es buena práctica que la velocidad y aceleración comiencen y terminen en el valor de 0. Es por eso que, si se quieren cumplir las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{cases} \theta_l^*(t_0) = q_0 \\ \omega_l^*(t_0) = 0 \\ \alpha_l^*(t_0) = 0 \\ \theta_l^*(t_f) = q_f \\ \omega_l^*(t_f) = 0 \\ \alpha_l^*(t_f) = 0 \end{cases} \quad (133)$$

Se define $\theta_l^*(t)$ y sus derivadas como:

Parámetro	Nomenclatura y valor
Tren de transmisión (caja reductora)	
Relación de reducción total	$r = 120.0 : 1$
Velocidad nominal (salida)	$n_{l\ nom} = 60 \text{ rpm}$ ($\omega_{l\ nom} = 6.28 \text{ rad/s}$)
Torque nominal (salida en régimen continuo)	$T_{q\ nom} = 17.0 \text{ Nm}$
Torque pico (salida y de corta duración, aceleración)	$T_{q\ max} = 45.0 \text{ Nm}$
Máquina eléctrica (PMSM)	
Velocidad nominal rotor	$n_{m\ nom} = 6600 \text{ rpm}$ ($\omega_{m\ nom} = 691.15 \text{ rad/s}$)
Tensión nominal de línea	$V_{sl\ nom} = 30 \text{ V}_{\text{ca rms}}$
Tensión máxima de línea	$V_{sl\ max} = \sqrt{2}V_{sl\ nom} = 42.43 \text{ V}_{\text{ca}}$
Tensión nominal de fase	$V_{sf\ nom} = \frac{V_{sl\ nom}}{\sqrt{3}} = 17.32 \text{ V}_{\text{ca rms}}$
Tensión máxima de fase	$V_{sf\ max} = \sqrt{2}V_{sf\ nom} = 24.49 \text{ V}_{\text{ca}}$
Corriente nominal (régimen continuo)	$I_{s\ nom} = 0.4 \text{ A}_{\text{ca rms}}$
Corriente máxima (corta duración, aceleración)	$I_{s\ max} = 2.0 \text{ A}_{\text{ca rms}}$
Temperatura máxima de bobinado estator	$T_{s\ max}^o = 115^\circ C$
Rango de Temperatura ambiente (perturbación)	$-15^\circ C \leq T_{\text{amb}}^o \leq 40^\circ C$
Inversor trifásico de alimentación (modulador de tensión)	
Módulo máximo de tensión de fase	$V_{as} = V_{bs} = V_{cs} = \sqrt{2}\frac{V_{sl}}{\sqrt{3}} = 24.49V_{\text{ca rms}}$
Módulo de tensión de línea	$V_{sl} = [0.0 \dots 48] \text{ V}_{\text{ca rms}}$
Frecuencia síncrona	$f_e = [-330.0 \dots 0.0 \dots 330.0] \text{ Hz}$

Tabla 4: Especificaciones de operación del sistema

$$\theta_l^*(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (134)$$

$$\omega_l^*(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt + e \quad (135)$$

$$\alpha_l^*(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (136)$$

Si se evalúan las ecuaciones (134), (135) y (136) en $t = t_0$ y $t = t_f$, se obtiene:

$$\begin{cases} q_0 &= at_0^5 + bt_0^4 + ct_0^3 + dt_0^2 + et_0 + f \\ q_f &= at_f^5 + bt_f^4 + ct_f^3 + dt_f^2 + et_f + f \\ 0 &= 5at_0^4 + 4bt_0^3 + 3ct_0^2 + 2dt_0 + e \\ 0 &= 5at_f^4 + 4bt_f^3 + 3ct_f^2 + 2dt_f + e \\ 0 &= 20at_0^3 + 12bt_0^2 + 6ct_0 + 2d \\ 0 &= 20at_f^3 + 12bt_f^2 + 6ct_f + 2d \end{cases} \quad (137)$$

Lo cual es un sistema de ecuaciones lineales. Resolviendo para a, b, c, d, e y f , es posible obtener cualquier polinomio que se ajuste a lo que se necesita. En particular, para un perfil de posición que gire 2π rad y regrese a 0, se define la nueva consigna, calculando los coeficientes de la misma forma:

$$\begin{cases} 0 \text{ rad} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0.0121t^5 - 0.2111t^4 + 1.2265t^3 - 2.5334t^2 + 2.1715t - 0.6655 \text{ rad} & \text{si } 1 \leq t < 6 \\ 2\pi \text{ rad} & \text{si } 6 \leq t < 11 \\ -0.0121t^5 + 0.8143t^4 - 21.7348t^3 + 286.6339t^2 - 1.8684 \cdot 10^3 t + 4.8260 \cdot 10^3 \text{ rad} & \text{si } 11 \leq t < 16 \\ 0 \text{ rad} & \text{si } 16 \leq t \leq 20 \end{cases} \quad (138)$$

Dicho perfil y sus derivadas se muestran en la Figura 82. Los resultados de simulación de las corrientes, tensiones, velocidad motor y torque, se pueden observar en Figura 83, 84, 85 y 86 correspondientemente. Como se puede apreciar en las gráficas y contemplando la misma carga de la Figura 78 en el sistema, los valores de corrientes, voltajes, velocidad del rotor y torque, se encuentran ahora sí dentro de los márgenes permitidos por la máquina. Los valores máximos (módulo) obtenidos de corrientes se encuentran en 0.97 A (0.67 A_{ca rms}), de tensión en 19 V (13.44 V_{ca rms}), de velocidad del rotor en 283 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$, de torque electromagnético en 0.09 Nm y de torque de salida de la caja en casi 8 Nm, aproximadamente en cada caso. Se encontró además una frecuencia sincrónica máxima de 133 Hz, valor que se mantiene dentro del rango especificado. Información resumida en Tabla 5.

Parámetro	Valor Máximo	Valor Obtenido
Corriente nominal (régimen continuo)	0.4 A _{ca rms}	0.67 A _{ca rms}
Corriente máxima (corta duración)	2 A	1.1 A
Tensión nominal de fase	17.32 V _{ca rms} (pico 24.49V)	13.44 V _{ca rms} (pico 19V)
Velocidad angular ω_m	691.15 rad/s	283 rad/s
Velocidad angular ω_l	6.28 rad/s	2.36 rad/s
Torque de salida de la caja reductora T_q (régimen continuo)	17 Nm	8 Nm
Frecuencia síncrona	330 Hz	133 Hz

Tabla 5: Comparación de valores máximos vs. obtenidos.

Cabe destacar que al sistema se le da de consigna el perfil de posición según se muestra en Figura 82, el cual se deriva en el controlador del sistema para poder obtener las consignas de velocidad que requiere el controlador PID diseñado. Esta derivación incluida no se ve afectada por la magnificación de ruido que podría causar en el sistema, debido a que se encuentra fuera de cualquier lazo realimentado. Llevado a la práctica, hasta incluso se podría en el controlador programar este proceso derivativo y armado de la consigna de velocidad, como un paso previo al comienzo del movimiento del brazo, descartando completamente de este modo la posible falencia que implica la inclusión del bloque derivativo.

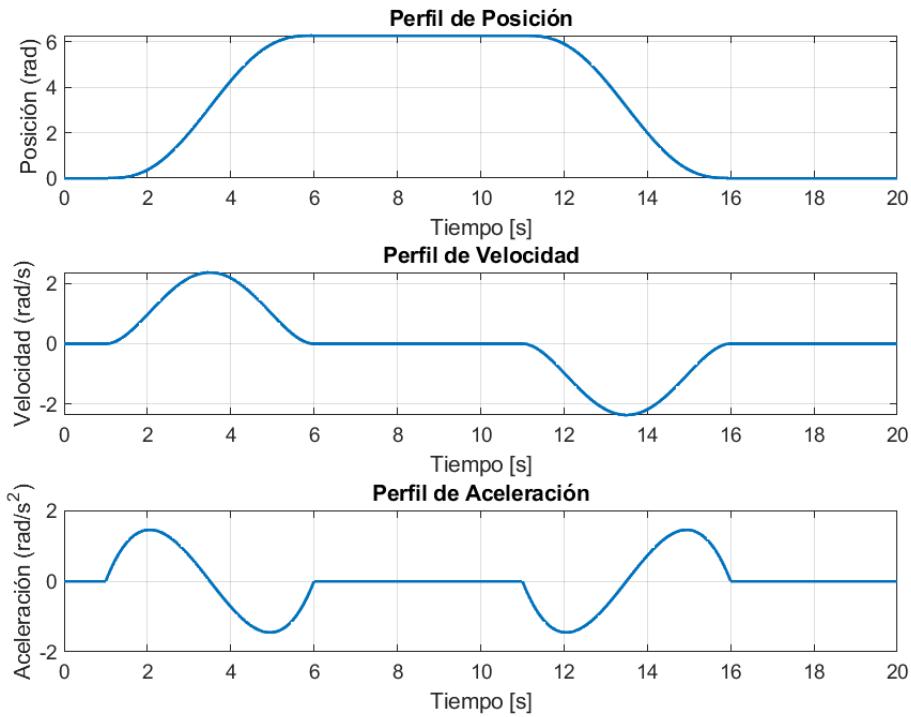


Figura 82: Perfiles de posición, velocidad y aceleración.

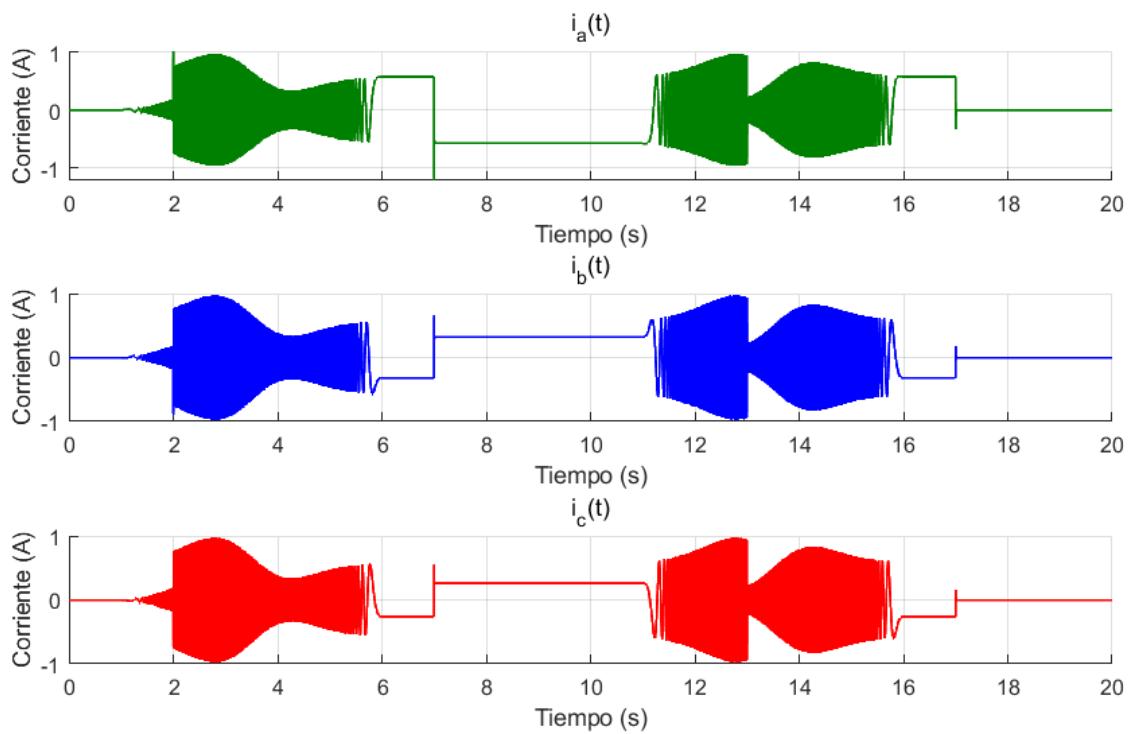


Figura 83: Gráfica de las corrientes de fase desde consigna polinómica.

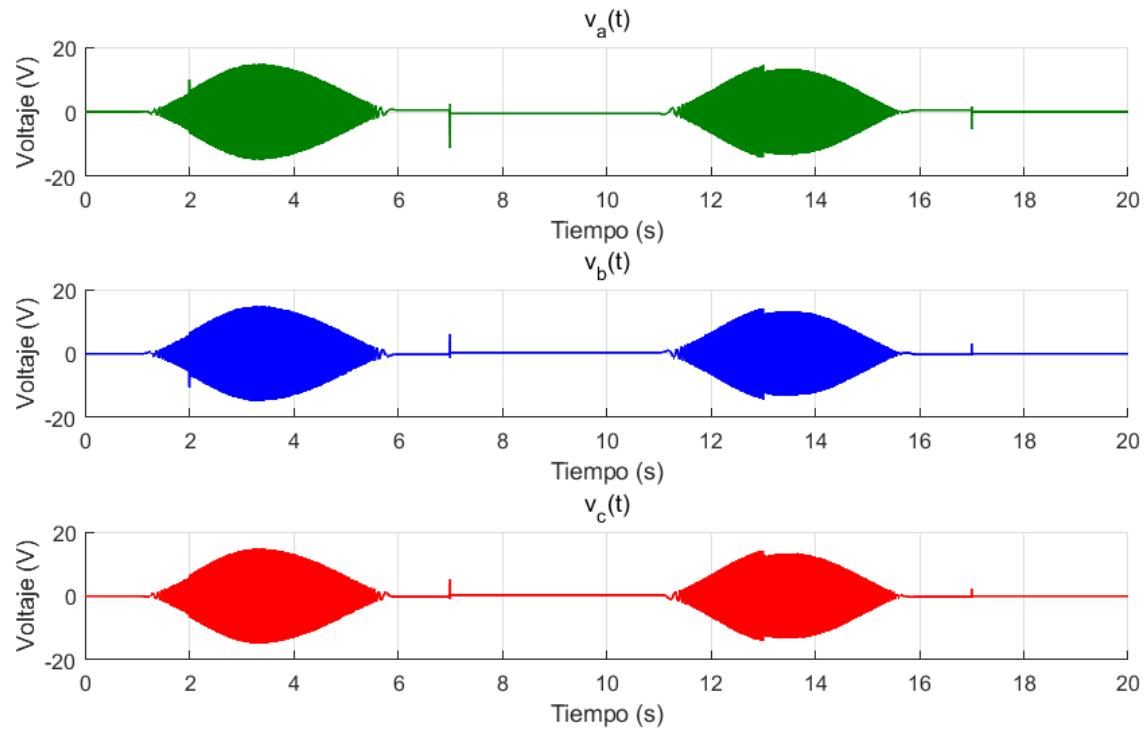


Figura 84: Gráfica de las tensiones de fase desde consigna polinómica.

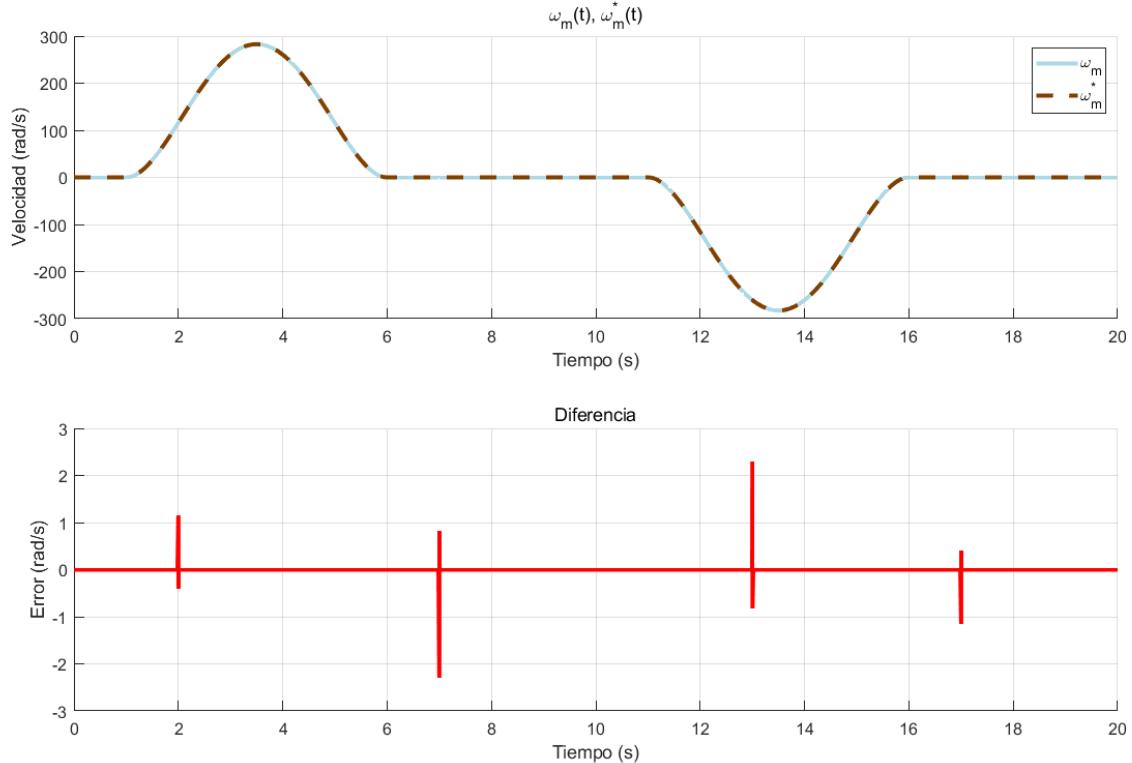


Figura 85: Gráfica de la velocidad del rotor desde consigna polinómica.

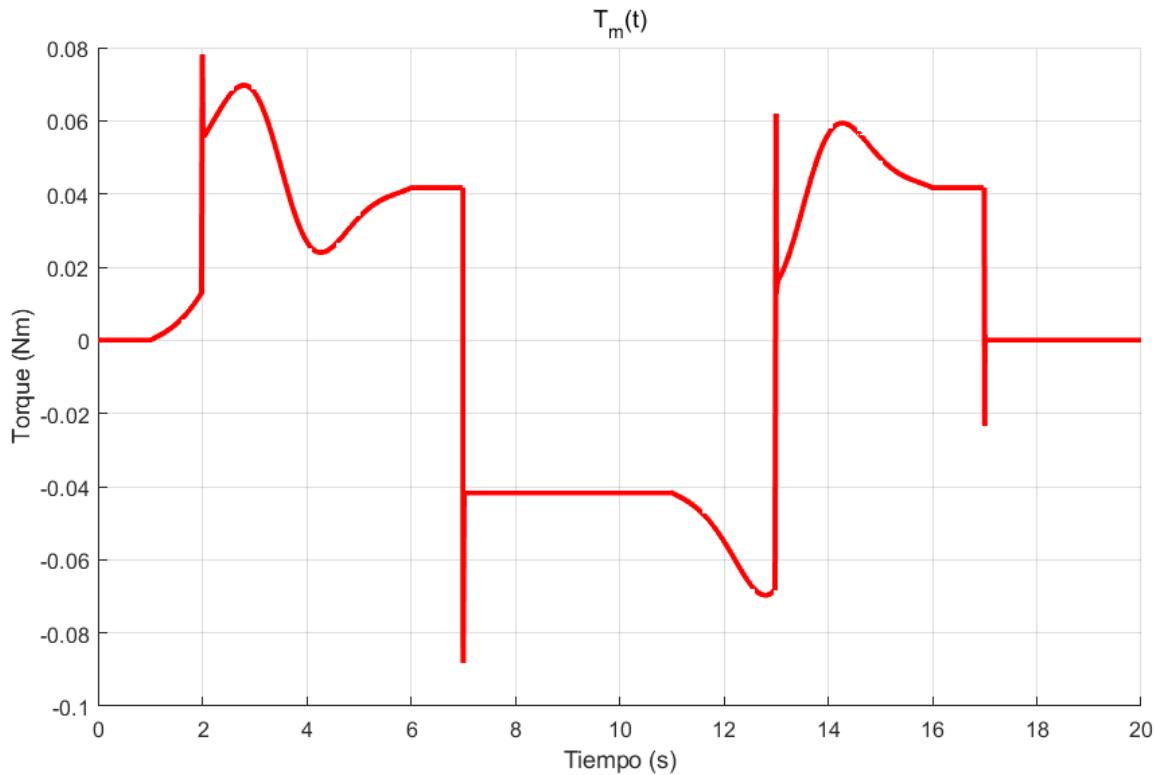


Figura 86: Gráfica del torque electromagnético desde consigna polinómica (Nm).

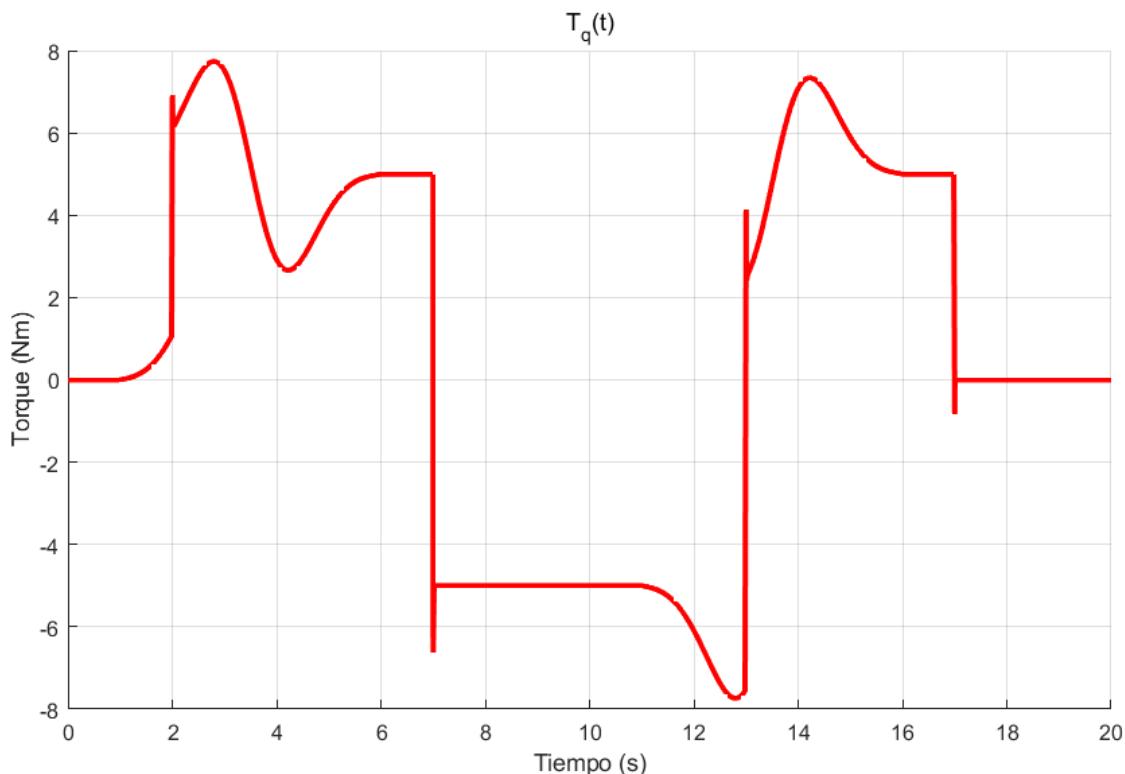


Figura 87: Gráfica del torque de salida de la caja desde consigna polinómica (Nm).

4.2.5.b Mejoras en el observador de estado

Para mejorar la estimación del observador de estado y eliminar el error de estado estacionario que presenta, es necesario agregarle un control integral en su lazo de control. Para esto, es posible expandir el vector de estados real y el vector de estados estimados según la Ecuación (139).

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ d(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \widetilde{\theta}_m(t) \\ \widetilde{\omega}_m(t) \\ \widetilde{d}(t) \end{bmatrix} \quad (139)$$

Según [4], se puede reescribir la ecuación de estados del observador como la Ecuación (140).

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) &= A\tilde{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + K_e[y(t) - C\tilde{\mathbf{x}}(t)] + B_d\tilde{d}(t) \\ \dot{\tilde{d}}(t) &= k_i[y(t) - C\tilde{\mathbf{x}}(t)] \end{aligned} \quad (140)$$

Luego, y siguiendo el razonamiento presentado también en [4], es posible escribir una nueva dinámica de error aumentada de la forma de la Ecuación (141).

$$A_Z - K_Z C_Z = \begin{bmatrix} A - K_e C & E \\ -k_i C & 0 \end{bmatrix} \quad (141)$$

Donde la matriz E normalmente debería ser igual a B_d . Sin embargo, se puede tomar que el elemento de B_d igual a $-\frac{1}{r_{eq}}$ sea absorbido por la carga $T_{ld}(t)$, de manera que $B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = E$. Entonces, reemplazando los elementos correspondientes de la Ecuación (141), se obtiene la Ecuación (142).

$$\dot{\mathbf{e}}_z(t) = \begin{bmatrix} -k_{e_\theta} & 1 & 0 \\ -k_{e_\omega} & 0 & 1 \\ -k_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_z(t) \quad (142)$$

Con $\mathbf{e}_z(t) = \mathbf{z}(t) - \tilde{\mathbf{z}}(t)$. El polinomio característico del nuevo observador es como aparece en la Ecuación (143) y se vuelven a ubicar los polos en -3200 rad/s.

$$s^3 + k_{e_\theta}s^2 + k_{e_\omega}s + k_i = (s + 3200)^3 \quad (143)$$

Despejando, las constantes toman los valores:

$$\begin{aligned} k_{e_\theta} &= 9600 \left[\frac{1}{s} \right] \\ k_{e_\omega} &= 30720000 \left[\frac{1}{s^2} \right] \\ k_i &= 3.2768 \cdot 10^{10} \left[\frac{1}{s^3} \right] \end{aligned}$$

El diagrama de bloques resultante de la implementación del control integral en el observador de estados reducido, se muestra en la Figura 88.

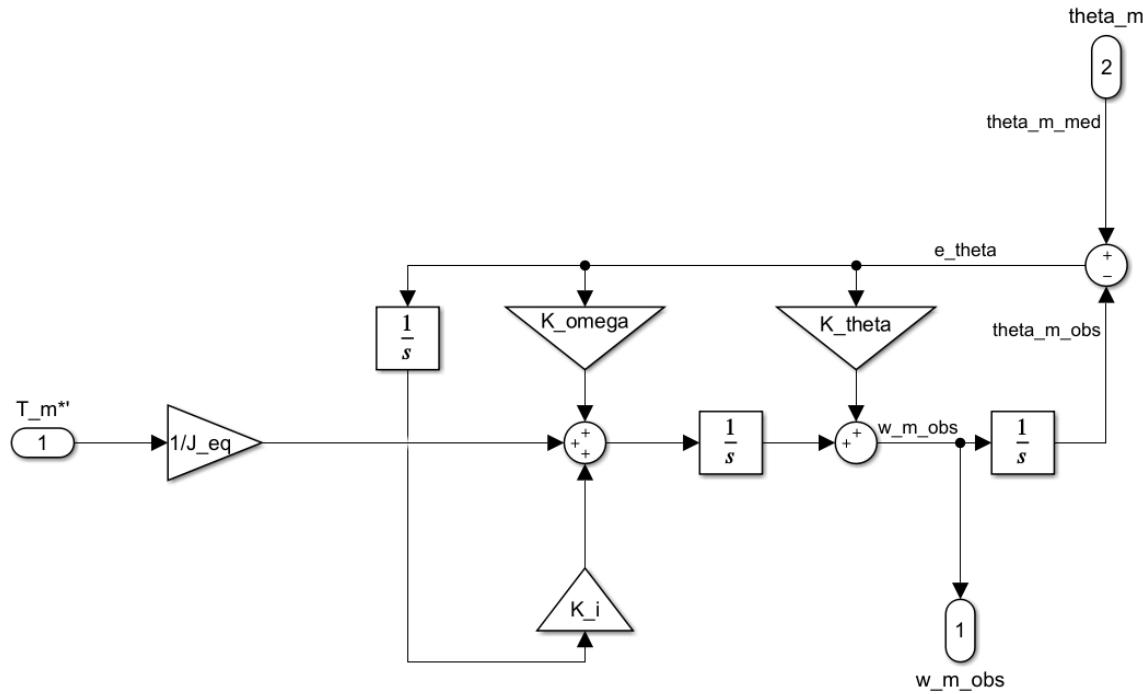


Figura 88: Observador de estados reducido con control integral implementado.

Se simuló el sistema nuevamente con los cambios realizados, y como se puede ver en la Figura 89 y 90, ya no presenta error de estado estacionario en la meseta de la consigna.

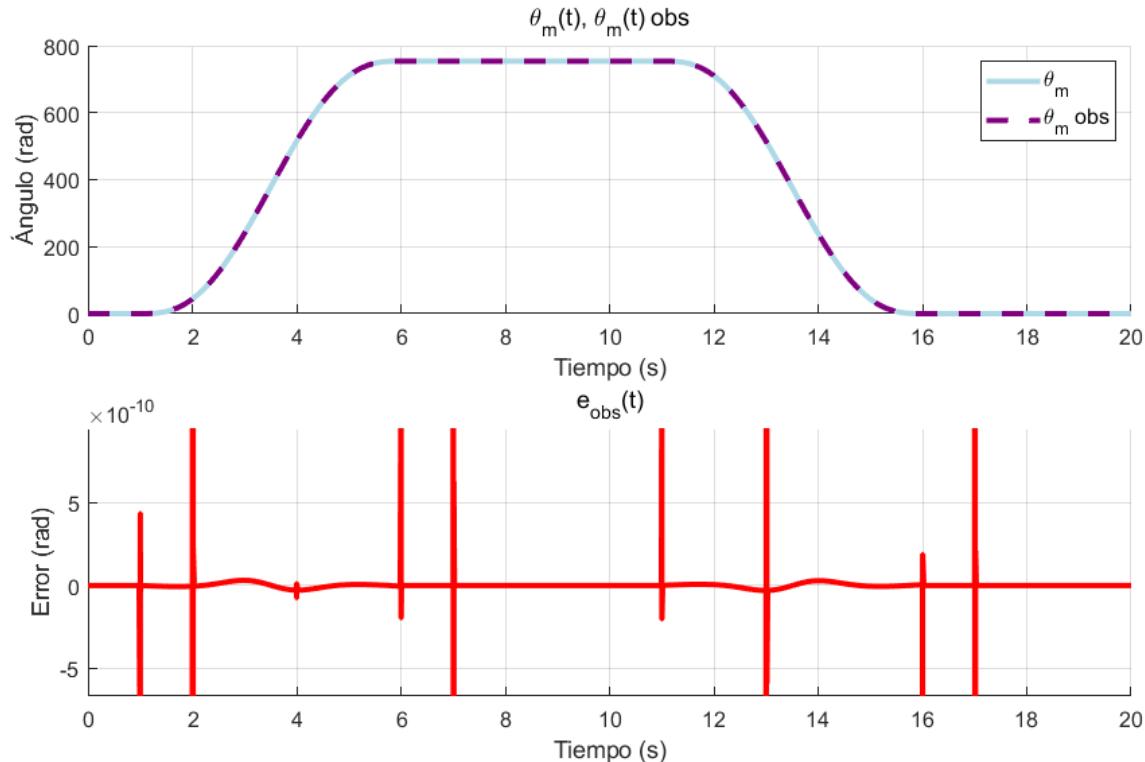


Figura 89: Diferencia entre $\theta_m(t)$ medido vs observado.

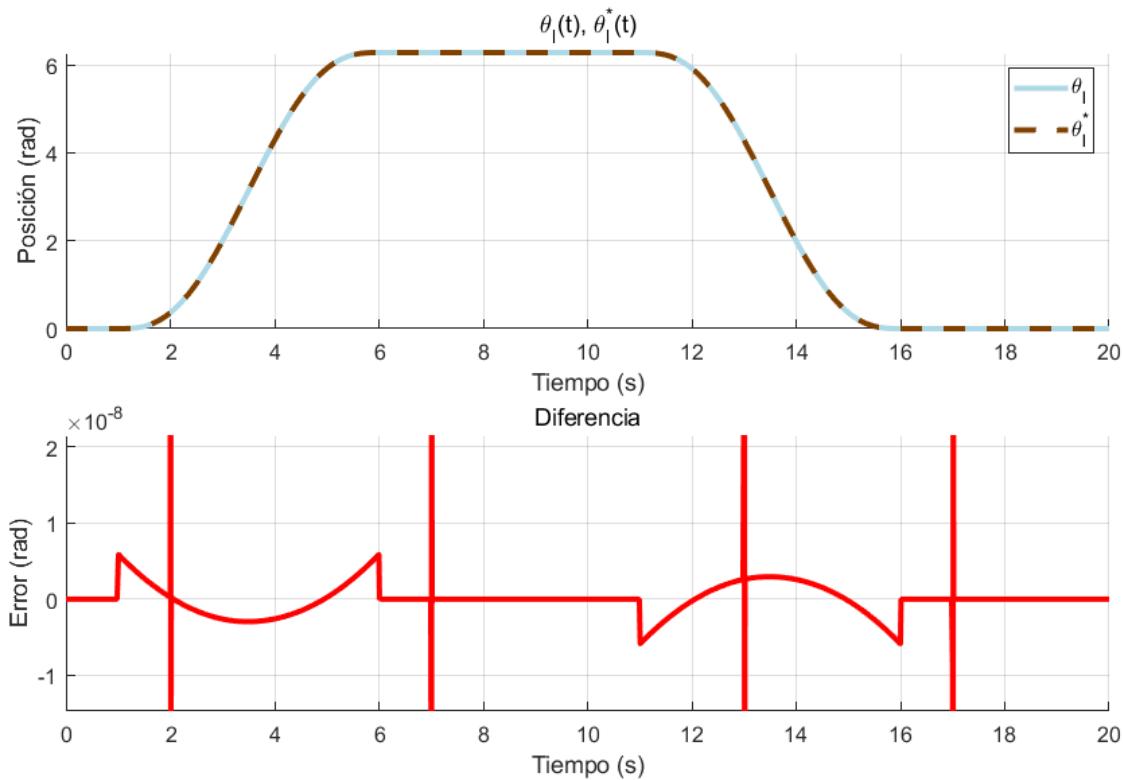


Figura 90: Diferencia entre $\theta_l(t)$ medido vs $\theta_l^*(t)$.

4.2.5.c Comportamiento térmico

Para corroborar el comportamiento térmico de la máquina eléctrica, se tomaron las siguientes premisas de estudio:

- Consigna para operación continua repetitiva que consta de un posicionamiento en 0 rad, luego en 2π rad y finalmente de nuevo en 0 rad, de la misma forma polinómica que se propuso anteriormente. La consigna se repite cada 20 s.
- A responder ante una carga $T_{ld}(t)$ repetitiva con ciclo de operación $T_{op} = 20$ s. La carga vale 5 N m el 50 % del tiempo y 0 N m el otro 50 %.
- Temperatura ambiente: $T_{amb}(t) = cte = 25^\circ\text{C}$, resistencia interna del bobinado variable con la temperatura. El motor comienza siempre con $T_s^\circ(0) = T_{amb}^\circ(0)$.
- Consignas de corrientes $i_{ds}^*(t) = i_{0s}^*(t) = 0$
- Se simula para inercias máxima y mínima.

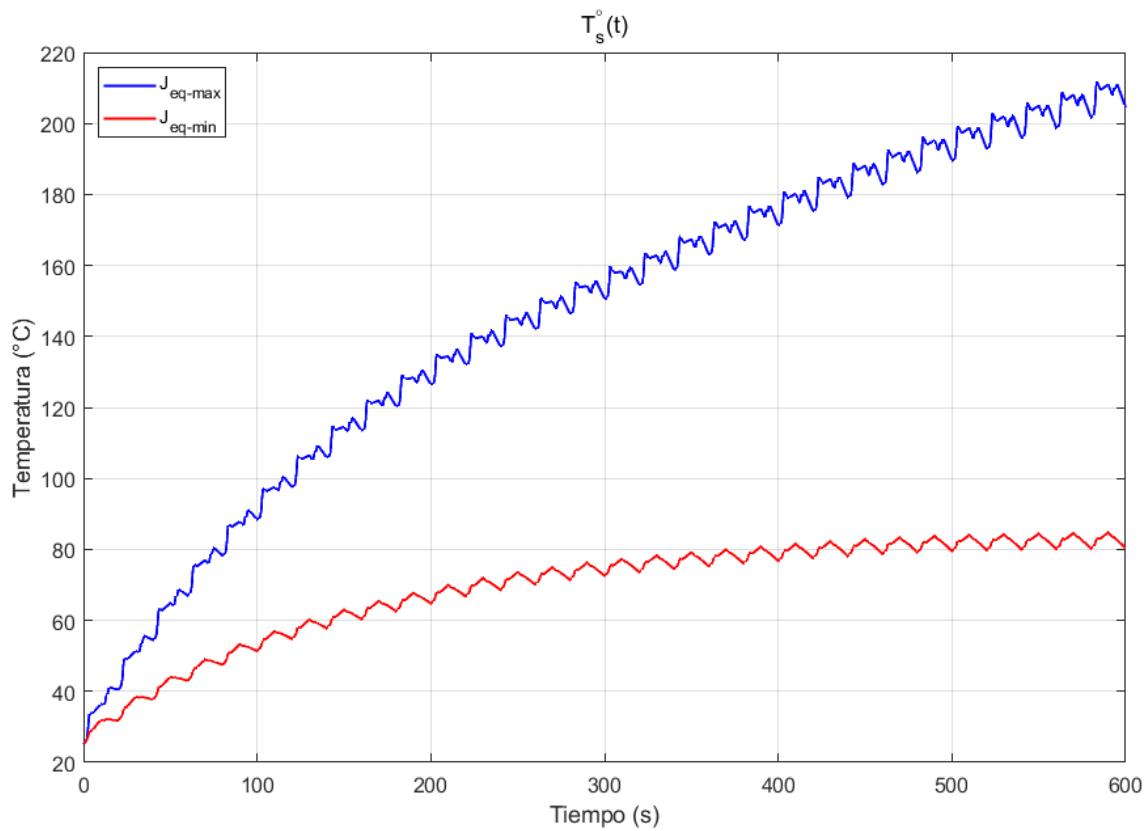


Figura 91: Comportamiento térmico del motor para operación continua repetitiva ($T_{amb}^o(t) = 25^{\circ}\text{C}$).

A partir de Figura 91 se puede concluir que para la mínima inercia, la máquina se encuentra dentro de los valores esperados para su correcto funcionamiento dentro de estas condiciones de operación. La simulación se corta pasados los 600 s debido a que la temperatura oscila asintóticamente alrededor de los 83°C para este caso. Otorga también, un cierto margen a que se diera un aumento del 'duty cycle' y/o período de la carga, puesto que más tiempo con carga implica mayor disipación de potencia y por ende mayor aumento de temperatura. Por otro lado, para una inercia máxima, la simulación muestra que la temperatura del bobinado sobrepasa los límites.

Un caso muy desfavorable se presentaría si $J_{eq} = J_{eq-max}$ (es decir $m_l = 1.5 \text{ kg}$) y además $T_{amb}^o(t) = 40^{\circ}\text{C}$, conservando la misma carga (Figura 92). Este escenario no es fuera de lo común y justifica la necesidad de colocar el motor en un ambiente controlado, o bien de utilizar disipadores o ventiladores, puesto que alcanza temperaturas muy por encima de su límite. La carga, además, se ve que tiene mucha insidencia sobre la temperatura del bobinado, porque exige corrientes mas grandes. Para la inercia mínima, la temperatura alcanza asintóticamente los 100°C, estando aún por debajo del límite.

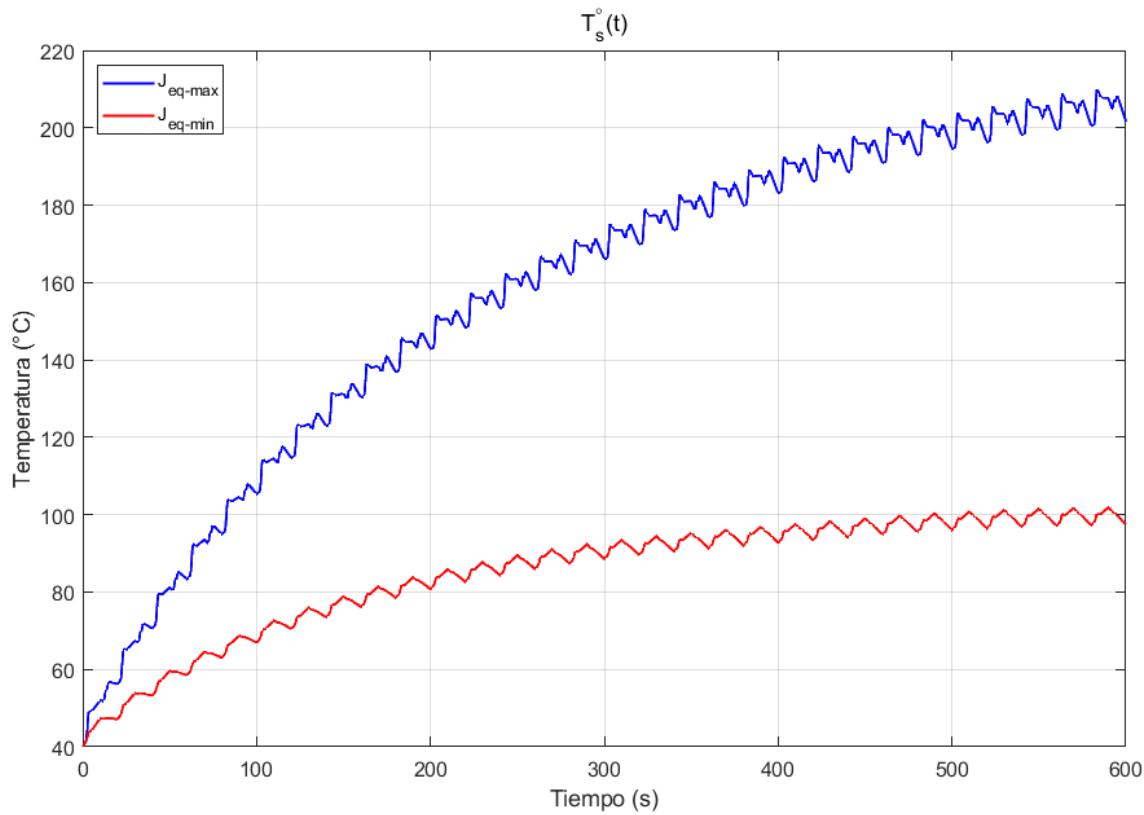


Figura 92: Comportamiento térmico del motor para operación continua repetitiva ($T_{amb}^o(t) = 40^\circ\text{C}$).

4.2.5.d Sensores y acondicionadores de señal no ideales

Hasta ahora se venían utilizando sensores y acondicionadores de señal ideales (función de transferencia unitaria y ancho de banda infinito), lo que implica el no desfasaje entre la señal de entrada y la de salida del dispositivo. Esto es válido para realizar primeras aproximaciones de los modelos que se desean implementar, pero en la práctica (sistemas reales, no ideales) esto no se cumple. Al considerar respuestas no ideales (ancho de banda limitado), aparecen síntomas de degradación del desempeño de los modelos, funcionando los sensores como filtros de señal tipo pasa bajos (LP) con ganancia unitaria.

Se comienza haciendo el modelo LP no ideal de los sensores de corriente y posición en el espacio de estados. Para las señales medidas $i_{as}(t)$, $i_{bs}(t)$, $i_{cs}(t)$ y $\theta_m(t)$ el modelo LP en el espacio de estados (SS) de segundo orden, en la forma canónica diagonal conjugada, se pueden obtener de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ [s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2] Y(s) &= \omega_n^2 U(s) \\ s^2 Y(s) + 2\zeta\omega_n s Y(s) + \omega_n^2 Y(s) &= \omega_n^2 U(s) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) &= \omega_n^2 u(t) \end{aligned}$$

De donde es posible obtener a partir de la última expresión:

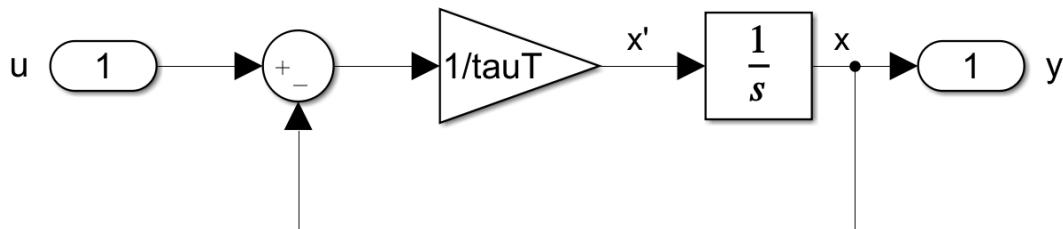


Figura 93: Modelo de primer orden.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (144)$$

Por otro lado, el modelo de estados (SS) de primer orden para el sensor de temperatura es el siguiente:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \\ [\tau s + 1] Y(s) &= U(s) \\ \tau s Y(s) + Y(s) &= U(s) \\ \tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) &= u(t) \end{aligned}$$

De donde es posible obtener a partir de la última expresión:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (145)$$

Los modelos presentan los siguientes parámetros:

- Sensores de corriente: $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$, $\zeta = 1$.
- Sensor de posición: $\omega_n = 2000 \frac{rad}{s}$, $\zeta = 1$.
- Sensor de temperatura: $\tau = 20$ s.

Se pueden ver los modelos de primer y segundo orden respectivamente en las Figuras 93 y 94.

Se simuló nuevamente con la consigna de posición polinómica de la Figura 82, la carga de la Ecuación (132) y $J_{eq} = J_{eq-min}$. La Figura 95 muestra cómo las corrientes divergen a valores muy peligrosos, así como en la Figura 96 se observa que la posición se aleja de la consigna y en la Figura 97 que la temperatura alcanza valores exorbitantes. La simulación a partir de este momento diverge, por lo que no puede continuar.

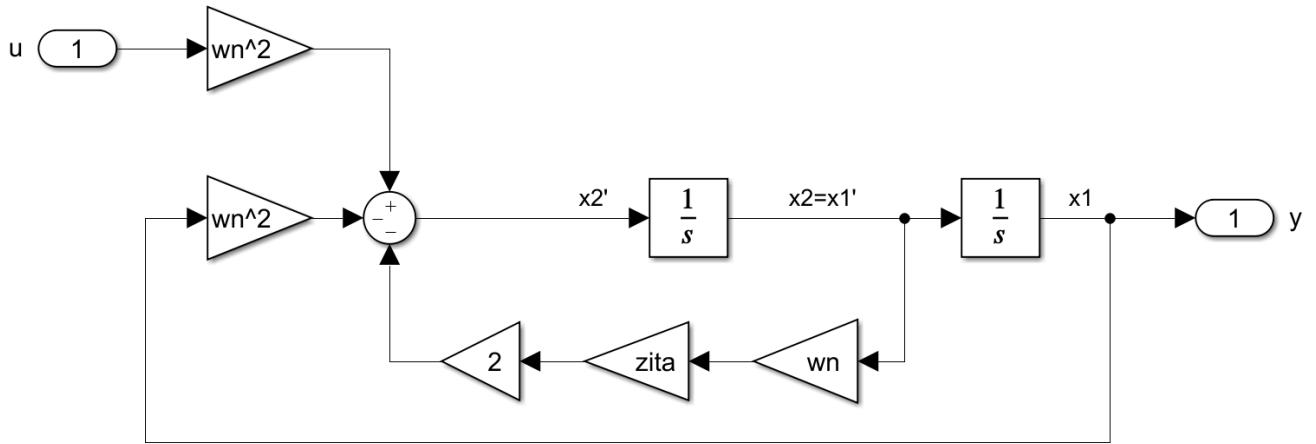


Figura 94: Modelo de segundo orden.

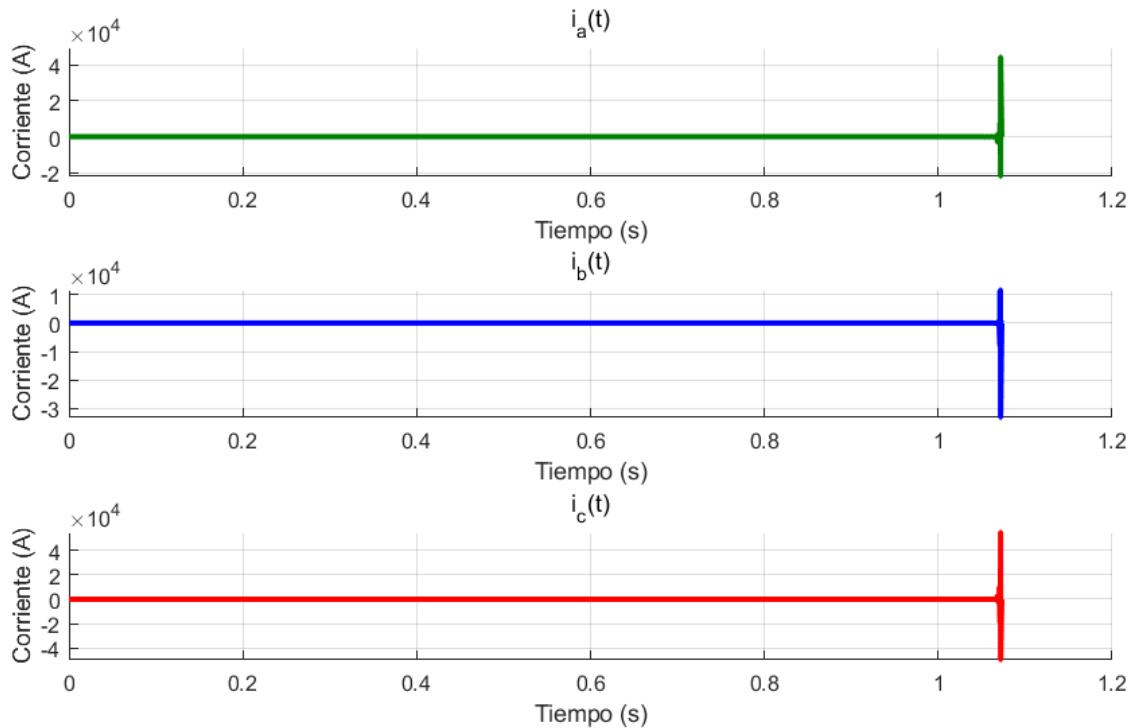


Figura 95: Corrientes abc con nuevo modelo de sensores.

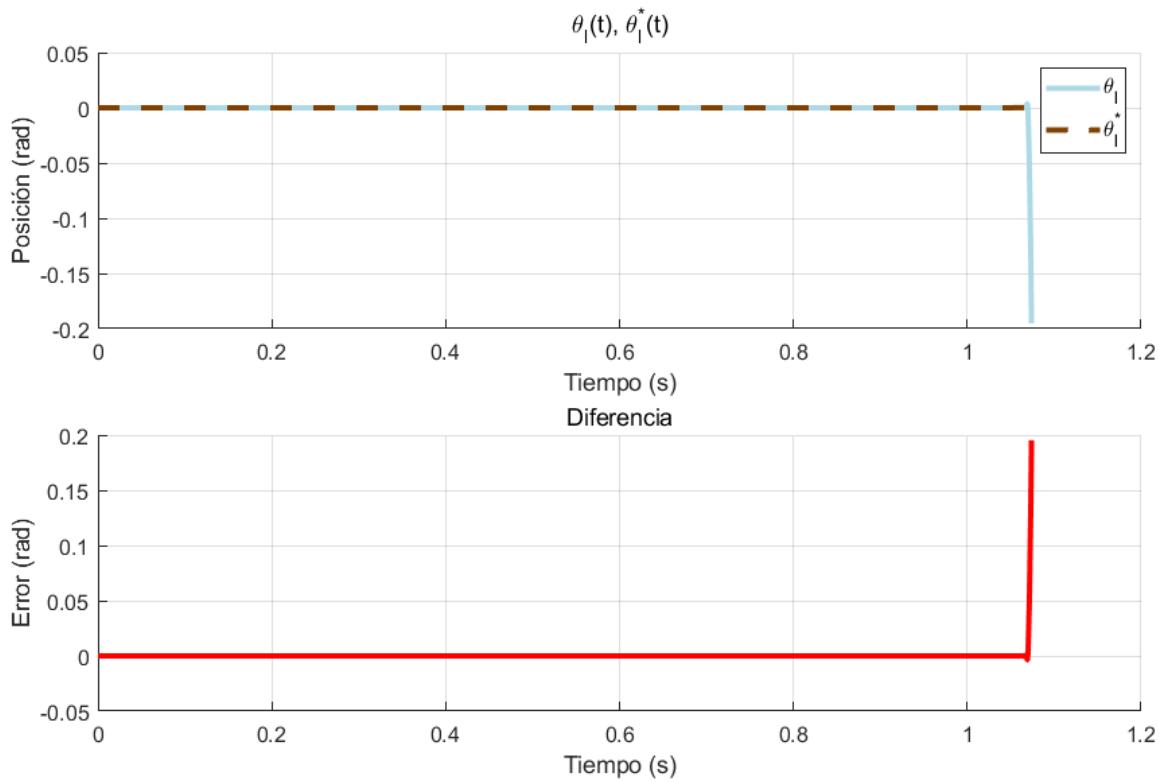


Figura 96: Posición con nuevo modelo de sensores.

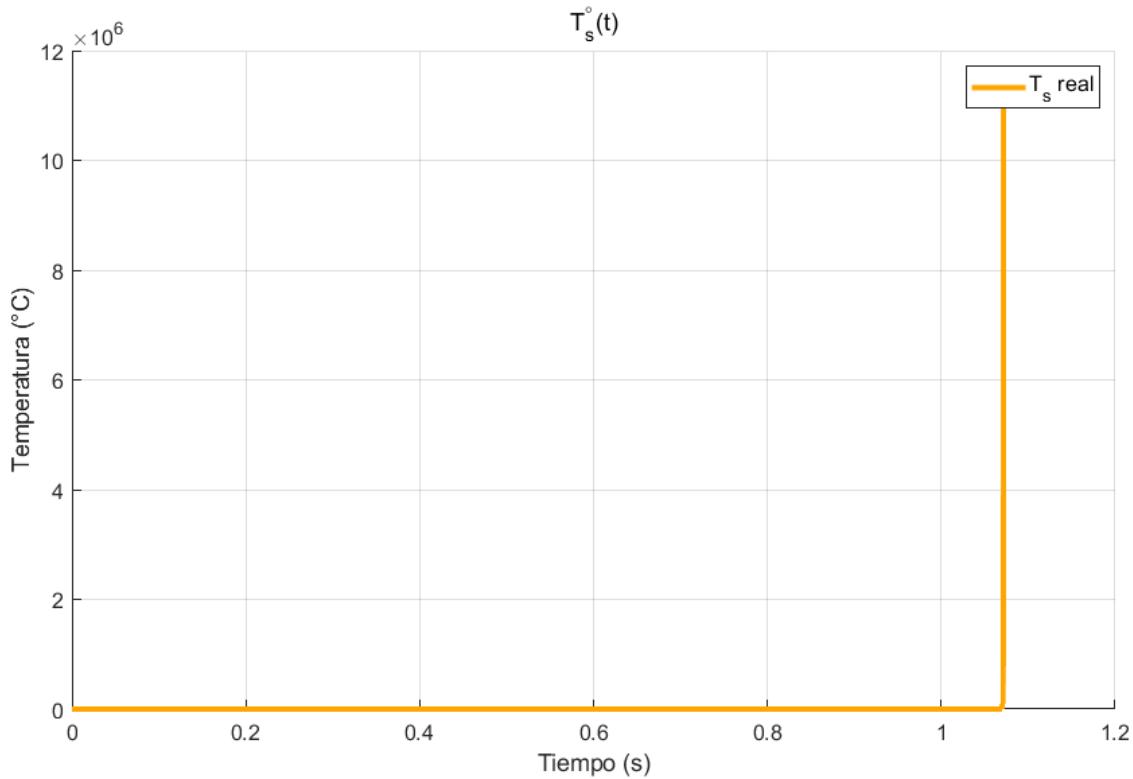


Figura 97: Temperatura del bobinado con nuevo modelo de sensores.

Se intentó una nueva simulación, esta vez con $\omega'_n = 2\omega_n$ para los sensores de corriente y posición. Los resultados se muestran en las Figuras 98, 99 y 100, donde se observa que con sensores más rápidos es posible seguir exitosamente la consigna. En el caso de la posición, notar que aparecen transitorios un poco más largos que antes, esto se puede apreciar especialmente en la Figura 100, en los tiempos t en que hay escalones de carga $T_{ld}(t)$. Para la temperatura, en la Figura 101 se puede ver que el sensor es demasiado lento para medir fielmente. Un sensor de temperatura con un τ más pequeño es una buena alternativa para mejorar esto.

Para $\omega'_n = 3\omega_n$ y superior, el sistema se comportará casi idénticamente al caso anterior, puesto que seguir aumentando la frecuencia de corte no supone una mejora sustancial, aunque los transitorios en la posición real y estimada vuelven a acortarse.

Los sensores deben ser al menos 2 veces más rápidos que los lazos de control. Algunos autores recomiendan que sean de 5 a 10 veces más rápidos para mejores resultados.

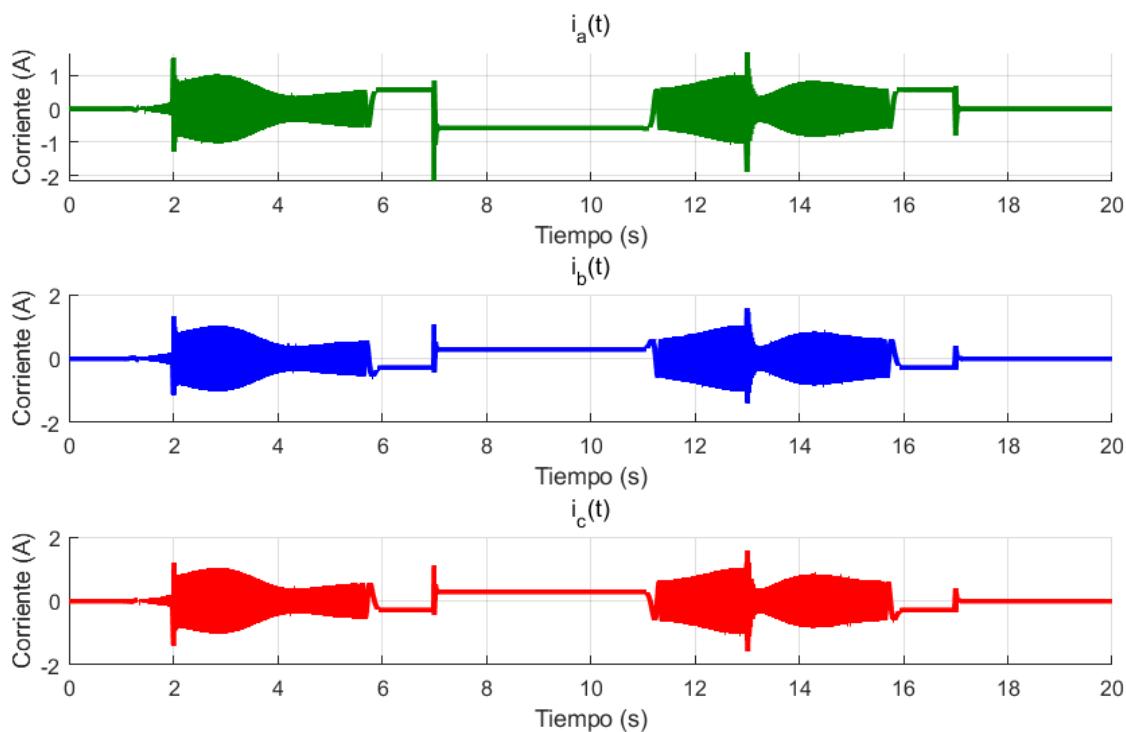


Figura 98: Corrientes abc con modelo nuevo ($\omega'_n = 2\omega_n$).

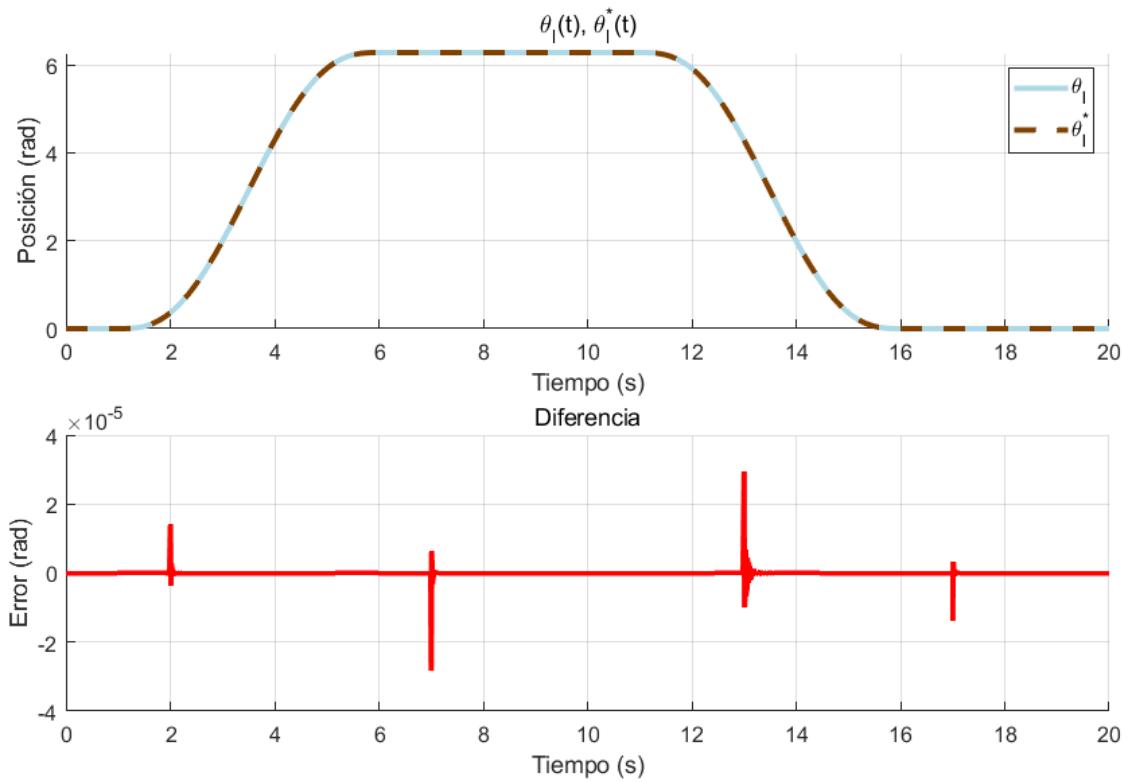


Figura 99: Posición con modelo nuevo ($\omega'_n = 2\omega_n$).

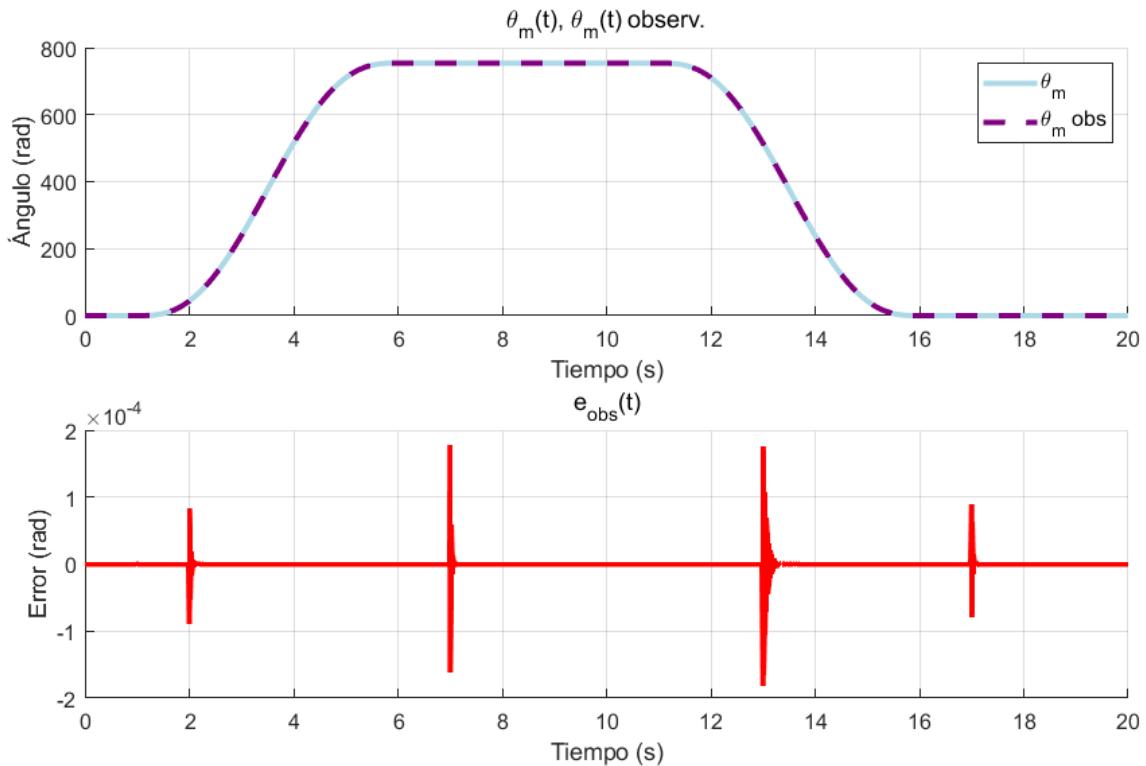


Figura 100: Posición estimada con modelo nuevo ($\omega'_n = 2\omega_n$).

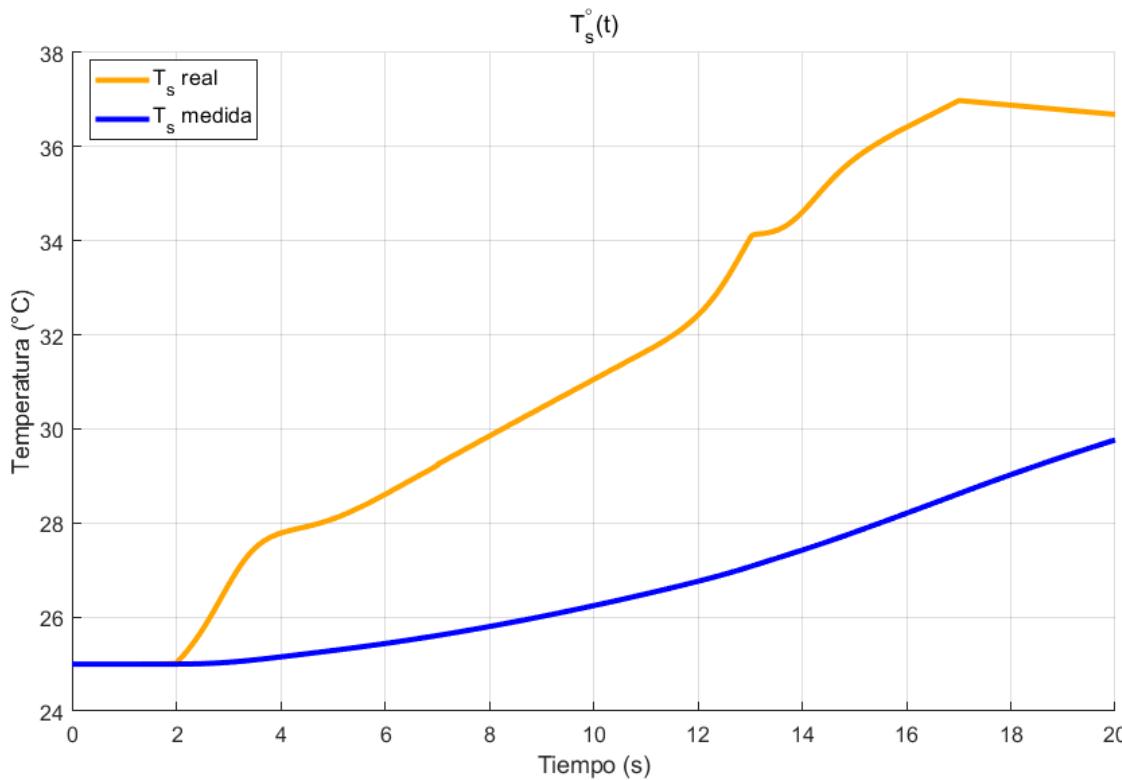


Figura 101: Temperatura del bobinado con modelo nuevo ($\tau = 20s$).

4.2.5.e Modulador trifásico de tensión no ideal

Adicionalmente, se realiza la transición de un modelo ideal a un modelo no ideal en el sistema modulador trifásico de tensión, el cual representa al inversor mediante un modelo promediado. Hasta este punto, el inversor ha sido modelado idealmente con $G(s) \equiv 1$. A partir de ahora, se adopta un modelo aproximado más realista, que incorpora saturación y características de filtro pasa bajos (LP) con ganancia unitaria, implementado en espacio de estados (SS) de la siguiente manera:

- Saturación: $|v_{as}(t)|, |v_{bs}(t)|, |v_{cs}(t)| \leq \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl\ max}}{\sqrt{3}}$, $V_{sl\ max} = 48V_{ca\ rms}$
- Tensiones $v_{as}(t), v_{bs}(t), v_{cs}(t)$: modelo LP de segundo orden en espacio de estados (SS), con frecuencia natural $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$ y factor de amortiguamiento $\zeta = 1$.

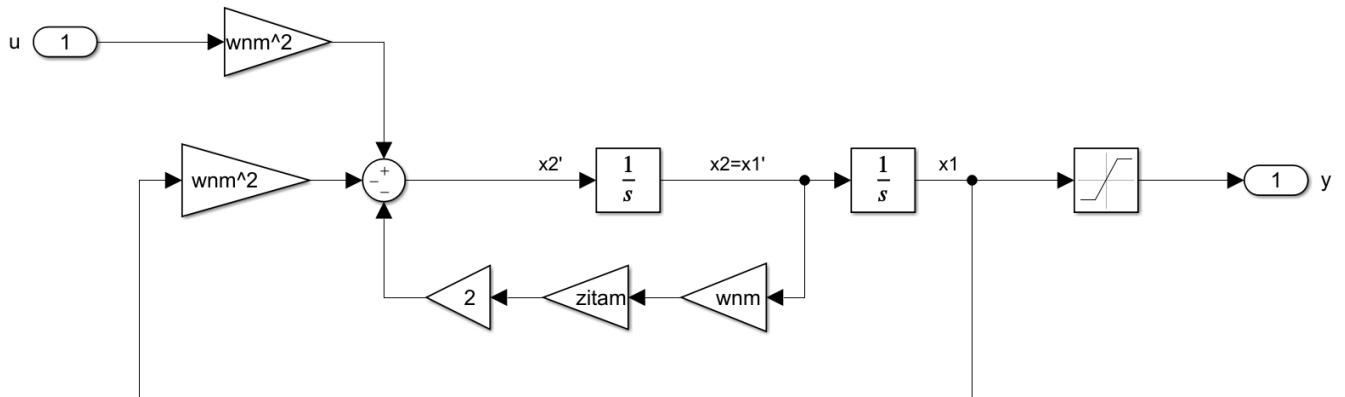


Figura 102: Modelo de inversor no ideal.

Las simulaciones se realizaron en las condiciones anteriormente vistas. Como se puede observar en Figura 103, con los parámetros de consigna, el modulador se comporta como un interruptor de tipo on/off, saturando la salida entre los extremos del intervalo admitido durante todo el periodo de tiempo. Como consecuencia, el sistema actúa como un filtro paso bajos, atenuando las componentes de alta frecuencia del sistema.

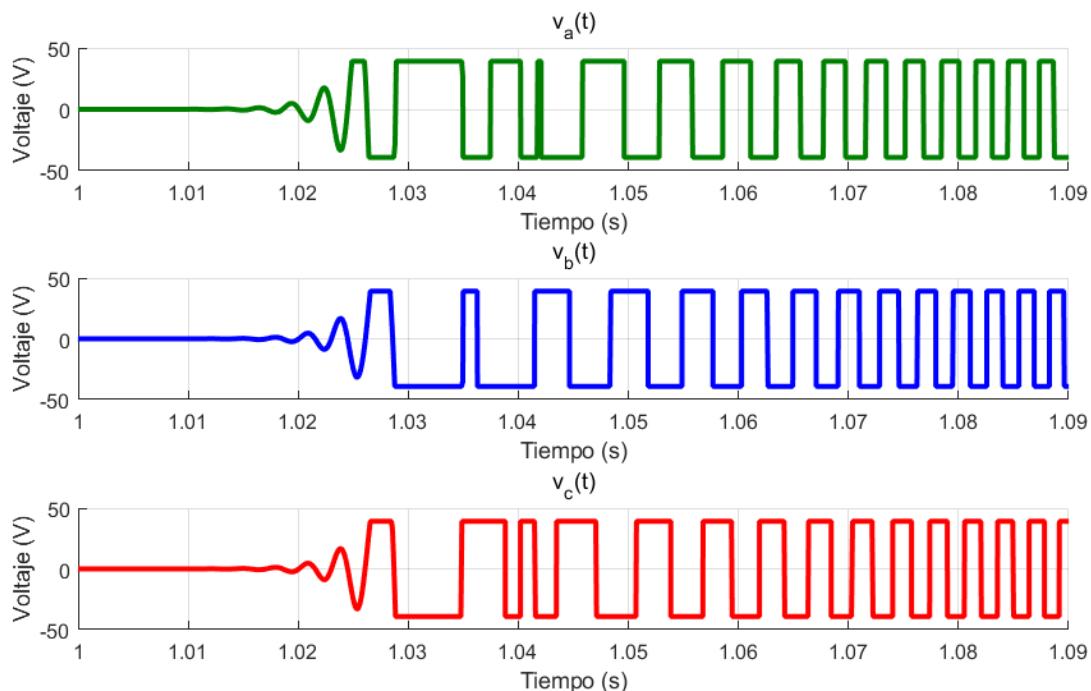


Figura 103: Respuesta de tensiones inversor no ideal.

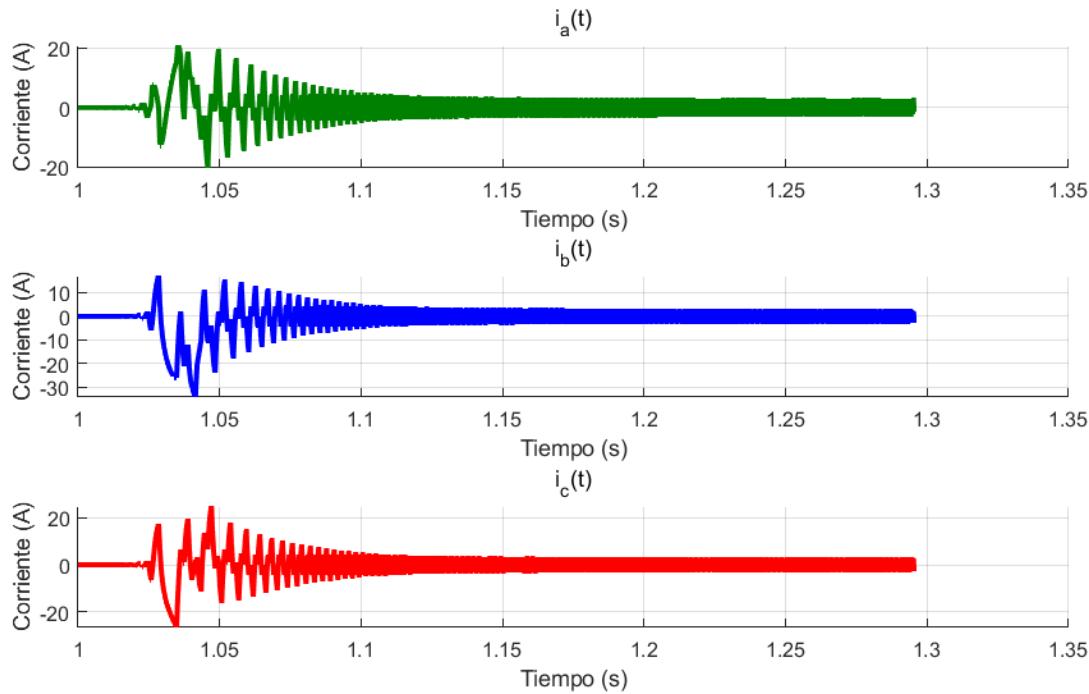


Figura 104: Respuesta de corrientes inversor no ideal.

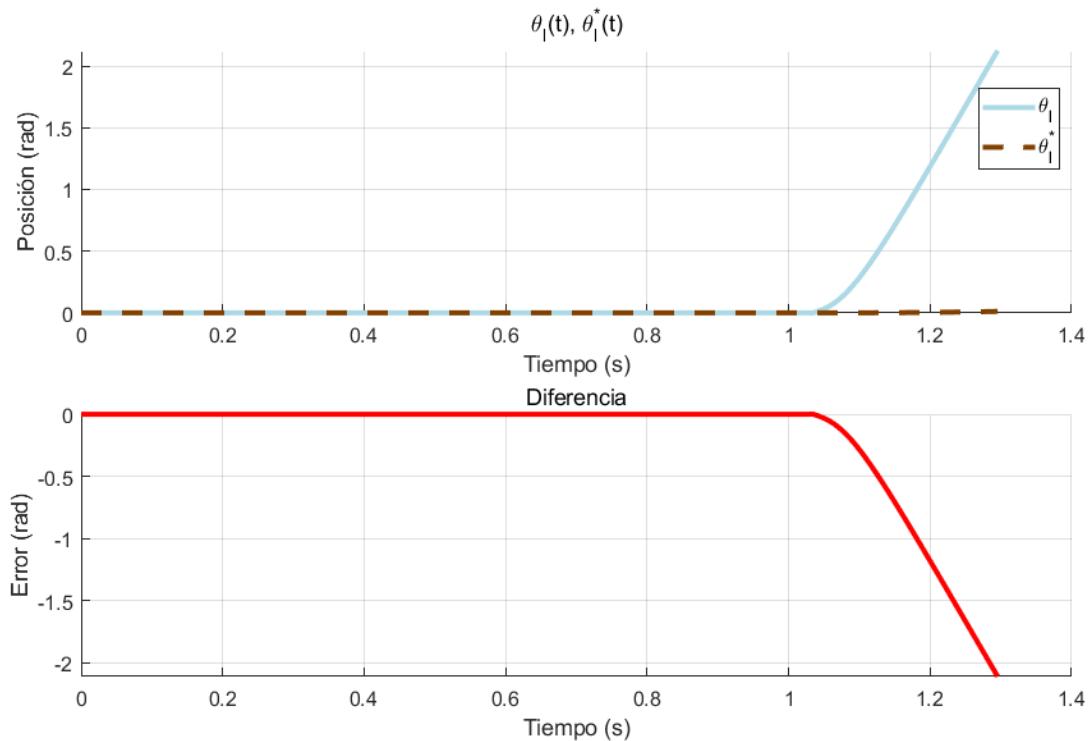


Figura 105: Respuesta de posición inversor no ideal.

Luego de ir variando tanto el ancho de banda de los inversores como también el de los sensores de corriente y posición, se obtiene una serie de respuestas ya más coherentes (señales no saturadas),

que se observan en las Figuras 106, 107 y 108, para las cuales $\omega'_n = 5\omega_n$. Cabe señalar que, a pesar de haber definido sensores con cierto ancho de banda en el ejercicio anterior, en este paso se pone en evidencia que estos no eran lo suficientemente acordes, por lo que se ve modificada su característica de servicio (frecuencia de corte). También se disminuyó el τ del sensor de temperatura a $\tau = 2s$ para apreciar el efecto del cambio. El resultado se puede ver en la Figura 109. La temperatura medida se aleja mucho menos de la real, pero sigue teniendo un retardo apreciable.

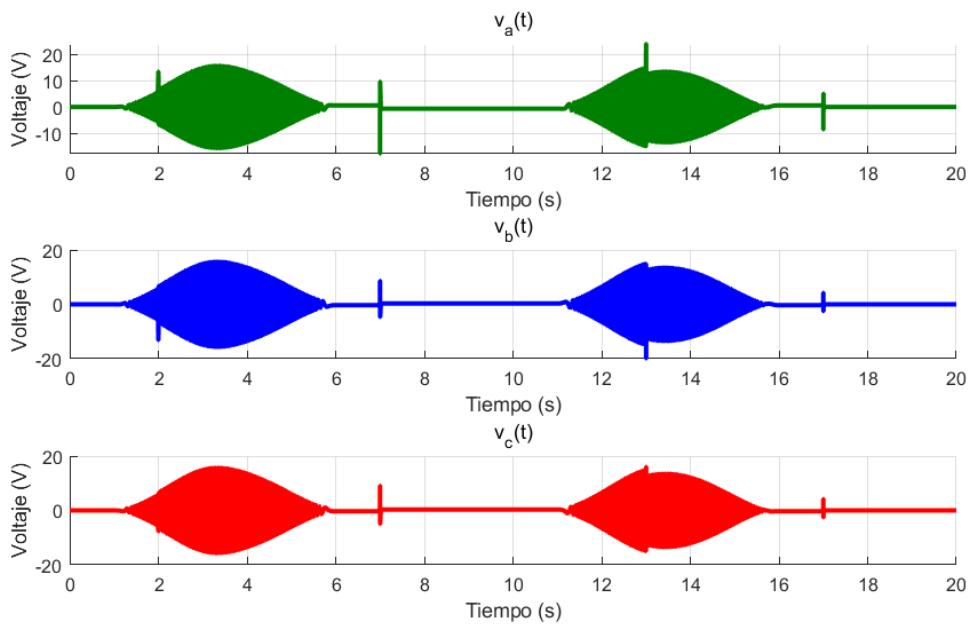


Figura 106: Respuesta de tensión con inversor no ideal ($\omega'_n = 5\omega_n$).

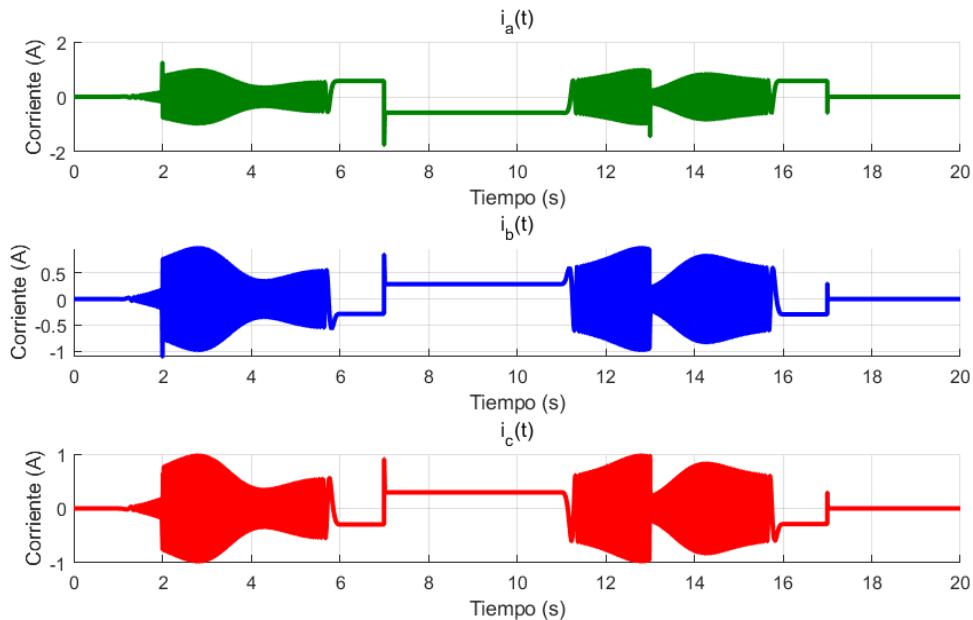


Figura 107: Respuesta de corriente con inversor no ideal ($\omega'_n = 5\omega_n$).

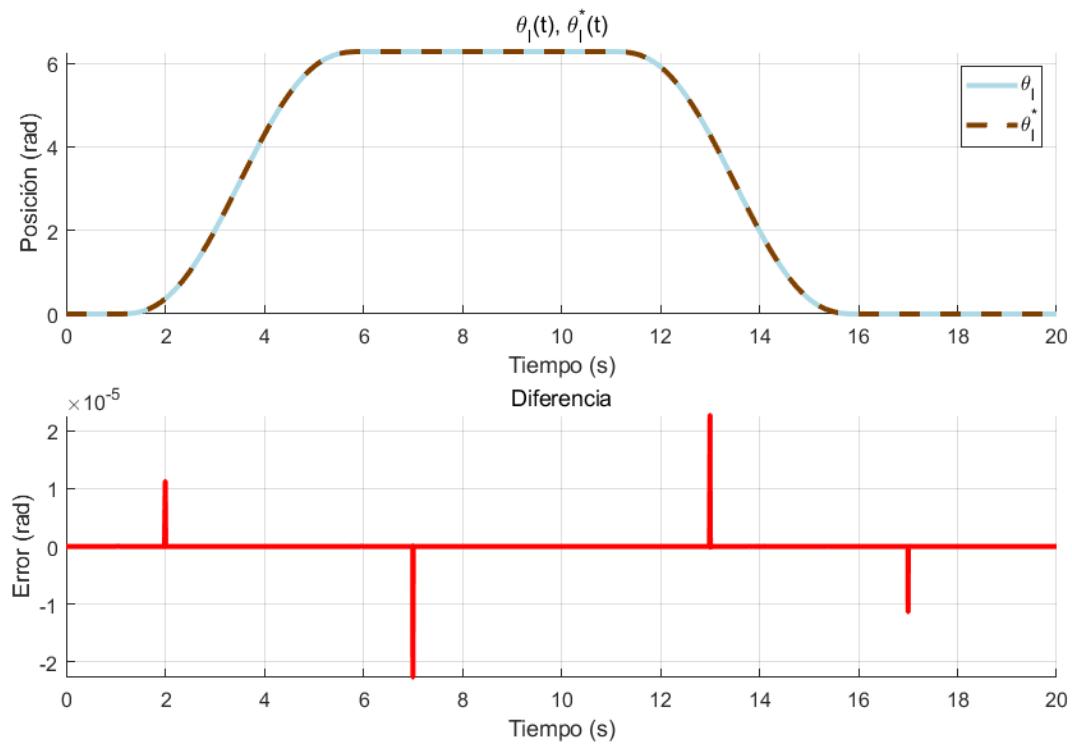


Figura 108: Respuesta de posición con inversor no ideal ($\omega'_n = 5\omega_n$).

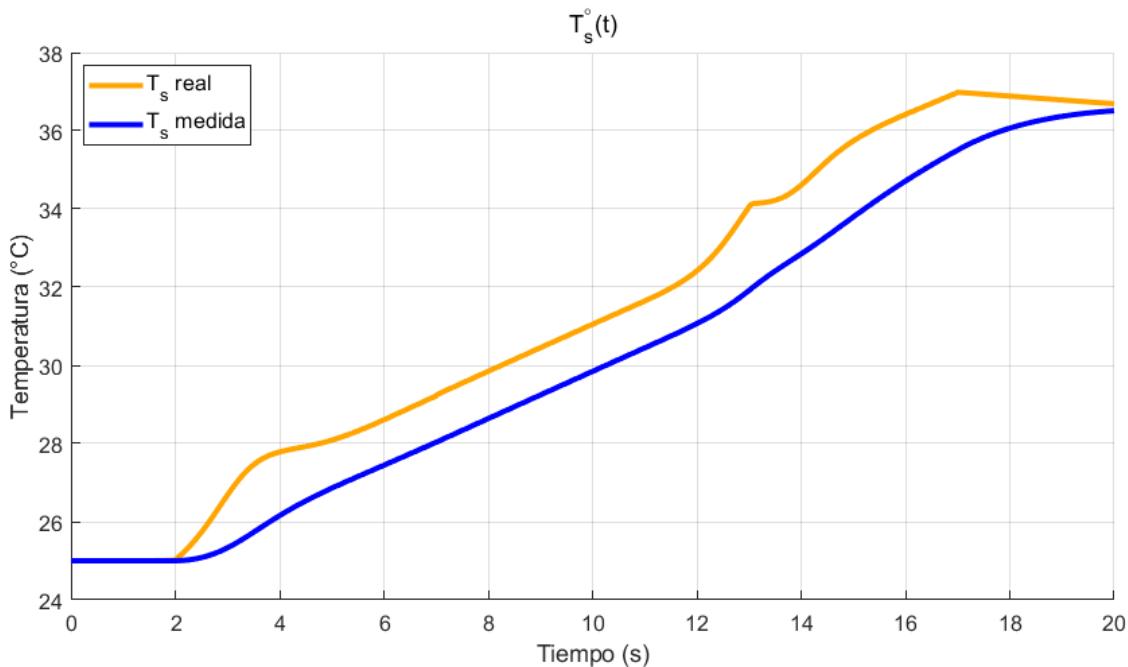


Figura 109: Respuesta de temperatura del bobinado con $\tau = 2s$.

4.2.6. Controlador discretizado y versión final

Se discretiza finalmente el controlador, utilizando el método de Tustin o transformación bilineal, donde se utiliza un período de muestreo T_s , y se le agregan retenedores de orden cero (ZOH) en

cada señal que provenga de un sensor y en las salidas del controlador. Para aplicar el método de Tustin, se parte del método de integración trapezoidal:

$$y[n] = y[n - 1] + \frac{T_s}{2}(u[n] + u[n - 1]) \quad (146)$$

Aplicando la transformada z, se obtiene la Ecuación (147), expresión a partir de la cual se obtiene el diagrama de bloques de la Figura 110. Además, se puede ordenar para que quede como en la Ecuación (148).

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + \frac{T_s}{2}(U(z) + U(z)z^{-1}) \quad (147)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T_s}{2} \frac{(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1}} \quad (148)$$

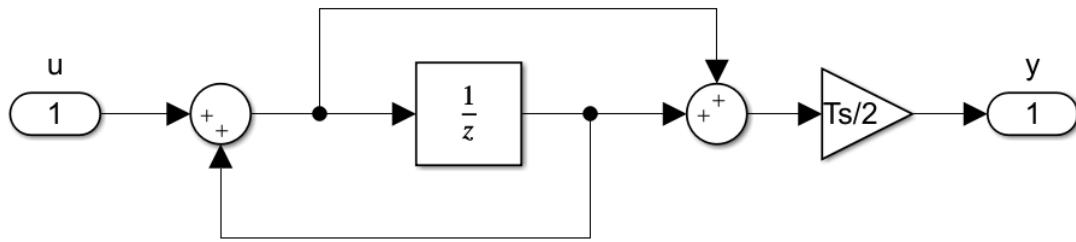


Figura 110: Bloque integrador discretizado.

En las Figuras 111, 112 y 113 se implementa el bloque integrador y se agregan los ZOH que corresponden.

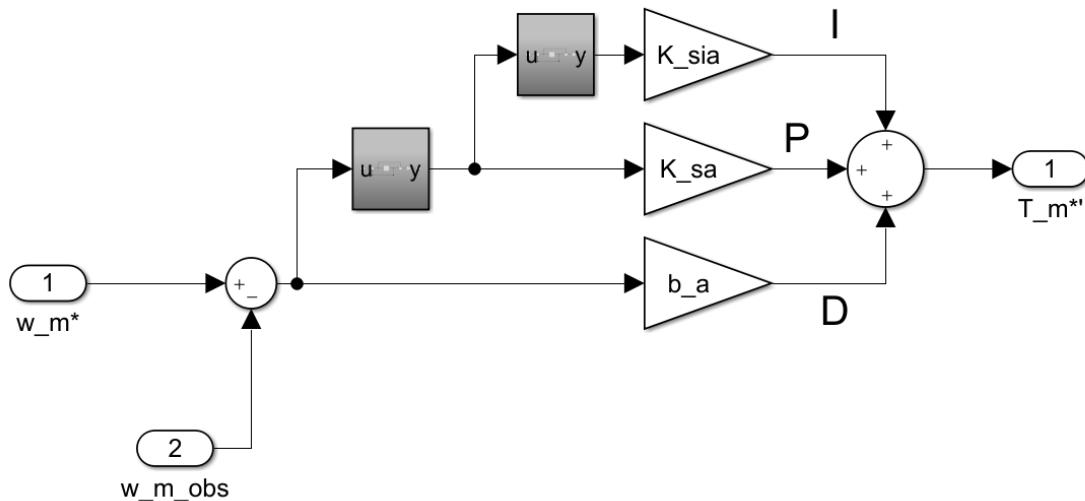


Figura 111: Controlador de movimiento PID discretizado.

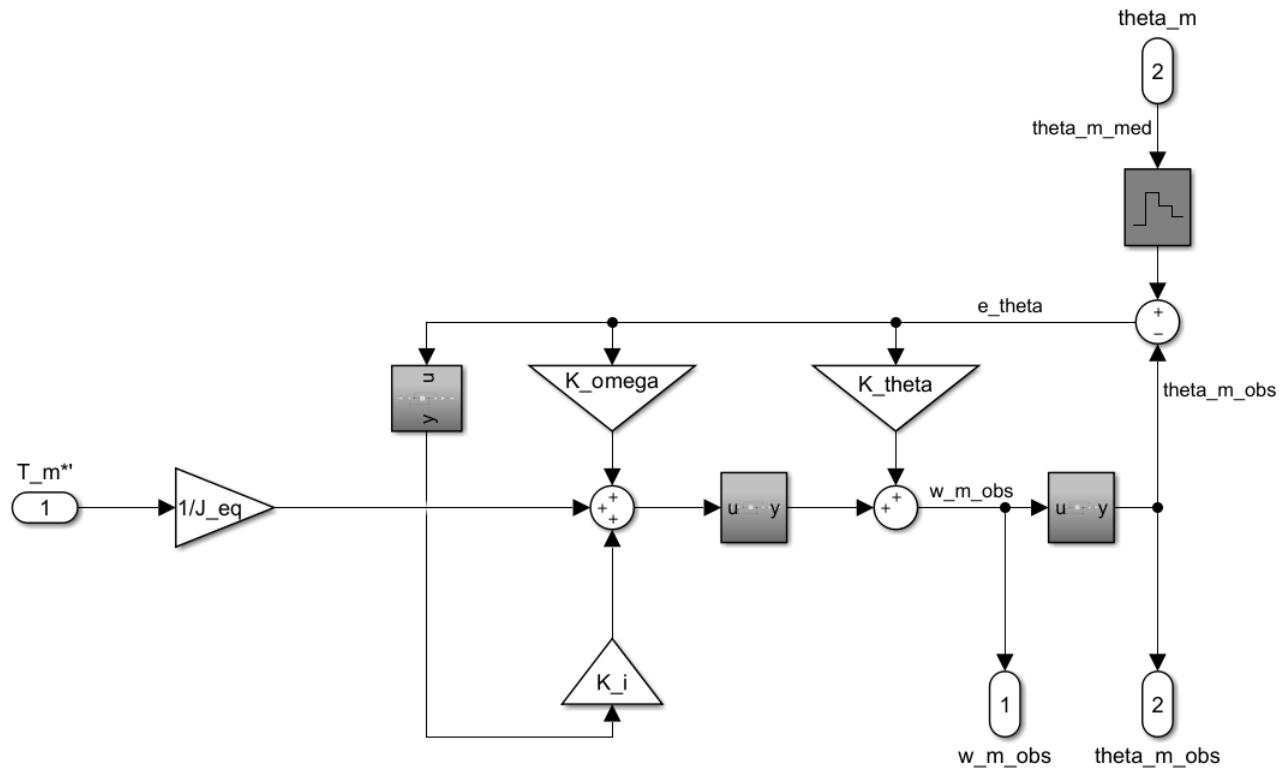


Figura 112: Observador de estados reducido discretizado.

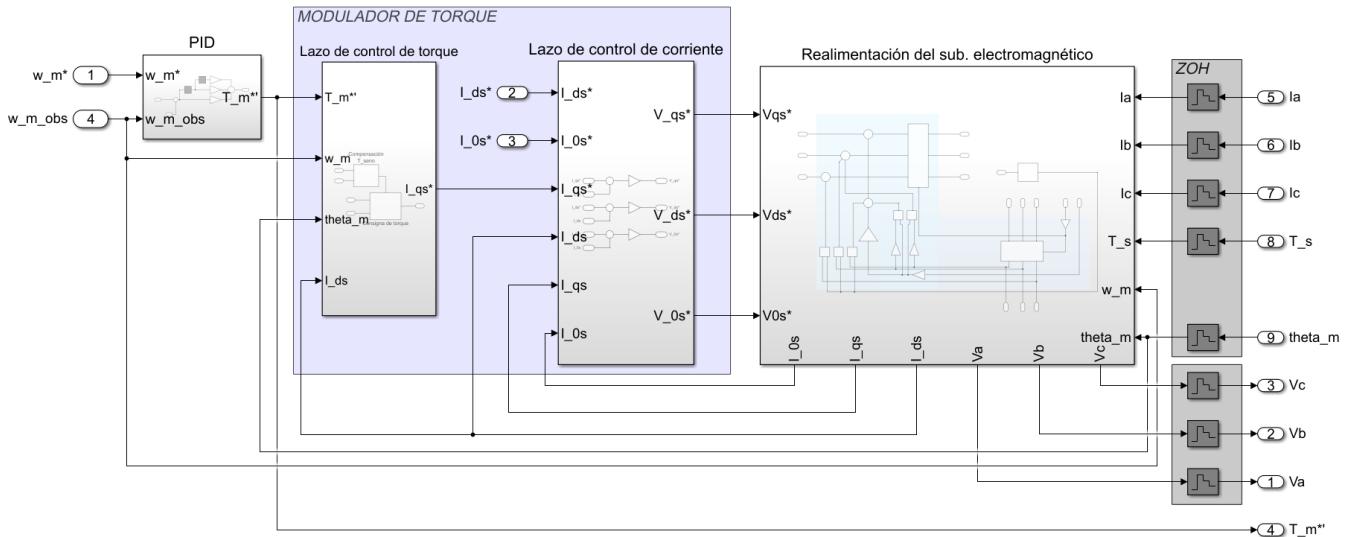


Figura 113: Modelo de controlador completo discretizado.

El T_s utilizado para un desempeño adecuado del controlador, se obtuvo a partir del cálculo del tiempo de muestreo considerando la misma frecuencia impuesta a los inversores $\omega'_n = 5\omega_n = 30000 \frac{rad}{s} \Rightarrow T_s = 0.5 \frac{2\pi}{\omega'_n} = 1.0472 \cdot 10^{-4}$ s.

Para obtener fiabilidad de esta elección, se hicieron pruebas tanto con tiempos de muestreo de la mitad (diferencias imperceptibles), como con tiempo de muestreo del doble (variaciones sustanciales)

del tiempo elegido. Se presentan los resultados en las Figuras 114, 115, 116 y 117 para tiempo de muestreo $T_s = 1.0472 \cdot 10^{-4}$ s.

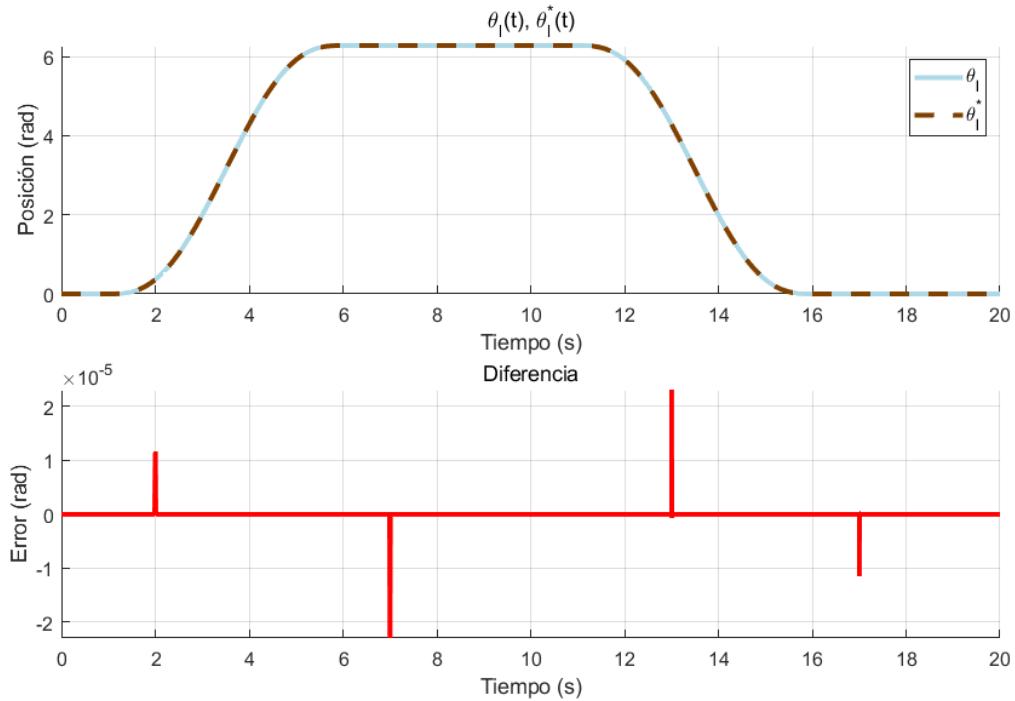


Figura 114: Posición para modelo de controlador discreto.

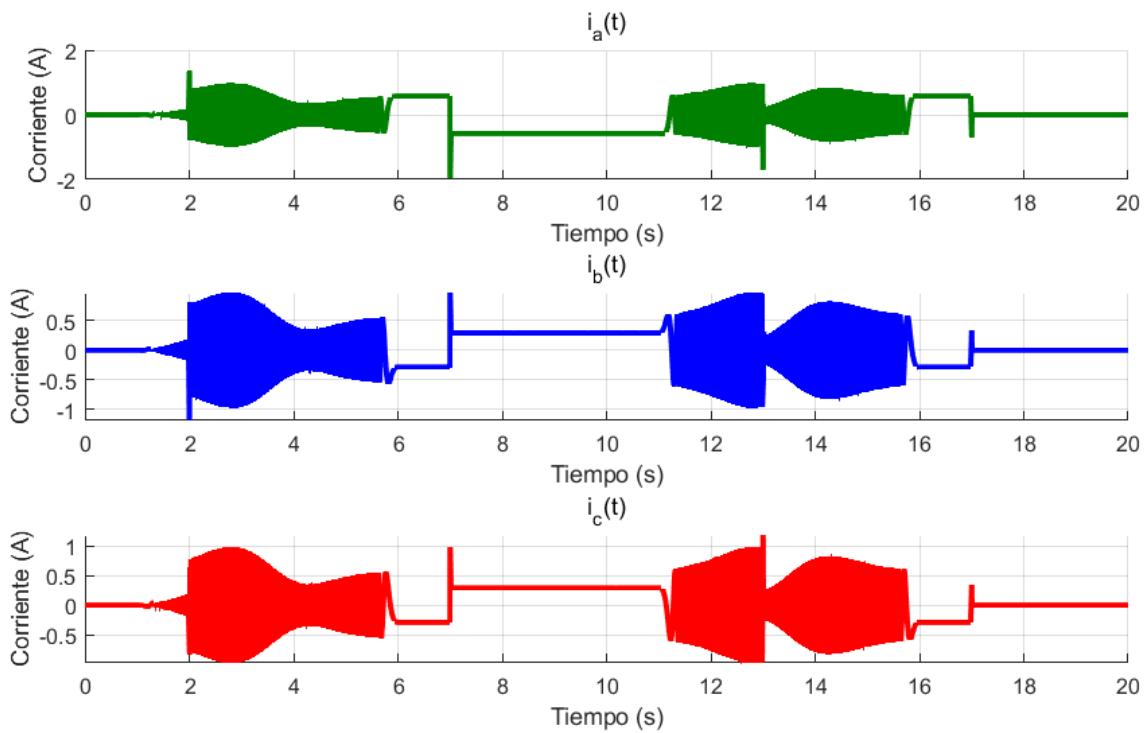


Figura 115: Corrientes abc para modelo de controlador discreto.

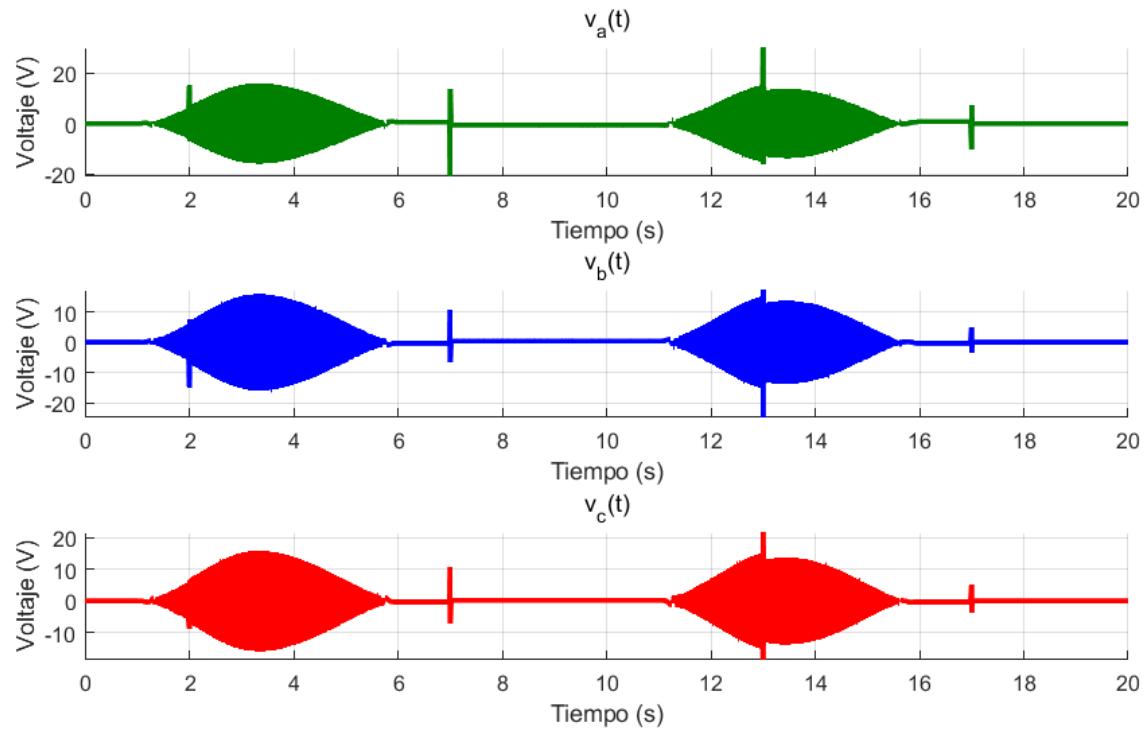


Figura 116: Tensiones abc para modelo de controlador discreto.

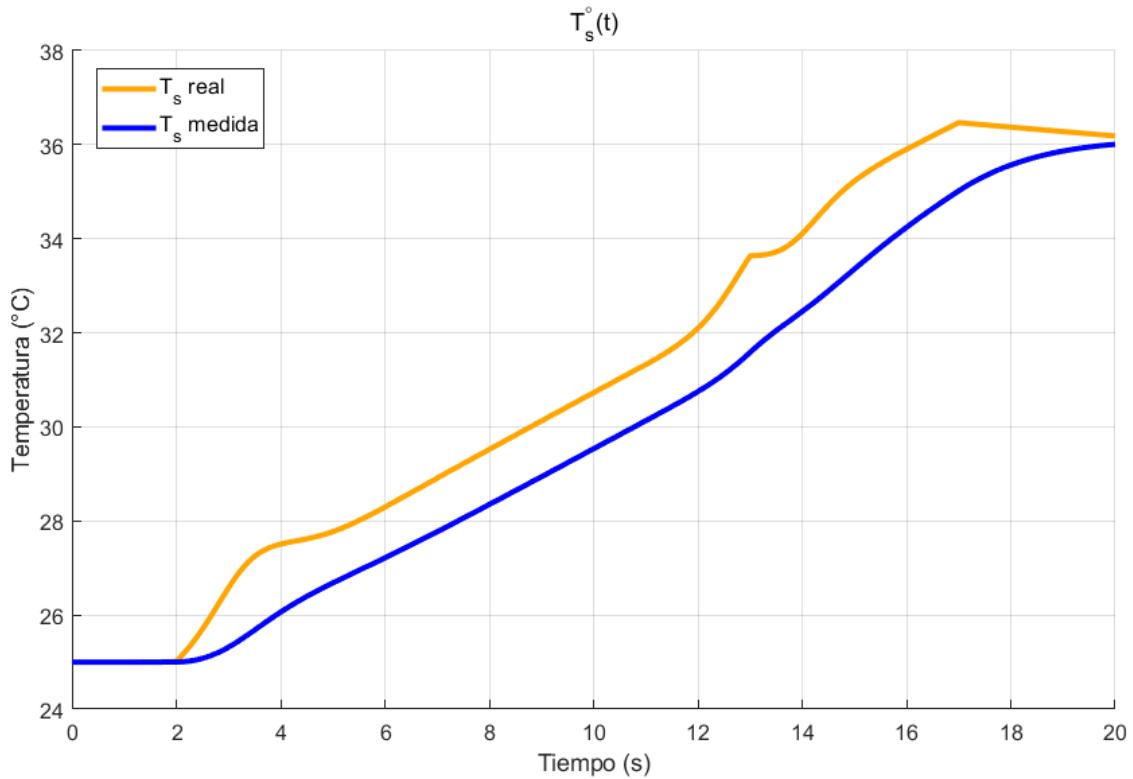


Figura 117: Temperatura para modelo de controlador discreto.

5. Conclusiones

Para concluir este trabajo, se procede a realizar algunos comentarios finales. En primer lugar, se destaca que el objetivo fue alcanzado con éxito, se desarrolló un controlador completo de un accionamiento de CA para una máquina síncrona de imanes permanentes encargada del movimiento de un brazo robótico de 1 GDL, acoplado al mismo mediante un tren de transmisión de tipo reducción de engranajes planetarios.

Las simulaciones demostraron que el control es muy efectivo no solo para alcanzar objetivos eficientemente, sino también para el cuidado de la máquina, aunque se hace la acotación de que no es recomendable llegar a los límites de carga máxima, puesto que la corriente aún sigue superando, aunque por muy poco, las especificaciones. Por esto es que no hay mucho margen para variar sin discreción los parámetros del sistema en estas condiciones, sin un previo paso por la simulación. Modificar la consigna haciendo que se ejecute en una ventana de tiempo más grande, para disminuir la velocidad y la aceleración, y por consiguiente el torque y corriente necesarios, podría ser útil en estos casos.

Además, y llevando este sistema de control a una planta física real, se puede concluir que el microcontrolador necesario para el desarrollo no exige características exorbitantes de procesamiento, sino que podría llevarse a la práctica con varios de los que se encuentran en el mercado. A su vez, y respecto a los sensores y acondicionadores de señal necesarios, se llega a que estos también son de uso común, por lo que el proyecto es sumamente realizable.

Referencias

- [1] G. Julián, Proyecto Global Integrador: Guía de Trabajo Control de Accionamiento de CA con Motor Síncrono de Imanes Permanentes, UNCUYO - Ing. Mecatrónica, rev.0 2024.
- [2] G. Franklin et al, Feedback Control of Dynamic Systems, 7th Ed.. Pearson, 2015.
- [3] S. Chapman, Máquinas Eléctricas, 5^a Ed. McGraw-Hill, 2012.
- [4] D. Xiaonan, "Proportional Integral Observer (PIO) Design for Linear Control Systems" (2016). Open Access Master's Theses. Paper 955. <https://digitalcommons.uri.edu/theses/955>