第一次上机报告

> 2233316027 王博想

1. 寻找水仙花数

问题重述

水仙花数 (Narcissistic number) 也被称为超完全数字不变数 (pluperfect digital invariant, PPDI)、自恋数、自幂数、阿姆斯壮数或阿姆斯特朗数 (Armstrong number)。水仙花数是指一种特殊的数字序列，是指一个 n 位数 ($n \geq 3$)，其每个数位上的数字的 n 次幂之和等该数本身，即

$$\overline{a_1a_2\cdots a_n} = \sum_{i=1}^{n}(a_i)^n, \quad n \geq 3$$

编写程序寻找 $n = 3, 4, 5, 6$ 时所有的水仙花数。

实现思想

枚举法

$$\overline{a_1a_2\cdots a_n} = \sum_{i=1}^{n}(a_i)^n, \quad n \geq 3$$

对于一个数 `x` 我们考虑如何判断它是不是水仙花数，我们可以令 `s = str(x)` ，则 n 即为 `len(s)` ，a_i 即为 `int(s[j])` ，通过 `map` 函数，可以将 `s` 的每一位的 n 次方计算出来，再使用 `sum` 即可得到右式

以 371 为例， `x = 371` ，则 `s = str(s) = '371'` ， `n = len(s) = 3` ，

则 `map(lambda x: int(x) ** len(s), s) = [3 ** 3, 7 ** 3, 1 ** 3] = [27, 343, 1]`

所以 `sum(...) = 27 + 343 + 1 = 371 == x` 其中 `...` 代指上式

所以我们写出源代码的第一行 `f(s)` 用来判断字符串 `s` 对应的数是否是水仙花数，则 `f(str(x))` 判断整数 `x` 是否是水仙花数

使用 `filter` 函数取出 `range(100, 10 ** 6)` 即 $[100, 10^6) \cap \mathbb{Z}$ 所有的三四五六位数的整数其中的水仙花数，转换成 `list` 类型输出

源代码

```
def f(s): return int(s)==sum(map(lambda x:int(x)**len(s),s))
res=list(filter(lambda x:f(str(x)), range(100, 10**6)))
print(res)
```

结果及说明

```
[153, 370, 371, 407, 1634, 8208, 9474, 54748, 92727, 93084, 548834]
```

结果表明：

三至六位数的水仙花数有
153，370，371，407，1634，8208，9474，54748，92727，93084，548834

其中三位数的是：153，370，371，407，四位数的是：1634，8208，9474，五位数的是：54748，92727，93084，六位数的是：548834

2. 计算 $\sin x$ 的值

问题重述

已知 $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$， 若 $x = \frac{2}{5}\pi$，按此公式计算 $\sin x$ 的值，并精确到小数点后 5 位。

实现思想

迭代法求解

采用尾递归实现，函数 `g(res, x, z, j)` 表示求的目标是 $\sin x$，当前计算到的值为 `res`，下一项 $\frac{(-1)^{i-1}x^{2i-1}}{(2i-1)!}$ 的值是 `z`，而 `j` 则存储 $2i$

若下一项的绝对值 $|z| < 10^{-6}$ 则代表我们至少已经精确到了五位小数（甚至是六位，为了保险起见使用 `1e-6` 而非 `1e-5`），即可返回 `res`，否则继续计算下一项，$z \leftarrow \frac{-zx^2}{j(j+1)}$，$j \leftarrow j+2$，即调用 `g(res+z, x, -z*x*x/j/(j+1), j+2)`

函数 `f(x)` 表示计算 $\sin x$ 精确到五位小数，即调用 `g(x, x, -x**3/6, 4)` 表示第一项算完后的状态；输出利用 `"%.5f"%...` 保留五位小数

源代码

```
import math
def g(res, x, z, j):
    return res if abs(z)<1e-6 else g(res+z, x, -z*x*x/j/(j+1), j+2)
def f(x): return g(x, x, -x**3/6, 4)
print("%.5f"%f(2*math.pi/5))
```

结果及说明

```
0.95106
```

结果表明：

$\sin\dfrac{2}{5}\pi$ 精确到五位小数的值为 0.95106

3. 纸张折叠问题

问题重述

假设有一张无限大的纸可以任意地折叠，其厚度为 0.104 毫米，那么要折叠多少次可以超过珠穆朗玛峰的高度？如果能折叠 100 次，那么将会有多厚？能否冲出银河系？

实现思想

设 d 为纸张的厚度，则每一次折叠会使 $d \leftarrow 2d$，所以折叠 n 次以后的厚度为 $2^n d$

设珠穆朗玛峰的高度 h，则折叠 n 次超过珠穆朗玛峰高度即

$$2^n d > h \implies n > \log_2\left(\frac{h}{d}\right) \xRightarrow{n\in\mathbb{N}} n \geq \left\lfloor \log_2\left(\frac{h}{d}\right) + 1 \right\rfloor$$

所以最少需要 $\left\lfloor \log_2\left(\dfrac{h}{d}\right) + 1 \right\rfloor$ 次折叠

源代码

```
import math
h,d=8844.43,0.104*1e-3
print(math.floor(1+math.log2(h/d)))
print("%.5e"%(d*2**100))
```

结果及说明

```
27
1.31836e+26
```

结果表明：

1. 折叠 27 的纸厚度超过珠穆朗玛峰高度
2. 折叠 100 次的纸厚度约为 $1.31836\times10^{26}\ \mathrm{m}$
3. 而虽然银河系的直径没有确切值（不同的来源给出的数值不同），但是基本可以确定不超过 $5\times10^{6}\ \mathrm{ly}\approx4.730\times10^{22}\ \mathrm{m}$，所以折叠 100 次的纸冲出了银河系