1.

(1)

设 $a \in \mathrm{Dom}\ f$ 说明存在 $x, y \in \mathbb{R},\ 0 \leq y < 2\pi$ 满足 $(a, x + y\mathrm{i}) \in f$ 所以 $a = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ 因为 $e^x > 0$ 所以 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 故 $\mathrm{Dom}\ f \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

设 $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 设 $b = x + y\mathrm{i}$ 因为 $x^2 + y^2 > 0$ 令 $s = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$

则

$$b' = \frac{b}{e^s} = x' + y'\mathrm{i}$$

其中 $x'^2 + y'^2 = 1$

令

$$t = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x' = 0, y' = 1 \\ \dfrac{3\pi}{2} & x' = 0, y' = -1 \\ \arctan\dfrac{y'}{x'} & x' > 0, y' \geq 0 \\ \arctan\dfrac{y'}{x'} + \pi & x' < 0 \\ \arctan\dfrac{y'}{x'} + 2\pi & x' > 0, y' < 0 \end{cases}$$

则 $0 \leq t < 2\pi$ 并且 $b = e^s(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$ 故 $(b, s + t\mathrm{i}) \in f$ 所以 $b \in \mathrm{Dom}\ f$ 故 $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \mathrm{Dom}\ f$

综上 $\mathrm{Dom}\ f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

(2)

由 (1) 可知

设 $z = x + y\mathrm{i}$

则 $f(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + t\mathrm{i}$

其中

$$t = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & x = 0, y < 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} & x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & x < 0 \\ \arctan\dfrac{y}{x} + 2\pi & x > 0, y < 0 \end{cases}$$

2.

由 $g(f(x))=x,\quad \forall x\in A$ 可知 $(y,x)\in g,\quad \forall (x,y)\in f$ 同理 $(x,y)\in f,\quad \forall (y,x)\in g$ 故 $(x,y)\in f\Leftrightarrow (y,x)\in g$

设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in f$ 则 $(y_1,x_1),(y_2,x_2)\in g$ 由 g 为映射可知若 $y_1=y_2$ 则 $x_1=x_2$ 故 f 为单射

设 $a\in \mathrm{Rg}\ f$ 则存在 a' 使得 $(a',a)\in f$ 可得 $(a,a')\in g$ 这样 $a\in \mathrm{Dom}\ g=B$ 故 $\mathrm{Rg}\ f\subset B$

设 $b\in B$ 则 $f(g(b))=b$ 可得 $b\in \mathrm{Rg}\ f$ 故 $B\subset \mathrm{Rg}\ f$

因此 $B=\mathrm{Rg}\ f$ 所以 f 是满射，又 f 是单射，所以 f 是双射

$(a,b)\in g\Leftrightarrow (b,a)\in f\Leftrightarrow (a,b)\in f^{-1}$ 故 $f^{-1}=g$