令 $f(x)=x\ln x-x$

则 $b\ln a-a\ln b=a-b\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$

可知 $f'(x)=\ln x$

$f'(x)>0,\ \forall x\in(1,+\infty)$ 所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增

$f'(x)<0,\ \forall x\in(0,1)$ 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减

又 $a\neq b$ 故 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 一个小于 1 一个大于 1

不妨设 $\frac{1}{a}<1$ 且 $\frac{1}{b}>1$

令 $g(x)=f(x)-f(2-x),\quad x\in(0,1]$

$g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln\left(-(x-1)^2+1\right)<\ln 1=0,\quad \forall x\in(0,1)$

又有 $g(1)=0$

所以 $g(x)>0,\quad \forall x\in(0,1)$

故 $g\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{a}\right)-f\left(2-\frac{1}{a}\right)>0\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)>f\left(2-\frac{1}{a}\right)$

而 $\frac{1}{b},2-\frac{1}{a}\in(1,+\infty)$

所以 $\frac{1}{b}>2-\frac{1}{a}$ 即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$