Розв'язок задачі №5.26

Косицький, Озернюк, Панченко

16 квітня 2021 р.

Умова

Вирішити найпростішу задачу класичного варіаційного числення

$$\int_2^3 (x^2 - 1) \cdot (y')^2 \, dx \to extr; \qquad y(2) = 0 \text{ і } y(3) = 1.$$

Розв'язок

Складемо та розв'яжемо рівняння Ейлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

де $F(x, y, y') = (x^2 - 1) \cdot (y')^2$ - підінтегральний вираз.

Розв'язавши рівняння Ейлера, ми знайдемо сімейство екстремалей, серед яких і будемо шукати екстремуми нашого функціоналу. Оскільки F явно від y не залежить, то

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Розглядаючи похідну F по y' помічаємо, що вираз $(x^2 - 1)$ - константа, а тому

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2(x^2-1)\cdot y'.$$

Продиференціювавши останній вираз по змінній x, маємо

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2(2xy' + y''(x^2-1)).$$

Тепер, знайшовши усе необхідне, можемо скласти рівняння Ейлера

$$2xy' + y''(x^2-1) = 0.$$

Розв'яжемо його. Для цього помітимо, що ліва частина - це похідна від $y'(x^2-1)$. Тобто

$$\begin{aligned}
&2xy' + y''(x^2-1) = 0 \iff\\
&(y'(x^2-1))' = 0 \iff\\
&y'(x^2-1) = c_1 \iff\\
&dy = \frac{1}{x^2-1}\cdot c_1\,dx = (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})\cdot\frac{c_1}{2}\,dx.
\end{aligned}$$

Проінтегруємо ліву та праву частини. Отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int dy = \int(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1})\cdot\frac{c_1}{2}\,dx \iff\\
&y = \frac{c_1}{2}\cdot ln(\frac{x-1}{x+1}) + c_2.
\end{aligned}$$

Відсутність модуля у логарифмі пояснюється довільністю константи c_1.

Отож, наразі ми отримали сімейство екстремалей. Знайдемо саме той розв'язок рівняння Ейлера, що задовільняє нашим початковим умовам. Для цього підставимо значення $x = 2$ та $x = 3$, а потім розв'яжемо систему, невідомими якої є константи c_1 і c_2. Система матиме вигляд

$$\begin{cases} 0 = \frac{c_1}{2} \cdot ln(\frac{1}{3}) + c_2, \\ 1 = \frac{c_1}{2} \cdot ln(\frac{1}{2}) + c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{c_1}{2} \cdot ln(3) = c_2, \\ 1 = \frac{c_1}{2} \cdot ln(\frac{1}{2}) + c_2 \end{cases}$$

Підставивши значення c_2 з першого рівняння в друге, отримаємо

$$1 = \frac{c_1}{2} \cdot ln(\frac{1}{2}) + \frac{c_1}{2} \cdot ln(3) \iff$$
$$\frac{1}{ln(\frac{1}{2}) + ln(3)} = \frac{c_1}{2} \iff c_1 = \frac{2}{ln(\frac{3}{2}).}$$

Значення c_2 знайдемо з першого рівняння. Тобто

$$c_2 = \frac{c_1}{2} \cdot ln(3) = \frac{ln(3)}{ln(\frac{3}{2})}.$$

Отож, на даний момент ми маємо лише одну єдину допустиму екстремаль

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{ln(\frac{3}{2})} \cdot ln(\frac{x-1}{x+1}) + \frac{ln(3)}{ln(\frac{3}{2})} = \frac{ln(3 \cdot \frac{x-1}{x+1})}{ln(\frac{3}{2})}.$$

Дослідімо на екстремум. Розглянемо довільну функцію $h \in C^1_{[2,3]}$, для якої $h(2) = h(3) = 0$. Якщо $J(\tilde{y}+h) - J(\tilde{y}) \geq 0$ для будь-якої функції h, то досягається слабкий глобальний мінімум. Якщо виконується нерівність в інший бік, то досягається слабкий глобальний максимум. Якщо нерівність виконується лише в деякому околі $\tilde{y}$, то говорять про локальний екстремум. Якщо ж в будь-якому околі існують такі функції h, що задовільняють обом нерівностям, то екстремум не досягається. Дослідимо різницю

$$\begin{aligned} J(\tilde{y} + h) - J(\tilde{y}) &= \int_2^3 (x^2-1)(\tilde{y}' + h')^2 \, dx - \int_2^3 (x^2-1)(\tilde{y}')^2 \, dx = \\ &= \int_2^3 ((x^2-1)\tilde{y}'^2 + 2\tilde{y}'h'(x^2-1) + (x^2-1)h'^2 - (x^2-1)\tilde{y}'^2) \, dx = \\ &= \int_2^3 (2\tilde{y}'h'(x^2-1) + (x^2-1)h'^2) \, dx. \end{aligned}$$

Підставимо значення $\tilde{y}'$ у підінтегральний вираз. Оскільки $\tilde{y}' = \frac{c_1}{x^2-1} = \frac{2}{ln(\frac{3}{2})\cdot(x^2-1)}$, то

$$
\begin{aligned}
J(\tilde{y}+h) - J(\tilde{y}) &= \int_2^3 \frac{4}{ln(\frac{3}{2})} h'\,dx + \int_2^3 (x^2-1)h'^2\,dx = \\
&= \frac{4}{ln(\frac{3}{2})} \int_2^3 h'\,dx + \int_2^3 (x^2-1)h'^2\,dx = \\
&= \frac{4}{ln(\frac{3}{2})} h(x)\Big|_2^3 + \int_2^3 (x^2-1)h'^2\,dx = \\
&= \int_2^3 (x^2-1)h'^2\,dx \geq 0.
\end{aligned}
$$

Отже, наша різниця функціоналів для будь-якої функції h завжди невід'ємна. Це означає, що **функціонал** в нашій допустимій екстремалі $\tilde{y}$ **досягає глобального мінімуму**.