6. Aplicaciones de matrices

6.1 Multiplicación de matrices

Veamos un ejemplo de aplicación de multiplicación de dos matrices, y el proceso que esto implica para el desarrollo de dicha operación.
Javier tiene un emprendimiento de comida, el cual se desarrolla en dos sucursales: Santiago y Viña del Mar. Unas de las cosas que debe estimar Javier, es la cantidad de ingredientes que ocupará al siguiente mes y los precios que le ofrecen sus proveedores. La matriz E muestra la cantidad de kilos por ingrediente a utilizar que se estiman para un siguiente mes en cada sucursal, y la matriz P nos muestra los precios que ofrecen los proveedores por kilo para cada ingrediente:

$$E = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{Palta} & \text{Tomate} & \text{Pan} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Santiago} \\ \text{Viña del Mar} \end{array} \end{array}$$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{Prov. 1} & \text{Prov. 2} & \text{Prov. 3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{Palta} \\ \text{Tomate} \\ \text{Pan} \end{array} \end{array}$$

¿Cuál proveedor es el más conveniente?
La respuesta implicaría calcular el total a pagar en las sucursales con cada proveedor, para luego realizar una comparación de totales. Para esto, debemos multiplicar los kilos de cada ingrediente con el valor del kilo que ofrece cada proveedor, por cada sucursal. Por ejemplo, el proveedor 1 nos cobrará

$$\begin{aligned} \text{en Santiago} \qquad & 650\cdot 1.100+600\cdot 800+980\cdot 750=1.930.000 \\ \text{en Viña} \qquad & 480\cdot 1.100+450\cdot 800+840\cdot 750=1.518.000 \end{aligned}$$

El proveedor 2 nos cobrará

$$\begin{aligned} \text{en Santiago} \qquad & 650\cdot 900+600\cdot 830+980\cdot 735=1.803.300 \\ \text{en Viña} \qquad & 480\cdot 900+450\cdot 830+840\cdot 735=1.422.900 \end{aligned}$$

Por último, el proveedor 3 nos cobrará

$$\begin{aligned} \text{en Santiago} \qquad & 650\cdot 1.050+600\cdot 870+980\cdot 650=1.841.500 \\ \text{en Viña} \qquad & 480\cdot 1.050+450\cdot 870+840\cdot 650=1.441.500 \end{aligned}$$

Al comparar los totales a pagar en las sucursales con cada proveedor, se concluye que el proveedor 2 es el más conveniente.

En resumen, para responder la pregunta anterior se efectuó una multiplicación de matriz por un vector columna:

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1.100 \\ 800 \\ 750 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.930.000 \\ 1.518.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 900 \\ 830 \\ 735 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.803.300 \\ 1.422.900 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1.050 \\ 870 \\ 650 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1.841.500 \\ 1.441.500 \end{pmatrix}$$

Cada uno de los resultados anteriores no se originó en realidad de tres vectores columna distintos, si no que de *una matriz que tenía tres columnas*. Esto implica que, en realidad, sería más lógico expresar el resultado como una sola matriz

$$\begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix}$$

Recordemos que esta matriz surgió de la multiplicación de cada fila de la matriz de estimaciones, E, por cada columna de la matriz de precios, P, por lo que podemos escribir la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix}$$

¿Es difícil de ver? Quizás, pero hay una visualización que puede ayudar a comprender el proceso: escribir la segunda matriz *más arriba* y el resultado entre las dos, como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix} \end{array}$$

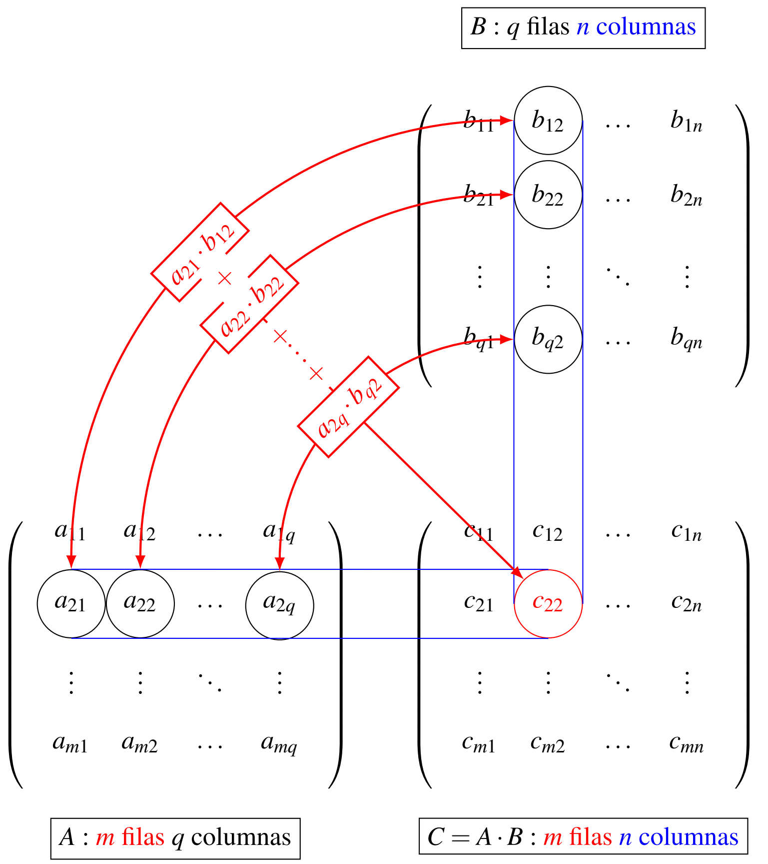
¿Por qué motivo puede ser mejor ponerlo de esa forma? Porque cada elemento de la matriz resultante queda en el cruce de la fila y columna que le dieron origen. Por ejemplo

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1.100 & 900 & 1.050 \\ 800 & 830 & 870 \\ 750 & 735 & 650 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 650 & 600 & 980 \\ 480 & 450 & 840 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.930.000 & 1.803.300 & 1.841.500 \\ 1.518.000 & 1.422.900 & 1.441.500 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Cómo llevaremos a cabo la multiplicación de dos matrices en general? Supongamos que tenemos dos matrices, A y B. La matriz A es de orden $m \times q$ y la matriz B es de orden $q \times n$.

La matriz $C = A \cdot B$ viene definida de modo que cada elemento surge de la combinación de una fila de la matriz A con una columna de la matriz B. En otras palabras, la multiplicación de matrices es *fila por columna*. Podemos visualizar ese proceso en el siguiente diagrama:

Para tener en cuenta...
Sea A un matriz de orden $m \times q$ y B una matriz de orden $q \times n$. Entonces la matriz $C = A \cdot B$ tendrá orden $m \times n$.
La multiplicación de matrices será **posible**, si la cantidad de columnas de la primera matriz **coincide** con la cantidad de filas de la segunda matriz.



Multiplicando matrices en Python

Tenemos dos maneras de multiplicar matrices usando Python. La más sencilla es usando la librería `numpy`, que vimos al final de la guía anterior.

Ejemplo 1

Multipliquemos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Notemos que A tiene orden 3×2 y B tiene orden 2×4, por lo que la multiplicación $A \cdot B$ puede realizarse. La matriz resultante será de orden 3×4.

Usando `numpy`, la multiplicación es muy sencilla:

```
import numpy as np
```

```
# definimos ambas matrices como arrays de numpy
A = np.array([[4, 0],
              [1, 2],
              [7, 8]])

B = np.array([[6, 3, 2, 9], [1, 5, 4, 8]])

# listo!
C = A.dot(B)

print(C)
# el resultado es
# [[ 24  12   8  36]
#  [  8  13  10  25]
#  [ 50  61  46 127]]
```

Otra manera es hacerlo con listas de listas:

Ejemplo 1 bis

```
# declaramos las matrices A y B
A=[[4,0],
   [1,2],
   [7,8]]
B=[[6,3,2,9],
   [1,5,4,8]]

# declaramos la matriz C, que contendrá el resultado
C=[[0,0,0,0],
   [0,0,0,0],
   [0,0,0,0]]

# hacemos dos ciclos for, el primero por las filas de C
# el segundo por las columnas de C
for i in range(3):
    for j in range(4):
        suma=0
        for k in range(2):
            # otro ciclo for, por las columnas de A
            # o filas de B, en el que
            # combinamos los elementos correspondientes
            suma=suma + A[i][k]*B[k][j]
        C[i][j]=suma # asignamos la suma al elemento
    print(C[i])
```

Podríamos haber definido la matriz C como

```
for i in range(3):
 C.append([0]*4)
```

6.2 Matriz Inversa

Si A es una matriz de orden $n \times n$, la **matriz inversa** de A, en caso de existir, es una matriz que se denota A^{-1} la cual cumple la siguiente propiedad

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

con I *matriz identidad*. Una matriz identidad $I = \{a_{ij}\}$ es aquella en que los elementos $a_{ij} = 1$ cuando $i = j$, y $a_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Esto quiere decir que los elementos de su *diagonal principal* toman valor 1, y los restantes elementos toman valor 0.

Tener en cuenta que...

La matriz inversa de A se puede obtener siempre y cuando la matriz A tenga la misma cantidad de filas y columnas; es decir, su **orden** sea de $n \times n$ o también llamada **matriz cuadrada**.

Ejemplo de matriz identidad

La siguiente matriz cuadrada de 3×3, es una matriz identidad de orden 3:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, siguiendo con la definición de la matriz inversa de A, ¿cómo podemos obtener dicha matriz, en Python? Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Obtención de la matriz inversa

A través de la librería `numpy`, obtendremos la matriz inversa de la matriz A definida como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```python
import numpy as np
A = np.array([[1, -1, 0],
              [0, 1, 0],
              [2, 0, 1]])

#Esta función devuelve la inversa de la matriz A
A_inv = np.linalg.inv(A)
print(f'La inversa de la matriz A es:\n\n{A_inv}\n\n')
```

En pantalla, mostrará la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, comprobaremos que la multiplicación entre la matriz A y A^{-1}, da como resultado la matriz identidad:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = ¿I?$$

Ejemplo: verificando en Python

```
I=np.round(np.dot(A,A_inv))
print(f'La matriz I es:\n\n{I}\n\n')
```

Mostrará en pantalla, la matriz identidad I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, se cumple que $A \cdot A^{-1} = I$. Esto mismo ocurrirá en la multiplicación $A^{-1} \cdot A$. Lo que obtenemos como resultado corresponde al **neutro multiplicativo** en operatoria matricial.

6.3 Aplicación de la matriz inversa: Sistema de Ecuaciones

Una de las aplicaciones que tiene la matriz inversa, es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Un **sistema de ecuaciones** es el conjunto de n ecuaciones de primer grado, donde en cada una de ellas están involucradas n incógnitas. Por ejemplo, el siguiente conjunto

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ 2x-y+z &= 2 \\ x+y-2z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

contiene 3 ecuaciones lineales de primer grado, donde en cada una de ellas están involucradas 3 incógnitas: x, y, z.

En este curso, veremos sistemas de ecuaciones de 2×2; es decir, 2 ecuaciones y 2 incógnitas, como el siguiente ejemplo

$$\left.\begin{aligned} 2x+y &= 7 \\ -3x+2y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Pero ahora, ¿cómo lo resolvemos?
Resolver el sistema de ecuaciones significa determinar el valor de las incógnitas de tal manera que se satisfacen todas las ecuaciones del conjunto. La forma de cómo resolver será a través de la utilización de la matriz inversa.

Ejemplo 1: Resolución de un sistema de ecuaciones de 2×2

Resolveremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ -2x + 4y &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Paso 1: Escribiremos de forma matricial el sistema descrito anteriormente, de la forma $A \cdot X = B$. Esto quedaría así:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}} \cdot \overset{X}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

La matriz A, contiene los coeficientes de las incógnitas de cada ecuación.
La matriz X, contiene las incógnitas del sistema.
La matriz B, contiene los términos independientes de las ecuaciones.

Paso 2: Multiplicaremos por la matriz inversa de A, en ambos lados de la ecuación planteada anteriormente, por el *lado izquierdo*.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Por lo visto en la sección 6.2, $A^{-1} \cdot A = I$. Por lo tanto, al obtener el neutro multiplicativo en el lado izquierdo de la ecuación se obtendrá que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Calcular, utilizando códigos en Python, la matriz inversa de A, y luego dicha matriz multiplicarla por la matriz B. El resultado obtenido corresponderá a la matriz X, que contiene las soluciones del sistema de ecuaciones planteado en un inicio.

```python
import numpy as np
A = np.array([[3, 1],
              [-2, 4]])

B = np.array([[7],
              [7]] )
A_inv = np.linalg.inv(A)
X = np.dot(A_inv,B)
print(f'La matriz de incógnitas es:\n\n{X}')
```

Mostrará en pantalla, la matriz X:

$$X = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, en el sistema planteado al inicio tiene solución $x = 1,5$ e $y = 2,5$.

Podemos verificar la solución, con la forma matricial escrita en el paso 1, reemplazando la matriz X obtenida y posteriormente desarrollando la multiplicación respectiva:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} = ¿\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}?$$

Ejemplo: verificando en Python

```
C = np.round(np.dot(A,X))
print(f'La matriz C es:\n\n{C}\n\n')
```

Mostrará en pantalla, la matriz C

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución se ha comprobado.

A continuación, veamos otro ejemplo de aplicación.

Ejemplo 2: Resolución de un problema aplicando un sistema de ecuaciones de 2×2

Mariana compra 2 kg de manzanas y 4 kg de plátanos, pagando \$2.900. Por otra parte, José compra 3 kg de manzanas y 3 kg de plátanos, pagando \$3.150. ¿Cuánto cancelaron Mariana y José por el kilogramo de manzanas y por el kilogramo de plátanos?

En esta situación, hay dos valores desconocidos que se tienen que reconocer. Llamemos x al valor de un kilogramo de manzanas e y al valor de un kilogramo de plátanos.

Traduciendo al lenguaje algebraico la compra realizada por Mariana se tiene que

$$2x + 4y = 2900$$

Haciendo lo mismo para la compra realizada por José, se tendrá que

$$3x + 3y = 3150$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que resolverá la situación es

$$\left.\begin{aligned} 2x+4y &= 2900 \\ 3x+3y &= 3150 \end{aligned}\right\}$$

Ahora, aplicaremos los pasos mostrados anteriormente para resolver el sistema.

Paso 1: Escribimos de forma matricial, el sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2900 \\ 3150 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Aplicamos la matriz inversa.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{matriz identidad}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2900 \\ 3150 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2900 \\ 3150 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Calculamos utilizando códigos en Python, la matriz X.

```python
import numpy as np
A = np.array([[2, 4],
              [3, 3]])

B = np.array([[2900],
              [3150]] )
A_inv = np.linalg.inv(A)
X = np.dot(A_inv,B)
print(f'La matriz de incógnitas es:\n\n{X}')
```

Mostrará en pantalla, la matriz X

$$X = \begin{pmatrix} 650 \\ 450 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el sistema planteado al inicio tiene solución $x = 650$ e $y = 450$, lo que significa que Mariana y José cancelaron por un 1 kg de manzanas y 1 kg de plátanos, \$650 y \$450 respectivamente.

Guía Laboratorio 6 (Descargar)

P1. La fábrica de bicicletas Expend produce dos modelos de bicicletas, M y N. La matriz A nos indica las cantidades de acero y aluminio que requiere cada bicicleta, expresadas en kg según el modelo a producir, mientras que la matriz B nos entrega un reporte de la cantidad de bicicletas producidas de ambos modelos para los dos primeros meses del año pasado.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} M & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Acero} \\ \text{Aluminio} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{ene} & \text{feb} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 290 & 312 \\ 345 & 413 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ M \\ N \end{array}$$

a) Indique el orden de cada matriz. ¿Es posible determinar la multiplicación entre ambas matrices? Justifique.

b) Determine utilizando Python la matriz $C = A \cdot B$.

c) Indique e interprete el valor de los elementos c_{21} y c_{11}.

P2. Una pequeña cadena tiene restaurantes de comida rápida en Santiago, Concepción y Antofagasta, en los que vende hamburguesas, completos y malteadas. En un fin de semana, las cantidades de cada comida según cada sucursal se distribuyeron de acuerdo con la siguiente matriz V, donde las filas corresponden a los productos y las columnas a las sucursales, mientras que los precios, en pesos, de cada producto están expresados en la matriz P.

$$V = \begin{pmatrix} 1300 & 900 & 800 \\ 2100 & 1700 & 1500 \\ 1500 & 1200 & 900 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4200 & 1500 & 3200 \end{pmatrix}$$

Si $I = P \cdot V$,

a) Indique el orden de cada matriz.

b) Determine utilizando Python la matriz I.

c) Indique e interprete el valor de los elementos v_{32}, p_{12} e i_{13}.

P3. Una fábrica, para un mismo tipo de artículo eléctrico produce 2 modelos, A y B. Las filas de la matriz M, en el orden mencionado, nos muestran la cantidad de transistores y resistores que se requieren por cada artículo, según cada modelo. Por otra parte, las filas de la matriz Q nos reportan las cantidades producidas de cada modelo para las tres primeras semanas del mes pasado.

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 14 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 200 & 240 & 220 \\ 175 & 210 & 215 \end{pmatrix}$$

Además, considere las matrices $G = M \cdot Q$, y $H = Q \cdot M$.

a) Indique el orden de M y Q.

b) ¿Es posible calcular las matrices G y H? Justifique.

c) Determine utilizando Python la matriz G e interprete los elementos g_{23} y g_{12}.

d) ¿Cuántos resistores se utilizaron durante las tres semanas?

P4. Una empresa de telecomunicaciones necesita optimizar la distribución de su infraestructura de red en Iquique, Santiago y Concepción. Las columnas de la matriz R, en el orden mencionado, representan la cantidad de routers y switches que se deben instalar en cada ciudad. La matriz C muestra el costo de instalación, en pesos, de cada router y switch.

$$R = \begin{pmatrix} 50 & 70 \\ 80 & 110 \\ 60 & 90 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 80000 \\ 45000 \end{pmatrix}$$

a) Calcula utilizando Python el costo total de instalación para cada ciudad y almacénalo en la matriz T.

b) ¿Cuál es la ciudad que tiene mayor costo de instalación?

c) Si se aplica un descuento del $10\,\%$ en el costo de instalación de los switches, calcula el nuevo costo total de instalación para cada ciudad.

P5. Una empresa de servicios en la nube distribuye datos entre tres *Data Center*. La matriz D muestra el volumen de datos (en terabytes) almacenados en cada *Data Center* durante los tres primeros meses del año. Mientras que la matriz C muestra los costos (en dólares) de almacenamiento por terabyte en cada *Data Center*.

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} DC_1 & DC_2 & DC_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 100 & 150 & 200 \\ 120 & 180 & 220 \\ 140 & 210 & 250 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Ene} \\ \text{Feb} \\ \text{Mar} \end{array} \qquad C = \begin{pmatrix} 50 \\ 40 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{array}{l} DC_1 \\ DC_2 \\ DC_3 \end{array}$$

a) Calcula utilizando Python la matriz $T = D \cdot C$.

b) Un trabajador indica que en febrero el costo por almacenamiento fue el más alto, ¿es cierta su afirmación?

c) Debido a la inflación, el costo de almacenamiento por terabyte aumenta en un $2,3\,\%$. Calcula el nuevo costo total de almacenamiento por mes e interprete cada uno de los elementos de la nueva matriz.

P6. Una compañía que fabrica un determinado producto, tiene 4 plantas de producción y 5 bodegas de almacenamiento. La matriz T muestra las unidades de este producto que se generan mensualmente en la planta i y que son transportadas a la bodega j, para quedar almacenadas allí durante el mes en que fueron producidas. Además, la matriz C detalla, para el primer semestre del presente año, el costo unitario (en dólares) de almacenamiento del producto durante el mes j en la bodega i.

$$T = \begin{pmatrix} 500 & 400 & 300 & 200 & 100 \\ 600 & 500 & 400 & 300 & 200 \\ 700 & 600 & 500 & 400 & 300 \\ 800 & 700 & 600 & 500 & 400 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz $G = T \cdot C$.

b) Interpreta los elementos t_{14}, c_{53} y g_{35}.

c) ¿Cuánto cuesta almacenar una unidad del producto en la bodega 4 durante marzo de este año?

d) ¿Cuánto dinero gasta la empresa por almacenar la producción mensual de la planta 2 durante el mes de abril?

P7. Una empresa dedicada al desarrollo de software, que cuenta con tres sucuersales, necesita renovar los siguientes implementos para su personal: laptop de alto rendimiento, monitor externo de alta resolución, teclado mecánico, mouse ergonómico y disco duro de alta capacidad. Para esto, decide cotizar con tres proveedores y así encontrar el precio más conveniente para realizar la compra. La matriz F, en el orden mencionado, indica la cantidad de artículos que necesita comprar para cada sucursal. La matriz G indica el precio unitario (en miles de pesos) de cada producto por proveedor.

$$F = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 15 & 17 & 18 \\ 5 & 10 & 20 & 13 & 12 \\ 8 & 4 & 12 & 18 & 9 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1700 & 1750 & 1800 \\ 868 & 803 & 840 \\ 165 & 160 & 150 \\ 70 & 73 & 65 \\ 110 & 124 & 115 \end{pmatrix}$$

a) Calcula utilizando Python la matriz $D = F \cdot G$.

b) Interpreta los elementos d_{33} y d_{21}.

c) ¿Cuál es el proveedor más conveniente para realizar todas las compras?

d) Si escoge el proveedor más conveniente, ¿en qué sucursal deberá invertir más dinero por la renovación de los implementos?

P8. Sea la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula, utilizando *Python*, la matriz A^{-1}.

b) Calcula la matriz $I = A \cdot A^{-1}$.

c) Calcula la matriz I^{-1}. Analiza este resultado, comparando con los resultados obtenidos en los items anteriores. ¿Puedes encontrar alguna relación para estas matrices?

P9. *a)* Considera que el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ 3x - 2y &= 21 \end{aligned}\right\}$$

se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \end{pmatrix}$$

Utiliza la matriz inversa para encontrar los valores de x e y que permiten satisfacer ambas ecuaciones simultáneamente.

b) Considera que el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} h + m &= 60 \\ 0,16h + 0,2m &= 11 \end{aligned}\right\}$$

se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,16 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Utiliza la matriz inversa para encontrar los valores de h y m que permiten satisfacer el sistema de ecuaciones.

P10. Considera los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(1)\ \left.\begin{aligned} 2m+4p &= 2900 \\ 3m+3p &= 3150 \end{aligned}\right\} \qquad (2)\ \left.\begin{aligned} n+v &= 160 \\ 50n+300v &= 23000 \end{aligned}\right\}$$

a) Escribe ambos sistemas de ecuaciones de forma matricial.

b) Utiliza la matriz inversa para calcular las soluciones de ambos sistemas de ecuaciones.

P11. Una persona tiene \$8.000 en monedas de \$10 y de \$50. El sistema de ecuaciones que representa la situación es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= 200 \\ 10x+50y &= 8000 \end{aligned}\right\}$$

a) ¿Qué representa cada variable?

b) Explica qué representa cada una de las ecuaciones del sistema.

c) ¿Cuántas monedas de \$10 y de \$50 tiene?

P12. En una granja hay 132 animales entre patos y vacas. En total hay 402 patas. El sistema que modela la situación planteada es:

$$\left.\begin{aligned} p+v &= 132 \\ 2p+4v &= 402 \end{aligned}\right\}$$

a) ¿Qué representan las incógnitas del sistema?

b) ¿Cuántos patos hay?

P13. Luis compró 5 cables USB y 6 pendrives; en total canceló \$82.890. Pablo compró, a los mismos precios, 3 cables USB y 7 pendrives, y canceló \$59.900.
El sistema que modela el problema es:

$$\left.\begin{aligned} 5x+6y &= 82890 \\ 3x+7y &= 59900 \end{aligned}\right\}$$

a) ¿Qué representa cada incógnita en el contexto del problema?

b) Determina cuánto pagaron por cada cable USB.

Problemas de sección 6

P1. Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 21 & 32 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula manualmente la matriz $D = A \cdot B$.

b) Calcula manualmente la matriz $E = B \cdot A$.

c) Compara las matrices D y E. ¿A qué conclusión llegas?

P2. Marcela, por instrucción de su nutricionista, debe seguir un régimen de 3 días. En los cuales, al desayunar sólo debe consumir galletas de agua y mermelada sin azúcar. En la matriz M se presenta un informe nutricional por 1 gramo de galleta de agua y 1 gramo de mermelada sin azúcar. Por otro lado, en la matriz G se indican las cantidades de gramos de ambos alimentos que debe consumir Marcela en el desayuno para los 3 días que dura este régimen.

$$M = \begin{array}{cl} \begin{array}{cc} \text{Galletas de agua (1 g)} & \text{Mermelada sin azúcar (1 g)} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4{,}04 & 0{,}39 \\ 69 & 4 \\ 61 & 2 \\ 804 & 66 \\ 73 & 11 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Energía (kcal)} \\ \text{Proteínas (mg)} \\ \text{Grasa total (mg)} \\ \text{Carbohidratos (mg)} \\ \text{Sodio (mg)} \end{array} \end{array} \qquad G = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \text{día 1} & \text{día 2} & \text{día 3} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 30 & 45 & 50 \\ 45 & 60 & 75 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Galletas de agua (1 g)} \\ \text{Mermelada sin azúcar (1 g)} \end{array} \end{array}$$

Si $R = M \cdot G$, entonces

a) Indique el orden de M, G y R.

b) Interprete los elementos m_{32} y g_{11}.

c) Determine e interprete los elementos r_{21} y r_{23}.

d) ¿Cuántos miligramos (mg) de sodio ingiere Marcela en el desayuno del tercer día?

P3. Este año la fábrica de bicicletas Expend produce 10 modelos de bicicletas, y en el diseño de estos modelos se estan utilizando en distintas proporciones 6 materiales. De este modo, la matriz $M = (m_{ij})$ nos indica las cantidades, medidas en kilogramos, de material i que requiere cada bicicleta de modelo j, mientras que la matriz $P = (p_{ij})$ nos entrega un reporte de la cantidad de bicicletas producidas del modelo i durante el mes j del presente año. Considere que esta segunda matriz tiene información sólo de los 8 primeros meses.

Las matrices M y P vienen definidas por

$$m_{ij} = 1 + \frac{ij}{60}, \; 1 \le i \le 6 \text{ y } 1 \le j \le 10$$

$$p_{ij} = 300 + 15i + 21j, \; 1 \le i \le 10 \text{ y } 1 \le j \le 8$$

Si $F = M \cdot P$, entonces se pide que

a) Indique el orden de las matrices M, P y F.
b) Calcule totalmente la matriz F.
c) Interprete los elementos m_{59}, p_{46} y f_{24}.
d) ¿Cuántos kilogramos de material 3 fueron utilizados en total por esta empresa durante el mes de julio?

P4. Una compañía, que fabrica un determinado producto, tiene 4 plantas de producción y 5 bodegas de almacenamiento. La matriz $T = (t_{ij})$ nos indica las unidades de este producto que se generan mensualmente en la planta i, y que son transportadas a la bodega j para quedar almacenadas ahí durante ese mes que fueron producidas.

Además, tenemos la matriz $C = (c_{ij})$ que nos detalla para el primer semestre del presente año el costo en dólares de almacenar una unidad del producto durante el mes j en la bodega i.

$$T = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{bodega 1} & \text{bodega 2} & \text{bodega 3} & \text{bodega 4} & \text{bodega 5} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{planta 1} \\ \text{planta 2} \\ \text{planta 3} \\ \text{planta 4} \end{matrix} \end{array} \qquad C = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{mes 1} & \text{mes 2} & \text{mes 3} & \text{mes 4} & \text{mes 5} & \text{mes 6} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{bodega 1} \\ \text{bodega 2} \\ \text{bodega 3} \\ \text{bodega 4} \\ \text{bodega 5} \end{matrix} \end{array}$$

Si estas matrices T y C están definidas respectivamente por las expresiones

$$t_{ij} = 100ij \; 1 \leq i \leq 4 \text{ y } 1 \leq j \leq 5$$
$$c_{ij} = 3i + 5j \; 1 \leq i \leq 5 \text{ y } 1 \leq j \leq 6$$

entonces

a) Indique el orden de cada matriz y analice si es posible realizar $C \cdot T$. Justifique su respuesta.
b) Determine todos los elementos que componen cada matriz.
c) Determine la matriz $G = T \cdot C$.
d) Interprete los elementos t_{14}, c_{52} y g_{35}.
e) ¿Cuánto cuesta almacenar una unidad en la bodega 4 durante marzo de este año?
f) ¿A cuánto asciende el total de dinero que gasta esta empresa por almacenar la producción mensual de la planta 2 durante el mes de abril?

P5. La matriz $A = (a_{ij})$ nos indica la cantidad de acciones tipo j, pertenecientes a un holding, que posee el inversionista i.

Por otra parte, la matriz $E = (e_{ij})$ nos detalla el valor unitario de la acción tipo i de este holding cotizado en euros durante el día hábil j de la semana pasada.

Las matrices A y E están definidas respectivamente por las expresiones

$$a_{ij} = 20ij,\ 1 \leq i \leq 15 \text{ y } 1 \leq j \leq 10$$
$$e_{ij} = 4i + j, 1 \leq i \leq 10 \text{ y } 1 \leq j \leq 5.$$

Además, se define la matriz $M = A \cdot E$.

a) Indique el orden de cada una de las tres matrices.

b) Determine *completamente* las matrices A, E y M.

c) Interprete los elementos $a_{14,10}$, e_{94} y m_{42}.

d) ¿Cuántas acciones tipo 9 tiene en su poder el accionista número 12?

e) ¿En cuánto está evaluado, para el miércoles de la semana pasada, el total de acciones que posee en este holding el inversionista 8?

P6. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando matrices.

a) $\left.\begin{aligned} x + 5y &= -6 \\ -5x + 4y &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x - \ \ y &= -3 \\ -4x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ \tfrac{1}{4}x + y &= \tfrac{7}{2} \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} y - 0,5x &= 7 \\ y &= x - 3 \end{aligned}\right\}$

P7. Resuelva las siguientes situaciones, planteando un sistema de ecuaciones y resolviendo de forma matricial.

a) Camila y Francisca tienen entre las dos \$160.000. Si Francisca le da \$10.000 a Camila, ambas tendrán la misma cantidad. El siguiente sistema de ecuaciones representa el problema

$$\left.\begin{aligned} C + F &= 160000 \\ C + 10000 &= F - 10000 \end{aligned}\right\}$$

¿Cuánto dinero tiene cada una?

b) En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de hombres y el 20% de mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11, ¿cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?

c) Una granja tiene pavos y cerdos. En total hay 50 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

d) El dueño de un taler mecánico debe almacenar un lubricante de motor en 56 bidones de capacidad 4 y 5 litros. En total, se desea almacenar 245 litros de lubricante. Determine la cantidad de bidones de 4 y 5 litros de capacidad necesarios para almacenar todo el lubricante.

e) El largo de un rectángulo mide 2 cm más que su ancho, mientras que su perímetro mide 24 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?