求导得

$$f'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^{x},\quad f''(x)=(2a+a^2x)e^{ax}-e^{x}$$

其中有 $f(0)=-1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=2a-1$

下面证 a 得取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$

首先是必要性

假设 $a>\dfrac{1}{2}$，$f''(0)>0$

因为 $f''(x)$ 连续，则 $\exists\, x_0>0,\ \text{s.t.}\ \forall x\in(0,x_0)$, $f''(x)>0$.

则 $\forall\, x\in(0,x_0),\ f'(x)>f'(0)=0 \implies \forall\, x\in(0,x_0)$, $f(x)>f(0)=-1$

矛盾，故 $a\le\dfrac{1}{2}$

然后是充分性

当 $a\le\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$f'(x)=(1+ax)e^{ax}-e^{x}\le e^{ax}\cdot e^{ax}-e^{x}=e^{2ax}-e^{x}\le e^{x}-e^{x}=0,\quad \forall x>0$$

其中前面一个等号取等条件是 $a=0$，而第二个等号取等条件条件是 $a=\dfrac{1}{2}$。

所以 $f'(x)<0$ 所以 $f(x)<f(0)=-1,\ \forall x>0$

综上 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$