1. 求极限 $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n!}$

我们有

$$0 \le \frac{2^n}{n!} \le \frac{2^n}{2^{n-2} \cdot n} = \frac{4}{n}, \quad \forall n \ge 3$$

又有 $\frac{4}{n} \to 0$

所以 $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

2. 求极限 $\lim_{n \to +\infty} \left( \frac{1}{4n^2+1} + \frac{2}{4n^2+2} + \cdots + \frac{n}{4n^2+n} \right)$

令 $a_n = \frac{1}{4n^2+1} + \frac{2}{4n^2+2} + \cdots + \frac{n}{4n^2+n}$

有

$$\frac{1+1/n}{8+2/n} = \frac{n^2+n}{8n^2+2n} \le a_n \le \frac{n^2+n}{8n^2} = \frac{1+1/n}{8}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

其中 $\frac{1+1/n}{8+2/n} \to \frac{1}{8}$ 且 $\frac{1+1/n}{8} \to \frac{1}{8}$

所以原式 $= \frac{1}{8}$