反证,假设 f 在 x=0 点有极限,设 f 在 x=0 的极限是 t

设
$$a_n=rac{1}{2n\pi},\; n=1,2,\ldots,\; a_n\in \mathbb{R}\setminus\{0\},\;\; 则\; a_n o 0$$

所以
$$f(a_n)
ightarrow t$$
,而 $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$,所以 $t=0$

设
$$b_n=rac{1}{2n\pi+rac{\pi}{2}},\; n=1,2,\ldots,\; b_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
,则 $b_n o 0$

所以
$$f(b_n)
ightarrow t$$
,而 $f(b_n) = \sin\left(2n\pi + rac{\pi}{2}
ight) = 1$,所以 $t = 1$,矛盾

综上, $f \propto x = 0$ 点没有极限