5. Matrices

En muchas ocasiones hemos visto tablas de doble entrada que resumen la información usando filas y columnas. Como vemos, estas tablas tienen datos numéricos con etiquetas tanto en su parte superior, como en el costado izquierdo que nos permiten asociar estos datos a determinadas categorías.

A este formato de presentar datos numéricos organizados en filas y columnas se le conoce con el nombre de matriz.

Matrices y dataframes

Al agrupar datos numéricos en dos dimensiones, tenemos una matriz. Si en este arreglo bidimensional almacenamos otro tipo de datos, tenemos un dataframe.

5.1 Definición de matrices

Una matriz es un arreglo bidimensional ordenado por filas y columnas. Las matrices se designan por letras mayúsculas.

$$
\begin{array}{cl}
\begin{array}{cccc} \text{Col. 1} & \text{Col. 2} & \text{Col. 3} & \text{Col. 4} \end{array} & \\
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Fila 1} \\ \text{Fila 2} \\ \text{Fila 3} \end{array}
\end{array}
$$

Librerías

En Python, utilizaremos la librería `numpy` para trabajar con matrices, ya que en ella podremos trabajar la operatoria de matrices de una forma más simple. Pero tener en cuenta, que los procesos que se llevan a cabo en `numpy`, implican iteraciones con ciclos `for`, por lo que aprenderemos primero de qué se trata este proceso.

Notación matricial

Cada uno de los elementos que componen una matriz se designan usando la misma letra de la matriz, pero en minúsculas. Además, se utilizan *dos* subíndices que nos indican la posición del elemento. De este modo, si queremos mencionar el elemento de la matriz

A que se ubica en la fila i y en la columna j lo denotamos como

$$a_{ij}.$$

En la matriz A, el elemento a_{23} es el elemento situado en la intersección de la fila 2 con la columna 3.

Ejemplo 1

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denomina M, donde cada uno de sus elementos se denota como m_{ij}. El elemento ubicado en la fila 2 columna 3, se denota de la siguiente forma:

$$m_{23} = 4$$

Orden de una matriz

Para indicar el orden de una matriz se indica primero el número de filas y luego el número de columnas. La notación que se utiliza para expresar el orden de una matriz será $m \times n$.

En la matriz M del ejemplo, el orden de la matriz es 2×3, ya que tiene 2 filas y 3 columnas.

Igualdad de matrices

Dos matrices, A y B se dicen iguales si y sólo sí

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para todo i, j. Notemos que la definición anterior implica que ambas matrices tienen el mismo orden.

Matrices en Python

Una opción para trabajar con matrices en Python es usar listas de listas. Para esto, representamos cada fila de la matriz como una lista de números, que a su vez agrupamos dentro de una lista que las contiene. Por ejemplo, la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se puede representar por

```
B = [[6,7], [1,8], [4,5]]
```

¿Cómo accedemos a los elementos? Usando dos índices, pero recordando que en

Python los índices comienzan en cero. Por ejemplo, el elemento

$$b_{32} = 5$$

de la matriz lo obtenemos como

```
B[2][1]
# Entrega 5
```

A su vez, la primera fila de la matriz podemos obtenerla por

```
B[0]
# Entrega [6, 7]
```

Calculando el orden de una matriz en Python

¿Cómo podemos calcular el orden de una matriz en Python? Como representamos una matriz a través de una lista de listas y cada una de las sublistas tiene el mismo tamaño, podemos multiplicar el largo de cada sublista por el número de ellas. Por ejemplo, usando la matriz del código anterior:

```
B = [[6,7], [1,8], [4,5]]
```

podemos averiguar cuántas filas tiene

```
len(B)
# da como resultado 3
```

y cuántos elementos tiene cada fila

```
len(B[0])
# da como resultado 2
```

por lo que la matriz tiene orden 3×2.

5.2 Operaciones matriciales

Suma de matrices

La suma de matrices se lleva a cabo término a término, es decir, si denotamos la suma de dos matrices A y B por $C = A + B$, entonces los elementos de C están definidos por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\,.$$

Notemos que para que esta suma se lleve a cabo las matrices A y B deben ser del mismo orden. Además, si A y B son de orden $m \times n$, la matriz $A + B$ también es de orden $m \times n$.

¿Y la resta?
Al igual que la suma, podemos definir la resta término a término, es decir, si denotamos la diferencia de A y B por $D = A - B$, entonces

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

¿Cómo podemos sumar en Python?

Supongamos que queremos sumar las matrices

$$E = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

y guardar el resultado en una matriz G.

Usando listas de listas, podemos hacerlo en Python término a término

```
E = [[8, 2, 1],
     [-5, 6, 7]]

F = [[3, 4, 0],
     [4, -3, 9]]

# definimos el resultado previamente
G = [[0, 0, 0],
     [0, 0, 0]]

# iteramos a través de las filas
for i in range(len(E)):

    # iteramos a través de las columnas
    for j in range(len(E[0])):
        G[i][j] = E[i][j] + F[i][j]

print(G)
# [[11, 6, 1], [-1, 3, 16]]
```

`range(len(E))` nos da un rango desde 0 hasta la última fila. Para obtener el rango de las columnas, pedimos el largo de la primera columna, `range(len(E[0]))`.

Ponderación por escalar

Esta operación suena ominosa, pero es sencilla. Un *escalar* no es más que un número y *ponderación* es otra manera, en este caso, de decir multiplicación. Entonces, la ponderación por escalar es la multiplicación de una matriz por un número.

Si tenemos una matriz A y un escalar k, los términos de la matriz de $B = kA$ se definen como:

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij},$$

es decir, al ponderar una matriz A por un escalar k, multiplicamos cada término de la matriz por el escalar.

¿Y en Python?

Supongamos que queremos multiplicar la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 20 & 16 & 18 \\ 12 & 34 & 32 \\ 56 & 22 & 6 \\ 24 & 14 & 28 \\ 18 & 8 & 30 \end{pmatrix}$$

por el escalar $k = 2{,}5$. ¿Cómo lo podemos hacer en Python? Usando listas de listas, lo haremos de una forma similar a la adición, yendo término a término.

```
M = [[20, 16, 18],
     [12, 34, 32],
     [56, 22,  6],
     [24, 14, 28],
     [18,  8, 30]]

k = 2.5

P = [[0, 0, 0],
     [0, 0, 0],
     [0, 0, 0],
     [0, 0, 0],
     [0, 0, 0]]

for i in range(len(M)):
    for j in range(len(M[0])):
        P[i][j] = k * M[i][j]

print(P)
# [[50.0, 40.0, 45.0], [30.0, 85.0, 80.0], [140.0, 55.0, 15.0],
#  [60.0, 35.0, 70.0], [45.0, 20.0, 75.0]]
```

Matriz transpuesta

Sea A una matriz de orden $m \times n$. Se dice que B es la matriz transpuesta de A cuando se cumple que

$$b_{ij} = a_{ji},\ i = 1,2,\dots,n;\ j = 1,2,\dots,m.$$

Simbolizaremos esta matriz por A^T. La matriz A^T es de orden $n \times m$.

¿Cómo transponer una matriz en Python?

Supongamos que queremos transponer la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Si lo hacemos a mano, el resultado es $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

¿Pero en Python? Muy sencillo.

```
A = [[3, 8],
    [5, 1],
    [2, 6]]

At = [[0, 0, 0],
    [0, 0, 0]]

# iteramos por las filas de la transpuesta
for i in range(len(At)):
    # y ahora por las columnas de la transpuesta
    for j in range(len(At[0])):
        # escribimos los índices "al revés"
        At[i][j] = A[j][i]

print(At)
# entrega [[3, 5, 2], [8, 1, 6]]
```

5.3 Utilizando `numpy`

En la sección anterior, realizamos todos los cálculos "a mano", aunque los hiciéramos a través de Python, porque al representar matrices usando listas de listas, realmente no estamos haciendo que Python entienda que estamos trabajando con una matriz. De alguna manera, lo que estamos haciendo es simular una matriz.

Sin embargo, usando la librería `numpy`, podemos trabajar con matrices de verdad; es decir, que saben comportarse como matrices, lo que simplifica nuestro trabajo.

Por ejemplo, podemos definir la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

como

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6]])
```

Hasta aquí no es muy distinto, pero las operaciones se simplifican.

Operaciones usando numpy

```
import numpy as np

A = np.array([[1, 2, 3],
              [4, 5, 6]])
B = np.array([[11, 12, 13],
              [14, 15, 16]])

# orden de una matriz
print(A.shape)
# (2, 3)
# dos filas, tres columnas

# suma
C = A + B
print(C)
# [[12 14 16]
#  [18 20 22]]

# resta
D = B - A
print(D)
# [[10 10 10]
#  [10 10 10]]

# ponderación por escalar
E = 2*A
print(E)
# [[ 2  4  6]
#  [ 8 10 12]]
```

```
# transposición
F = A.T
# o también A.transpose()
print(F)
# [[1 4]
#  [2 5]
#  [3 6]]
```

¿Cómo definir matrices mediante funciones de los índices en Python

A veces necesitamos definir los elementos de una matriz como una función de los índices. Por ejemplo, si la matriz M es de 2×2 y $m_{ij} = i + j$, entonces

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+1 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Podemos hacer esto usando `numpy` con la función `fromfunction`.

Ejemplo

Para definir la matriz anterior usando la función `fromfunction` debemos tener en cuenta que pide

- una función que defina los elementos de la matriz
- el tamaño de la matriz resultante

```
import numpy as np

M = np.fromfunction(lambda i, j: (i+1) + (j+1), (2,2))

print(M)
# el resultado es
# [[2. 3.]
#  [3. 4.]]
```

¿Qué es `lambda i, j: (i+1) + (j+1)`? Todo eso es el primer argumento, la función que define a los elementos de la matriz. `lambda i, j:` significa que definiremos una función, que por simplificar diremos que es local. `(i+1) + (j+1)` es nuestra función, la suma de los subíndices. ¿Por qué `i+1` y `j+1`? Porque Python comienza contando los índices en 0, mientras que en matemática partimos de 1. Finalmente, el segundo argumento de la función, `(2,2)`, significa que pedimos una matriz de 2 filas y 2 columnas.

Guía Laboratorio 5 (Descargar)

P1. Las matrices A y B representan las ventas en dos años, en millones de dólares, de los tres productos de una empresa en las cuatro regiones en que está disponible. Es decir, a_{ij} y b_{ij} representan el monto de las ventas del producto i en la región j el primer y segundo año, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2,6 & 4,8 & 1,8 & 0,9 \\ 3,2 & 4,4 & 2,5 & 2,8 \\ 2,4 & 3,6 & 3,8 & 2,5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3,6 & 2,5 & 3,0 & 2,5 \\ 4,5 & 5,0 & 3,5 & 3,8 \\ 2,9 & 3,0 & 4,6 & 4,0 \end{pmatrix}$$

a) Indique el orden de cada matriz.

b) Calcule la matriz $S = A + B$.

c) Calcule la matriz $D = B - A$.

d) Indique el valor e interprete los elementos s_{24} y d_{24}.

e) Para el tercer año de funcionamiento, los tres productos ahora están disponibles en seis regiones. Durante este año, las ventas de esta empresa estarán registradas en una matriz E. ¿Es posible determinar la matriz $T = A + B + E$? Justifique su respuesta.

P2. Una fábrica con sucursales en Japón y China, produce tres tipos de componentes j, para cinco modelos de computador i. Los costos de producción mensual, en miles de dólares, de ambas sucursales se representan en las matrices J y C, respectivamente:

$$J = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 150 \\ 120 & 210 & 170 \\ 112 & 200 & 131 \\ 124 & 310 & 170 \\ 136 & 156 & 140 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 110 & 190 & 160 \\ 130 & 220 & 180 \\ 146 & 190 & 141 \\ 143 & 312 & 163 \\ 137 & 116 & 156 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuál es el orden de las matrices?

b) Inteprete el elemento j_{21} y c_{12} en el contexto del problema.

c) Utilizando Python, calcule el costo total de producción para cada modelo, considerando ambas sucursales.

d) Un trabajador indica que, en la sucursal japonesa, el costo de producción del producto 3, modelo 4 de computador, es más alto que en la sucursal china. ¿Tiene razón? Justifique apropiadamente.

P3. La empresa Beta tiene cinco plantas en Chile, y en cada una de ellas fabrica siete productos. El número de unidades del producto i fabricadas en la planta j en una semana está representado en la matriz C en el elemento c_{ij}.

$$C = \begin{pmatrix} 120 & 200 & 155 & 125 & 230 \\ 155 & 130 & 110 & 160 & 180 \\ 140 & 205 & 150 & 125 & 155 \\ 130 & 120 & 230 & 225 & 125 \\ 135 & 70 & 190 & 175 & 95 \\ 110 & 265 & 180 & 230 & 180 \\ 185 & 85 & 120 & 135 & 150 \end{pmatrix}$$

La empresa se expande, creando cinco plantas en Ecuador que producen los mismos siete productos. La producción semanal de esta filial estará representada por una matriz E.

a) Si se sabe que los volúmenes de producción semanal de la filial en Ecuador son un 20 % menor que en Chile, calcule la matriz E utilizando Python.

b) Si representamos la producción semanal total de la empresa Beta, considerando ambas filiales, por la matriz T, escriba la expresión que calcula cada elemento de la matriz T usando notación matricial.

c) Calcule la matriz T utilizando Python.

d) Interprete los elementos c_{34} y t_{72} en el contexto del problema.

P4. Una empresa que fabrica zapatos tiene dos plantas, una en Valparaíso y la otra en Temuco. La empresa produce zapatos de color negro, blanco y café, tanto para niños, damas como caballeros. La capacidad actual de producción mensual (en miles de pares) para Valparaíso y Temuco, están dadas por las matrices V y T, respectivamente. Para ambas matrices, según el orden en que se mencionan, las filas corresponden al color del calzado y las columnas al tipo de persona que utilizará el calzado.

$$V = \begin{pmatrix} 30 & 34 & 20 \\ 45 & 20 & 16 \\ 14 & 26 & 25 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 35 & 30 & 26 \\ 52 & 25 & 18 \\ 23 & 24 & 32 \end{pmatrix}$$

a) Determine la producción mensual total de ambas plantas, representándola en una matriz A. Utilice Python para resolver.

b) Interprete el elemento a_{21} en el contexto del problema.

c) Si para el próximo año se estima que la producción en Valparaíso aumenta en un 30 %, mientras que la de Temuco se reduce en un 10 %, represente la nueva producción total en la matriz B.

d) Interprete el elemento b_{13} en el contexto del problema.

P5. Genere una matriz M de orden 8×9 donde cada término de la matriz está definido por:

$$m_{ij} = 8i + 12j$$

y calcule su transpuesta.

P6. Genere dos matrices:

- Una matriz A de orden 5×7, con $a_{ij} = i \cdot j$.
- Una matriz B de orden 7×5, con $b_{ij} = 15i - 2j$.

y calcule $C = A^T + \frac{1}{2}B$.

P7. Una red de sensores recoge datos de temperatura (°C), humedad (porcentaje %) y presión (hPa) en cinco días distintos (de lunes a viernes). Los datos medidos se muestran en la matriz D:

$$D = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Lu} & \text{Ma} & \text{Mi} & \text{Ju} & \text{Vi} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 20 & 28 & 22 & 26 & 24 \\ 52 & 57 & 56 & 54 & 58 \\ 1066 & 1068 & 1066 & 1064 & 1068 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ {}^\circ\text{C} \\ \% \\ \text{hPa} \end{array}$$

Se sabe que por un error de calibración de los sensores, las medidas registradas deberían ser un 5 % menores que las registradas.

a) Calcule en una matriz S los valores correctos de temperatura, humedad y presión. Utilice Python para calcular.

b) Obtenga la matriz S^T.

c) Interprete los elementos s_{24} y s^T_{31}.

P8. Una empresa tecnológica vende software y hardware en tres productos: P_1, P_2 y P_3, en cuatro zonas de la capital: norte, sur, este y oeste. Las ventas del mes, en millones de pesos, están registradas en las matrices S y H, para software y hardware respectivamente:

$$S = \begin{pmatrix} 260 & 480 & 180 & 90 \\ 320 & 440 & 250 & 280 \\ 240 & 360 & 380 & 250 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 360 & 250 & 300 & 250 \\ 450 & 500 & 350 & 380 \\ 290 & 300 & 460 & 400 \end{pmatrix}$$

a) Calcule en la matriz T, del total de ventas de la empresa tecnológica.

b) Un trabajador indica que este mes, la sucursal de la zona sur recaudó más por la venta hardware que software, ¿es correcta su afirmación?

c) Debido al *Black Friday* se espera que en el siguiente mes, las ventas de software aumenten un 7 % y las de hardware aumenten un 3 % respecto al mes actual. Encuentra en total de ventas esperadas para el siguiente mes y almacénalo en la matriz M. Utiliza Python para realizar los cálculos.

d) Interpreta los elementos t_{24} y m_{31} en el contexto del problema.

e) Calcula la matriz M^T e interpreta el elemento m^T_{41} en el contexto del problema.

Problemas de sección 5

P1. La matriz D nos indica la distancia en kilómetros desde la ciudad i a la ciudad j. Las ciudades consideradas son Arica (A), La Serena (L), Santiago (S) y Concepción (C).

$$D = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} A & L & S & C \end{array}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1.596 & 2.070 & 2.582 \\ 1.596 & 0 & 473 & 989 \\ 2.070 & 473 & 0 & 516 \\ 2.582 & 989 & 516 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ L \\ S \\ C \end{array}$$

a) Indique el orden de la matriz D.

b) Interprete el elemento d_{42}.

c) Interprete el elemento d_{43}.

d) Interprete el elemento d_{12}.

e) ¿Por qué $d_{ij} = d_{ji}$?

f) ¿Por qué $d_{ii} = 0$?

P2. Analice las siguientes matrices e indique si existe igualdad entre los pares de matrices, justificando su respuesta

$$F = \begin{pmatrix} 5{,}6 & 2{,}1 & 0{,}3 \\ 4{,}8 & 1{,}9 & 3{,}7 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 5{,}6 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 1{,}9 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 5{,}6 & 2{,}1 & 0{,}3 \\ 4{,}8 & 1{,}9 & 2{,}7 \end{pmatrix}$$

a) ¿$F = G$?

b) ¿$F = H$?

P3. La matriz A muestra los pesos, en kilogramos, de cuatro hombres y cuatro mujeres *antes* de fiestas patrias, mientras que la matriz D muestra sus pesos *después* de dichas festividades:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 71 & 80 & 75 & 90 \\ 65 & 58 & 74 & 82 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Hombres} \\ \text{Mujeres} \end{array}$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 75 & 83 & 80 & 94 \\ 67 & 60 & 78 & 85 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Hombres} \\ \text{Mujeres} \end{array}$$

a) La matriz V nos entrega las variaciones de pesos para estas ocho personas. ¿Qué operación entre las matrices A y D debemos realizar para obtener V?

b) Calcule la matriz V.

c) ¿Cuánto fue el aumento de peso para la mujer 3 y el hombre 2? Responda usando notación matricial.

d) Interprete los elementos a_{21}, d_{14} y v_{22}.

P4. La empresa Beta tiene dos plantas en Chile y en cada una de ellas fabrica tres productos. El número de unidades del producto i fabricadas en la planta j en una semana está representado en la matriz C en el elemento c_{ij}.

$$C = \begin{pmatrix} 120 & 70 \\ 150 & 110 \\ 80 & 160 \end{pmatrix}$$

La empresa se expande, creando dos plantas en Ecuador que producen los mismos tres productos. La producción semanal de esta filial estará representada por una matriz E.

a) Si se sabe que los volúmenes de producción semanal de la filial en Ecuador son un 20 % menor que en Chile, entonces indique la operación necesaria para calcular cada elemento de la matriz E utilizando notación matricial.

b) Si representamos la producción semanal total de la empresa Beta, considerando ambas filiales, por la matriz T, escriba la expresión que calcula cada elemento de la matriz T usando notación matricial.

c) Calcule la matriz T.

P5. Una empresa de motocicletas dispone de dos plantas de fabricación, una en China y la otra en Indonesia, en las que fabrica dos modelos de motos M_1 y M_2 en tres colores, rojo, verde y azul. Su capacidad de producción diaria, en cada planta, está representada por las matrices C (para China) e I (para Indonesia).

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 300 & 95 \\ 250 & 100 \\ 200 & 100 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{array} \qquad I = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 190 & 90 \\ 200 & 100 \\ 150 & 80 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{array}$$

a) Indique el orden de cada matriz.

b) Interprete los elementos c_{21} e i_{32}.

c) Determine la matriz $T = C + I$.

d) Interprete los elementos t_{31} y t_{12}.

e) Determine la matriz $D = C - I$.

f) Interprete d_{22} y d_{11}.

P6. Considere las matrices X, de orden 8×25, y Z, de orden 6×25. Los elementos de cada matriz están definidos por $x_{ij} = 5i + 2j$ y $z_{ij} = 26i - j$. Calcule la matriz $W = X + Z^T$.