math

MATH-2

> 集合 关系

笛卡尔积

定义，多个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的**笛卡尔积**，

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

欧式空间

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ 为 n **维欧几里得空间**

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

记

$$\begin{aligned} & |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \\ & x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \\ & x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

则

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$|x \cdot y| \leq |x||y|$$

特征函数

设 X 为全集，$A \subset X$ 定义：$\chi_A : A \to \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \ x \in A \\ 0, \ x \in A^C \end{cases}$$

χ_A 为 A 的特征函数

命题 1 设 X 是全集，$A, B \subset X$，则

$$\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} \chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$$

关系1

定义 1

- 设 X, Y 为两个集合，$f \subset X \times Y$，则 f 为（二元）关系

  如果 $(x, y) \in f$, 记 xfy

  $I = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ 为恒等关系
- 设 $f \subset X \times Y$

  $\mathrm{Dom} f = \{x \in X \mid \exists y \in Y, \text{s.t.} (x, y) \in f\} \subset X$，$f$ 的定义域

$\mathrm{Rg}f = \{y \in Y \mid \exists x \in X, \mathrm{s.t.}(x, y) \in f\} \subset Y$，$f$ 的值域

- 设 $f \subset X \times Y, g \subset Y \times Z$

  $g \circ f = \{(x, z) \mid \exists y \in Y, \mathrm{s.t.}(x, y) \in f, (y, z) \in g\} \subset X \times Z$
- 设 $f \subset X \times Y$

  $f^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in f\} \subset Y \times X$

结论

1. 设 $f \subset X \times Y$，则 $(f^{-1})^{-1} = f$
2. 设 $f \subset X \times Y, g \subset Y \times Z, h \subset Z \times W$，则 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
3. 设 $f \subset X \times Y, g \subset Y \times Z$，则 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

定义 2

设 $\sim \subset X \times X$，$\sim$ 满足

1. $\forall x \in X, x \sim x$
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

称 $\sim$ 为 X 上的**等价关系**

设 $\sim$ 是 X 上的等价关系，对于任意 $x \in X$

称 $[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$ 为 $\sim$ 的一个**等价类**

MATH-3

关系2

$\mathrm{Dom}f^{-1} = \mathrm{Rg}f$

$\mathrm{Rg}f^{-1} = \mathrm{Dom}f$

$\mathrm{Dom}\ g \circ f = \{x \mid \exists y, z,\ \mathrm{s.t.}(x, y) \in f, (y, z) \in g\}$

$\mathrm{Rg}\ g \circ f = \{z \mid \exists x, y,\ \mathrm{s.t.}(x, y) \in f, (y, z) \in g\}$

等价关系

等价类

设 $[x]$ 为 x 的等价类，记

$$X/\sim=\{[x]\mid x\in X\}$$

为 X 的**商集**

有

$$X=\bigcup_{x\in X}[x]$$

设 $\sim$ 是 X 上的等价关系，$x,y\in X$，则，

$$[x]=[y]\iff x\sim y$$

序关系

定义 设 P 是一个集合，$\leq\subset P\times P$，$\leq$ 满足，

1. $\forall x\in P,x\leq x$
2. $\forall x,y\in P,(x\leq y\land y\leq x\to x=y)$
3. $\forall x,y,z\in P,(x\leq y\land y\leq z\to x\leq z)$

称 $\leq$ 为 P 上的**偏序**，称 $(P,\leq)$ 为**偏序集**

例，$\leq=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y-x\text{是非负数}\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的偏序关系

> 注：这句话比较怪，有循环论证之嫌

全序集

定义 设 $(P,\leq)$ 为偏序集

如果 $\forall x,y\in P$，必有 $x\leq y\lor y\leq x$

称 $\leq$ 为**全序**，称 $(P,\leq)$ 为**全序集**

MATH-4

关系3

定义

设 $(P, \leq)$ 是全序集，如果 $\forall A \subset P \land A \neq \varnothing$，$A$ 有最小元，

称 $\leq$ 是 P 上的**良序**，$(P, \leq)$ 是**良序集**

映射1

定义1

设 f 是一个关系，如果 f 满足，

$$\forall(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f, (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2)$$

称 f 是**单值**的，否则称 f 是**多值**的。

定义2

设 f 是一个关系，如果 f 是单值的，称 f 为**函数**（**映射**，**变换**，**算子**，**映照**……）

设 f 是一个函数，$x \in \text{Dom } f$，则 $\exists! y$, $\text{s.t.}(x, y) \in f$

记 $y = f(x)$

称 $f(x)$ 为 x 的像

命题1

设 f, g 是两个函数，则 $f = g$ 当且仅当，

1. $\text{Dom } f = \text{Dom } g$
2. $\forall x \in \text{Dom } f \to f(x) = g(x)$

命题2

设 f, g 是两个函数，则 $g \circ f$ 也是函数，且

1. $\text{Dom } g \circ f = f^{-1}(\text{Dom } g)$
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

> 设 f 为函数，A, B 为两个集合
>
> $f(A) = \{f(x) \mid x \in A \cap \text{Dom } f\}$
>
> $f^{-1}(B) = \{x \in \text{Dom } f \mid f(x) \in B\}$

定义3

设 f 是一个函数，如果 f 满足，

$$\forall(x_1, y_1) \in f, (y_1 = y_2 \to x_1 = x_2)$$

称 f 为**单射**

命题3

设 f 为单射，则 f^{-1} 也是单射

MATH-5

映射2

命题3

设 f 是单射，则 f^{-1} 是单射，并且

1. $\text{Dom } f^{-1} = \text{Rg } f,\ \text{Rg } f^{-1} = \text{Dom } f$
2. $f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in \text{Dom } f$
3. $f(f^{-1}(y)) = y,\ \forall y \in \text{Dom } f^{-1}$

定义1

设 f 是一个函数, $A = \text{Dom } f, B \supset \text{Rg } f$

称 f 是 A 到 B 的映射，记为 $f : A \to B$

定义2

设 $f : A \to B$，如果 f 为单射，称 $f : A \to B$ 为单射

如果 $\text{Rg } f = B$，称 $f : A \to B$ 为满射

如果 $f : A \to B$ 既是单射又是满射，称 $f : A \to B$ 是双射

命题1

设 $f:A\to B$ 为双射，则 $f^{-1}:B\to A$ 为双射，且

1. $f^{-1}\circ f=I_A$
2. $f\circ f^{-1}=I_B$

> $I_X=\{(x,x)\mid x\in X\}$

计数1

定义0

设 S 是一个集合，若存在整数 n，以及双射 $f:\{1,2,3,\ldots,n\}\to S$，则

称 S 为**有限集**，记 $|S|=n$；我们约定 $\varnothing$ 为有限集，$|\varnothing|=0$

定义1

设 A,B 是两个集合，如果存在单射 $f:A\to B$

称 A 的**势**小于等于 B 的**势**，记为 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$

记号

如果 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$ 也记 $\overline{\overline{B}}\ge\overline{\overline{A}}$

如果 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{B}}\le\overline{\overline{A}}$，称 A,B 等势，记为 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$, 否则记为 $\overline{\overline{A}}\ne\overline{\overline{B}}$

如果 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}}\ne\overline{\overline{B}}$，记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$ 或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$

定理1 (Schröder-Bernstein)

设 A,B 是两个集合，则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$ 当且仅当存在双射 $h:A\to B$

必要性证明

设 $f:A\to B$，$g:B\to A$ 为单射

定义 $F:2^A\to 2^A$

> ps. 2^A 表示 A 的子集的集合，$2^A=\{x\mid x\subset A\}$

$F(S)=A-g(B-f(S))$，$S\in 2^A$

考察 $(2^A, \subset)$ 偏序集

如果 $\forall s_1, s_2 \in 2^A, s_1 \subset s_2 \implies F(s_1) \subset F(s_2)$ 称 F 单调增

命题1 F 单调增

$$\begin{aligned} s_1 \subset s_2 &\implies f(s_1) \subset f(s_2) \\ &\implies B - f(s_1) \supset B - f(s_2) \\ &\implies g(B - f(s_1)) \supset g(B - f(s_2)) \\ &\implies A - g(B - f(s_1)) \subset A - g(B - f(s_2)) \\ &\implies F(s_1) \subset F(s_2) \end{aligned}$$

如果 $\exists s \in 2^A$, s.t. $F(S) = S$，称 S 为 F 的不动点

命题2 F 有不动点

记 $\mathscr{A} = \{S \in 2^A \mid S \subset F(S)\}$

先证 $\mathscr{A} \neq \varnothing$，因为 $\varnothing \in \mathscr{A}$

记 $C = \bigcup_{S \in \mathscr{A}} S$

证明 C 是 F 的不动点

首先证 $C \subset F(C)$，因为 $C = \bigcup_{S \in \mathscr{A}} S \subset \bigcup_{S \in \mathscr{A}} F(S) \subset F(C)$

再证 $C \supset F(C)$，
$C \subset F(C) \implies F(C) \subset F(F(C)) \implies F(C) \in \mathscr{A} \implies F(C) \subset C$

所以 $F(C) = C$

所以 $g(B - f(C)) = A - C$

则构造 h

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in C \\ g^{-1}(x), & x \in A - C \end{cases}$$

h 为双射

MATH-6

计数2

定义1

设 $A \neq \varnothing$ 如果 $\exists n \in \mathbb{N}^*$ 使得

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\{1,2,3,\ldots,n\}}}$$

称 A 为**有限集**，否则为**无限集**

> 有限集，存在 $f:\{1,2,\ldots,n\} \to A$ 为双射

命题1

设 A 为有限集，B 为无限集，则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathbb{N}^*}} \leq \overline{\overline{B}}$

> 这意味着：
>
> - 有限集的势小于无限集的势
> - 正整数集是无限集
> - 正整数集的势是所有无限集中最小的

证明

1. $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N}^*}}$

   存在双射 $f:A \to \{1,2,\ldots,n\}$，则 $f:A \to B$ 是单射
2. $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{\mathbb{N}^*}}$

   反证，假设 $\exists g:A \to \mathbb{N}^*$ 是双射，$\exists f:\{1,2,\ldots,n\} \to A$ 是双射，则 $g \circ f:\{1,2,\ldots n\} \to \mathbb{N}^*$ 是双射，设 $N = \max\{\mathrm{Rg}\ g \circ f\}$，则 $N+1 \notin \mathrm{Rg}\ g \circ f$ 但是 $N+1 \in \mathbb{N}^*$
3. 定义 $\{a_n\}, n=1,2,\ldots, \text{s.t. } a_n \in B$ 并且

   $a_n \notin \{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}, \forall n=1,2,\ldots$

   因为 B 为无限集，$B \neq \varnothing$，取 $a_1 \in B$

   因为 B 为无限集，$B-\{a_1\} \neq \varnothing$，取 $a_2 \in B-\{a_1\}$，则 $a_2 \in B, a_2 \notin \{a_1\}$

   设 $a_n \in B, a_n \notin \{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}$

   因为 B 为无限集，$B-\{a_1,a_2,\ldots a_n\} \neq \varnothing$，取 $a_{n+1} \in B-\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，则 $a_{n+1} \in B, a_{n+1} \notin \{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$

设 $f:\mathbb{N}^*\to B,\ f(n)=a_n,\ n=1,2,\dots$ 为单射，所以 $\overline{\overline{\mathbb{N}^*}}\le\overline{\overline{B}}$

定义2

设 B 为无限集，如果 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{\mathbb{N}^*}}$，称 B 为**无限可数集**

定义3

设 $A\ne\varnothing$，如果 A 是有限集或无限可数集，称 A 为**可数集**，否则称 A 为**不可数集**

1. $\mathbb{Q}$ 为可数集，$\mathbb{R}$ 为不可数集，当然 $\mathbb{R}^2$ 不可数
2. 可数个可数集的并为可数集

实数

实数公理

1. 加法公理
2. 乘法公理
3. 序公理：$(\mathbb{R},\le)$ 是全序集
4. 实数的完备性

公理4（完备性）

设 $A,B\subset\mathbb{R},\ A,B\ne\varnothing$ 如果

$$x\le y,\quad \forall x\in A,y\in B$$

则 $\exists c\in\mathbb{R},\ \text{s.t.}$

$$x\le c\le y,\quad \forall x\in A,y\in B$$

公理4说明数轴上的点与实数集是一一对应的

确界原理

定义1

设 $A\subset\mathbb{R},A\ne\varnothing$ 如果 $\exists M\in\mathbb{R},\ \text{s.t.}$

$$M\ge x,\quad \forall x\in A$$

称 A 有**上界**，称 M 为 A 的**上界**，如果 $\exists m\in\mathbb{R},\ \text{s.t.}$

$$m \leq x, \quad \forall x \in A$$

称 A 有**下界**，称 m 为 A 的**下界**

定义2

设 $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$，设 A 有上界，记

$$E = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq x, \ \forall x \in A\}$$

如果 E 有最小元，记 $\sup A = \min E$，称 $\sup A$ 为 A 的**上确界**，设 A 有下界，记

$$F = \{s \in \mathbb{R} \mid s \leq x, \ \forall x \in A\}$$

如果 F 有最大元，记 $\inf A = \max F$，称 $\inf A$ 为 A 的**下确界**

> 上确界和下确界如果存在则是唯一的

定理1（确界原理）

设 $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$

如果 A 有上界，则 A 必有上确界

如果 A 有下界，则 A 必有下确界

证明

设 A 有上界

$E = \{s \in \mathbb{R} \mid s \geq x, \ \forall x \in A\}$

则 $A \neq \varnothing, E \neq \varnothing$，并且

$$x \leq s, \quad \forall x \in A, s \in E$$

则 $\exists c \in \mathbb{R}$, s.t.

$$x \leq c \leq s, \quad \forall x \in A, s \in E$$

说明 $c \in E$，而且 c 最小，则 $\sup A = c$

下确界同理

练习

> 记 $-A=\{-x \mid x\in A\}$

设 $A\subset\mathbb{R}, A\neq\varnothing$

1. 如果 A 有最大元，则 $-A$ 有最小元，且 $-\max A=\min(-A)$
2. 如果 A 有上确界，则 $-A$ 有下确界，且 $-\sup A=\inf(-A)$

MATH-7

记 $\mathbb{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$

设 $m,n\in\mathbb{Z}$，$m\neq n$，则 $|m-n|\geq 1$

如果 $m>n$ 则 $m\geq n+1$

命题1

设 $A\subset\mathbb{Z}$，$A\neq\varnothing$

1. 如果 A 有上界，则 A 有最大元
2. 如果 A 有下界，则 A 有最小元

证明

对于 1

记 $M=\sup A$ 则 $\exists n\in A$, s.t. $n>M-\frac{1}{2}$

下面证 $n=\max A$

设 $m\in A$，则 $m\leq M<n+\frac{1}{2}$ 因此 $m\leq n$

（否则 $m>n \implies m\geq n+1\wedge m<n+\frac{1}{2}$ 矛盾）

命题2

$\mathbb{Z}$ 既没有上界，也没有下界

证 因为 $\mathbb{Z}$ 没有最大元和最小元

命题3（Archimedean）

设 $h>0$ 则

$$\mathbb{R}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[kh,(k+1)h)$$

并且上式右端的集合互不相交

推论1

设 $x\in\mathbb{R}$ 则 $\exists! n\in\mathbb{Z},\ \text{s.t.}\ n\leq x<n+1$

称 n 为 x 的**整数部分**

记 $n=[x]$

$x=[x]+(x-[x])$ 其中 $x-[x]$ 是 x 的**小数部分** $\in[0,1)$

推论2

设 $x\in\mathbb{R}$

1. 如果 $x>0$ 则存在 $n\in\mathbb{N}^*,\ \text{s.t.}\ 0<\frac{1}{n}<x$
2. 如果 $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad x\leq\frac{1}{n}$，则 $x\leq 0$

命题4

设 $a,b\in\mathbb{R},\quad a<b$

则 $\exists q\in\mathbb{Q},\ \text{s.t.}\ a<q<b$

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\mid m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}^*\right\}$

证明

$\exists n\in\mathbb{N}^*,\ \text{s.t.}\ n(b-a)>1$

则 $nb>na+1$

令 $m=[na]+1$

$nb>m>na\implies b>\frac{m}{n}>a$

命题5

设 $a,b\in\mathbb{R},\quad a<b$

则 $\exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, s.t. $a < r < b$

证明

存在 $q \in \mathbb{Q}$, s.t. $\sqrt{2}a < q < \sqrt{2}b$

故 $\frac{q}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 且 $a < \frac{q}{\sqrt{2}} < b$

MATH-8

Inequalities Hardy Littlewood Cambridge

不等式

n 维欧氏空间

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, n\}$$

元素可看成点，向量

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

1. 加法：$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
2. 数乘：$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

称为向量的**线性运算**

$-x = (-1)x \quad x - y = x + (-y)$

记 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$

$\alpha x + \beta y$ 是 x, y 的**线性组合**

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 如果 $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ 使得 $\alpha x + \beta y = 0 \in \mathbb{R}^n$

称 x, y **线性相关**，否则称 x, y **线性无关**（独立）

如果 x, y 线性相关，又称 $x \parallel y$ 或共线

$\mathbf{0} \parallel x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

设 $x, y \neq 0,\ x \parallel y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \text{s.t. } y = kx$

- $y = kx,\ k > 0$：同向
- $y = kx,\ k < 0$：反向

设 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$a_i, b_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

$a \parallel b \Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

设 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

定义 $x \cdot y = \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

运算法则

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \cdot x \geq 0, "=" \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \cdot y = y \cdot x$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ 线性性

设 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

x 的长度（模，2-范数）

4. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \geq 0, "=",\ x = \mathbf{0}$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n,\ |\alpha x| = |\alpha||x|$
6. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |x + y| \leq |x| + |y|$

命题1（Cauchy）

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$，则

$|x \cdot y| \leq |x||y|$

"=" 成立当且仅当 $x \parallel y$

命题2（Cauchy）

设 $a_i, b_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

"=" 成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

拉格朗日恒等式

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \\ =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i b_j - a_j b_i)^2\end{aligned}$$

MATH-9

定理3（三角不等式）

设 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 则

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

设 $x, y \neq 0$ 则 "=" 成立，当且仅当 x, y 同向

证：

$|x+y|^2 = |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$

均值不等式

定理1（代数、几何平均值不等式 AM-GM）

设 $a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

"=" 成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

定理2

设 $\lambda_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ a_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$

则

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}$$

"=" 成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

定理3（Young 不等式）

设 $p, q > 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 则

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy, \quad \forall x, y > 0$$

"=" 成立当且仅当 $x^p = y^q$

设 $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

设 $p > 1$ 定义

$$|x|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

x 的 $p-$范数

1. $|x|_p \geq 0$, “=” 当且仅当 $x = 0$
2. $|kx|_p = |k||x|_p,\ \forall k \in \mathbb{R}$
3. $|x \cdot y| \leq |x|_p |y|_q,\ p, q > 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
4. $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$

Hölder不等式1

定理1（Hölder 不等式）

设 $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$ 设 $a_i, b_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^{\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \right)^{\beta}$$

"=" 成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

定理2

设 $r, s \in \mathbb{R},\ \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ 设 $a_i, b_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^s\right)^{1/s}, \quad r>1 \\
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^s\right)^{1/s}, \quad r<1
\end{aligned}
$$

“=” 成立当且仅当

$$
\frac{a_1^r}{b_1^s} = \frac{a_2^r}{b_2^s} = \cdots = \frac{a_n^r}{b_n^s}
$$

MATH-10

Hölder不等式2

见 MATH-9 Hölder不等式定理2

$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ 称为**共轭指数**

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}$ 称为**幂平均**

Cauchy不等式的推广

Minkowski不等式

定理1（Minkowski）

设 $r\in\mathbb{R},\ a_i, b_i>0,\ i=1,2,\ldots,n$ 则

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{1/r}, \quad r>1 \\
\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{1/r} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{1/r}, \quad r<1
\end{aligned}
$$

“=” 成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$

证明（使用Hölder不等式）

1. $r>1$（$r<1$ 同理）

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{r-1}(a_i+b_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{r-1}a_i+\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{r-1}b_i\\
&\le \left(\sum_{i=1}^{n}\left((a_i+b_i)^{r-1}\right)^{\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{r-1}{r}}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\right]\\
\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{1/r} &\le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{1/r}
\end{aligned}
$$

其中放缩一步利用Hölder不等式其中 $r=\frac{r}{r-1},\ s=r$

“=” 成立条件

$$
\begin{cases}
\dfrac{(a_1+b_1)^r}{a_1^r}=\cdots=\dfrac{(a_n+b_n)^r}{a_n^r}\\
\dfrac{(a_1+b_1)^r}{b_1^r}=\cdots=\dfrac{(a_n+b_n)^r}{b_n^r}
\end{cases}
$$

然后利用和分比定理即可

定理2（加权的Minkowski不等式）

设 $r\in\mathbb{R},\ \alpha_i>0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,\ a_i,b_i>0,\ i=1,2,\ldots,n$

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i+b_i)^r\right)^{1/r} &\le \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i^r\right)^{1/r}, \quad r>1\\
\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(a_i+b_i)^r\right)^{1/r} &\ge \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i^r\right)^{1/r}, \quad r<1
\end{aligned}
$$

“=” 成立当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$

证明

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i(a_i+b_i)^r\right)^{1/r} &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^{1/r}(a_i+b_i)\right)^r\right)^{1/r} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^{1/r}a_i\right)^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^{1/r}b_i\right)^r\right)^{1/r} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i b_i^r\right)^{1/r}
\end{aligned}
$$

设 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

设 $1\le p<\infty$ 定义

$$
|x|_p=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}
$$

称作 x 的 $p-$范数

定义

$$
|x|_\infty=\max_{i=1\sim n}|x_i|
$$

x 的 $\infty-$范数

命题1

设 $1\le p\le\infty$ 则

1. $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |x|_p\ge 0$，“=”成立当且仅当 $x=\mathbf{0}$
2. $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ |kx|_p=|k||x|_p,\ \forall k\in\mathbb{R}$
3. $\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ |x+y|_p\le|x|_p+|y|_p$
4. $\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ 1<p,q<\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 或 $p=1,q=\infty$ 则 $|x\cdot y|\le|x|_p|y|_q$

证明(4)

设 $x,y\ne 0$ 令

$\hat{x}=\frac{x}{|x|_p}\implies|\hat{x}|_p=1$

$\hat{y}=\frac{y}{|y|_q}\implies|\hat{y}|_q=1$

只需证 $|\hat{x}\cdot\hat{y}|\le 1$

$$
\begin{aligned}
|\hat{x}\cdot\hat{y}| &= \left|\sum_{i=1}^{n}\hat{x}_i\hat{y}_i\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}|\hat{x}_i\hat{y}_i| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}|\hat{x}_i|^p+\frac{1}{q}|\hat{y}_i|^q\right) \\
&= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1
\end{aligned}
$$

MATH-11

设 $1\le p\le\infty$ 则

$$|x+y|_p\le|x|_p+|y|_p,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

证明（对于 $1<p<\infty$）

$$
\begin{aligned}
|x+y|_p^p =& \sum|x_i+y_i|^p \\
=& \sum|x_i+y_i|^{p-1}|x_i+y_i| \\
\le& \sum|x_i+y_i|^{p-1}(|x_i|+|y_i|) \\
=& \sum|x_i+y_i|^{p-1}|x_i|+\sum|x_i+y_i|^{p-1}|y_i| \\
\le& \left(\sum\left(|x_i+y_i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left[\left(\sum|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
=& |x+y|_p^{p-1}\left(|x|_p+|y|_p\right)
\end{aligned}
$$

幂平均值不等式

定义

设 $q_i>0,\ i=1\sim n,\ \sum_{i=1}^{n}q_i=1$

设 $r\in\mathbb{R},\ r\ne0$

设 $a_i>0,\ i=1\sim n,\ a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

定义

$$m_r(a)=\left(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

称为 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 的**加权的幂平均值**

幂平均值不等式如下

$$m_r(a) \le m_s(a), \quad r \le s$$

令 $\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)$

则有

$$m_{-r}(a) = \frac{1}{m_r\left(\frac{1}{a}\right)}$$

命题1 当 $r \to +\infty,\ m_r(a) \to \max_{1\le i\le n} a_i$

证

$M = \max_{1\le i\le n} a_i$

设 $a_\alpha = M$

设 $r > 0$

则 $m_r(a) = \left(\sum_{i=1}^n q_i a_i^r\right)^{1/r} \le M$

$m_r(a) \ge (q_\alpha a_\alpha^r)^{1/r} = q_\alpha^{1/r} M$

故

$$q_\alpha^{1/r} M \le m_r(a) \le M, \quad \forall r > 0$$

在 $r \to +\infty,\ q_\alpha^{1/r} M \to M$

所以得证

命题2 当 $r \to -\infty,\ m_r(a) \to \min_{1\le i\le n} a_i$

用 $G(a) = a_1^{q_1} a_2^{q_2} \ldots a_n^{n}$ 几何平均值

命题3 当 $r \to 0,\ m_r(a) \to G(a)$

证

L'Hôspital 法则

$$m_r(a)=\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^r\right)^{1/r}$$

$$\lim_{r\to 0}\ln m_r(a)=\lim_{r\to 0}\frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i^r\right)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{\frac{\sum q_i a_i^r \ln a_i}{\sum q_i a_i^r}}{1}=\frac{\sum q_i \ln a_i}{\sum q_i}=\ln G(a)$$

即证

定义

$m_0(a)=\lim_{r\to 0} m_r(a)=G(a)$

$m_{+\infty}=\lim_{r\to +\infty} m_r(a)=\max a$

$m_{-\infty}=\lim_{r\to -\infty} m_r(a)=\min a$

记

$[-\infty,+\infty]=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ **广义实数集**

定理1

设 $-\infty\le r<s\le+\infty$ 则

$$m_r(a)\le m_s(a)$$

“=” 成立当且仅当 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 全相等

证明

step1. 证明如果 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 全相等，则 “=” 成立

下面设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 不全相等，证 $m_r(a)<m_s(a)$

step2. 设 $0<r<+\infty$，证 $m_r(a)<m_{+\infty}(a)$

step3. 设 $0<r<s<+\infty$，证 $m_r(a)<m_s(a)$

设 $r=\alpha s,\ \alpha\in(0,1)$

$$
\begin{aligned}
m_r(a) &= \left(\sum q_i a_i^r\right)^{1/r} \\
&= \left(\sum q_i a_i^{\alpha s}\right)^{1/r} \\
&= \left(\sum (q_i a_i^s)^{\alpha} q_i^{1-\alpha}\right)^{1/r} \\
&< \left(\left(\sum q_i a_i^s\right)^{\alpha}\left(\sum q_i\right)^{1-\alpha}\right)^{1/r} \\
&= \left(\sum q_i a_i^s\right)^{1/s} = m_s(a)
\end{aligned}
$$

step4. 设 $r > 0$，这 $G(a) = m_0(a) < m_r(a)$

使用加权算术几何均值不等式

step5. 设 $r < 0$，证 $m_r(a) < m_0(a)$

step6. 设 $-\infty < r < s < 0$，证 $m_r(a) < m_s(a)$

step7. 设 $-\infty < r < 0$，证 $m_{-\infty}(a) < m_r(a)$

即证

MATH-13

排序不等式

定理1（Abel求和变换）

设 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1 \sim n$

$$
B_i = \sum_{k=1}^{i} b_k, \quad i = 1 \sim n
$$

则

$$
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_n B_n - \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) B_i
$$

定理2（排序不等式）

设 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ 设 $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1 \sim n$

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$
$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

设 $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ 为双射，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

并且 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

当且仅当 $a_1, \ldots, a_n$ 全相等或 $b_1, \ldots, b_n$ 全相等

证明

乱序和大于等于逆序和

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \\
= & \sum_{i=1}^{n} a_i \left(b_{\sigma(i)} - b_{n+1-i}\right) \\
= & a_n \left(\sum_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)} - \sum_{i=1}^{n} b_{n+1-i}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \left[(a_{i+1} - a_i) \left(\sum_{k=1}^{i} b_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{i} b_{n+1-k}\right)\right] \\
\geq & \ 0
\end{aligned}$$

正序和大于等于乱序和，取负即可

加权均值不等式

设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ 设 $a_i > 0,\ i = 1 \sim n$ 则

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\alpha_i}$$

“=” 成立当且仅当 a_i 全相等

证明

$f(x) = -\ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ 严格凸

$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(a_i)$

“=”成立 $\Leftrightarrow a_i$ 全相等

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln(a_i)=\ln\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^{\alpha_i}\right)$$

即证

切比雪夫不等式

定理1（Chebyshev单调不等式）

设 $q_i>0,\ i=1\sim n,\ \sum_{i=1}^n q_i=1$ 设 $a_i,b_i\in\mathbb{R},\ i=1\sim n$ 如果

$$\begin{aligned}a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\\ b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n\end{aligned}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}q_ia_ib_i\geq\left(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}q_ib_i\right)$$

如果

$$\begin{aligned}a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\\ b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\end{aligned}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}q_ia_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}q_ia_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}q_ib_i\right)$$

“=” 成立当且仅当 a_i 全相等或 b_i 全相等

推论

如果

$$\begin{aligned}a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\\ b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n\end{aligned}$$

则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geq\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i}$$

“=” 成立当且仅当 a_i 全相等或 b_i 全相等

证明（Chebyshev单调不等式）

注意到以下恒等式

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i q_j (a_i - a_j)(b_i - b_j) \\
=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(q_i q_j a_i b_i + q_i q_j a_j b_j - q_i q_j a_j a_i - q_i q_j a_i b_j) \\
=&\,2\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i a_i b_i q_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_i b_i q_j a_j\right) \\
=&\,2\left[\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i b_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} q_i a_i\right)\right]
\end{aligned}
$$

轻松易证上述不等式

伯努利不等式

定理1

设 $a \in \mathbb{R}$ 如果 $a > 1$ 则

$$(1+x)^a > 1 + ax, \quad \forall\, x > -1,\ x \neq 0$$

如果 $0 < a < 1$，则

$$(1+x)^a < 1 + ax, \quad \forall\, x > -1,\ x \neq 0$$

MATH-14

推论

设 $n \in \mathbb{N}^*$，$n \geq 2$ 则

$$(1+x)^n > 1 + nx, \quad \forall\, x > -1,\ x \neq 0$$

定理2

设 $n \in \mathbb{N}^*$，$n \geq 2$，$x_i > -1$，$i = 1, 2, \ldots, n$，并且 x_i，$i = 1 \sim n$ 同正或同负，则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) > 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

证明

数学归纳法

1. $n=2$

$(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1+x_2+x_1x_2>1+x_1+x_2$

2. 假设 $n=k$ 成立

若 $n=k+1$

$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)>\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)(1+x_n)=1+\sum_{i=1}^{n}x_i+x_n\sum_{i=1}^{n-1}x_i>1+\sum_{i=1}^{n}x_i$

函数

定义1

设 $D\subset\mathbb{R}$，$D\neq\varnothing$

$$\forall x\in D,\quad -x\in D$$

称 D 关于原点对称，设 $f:D\to\mathbb{R}$，如果

$$f(-x)=f(x),\quad \forall x\in D$$

称 f 为**偶函数**，如果

$$f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in D$$

称 f 为**奇函数**

例1

1. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)$
2. $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$
3. $f(x)=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$

偶函数：1,3 奇函数：2

p.s. 我是人机+1

例2

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 无限可微，$f^{(k)}$ 为 f 的 k 阶导

若 f 为偶函数，讨论 $f^{(k)}$ 的奇偶性

p.s. 我是人机+2

定义2

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如果存在 $T\neq 0$, 使得

$$f(x+T)=f(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

称 f 为 T-周期函数

例1

证明

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

为周期函数

例2

存在一个非常值的周期函数 f

使得 $1,\sqrt{2}$ 为 f 的周期

选择公理

设 $\mathscr{A}$ 是一个集族，$\mathscr{A}\neq\varnothing$, $\forall A\in\mathscr{A}$, $A\neq\varnothing$

则 $\exists\varphi:\mathscr{A}\to\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$，使得

$$\varphi(A)\in A,\quad \forall A\in\mathscr{A}$$

φ 称为**选择函数**

证明（例2）

定义 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid \exists m,n\in\mathbb{Z},\ \text{s.t. } y-x=m+n\sqrt{2}\}$

E 是一个 $\mathbb{R}$ 上的等价关系

1. xEx 证 $x-x=0+0\sqrt{2}$
2. $xEy \to yEx$ 证 $y-x=m+n\sqrt{2} \to x-y=-m+(-n)\sqrt{2}$
3. $xEy \wedge yEz \to xEy$ 证
   $y-x=m_1+n_1\sqrt{2} \wedge z-y=m_2+n_2\sqrt{2} \to z-x=(m_1+m_2)+(n_1+n_2)\sqrt{2}$

$[x]$ 表示 x 的等价类

设 $\varphi:\mathbb{R}/E \to \mathbb{R}$ 为选择函数

$$\varphi([x]) \in [x], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

定义 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x)=\varphi([x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

1. $f(x)=f(y) \Leftrightarrow xEy$
2. $f(0) \neq f(\sqrt{3})$
3. $f(x+1)=f(x)$
4. $f(x+\sqrt{2})=f(x)$

其中 2 的证明

反证 $f(0)=f(\sqrt{3})$

可得 $0E\sqrt{3}$

即 $\sqrt{3}=m+n\sqrt{2} \implies 3=m^2+2n^2+2\sqrt{2}mn \implies mn=0$

1. $m=0$ 则 $3=2n^2 \implies \perp$
2. $n=0$ 则 $3=m^2 \implies \perp$

例3

设 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 证明：$\exists!$ 偶函数 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，奇函数 $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

使得 $f=g+h$

$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

MATH-15

$$
\begin{aligned}
f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1 \\
\iff e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq x + \ln x \\
g(x) = e^x + x \\
g(\ln a + x - 1) \geq g(\ln x) \\
\ln a + x - 1 \geq \ln x \\
\ln a \geq \ln x - x + 1 \\
h(x) = \ln x - x + 1 \\
\ln a \geq h_{max}(x) \\
h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \\
h_{max}(x) = h(1) = 0 \\
\ln a \geq 0 \iff a \geq 1
\end{aligned}
$$

例1

考察下列函数的单调性

1. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0$
2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}, \quad x > 0$
3.

$$
\begin{aligned}
& g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \\
& g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
& -\ln(1+x) = \ln\left(1 - \frac{x}{1+x}\right) < -\frac{x}{1+x} \\
& \implies g'(x) < 0 \implies f'(x) < 0
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
& g(x) = \ln f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln(1+x) = \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x} \\
& g'(x) = \frac{x + x\ln(1+x) - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
& \ln(1+x) < x \implies g'(x) > 0 \implies f'(x) > 0
\end{aligned}
$$

设 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如果 $\exists M \in \mathbb{R}$, s.t.

$$
f(x) \leq M, \quad \forall x \in A
$$

称 f 有**上界**，称 M 为 f 的上界，类似可定义**下界**

如果 f 既有上界又有下界，称 f **有界**

例1

考察下列函数的有界性

1. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0$
2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}, \quad x > 0$
3. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}+1}, \quad x > 0$
4.

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x} \leq \frac{x-1}{x} < 1$$

有界

2.

$$\ln f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$$

有界

3.

$$f(x) = (1+x)^{1/x+1} \geq 1+x$$

显然无上界

计算这三个函数的导数

1.

$$\begin{aligned} g(x) = \ln f(x) &= \frac{\ln x}{x} \\ g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ f'(x) = \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) &x^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) \\
g'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
f'(x) = \left(\frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}\right)(1+x)^{\frac{1}{x}}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
g(x) = \ln f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \ln(1+x) = \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x} \\
g'(x) = \frac{x + x\ln(1+x) - (1+x)\ln(1+x)}{x^2} = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{f'(x)}{f(x)} \\
f'(x) = \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\right)(1+x)^{\frac{1}{x}+1}
\end{aligned}
$$

MATH-17

定义1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间，$f : I \to \mathbb{R}$ 如果

$$
f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall x, y \in I, \lambda \in [0,1]
$$

称 f 为**凸函数（下凸函数）**

$z = (1-\lambda)x + \lambda y,\ \lambda \in (0,1)$ 分点公式

$1 - \lambda = \frac{y-z}{y-x}, \quad \lambda = \frac{z-x}{y-x}$

命题1

设 $f : I \to \mathbb{R}$ 为凸函数，$x_1, x_2, x_3 \in I$ 如果 $x_1 < x_2 < x_3$，则

$$
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3 \\
f(x_2) = f\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3\right) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) \\
(x_3 - x_1) f(x_2) \le (x_3 - x_2) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_3) \\
\iff (x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) \le (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_1)) \\
\iff (x_3 - x_1)(f(x_2) - f(x_3)) \le (x_3 - x_2)(f(x_1) - f(x_3))
\end{aligned}
$$

命题2

设 $f: I \to \mathbb{R}$ 则 f 为凸函数当且仅当 $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$\begin{aligned}
x_1 = x, x_3 = y, x_2 = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_3 \\
\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in (0,1) \\
(x_3 - x_2)(f(x_2) - f(x_1)) \le (x_2 - x_1)(f(x_3) - f(x_2)) \\
\iff (x_3 - x_1)f(x_2) \le (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3) \\
\iff f((1-\lambda)x + \lambda y) = f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}f(x_3) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \\
\forall x, y \in I,\ \lambda \in (0,1),\ x \ne y
\end{aligned}$$

命题3（弱极值定理）

设 $a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 为凸函数，则

$$\max f = \max\{f(a), f(b)\}$$

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = f\left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b\right) \le \frac{b-t}{b-a}f(a) + \frac{t-a}{b-a}f(b) \le \max\{f(a), f(b)\}$$

命题4（强极值定理）

设 $f: I \to \mathbb{R}$ 为凸函数，$c \in I$，c 不是 I 的端点，如果 $f(c) = \max f$ 则 $f \equiv f(c)$

$$\begin{aligned}
& x, y \in I, x < c < y \\
\Longrightarrow\ & f(c) \le \frac{y-c}{y-x}f(x) + \frac{c-x}{y-x}f(y) \le f(c) \\
\Longrightarrow\ & (y-x)f(c) = (y-c)f(x) + (c-x)f(y) \\
\Longrightarrow\ & 0 \le (y-c)(f(c) - f(x)) = (c-x)(f(y) - f(c)) \le 0 \\
\Longrightarrow\ & f(x) = f(y) = f(c)
\end{aligned}$$

命题5

设 $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ 为凸函数，$x_0 \in (a,b)$，则 $\exists k \in \mathbb{R}$, s.t.

$$f(x) \ge k(x - x_0) + f(x_0), \quad \forall x \in (a,b)$$

直线 $y = k(x - x_0) + f(x_0)$ 叫凸函数的支撑线

证明

设 $A=\left\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\middle|\,x\in(a,x_0)\right\}$

$B=\left\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\middle|\,x\in(x_0,b)\right\}$

可得 $x\le y,\quad \forall x\in A,y\in B$

则 $\exists c,x\le c\le y,\quad \forall x\in A,y\in B$

即 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le c\implies f(x)\ge c(x-x_0)+f(x_0),\quad \forall x\in(a,x_0)$

和 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge c\implies f(x)\ge c(x-x_0)+f(x_0),\quad \forall x\in(x_0,b)$

又 $f(x)=c(x-x_0)+f(x_0),\quad x=x_0$

综上得证

MATH-18

定义1

设 $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in A$

如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \text{s.t.}$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad \forall x\in A,|x-x_0|<\delta$$

称 f 在 x_0 点连续

如果 $\forall x\in A$，f 在 x 点连续，称 f 是连续函数或 f 连续

例1

$f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$ 则 f 连续

例2

$f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ 证明 f 连续

证明

设 $x_0\in\mathbb{R}$ 设 $\varepsilon>0$ 令

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2|x_0|+1+\varepsilon}$$

则 当 $|x-x_0|<\delta$

$$|f(x)-f(x_0)|\le(|x|+|x_0|)|x-x_0|\le(2|x_0|+1)\delta<\varepsilon$$

例3

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

不连续

证明

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 设 $\delta>0$

令 $x=\frac{\delta}{2}$ 则 $x-0<\delta$

$|H(x)-H(0)|=1>\varepsilon$

命题1

设 $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in A$ 则 f 在 x_0 点连续当且仅当

$$\begin{aligned}&\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \text{s.t.}\\ &|f(x)-f(x_0)|\le C\varepsilon,\forall x\in A,|x-x_0|<\delta\end{aligned}$$

其中 $C>0$ 为常数

证明

$\Longrightarrow$ 已知 f 满足定义，设 $\varepsilon>0$ 则 $C\varepsilon>0$ 则 $\exists\delta>0,\ \text{s.t.}$

$$|f(x)-f(x_0)|<C\varepsilon,\quad\forall x\in A,\ |x-x_0|<\delta$$

$\Longleftarrow$ 已知 f 满足命题1的条件，证 f 满足定义

设 $\varepsilon>0$ 则 $\frac{\varepsilon}{2C}>0$ 因此 $\exists\delta>0,\ \text{s.t.}$

$$|f(x)-f(x_0)|\le C\cdot\frac{\varepsilon}{2C}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\quad\forall x\in A,\ |x-x_0|<\delta$$

定义2

设 $f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_0\in A$，如果 $\exists\delta>0,\ M\in\mathbb{R}$ 使得

$$|f(x)|\le M,\quad\forall x\in A,|x-x_0|<\delta$$

称 f 在 x_0 点局部有界

命题2

设 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ 如果 f 在 x_0 点连续，则 f 在 x_0 点局部有界

证明

在定义1中，令 $\varepsilon = 1$，则 $\exists \delta > 0$, s.t.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 1, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta$$

则

$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta$$

命题3

设 $f, g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in A$ 点连续，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，则

1. $\alpha f + \beta g$ 在 x_0 点连续
2. fg 在 x_0 点连续
3. 如果 $\forall x \in A, g(x) \neq 0$ 则 $\frac{f}{g}$ 在 x_0 点连续

证明

设 $\varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0$, s.t.

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta_1$$
$$|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta_2$$

1.

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 则当 $x \in A, |x - x_0| < \delta$

$$|(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))| \leq (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon$$

2.

g 在 x_0 点局部有界，$\exists \delta_3 > 0, M \in \mathbb{R}$, s.t.

$$|g(x)| \leq M, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta_3$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

则当 $x \in A,\ |x-x_0|<\delta$ 时

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)| &= |f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)| \\ &\le |g(x)||f(x)-f(x_0)|+|f(x_0)||g(x)-g(x_0)| \\ &\le (M+|f(x_0)|+1)\varepsilon\end{aligned}$$

3.

由定义1可得 $\exists\delta_3>0,\ \text{s.t.}$

$$|g(x)-g(x_0)|\le\frac{|g(x_0)|}{2}\implies|g(x)|\ge\frac{|g(x_0)|}{2}$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$

则 $\forall x\in A,|x-x_0|>\delta$

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right| \\ =&\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)}+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x_0)g(x)}\right| \\ \le&\left|\frac{1}{g(x)}\right|\left(|f(x)-f(x_0)|+\left|\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right||g(x_0)-g(x)|\right) \\ \le&\left|\frac{2}{g(x_0)}\right|\left(1+\left|\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right|\right)\varepsilon\end{aligned}$$

设 $f,g:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 $x_0\in A$ 点连续

证明:

1. $|f|$ 在 x_0 点连续
2. $\max\{f,g\},\min\{f,g\}$ 在 x_0 点连续

设 $f:A_1\cup A_2\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

其中 $A_1\cap A_2=\varnothing$

如果 $f|_{A_1},f|_{A_2}$ 连续,

$$\inf\{|x-y|\mid x\in A_1,y\in A_2\}>0$$

则 f 连续

MATH-19

定义

设 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in A$ 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \text{s.t.}$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta$$

称 f 在 x_0 点连续

命题

设 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g: B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{Rg} f \subset B$

设 $x_0 \in A,\ y_0 = f(x_0)$，如果 f 在 x_0 点连续，g 在 y_0 点连续，则 $g \circ f$ 在 x_0 点连续

证明

设 $\varepsilon > 0,\ \exists \sigma > 0,\ \text{s.t.}$

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon, \quad \forall y \in B, |y - y_0| < \sigma$$

$\exists \delta > 0,\ \text{s.t.}$

$$|f(x) - f(x_0)| < \sigma, \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta$$

设 $x \in A, |x - x_0| < \delta$

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

初等函数都是连续的

定理1

定义在闭区间的函数一定是有界的

设 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 有界

证明 反证法

假设 f 无界

记 $[a_1, b_1] = [a, b]$，令 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

如果 f 在 $[a_1, c_1]$ 上无界，令 $[a_2, b_2] = [a_1, c_1]$

否则，记 $[a_2, b_2] = [c_1, b_1]$

重复上述操作

我们得到 $[a_n, b_n],\ n = 1, 2, \ldots,$

1. $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$
2. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$
3. f 在 $[a_n, b_n]$ 上无界

令 $A = \{a_n \mid n = 1, 2, \ldots,\}$

$B = \{b_n \mid n = 1, 2, \ldots,\}$

则 $x \le y, \quad \forall x \in A, y \in B$

$\exists x_0 \in \mathbb{R},$ s.t.

$$x \le x_0 \le y, \quad \forall x \in A, y \in B$$

在 x_0 点连续，所以在 x_0 点局部有界

$\exists \varepsilon > 0,$ s.t. f 在 $[a, b] \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 上有界

$$a_n \le x_0 \le b_n, \quad \forall n = 1, 2, \ldots,$$

$\exists N \in \mathbb{N}^*,$ s.t.

$$b_n - a_n < \varepsilon$$

所以 $[a_n, b_n] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [a, b]$

所以 f 在 $[a_n, b_n]$ 上有界，与3矛盾

所以假设不成立，所以 f 有界

定理2

设 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 有最大值（最小值）

证明

令 $M = \sup f$ 下面证 $\exists x_0 \in [a, b],$ s.t. $f(x_0) = M$

记 $[a_1, b_1] = [a, b]$ 令 $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

$\sup_{[a_1, c_1]} f = M$ 或 $\sup_{[c_1, b_1]} f = M$

若 $\sup_{[a_1,c_1]} f = M$ 则令 $[a_2,b_2]=[a_1,c_1]$

否则 $[a_2,b_2]=[c_1,b_1]$

重复上述操作

得到 $[a_n,b_n],\ n=1,2,\dots,$

1. $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$
2. $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}\to 0$
3. $\sup_{[a_n,b_n]} f = M$

令 $A=\{a_n\mid n=1,2,\dots,\}\quad B=\{b_n\mid n=1,2,..,\}$

则 $x\le y,\ \forall x\in A, y\in B$

$\exists x_0\in\mathbb{R},\ \text{s.t.}$

$$x\le x_0\le y,\quad \forall x\in A, y\in B$$

即

$$a_n\le x_0\le b_n,\quad n=1,2,\dots,$$

下面证 $f(x_0)=M$ 反证，假设 $f(x_0)\ne M$ 则 $f(x_0)<M$

$\exists\varepsilon>0,\ \text{s.t.}$

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{M-f(x_0)}{2},\quad \forall x\in[a,b],|x-x_0|<\varepsilon$$

则

$$f(x)<\frac{f(x_0)+M}{2}<M,\quad \forall x\in[a,b],|x-x_0|<\varepsilon$$

所以在 $[a,b]\cap(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 上 $\sup f\le\frac{f(x_0)+M}{2}<M$

$\exists n\in\mathbb{N}^*,\ \text{s.t.}$

$$[a_n,b_n]\subset[a,b]\cap(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$$

则 $\sup_{[a_n,b_n]} f\le\frac{f(x_0)+M}{2}<M$ 与3矛盾

所以假设不成立

所以 $f(x_0)=M$

所以有最大值

定理3

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，如果 $f(a)f(b)\le 0$ 则 f 必有零点

MATH-21

三角恒等式

1. 基本， $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$
2. 诱导公式， $\sin(x+k\pi)=(-1)^k\sin x,\quad \cos(x+k\pi)=(-1)^k\cos x,$
   $\sin\left(x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k+1}\cos x,\quad \cos\left(x+(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k\sin x$
3. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$
   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$
   $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$
4. 倍角公式， $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha,$
   $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,\quad \tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
5. 降幂公式， $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
6. 半角公式， $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$
   $\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
7. 万能公式，令 $t=\tan\frac{\alpha}{2},\quad \sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$
8. 积化和差， $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta),$
   $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta),$
   $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta),\quad 2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$
9. 和差化积， $\cos x-\cos y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right),$
   $\cos x+\cos y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{y-x}{2}\right),\quad \sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$
   $\sin x-\sin y=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

欧拉公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$

练习

证明：

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}=\frac{1-\cos nx}{1-\cos x}$$

推导 $\sin 3\theta$，$\cos 3\theta$ 的公式

MATH-22

1. $\sin 3\theta=4\sin(60^\circ-\theta)\sin\theta\sin(60^\circ+\theta)$
2. $\cos 3\theta=4\cos(60^\circ+\theta)\cos\theta\cos(60^\circ+\theta)$
3. $\sum_{i=1}^{n}\sin(\alpha+i\beta)$
4. $\sum_{i=1}^{n}\cos(\alpha+i\beta)$

MATH-23

MATH-24

MATH-25

MATH-26

MATH-27

复数

$z=a+b\mathrm{i},\ a,b\in\mathbb{R}$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，虚数单位

$\mathrm{Re}z=a$，实部；$\mathrm{Im}z=b$，虚部

$b=0$，实数；$b\neq 0$，虚数；$a=0\wedge b\neq 0$，纯虚数

$\mathbb{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$，复数域

几何表示：复平面

$z=a+b\mathrm{i} \iff$ 点 $(a,b) \iff$ 向量 $\overrightarrow{OZ}$

- 共轭，$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$
- 模，$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- $z_1+z_2=(a_1+a_2)+\mathrm{i}(b_1+b_2)$
- $z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1)$
- $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

共轭

- $\bar{\bar{z}}=z$
- $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$
- $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

模

- $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$
- $|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$，$z_2\neq 0$
- $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

共轭与模

- $|\overline{z}|=|z|$
- $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$

幅角

$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$r=|z|$

$$\frac{z}{r}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

θ，z 的幅角；$\theta\in[0,2\pi)$，z 的幅角主值，$\theta=\mathrm{arg}z$

$\mathrm{Arg}z=\{\mathrm{arg}z+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$

命题1

设 $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

- $-\arg z \in \operatorname{Arg}\overline{z}$
- $-\arg z \in \operatorname{Arg}\frac{1}{z}$
- $\arg z_1 + \arg z_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$
- $\arg z_1 - \arg z_2 \in \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

$\theta_1 = \arg z_1,\ \theta_2 = \arg z_2$

$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$

$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$

命题2

设 $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ 则

$e^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot e^{\mathrm{i}\theta_2} = e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$

z^n， $z^0 = 1\ (z \neq 0)$， $z^{-n} = \frac{1}{z^n}\ (z \neq 0)$， $n \in \mathbb{N}^*$

命题3

设 $n \in Z, \theta \in \mathbb{R}$ 则

$\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}(n\theta)}$

MATH-28

设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上的四个不同的点，称

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

为 z_1, z_2, z_3, z_4 的**交比**

定理1

设 z_1, z_2, z_3, z_4 是复平面上的四个不同的点，则

1. z_1, z_2, z_3, z_4 四点共线 $\iff$ $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$, $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R}$
2. z_1, z_2, z_3, z_4 四点共圆 $\iff$ $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$, $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \notin \mathbb{R}$

MATH-29

定义

$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ 称为分式线形变换

直线：$\alpha x+\beta y+\gamma=0,\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\alpha^2+\beta^2\neq 0$

直线复数表示：$\overline{B}z+B\bar{z}+C=0,\quad B\in\mathbb{C},B\neq 0,C\in\mathbb{R}$

圆的标准方程：$|z-z_0|=r$

$(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=r^2 \iff z\bar{z}-\overline{z_0}z-z_0\bar{z}+|z_0|^2-r^2=0$

圆的一般方程：$|z|^2+\overline{B}z+B\bar{z}+C=0,\quad B\in\mathbb{C},C\in\mathbb{R},|B|^2-C>0$

统一形式：$A|z|^2+\overline{B}z+B\bar{z}+C=0,\quad A,C\in\mathbb{R},B\in\mathbb{C},|B|^2-AC>0$

$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$：扩充复数域

在复平面中引入无穷远点，对应 ∞，叫扩充复平面

- $z+\infty=\infty+z=\infty$
- $z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty,\ z\neq 0$
- $\frac{z}{\infty}=0$
- $\frac{z}{0}=\infty,\ z\neq 0$

统称直线和圆为圆；直线为过无穷远点的圆

设 $b\in\mathbb{C}$

$T_b(z)=z+b,\ T_b^{-1}=T_{-b}$

$D_r(z)=rz,\ D_r^{-1}=D_{\frac{1}{r}}$

$R_\theta(z)=e^{i\theta}z,\ R_\theta^{-1}=R_{-\theta}$

线形变换 $f(z)=az+b,\ f=T_b\circ D_{|a|}\circ R_{\arg a}$

命题1

设 f 是线形变换，则

1. $[f(z_1),f(z_2);f(z_3),f(z_4)]=[z_1,z_2;z_3,z_4]$

2. 如果 C 是圆，则 $f(C)$ 也是圆

圆 $C:|z-z_0|=R$

$z\in\mathbb{C},z\neq z_0$

$$z^*=\frac{R^2}{\overline{z-z_0}}+z_0$$

$z-z_0=re^{i\theta},\ z^*-z_0=\frac{R^2}{r}e^{i\theta}$

z^* 在射线 z_0z 上

z^* 称为 z 关于圆周 C 的对称点

$z^{**}=z$

$$f(z)=\frac{R^2}{\overline{z-z_0}}+z_0,\quad f^{-1}=f$$

对称变换 S

$S(z)=\frac{1}{\bar{z}},\ S^{-1}=S$

$S(0)=\infty,\ S(\infty)=0$

$S(z)$ 为 $\bar{z}$ 关于单位圆的对称点

命题2

设 $f(z)=\frac{1}{z}$，则

1. $[f(z_1),f(z_2);f(z_3),f(z_4)]=[z_1,z_2;z_3,z_4]$
2. 如果 C 是圆，则 $f(C)$ 也是圆

分式线形变换

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2z+cd},\quad a,b,c,d\in\mathbb{C},ad-bc\neq 0$$

$$f^{-1}(z)=\frac{-dz+b}{cz-a}$$

命题3

设 f 是分式线形变换，则

1. $[f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4]$
2. 如果 C 是圆，则 $f(C)$ 也是圆

MATH-30