$$
\begin{aligned}
&\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta \\
\iff &\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\sin\alpha+\sin\beta \\
\iff &\sin\alpha=(1+\sin\alpha)\sin\beta+(-\cos\alpha)\cos\beta
\end{aligned}
$$

推出

$$\sin\alpha=\sqrt{(1+\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}\sin(\beta+\varphi)=\sqrt{2+2\sin\alpha}\sin(\beta+\varphi)$$

其中 $\tan\varphi=-\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

故 $\sin^2\alpha\leq 2+2\sin\alpha \iff (\sin\alpha-1)^2\leq 3$

又 β 可任意取，所以等号可取到

由于 $\sin\alpha\leq 1$ 所以 $\sin\alpha\geq 1-\sqrt{3}$

故 $\sin\alpha$ 的最小值为 $1-\sqrt{3}$