令 $a'=\frac{a+a_1}{2}$，$b'=\frac{b+b_1}{2}$

构造

$$M=\max\left\{\left|\frac{f(a')-f(a_1)}{a'-a_1}\right|,\left|\frac{f(b_1)-f(b')}{b_1-b'}\right|\right\}$$

下面证 $M$ 满足题意

当 $x=y$ 时，

$$|f(x)-f(y)|=0=M|x-y|$$

显然成立

当 $x\neq y$ 时，

不失一般性，我们假设 $x<y$，

则有

$$a<a'<a_1\leq x<y\leq b_1<b'<b$$

由于 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是凸函数

故

$$\frac{f(a')-f(a_1)}{a'-a_1}\leq\frac{f(a')-f(y)}{a'-y}\leq\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\frac{f(x)-f(b')}{x-b'}\leq\frac{f(b_1)-f(b')}{b_1-b'}$$

则

$$\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq\dfrac{f(b_1)-f(b')}{b_1-b'}\leq\left|\dfrac{f(b_1)-f(b')}{b_1-b'}\right|\\ -\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq-\dfrac{f(a')-f(a_1)}{a'-a_1}\leq\left|\dfrac{f(a')-f(a_1)}{a'-a_1}\right|\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}&=\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\\&=\max\left\{\frac{f(x)-f(y)}{x-y},-\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right\}\\&\leq\max\left\{\left|\frac{f(a')-f(a_1)}{a'-a_1}\right|,\left|\frac{f(b_1)-f(b')}{b_1-b'}\right|\right\}=M\end{aligned}$$

即

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$$

即证