Prova di Analisi Matematica II - 12 Ottobre 2020
Ing. Informatica
Prof.ssa Virginia De Cicco

ESERCIZIO 1. Per ciascuna delle seguenti questioni, si indichi la (sola) risposta corretta. Ogni risposta esatta vale 3 punti, ogni risposta errata -1 punto ed ogni risposta non data 0 punti. (**12 pt.**)

1) Uno solo dei seguenti insiemi è semplicemente connesso. Quale?

   b>a>0.
   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x^2 + y^2 \leq b\}$ b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq a\}$

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq a\}$ d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2+y^2 \leq a\}$.
   Soluzione d)

2) La serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a^n}{b^n} x^n, \qquad |x| < \frac{b}{a}, \qquad a, b > 0.$$
   ha somma a) $\frac{1}{a+bx}$ b) $\frac{1}{b+ax}$ c) $\frac{b}{b+ax}$ d) $\frac{a}{b+ax}$.

   Soluzione c)

3) Data la funzione 2π-periodica, definita nell'intervallo $]-\pi, \pi]$ da
$$f(x) = sen\, x - |x|,$$
   il coefficiente b_3 del suo sviluppo di Fourier è

   a) $b_3 = 0$ b) $b_3 = -1$ c) $b_3 = 1$ d) $b_3 = 3$.
   Soluzione a)

4) Il seguente limite
$$\lim_{z \to 0} \frac{e^{z^a} - 1}{z^b}$$

   (a) vale 1

(b) non esiste

(c) vale 0

(d) è infinito.

Soluzione: a) se $a = b$, c) se $a > b$

ESERCIZIO 2. (10 pt.) Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{x^2 + an^2}, \qquad a > 0.$$

Soluzione: la funzione limite è $f(x) = \frac{1}{a}$. Per studiare la convergenza uniforme, osserviamo che

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2}{a(x^2 + an^2)} \leq \frac{x^2}{a^2n^2}.$$

Quindi vale su $|x| \leq M, \ M > 0$.

ESERCIZIO 3. (10 pt.) Si calcoli la trasformata del seguente segnale periodico (per $t \geq 0$) definita su (0,a) ed estesa per periodicità

$$f(t) = \begin{cases} b & 0 \leq t \leq \frac{1}{c}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione: È un segnale periodico per $t \geq 0$ di periodo a.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) \quad = \quad \frac{1}{1 - e^{-as}} \int_0^{\frac{1}{c}} be^{-st}\,dt = \frac{b}{1 - e^{-as}} \frac{1 - e^{-\frac{s}{c}}}{s} \qquad Re(s) > 0.$$