math

MATH-1

$f : I \to \mathbb{R}$，I 是个区间，$x_0 \in I$

f 在 x_0 点的导数就是 f 在 x_0 点的增长率

设 $x \in I, x \neq x_0$，当 $x \to x_0$ 时，

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to a$$

定义1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间， $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$，如果 $\exists a \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a$$

称 f 在 x_0 点可导，称 a 为 f 在 x_0 点的导数，记为 $a = f'(x_0)$

如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t.

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ |x-x_0| < \delta$$

称 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 x_0 点的极限是 a，记为 $a = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$x = x_0 + h$ 代换

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

例

- $f(x) = kx + b$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = k$
- $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}, f'(x_0) = 2x_0$

曲线的方程

设 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^2$ 是曲线，f 称为 γ 的方程

习惯上说曲线 f 实际上指的是 f 的图像

设 $f: I \to \mathbb{R}$ 在 $x_0 \in I$ 可导，当 x 在 x_0 附近时，

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \approx f'(x_0)$$

则

$$f(x) \approx f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

切线：$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$f: I \to \mathbb{R}$ 如果 $\forall x \in I$，f 在 x 点可导，称 f 可导

$f': I \to \mathbb{R}$，f 的导函数（导数）

如果 f' 可导，称 f 二阶可导，$(f')' = f''$ 叫 f 的二阶导

f 的 n 阶导 $f^{(n)}$

位移 $s(t)$，速度 $v(t)$，加速度 $a(t)$

$v(t) = s'(t),\ a(t) = v'(t) = s''(t)$

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$

$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$

$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{1}{2}(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$

$f(x) = \ln(2x^2 - x - 1) = \ln(2x+1) + \ln(x-1)$

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{2^n}{(2x+1)^n} + \frac{1}{(x-1)^n}\right)$

- $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g',\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $(fg)' = f'g + g'f$
- $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$

得到

- $f'g = -fg' + (fg)'$ 分部求导公式
- 设 φ, ψ 互为反函数，φ, ψ 可导，$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(\psi(x))}$

求导公式

- $(c)' = 0$
- $(x^a)' = ax^{a-1}$

- $(e^x)' = e^x,\ (a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \sec^2 x,\ (\cot x)' = -\csc^2 x$
- $(\sec x)' = \sec x \tan x,\ (\csc x)' = -\csc x \cot x$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ (\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

定义 $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{(\ln x)})' = x' \iff x(\ln x)' = 1$

MATH-2

三角函数求导

$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$

$\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} = (\cos x)' + \mathrm{i}(\sin x)' \implies (\cos x)' = -\sin x,\ (\sin x)' = \cos x$

反三角函数求导

$\sin(\arcsin x) = x \implies \cos(\arcsin x)(\arcsin x)' = 1 \implies (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

arcsin 在 $\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}$ 不可导

$\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \implies (\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0$

$\tan(\arctan x) = x \implies (\arctan x)' = \cos^2(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$

常见切线

- $y = e^x$ 在 $(0,1)$：$y = x + 1$
- $y = \ln x$ 在 $(1,0)$：$y = x - 1$

- $y=\sin x$ 在 $(0,0)$：$y=x$
- $y=\tan x$ 在 $(0,0)$：$y=x$
- $e^x \geq x+1$
- $\ln x \leq x-1$
- $\sin x \leq x,\ x \geq 0$
- $\tan x \geq x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

设 $\delta > 0$ 则存在 $C > 0$, s.t.

$\ln x \leq Cx^{\delta}$, $\forall x > 0$

王旭琪还是太强了

证：$\ln x = \frac{1}{\delta}\ln x^{\delta} \leq \frac{1}{\delta}(x^{\delta}-1) \leq \frac{1}{\delta}x^{\delta}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\delta}} = 0$

证：$0 < \frac{\ln x}{x^{\delta}} \leq \frac{\frac{2}{\delta}x^{\delta/2}}{x^{\delta}} = \frac{2}{\delta}x^{-\delta/2}$

$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t} = 0$

- $y=e^x$ 过原点的切线：$y=ex$
- $y=\ln x$ 过原点的切线：$y=\frac{x}{e}$

存在 $M > 0$, s.t.

$\ln x \leq x^{\delta}$, $\forall x \geq M$

证：$\ln x \leq \frac{2}{\delta}x^{\delta/2} \leq x^{\delta}$, $\forall x \geq e^{2/\delta \ln(2/\delta)}$

- $e^x \geq ex$
- $\ln x \leq \frac{x}{e}$

命题1

设 $I \subset \mathbb{R}$ 为区间，$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

如果 f 在 x_0 点可导，则 f 在 x_0 点连续

证明

因为 f 在 x_0 处可导，$\exists \delta_0 > 0$, s.t.

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right| < 1, \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x-x_0| < \delta_0$$

则

$$|f(x)-f(x_0)| < |x-x_0|(1+|f'(x_0)|), \quad \forall x \in I, |x-x_0| < \delta_0$$

设 $\varepsilon > 0$ 令

$$\delta = \min\{\varepsilon, \delta_0\}$$

则当 $x \in I, |x-x_0| < \delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)| \le (1+|f'(x_0)|)\delta \le (1+|f'(x_0)|)\varepsilon$$

所以连续

陈禹霖还是太强了👍

MATH-3

命题1

设 $f:(a,b) \to \mathbb{R},\ c \in (a,b),\ f(c) = \max f$

如果 f 在 c 点可导，则 $f'(c) = 0$

证明

设 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, s.t.

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a,b),\ 0 < |x-c| < \delta$$

令 $\sigma = \min\{c-a, b-c, \delta\}$

则当 $0 < |x-c| < \sigma$

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < \varepsilon, \quad \forall 0 < |x-c| < \sigma$$

由上式

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-\varepsilon<f'(c)<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}+\varepsilon,\quad \forall 0<|x-c|<\sigma$$

令 $x=c-\dfrac{\sigma}{2}$，得到 $-\varepsilon<f'(c)$

令 $x=c+\dfrac{\sigma}{2}$，得到 $f'(c)<\varepsilon$

所以得到

$$-\varepsilon<f'(c)<\varepsilon,\quad \forall \varepsilon>0$$

所以 $f'(c)=0$

推论1

设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$，$c\in(a,b)$，$c=\min f$

如果 f 在 c 点可导，则 $f'(c)=0$

命题2

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，f 在 (a,b) 上可导，

如果 $f(a)=f(b)=0$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t. $f'(\xi)=0$

证明

- $f\equiv 0$，$\xi=\dfrac{a+b}{2}$，$f'(\xi)=0$
- $\max f>0$，设 $x_0\in[a,b]$，$f(x_0)=\max f$，$x_0\in(a,b)$，$f'(x_0)=0$
- $\min f<0$，设 $x_0=[a,b]$，$f(x_0)=\min f$，$x_0\in(a,b)$，$f'(x_0)=0$

定理1（微分中值定理）

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，f 在 (a,b) 上可导，则 $\exists\xi\in(a,b)$，s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

证明

构造 $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x-\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

$g(a)=g(b)=0$

则 $\exists \xi \in (a,b)$, s.t. $g'(\xi)=0 \iff f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

定义

设 I 为区间，$f: I \to \mathbb{R}$，如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$，都有

$$f(x_1) \le f(x_2)$$

称 f 为单调增，如果 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$，都有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

称 f 严格单调增，类似可定义 f 单调减，f 严格单调减

命题3

设 I 为区间，$f: I \to \mathbb{R}$ 可导，如果

$$f'(x) \ge 0, \quad \forall x \in I$$

则 f 单调增，如果

$$f'(x) > 0, \quad \forall x \in I$$

则 f 严格单调增

MATH-4

定义

设 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ 如果 $\exists 0 < \varepsilon < \min\{b-x_0, x_0-a\}$, s.t.

$$f(x) \le f(x_0), \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

称 x_0 是 f 的极大值点，称 $f(x_0)$ 为 f 的极大值；如果 $\exists 0 < \varepsilon < \min\{b-x_0, x_0-a\}$, s.t.

$$f(x) < f(x_0), \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \setminus \{x_0\}$$

称 x_0 是 f 的严格极大值点，称 $f(x_0)$ 为 f 的严格极大值

三次函数 $Q(x)=ax^3+bx^2+cx+d, \quad a \ne 0$

$Q'(x)=3ax^2+2bx+c$

$\Delta = 4b^2-12ac$

下面用 $\nearrow$ 表示严格单调增，$\searrow$ 表示严格单调减

$\Delta < 0$

- $a > 0,\ Q(x) \nearrow$
- $a < 0,\ Q(x) \searrow$

$\Delta = 0$

- $a > 0,\ Q(x) \nearrow$
- $a < 0,\ Q(x) \searrow$

$\Delta > 0$

- $a > 0,\ (-\infty, x_1) \nearrow,\ (x_1, x_2) \searrow,\ (x_2, +\infty) \nearrow$
- $a < 0,\ (-\infty, x_1) \searrow,\ (x_1, x_2) \nearrow,\ (x_2, +\infty) \searrow$

对称中心 $\left(-\dfrac{b}{3a}, Q\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$

证明

$$Q(x) = a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2} + d$$

陈禹霖还是太有实力了

怎么这么王旭琪呢

唐完了

陈禹霖：王旭琪：少年班数学完蛋了

MATH-5

定义1

设 $a_n,\ a \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots$ 如果 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \text{s.t.}$

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

称 a 是 $\{a_n\}$ 的极限

当 n 充分大时，a_n 与 a 的误差很小，而且要多小有多小

例 $a_1 = 0.3,\ a_2 = 0.33,\ a_3 = 0.333, \ldots$ 的极限是 $\dfrac{1}{3}$

存在性，一个数列不一定有极限

唯一性

命题1

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \dots,\ a, b \in \mathbb{R}$，如果 a, b 都是 a_n 的极限，则 $a = b$

证明

设 $\varepsilon > 0$，则 $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, s.t.

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_1$$

$$|a_n - b| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_2$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$

则

$$|a - b| \leq |a_N - a| + |a_N - b| < 2\varepsilon$$

这样我们就证明了

$$|a - b| \leq 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

所以 $a = b$

定义2

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, 3 \dots$，如果 $\exists a \in \mathbb{R}$, s.t. a 是 $\{a_n\}$ 的极限

称 $\{a_n\}$ 收敛，否则称 $\{a_n\}$ 发散

设 $\{a_n\}$ 收敛，用 $\lim_{n \to +\infty} a_n$ 表示 $\{a_n\}$ 的极限

如果 $a = \lim_{n \to +\infty} a_n$，记 $a_n \to a$

命题2

设 $a_n, a \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \dots,\ C > 0$，则 $a_n \to a$ 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*$, s.t.

$$|a_n - a| \leq C\varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

定义3

设 $a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, 3 \dots$ 如果 $\exists M \in \mathbb{R}$, s.t.

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

称 $\{a_n\}$ 有界

命题3

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ 如果 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界

MATH-6

命题1

设 $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续，$a_n, a \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ 如果 $a_n \to a$，则 $f(a_n) \to f(a)$

定理

设 $f : [a. b] \to \mathbb{R}$ 连续，f 在 (a, b) 上可导，如果 $f(a) = f(b) = 0$

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

定理（柯西中值定理）

设 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ 连续，在 (a, b) 上可导，且

$$g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明

不妨设 $f(b) \neq f(a)$,

$$h(x) = \frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)} - \frac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}$$

对 h 使用罗尔中值定理

命题

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$，$\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界

定义

设 $a_n \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \ldots$，设 $n_k \in \mathbb{N}^*$，$k = 1, 2, \ldots$

$$n_{k+1} > n_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

称 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列

设 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列，则 $n_N \geq N$，$N \in \mathbb{N}^*$

命题

设 $a_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，$\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子列，如果 $a_n \to a$，则 $a_{n_k} \to a$

设 $a_n = (-1)^n$，$n = 1, 2, \ldots$

证明: $\{a_n\}$ 不收敛

$a_{2n} \to 1$，$a_{2n-1} \to -1$，所以 $\{a_n\}$ 不收敛

命题

设 $a_n, b_n, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，$a_n \to a, b_n \to b$ 则

- $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$
- $a_n b_n \to ab$
- 如果 $b, b_n \neq 0, \forall n = 1, 2, \ldots$ 则 $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$

MATH-7

设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，$\quad b_n, b \neq 0$，$n = 1, 2, \ldots$，

如果 $a_n \to a, b_n \to b$ 则

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

命题1

设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，$a_n \to a, b_n \to b$ 如果 $a > b$

则 $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$，s.t. $\forall n \geq N_0$，$a_n > b_n$

命题2

设 $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，$a_n \to a, b_n \to b$ 如果 $\exists N_0 \in \mathbb{N}^*$，s.t.

$$a_n \le b_n, \quad \forall n \ge n_0$$

则 $a \le b$

命题3

设 $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*,$ s.t.

$$a_n \le b_n \le c_n, \quad \forall n \ge N_0$$

如果 $a_n, c_n \to a \in \mathbb{R}$

则 $b_n \to a$

$$\frac{1 + \dfrac{1}{n}}{2 + \dfrac{2 \ln n}{n}} = \frac{n^2 + n}{2n^2 + 2n \ln n} \le a_n \le \frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1 + \dfrac{1}{n}}{2}$$

定理1

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots,$ 如果 $\{a_n\}$ 单调增，$\{a_n\}$ 有界，则

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup a_n$$

其中 $\sup a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

证明

记 $M = \sup a_n$ 设 $\varepsilon > 0$ 则 $\exists N \in \mathbb{N}^*,$ s.t.

$$a_N > M - \varepsilon$$

则当 $n \ge N$ 时，$|a_n - M| < \varepsilon$

推论

单调减、有界，极限是下确界

MATH-8

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots, \{a_n\}$ 有界，记

$$b_n = \sup_{k \ge n} a_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$c_n = \inf_{k \ge n} a_k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

其中

$$\sup_{k\ge n} a_k=\sup\{a_n,a_{n+1},\ldots\}$$

$$\inf_{k\ge n} a_k=\inf\{a_n,a_{n+1},\ldots\}$$

$\{b_n\},\{c_n\}$ 有界，$\{b_n\}\searrow$，$\{c_n\}\nearrow$，则 $\{b_n\},\{c_n\}$ 有极限

$$\forall n=1,2,\ldots,\ c_n\le b_n \implies \lim_{n\to+\infty} c_n\le \lim_{n\to+\infty} b_n$$

其中 $\lim_{n\to+\infty} c_n$ 叫 $\{a_n\}$ 的下极限，$\lim_{n\to+\infty} b_n$ 叫 $\{a_n\}$ 的上极限

定义

设 $a_n\in\mathbb{R},\ n=1,2,\ldots,$ 设 $\{a_n\}$ 有界，记

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\ge n} a_k,\quad \varliminf_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\inf_{k\ge n} a_k$$

分别称 $\varlimsup_{n\to+\infty}a_n,\ \varliminf_{n\to+\infty}a_n$ 为 $\{a_n\}$ 的上下极限

定理1

设 $a_n\in\mathbb{R},\ n=1,2,\ldots,$ 设 $\{a_n\}$ 有界则 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当

$$\varlimsup_{n\to+\infty} a_n=\varliminf_{n\to+\infty} a_n$$

并且当 $\{a_n\}$ 收敛时，

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty} a_n=\varlimsup_{n\to+\infty} a_n$$

定义2

设 $a_n\in\mathbb{R},\ n=1,2,\ldots,$ 如果 $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*,$ s.t.

$$|a_n-a_m|<\varepsilon,\quad \forall n,m\ge N$$

另一种形式

$$|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon,\quad \forall n\ge N,\ p=1,2,\ldots$$

称 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列

定理2（Cauchy 收敛原理）

设 $a_n\in\mathbb{R},\ n=1,2,\ldots,$ 则 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列

MATH-9

数列趋于无穷大

定义

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots$ 如果 $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ s.t.

$$a_n \geq M, \quad \forall n \geq N$$

称当 $n \to +\infty$ 时，$a_n \to +\infty$ 记为 $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

如果 $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ s.t.

$$a_n \leq -M, \quad \forall n \geq N$$

称当 $n \to +\infty$ 时，$a_n \to -\infty$ 记为 $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

趋于无穷大时发散的

$a_n \to +\infty \iff -a_n \to -\infty$

例 设 $b_n \to +\infty$ 且 $a_n \geq b_n, \forall n \geq N_0$，所以 $a_n \to +\infty$

设 $n \in \mathbb{N}^*$, 则

$$e^x \geq \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \geq 0$$

数学归纳法

$f(x) = e^x - \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)!}$

$f'(x) = e^x - \dfrac{x^m}{m!}$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n^\alpha} = +\infty, \quad \alpha > 0$

取 $m = [\alpha] + 2$

$$e^n \geq \frac{n^m}{m!} \implies \frac{e^n}{n^\alpha} \geq \frac{n^{m-\alpha}}{m!}$$

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^\alpha}{\ln n} = +\infty, \quad \alpha > 0$

级数

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$，和式

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

称为~~（奇数）~~级数

如果 $a_n \geq 0$, $n=1,2,\ldots$，称为正项（非负项）级数

记为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

记

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

S_n：前 n 项和（部分和），如果

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = A \in [-\infty, +\infty]$$

称 A 为级数的和，$A = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

正项级数的和一定能算出来，要么是实数，要么是正无穷

设 $p>1$ 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p} < +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} < 1 + \int_1^{+\infty} n^{-p} \mathrm{d}n = 1 + \left(0 - \frac{1}{1-p}\right) = 1 + \frac{1}{p-1}$$

p 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$，如果 $p>1$ 有限，$0<p\leq 1$ 正无穷

如果

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = A \in \mathbb{R}$$

称 $\sum a_n$ 收敛，反之称 $\sum a_n$ 发散

命题1

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n=1,2,\ldots$ 如果 $\sum a_n$ 收敛，则 $a_n \to 0$

证明

由

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

可证

$\sum_{n=0}^{+\infty} n^q$，若 $|q| \leq 1$ 则趋于 $\dfrac{1}{1-q}$，若 $|q| > 1$ 则发散

命题2

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots$ 则 $\sum a_n$ 收敛当且仅当 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \text{s.t.}$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,\ p = 1, 2, \ldots$$

如果 $\sum |a_n| < +\infty$ 称 $\sum a_n$ 绝对收敛

绝对收敛一定收敛,

收敛不一定绝对收敛

MATH-10

命题1

设 $a_n, b_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_i, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ 收敛且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

命题2

一个级数去掉有限项，加上有限项或改变有限项敛散性不变

$\{a_n\}$ 收敛 $\iff$ $\{a_{n+n_0}\}$ 收敛

命题3（加法结合律）

设 $\sum a_n$ 收敛，记

$$\begin{aligned} &b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1} \\ &b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2} \\ &\ldots \end{aligned}$$

其中 $n_1 < n_2 < \cdots$ 则 $\sum b_n$ 收敛

但是逆命题不对，例如 $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ 和 $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$

MATH-11

命题1

设 $a_n > 0,\ n = 1, 2, \dots,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$，则 $\sum a_n$ 收敛 $\iff$ $\{S_n\}$ 有界

命题2（比较判别法）

设 $a_n, b_n > 0,\ n = 1, 2, \dots$，设存在 $n_0 \in \mathbb{N}^*$, s.t. $\forall n \geq N_0,\ a_n \leq b_n$

- $\sum b_n$ 收敛 $\implies$ $\sum a_n$ 收敛
- $\sum a_n$ 发散 $\implies$ $\sum b_n$ 发散

命题3

设 $a_n, b_n > 0,\ n = 1, 2, \dots$，设

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty]$$

- 如果 $0 < l < +\infty$，则 $\sum a_n$ 收敛 $\iff$ $\sum b_n$ 收敛

证：$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.}\ \forall n \geq n_0,\ \dfrac{l}{2} \leq \dfrac{a_n}{b_n} \leq 2l$ 即 $\dfrac{lb_n}{2} \leq a_n \leq 2lb_n$

- 如果 $l = 0$，则 $\sum b_n$ 收敛 $\implies$ $\sum a_n$ 收敛，$\sum a_n$ 发散 $\implies$ $\sum b_n$ 发散

证：$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.}\ \forall n \geq n_0,\ \dfrac{a_n}{b_n} \leq 1$ 即 $a_n \leq b_n$

- 如果 $l = +\infty$，则 $\sum a_n$ 收敛 $\implies$ $\sum b_n$ 收敛，$\sum b_n$ 发散 $\implies$ $\sum a_n$ 发散

证：$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.}\ \forall n \geq n_0,\ 1 \leq \dfrac{a_n}{b_n}$ 即 $b_n \leq a_n$

命题4（比率判别法）

设 $a_n > 0,\ n = 1, 2, \dots$，设

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

- 如果 $\rho < 1$，则 $\sum a_n$ 收敛

证：

$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \text{s.t.}\ \forall n \geq n_0,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{\rho + 1}{2} = \sigma \implies \forall n \geq 1,\ a_{n_0+n} \leq \sigma^n a_{n_0} \implies \sum a_{n_0+n} \leq a_{n_0}$.

- 如果 $\rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散
- 如果 $\rho = 1$，则 $\sum a_n$ 可能收敛也可能发散

命题5（方根判别法）

设 $a_n > 0$，$n = 1, 2, \ldots$，设

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

- 如果 $\rho < 1$，则 $\sum a_n$ 收敛

证：

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \text{s.t.}\ \forall n \geq n_0,\ \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\rho + 1}{2} = \sigma \implies a_n \leq \sigma^n \implies \sum a_{n_0+n} \leq \frac{\sigma^{n_0+1}}{1 - \sigma} < +\infty$$

- 如果 $\rho > 1$，则 $\sum a_n$ 发散
- 如果 $\rho = 1$，则 $\sum a_n$ 可能收敛也可能发散

命题6

设 $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$，$f$ 非负单调减，

$$a_n = f(n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

则

$$\sum a_n < +\infty \iff \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n \leq \int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

MATH-12

命题1

设 $a_n \neq 0$，$n = 1, 2, \ldots$，如果

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho > 1$$

则 $\sum a_n$ 发散

命题2

设 $a_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，如果

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho > 1$$

则 $\sum a_n$ 发散

定义

设 $a_n > 0$，$n = 1, 2, \ldots$，称 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 为交错级数

命题3（莱布尼茨判别法）

设 $a_n > 0$，$n = 1, 2, \ldots$，如果 $\{a_n\}$ 单调减，$a_n \to 0$，则 $\sum (-1)^{n-1} a_n$ 收敛

定义

设 $a_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，如果 $\sum a_n$ 收敛，$\sum |a_n| = +\infty$，称 $\sum a_n$ 条件收敛

$a \in \mathbb{R}$

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \le 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} 0, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

称 a^+ 为正部，称 a^- 为负部，则 $a = a^+ - a^-$

命题4

设 $a_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，如果 $\sum a_n$ 条件收敛，则

$$\sum a_n^+ = +\infty, \quad \sum a_n^- = +\infty$$

证：用 $a_n^+ = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$，$a_n^- = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$ 即可

定义1

设 $a_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，设 $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ 为双射

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ 称为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的重排

命题

设 $a_n > 0$，$n = 1, 2, \ldots$ 则 $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$

证明

设 $n \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}^*$，s.t.

$$\{1,2,\ldots,n\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(N)\}$$

> N 取 $\max_{1 \le i \le n}\{\sigma^{-1}(i)\}$

$\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{N} a_{\sigma(k)} \le \sum_{k=1}^{+\infty} a_{\sigma(k)}$，$\forall n \ge 1$

则 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \le \sum_{k=1}^{+\infty} a_{\sigma(k)}$

同理 $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{\sigma(k)} \le \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$

故而 $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$

命题

设 $a_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，$\sum a_n$ 绝对收敛，则

- $\sum a_{\sigma(n)}$ 绝对收敛
- $\sum a_n = \sum a_{\sigma(n)}$

$$\sum a_n = \sum \frac{|a_n| + a_n}{2} - \sum \frac{|a_n| - a_n}{2} = \sum \frac{|a_{\sigma(n)}| + a_{\sigma(n)}}{2} - \sum \frac{|a_{\sigma(n)}| - a_{\sigma(n)}}{2} = \sum a_{\sigma(n)}$$

定理（Riemann）

设 $a_n \in \mathbb{R}$，$n = 1, 2, \ldots$，$\sum a_n$ 条件收敛，设 $s \in [-\infty, +\infty]$，则存在双射 $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$，s.t.

$$\sum a_{\sigma(n)} = s$$

MATH-13

MATH-14

MATH-15

设 $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : x_0$ 的 $\varepsilon-$邻域，ε 叫邻域半径，$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$ 去心邻域

定义1

设 $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$，如果 $\forall \varepsilon > 0$

$$A \cap ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$$

称 x_0 是 A 的聚点

例1 设 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$，$(a, b)$ 的聚点构成的集合为 $[a, b]$

例2 $\mathbb{N}^*$ 的所有聚点构成的集合是 $\varnothing$

例3 $\mathbb{Q}$ 为有理数集的所有聚点构成的集合是 $\mathbb{R}$

设 $A \subset \mathbb{R}$ 有聚点，则 A 一定为无限集

MATH-16

例 设 $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ 是 A 的聚点 $\iff \exists x_n \in A \setminus \{x_0\}$, s.t. $x_n \to x_0$

证明（$\Longrightarrow$）

$\forall n \in \mathbb{N}^*, A \cap \left(\left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \setminus \{x_0\}\right) \neq \varnothing$

设 $x_n \in A \cap \left(\left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \setminus \{x_0\}\right)$

则 $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$

并且 $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

$x_0 - \dfrac{1}{n} < x_n < x_0 + \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

所以 $x_n \to x_0$

定义1

设 $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$，如果 $\exists \varepsilon > 0$, s.t.

$$A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x_0\}$$

称 x_0 是 A 的孤立点

设 $A \subset \mathbb{R}, x_0 \in A$，则如果$x_0$ 不是 A 的孤立点，x_0 是 A 的聚点

定义2

设 $f : A \subset \mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，设 $a \in \mathbb{R}$，如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t.

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\})$$

称 a 是 f 在 x_0 点的极限

例1

设 $f(x) = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}, x > 0$，其中 $\alpha > 0$，证明 0 是 f 在 $x = 0$ 点的极限

设 $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ 则 0 是 f 在 $x = 0$ 点的极限

命题1

设 $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，如果 a, b 都是 f 在 x_0 点的极限则 $a = b$

设 f 在 x_0 点有极限，用 $\lim_{x \to x_0} f(x)$ 表示 f 在 x_0 的极限，如果 $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$,
$f(x) \to a$，当 $x \to x_0$ 时（$x \neq x_0$） 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是区间，设 $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in A$，则 f 在 x_0 点连续 $\iff f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

命题2

设 $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in A$

- 如果 x_0 是 A 的孤立点，则 f 在 x_0 点连续
- 如果 x_0 是 A 的聚点，则 f 在 x_0 点连续当且仅当 $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

命题3

设 $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$x_0$ 是 A 的聚点，$a = \lim_{x \to x_0} f(x)$

设 $x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_n \to x_0$ 则 $f(x_n) \to a$

逆命题

设 $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点

如果 $\forall x_n \in A \setminus \{x_0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_n \to x_0$ 都有 $\{f(x_n)\}$ 收敛

f 在 x_0 点是否一定有极限

MATH-17

命题1

设 $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，设 $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$

设 $x_n \in A \setminus \{x_0\}, n=1,2,\ldots,\ x_n \to x_0$ 则 $f(x_n) \to a$

命题2（Heine 归结原理）

设 $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0$ 是 A 的聚点，如果

$$\{f(x_n)\}\text{收敛},\quad \forall x_n \in A \setminus \{x_0\}, n=1,2,\ldots,\ x_n \to x_0$$

则 f 在 x_0 点有极限

证明

x_0 是 A 的聚点 $\implies \exists x_n \in A \setminus \{x_0\}, n=1,2,\ldots,\ x_n \to x_0$

由命题的假设，$\{f(n)\}$ 收敛，记 $a = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$

下面证 $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

反证法，假设 a 不是 f 在 x_0 点的极限

即 $\exists \varepsilon > 0,\ \text{s.t.}\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in A \cap ((x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}),\ \text{s.t.}\ |f(x)-a| \geq \varepsilon$

令 $\delta = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ 则

$\exists y_n \in A \cap \left(\left(x_0 - \dfrac{1}{n}, x_0 + \dfrac{1}{n}\right) \setminus \{x_0\}\right), |f(y_n)-a| \geq \varepsilon$

则 $y_n \to x_0$

由命题假设得，$\{f(y_n)\}$ 收敛，设 $f(y_n) \to b$，则 $b \neq a$

令 $z_{2n} = x_n$，$z_{2n-1} = y_n$

则 $z_n \to x_0$，由命题假设得 $\{f(z_n)\}$ 收敛，设 $f(z_n) \to c$

则 $f(z_{2n}) \to c,\ f(z_{2n-1}) \to c$ 与 $f(x_n) \to a,\ f(y_n) \to b,\ a \neq b$ 矛盾

命题3

设 $f, g: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0$ 是 A 的聚点，f, g 在 x_0 点有极限

如果 $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in A \setminus \{x_0\}$

则 $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$

命题4

设 $f,g,h: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点

$$f(x)\le g(x)\le h(x),\quad \forall x\in A\setminus\{x_0\}$$

如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=a$

则 $\lim_{x\to x_0} g(x)=a$

命题5

设 $f,g: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，f,g 在 x_0 点有极限，设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

- $\lim_{x\to x_0}(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha\lim_{x\to x_0} f(x)+\beta\lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$
- 如果 $g(x)\neq 0,\forall x\in A\setminus\{x_0\},\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ 则 $\lim_{x\to x_0}(\dfrac{f}{g})(x)=\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$

命题6

设 $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，则 f 在 x_0 点有极限 $\iff \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, s.t.

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,\quad \forall x,y\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})$$

$\implies$ 显然

$\impliedby$ 使用 Heine 归结原理

MATH-18

定义1

设 $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，如果 $\forall M>0,\exists\delta>0$, s.t.

$$f(x)>M,\quad \forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})$$

称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 趋于正无穷，记为 $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

严格来说，趋于正无穷时，f 在 x_0 点没有极限

定义2

设 $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，如果 $\forall M<0,\exists\delta>0$, s.t.

$$f(x)<M,\quad \forall x\in A\cap((x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\})$$

称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 趋于负无穷，记为 $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$$

设 $f: A\to B,\ C\subset A,\ C\neq\varnothing$ 令 $f|_C: C\to B$

$$f|_C(x) = f(x),\quad x\in C$$

称 $f|_C$ 为 f 在 C 上的限制

定义3

设 $I\subset\mathbb{R}$ 为开区间，$x_0\in I$，$f: I\to\mathbb{R}$

如果 $a = \lim_{x\to x_0} f|_{I\cap(-\infty,x_0)}(x)$， 称 a 是 f 在 x_0 点的左极限

记

$$a = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$

$$\begin{aligned} a = f(x_0^-) \iff & \\ & \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0,\ \text{s.t.} \\ & \qquad |f(x)-a|<\varepsilon,\quad \forall x\in I\cap(x_0-\delta,\delta) \end{aligned}$$

定义4

设 $I\subset\mathbb{R}$ 为开区间，$x_0\in I$，$f: I\to\mathbb{R}$

如果 $a = \lim_{x\to x_0} f|_{I\cap(x_0,+\infty)}(x)$， 称 a 是 f 在 x_0 点的右极限

记

$$a = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

命题1

设 $I\subset\mathbb{R}$ 为开区间，$f: I\to\mathbb{R}$，$x_0\in I$，下列结论等价

- f 在 x_0 点有极限
- f 在 x_0 点有左极限和右极限，且 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ 并且当 f 在 x_0 处有极限时 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0^-)$

$f: I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ 为开区间，$x_0\in I$

$$\begin{aligned} f \text{ 在 } x_0 \text{ 点连续} &\iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\iff f \text{ 在 } x_0 \text{ 点有左右极限，} f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+) \end{aligned}$$

设 f 在 x_0 点不连续

- $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 存在，$f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0)$，$x_0$ 称为可去间断点
- $f(x_0^-), f(x_0^+)$ 存在，$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$，x_0 称为跳跃间断点
- $f(x_0^-)$ 或 $f(x_0^+)$ 不存在，x_0 称本性不连续点

可去间断点和跳跃间断点称第一类不连续点

本性不连续点称为第二类不连续点

命题2（L'Hospital）

设 $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ 可导，且

$$g(x), g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

如果

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in [-\infty, +\infty]$

则 $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$

证明

定义 $f(a) = g(a) = 0$

则 f, g 在 $[a,b)$ 上连续，设 $x \in (a,b)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (a,x)$$

命题3

设 $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ 可导，且

$$g(x), g'(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a,b)$$

如果

- $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ 或 $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \in [-\infty, +\infty]$

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$

MATH-19

定义1

设 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$，设 $A\in\mathbb{R}$，如果 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\text{s.t.}$

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\quad \forall x\geq M$$

称 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$

定义2

设 $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$，如果 $\forall M>0,\exists N>0,\text{s.t.}$

$$f(x)>M,\quad \forall x\geq N$$

称 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

类似可定义 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

类似可定义 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=A,+\infty,-\infty$

设 $f,g:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, x_0 是 A 的聚点，如果 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$，称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 是一个无穷小量

$$f(x)=o(1),\quad \text{当 } x\to x_0 \text{ 时}$$

设 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$,

如果 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量

$$f(x)=o(g(x)),\quad \text{当 } x\to x_0 \text{ 时}$$

如果 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq0$, $k\in\mathbb{R}$，称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶无穷小量

如果 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的等价无穷小量

常用的等价无穷小

当 $x\to0$ 时,

$$
\begin{array}{lll}
\sin x \sim x & \tan x \sim x & \arcsin x \sim x \\
\arctan x \sim x & \ln(1+x) \sim x & e^x - 1 \sim x \\
1-\cos(x) \sim \dfrac{1}{2}x^2 & (1+x)^a - 1 \sim ax & \sqrt{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{2}x
\end{array}
$$

MATH-20

$$\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

MATH-21

设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, n 次可导，$x_0\in(a,b)$

求多项式 $P:\deg P = n$

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),\quad k=0,1,2,\dots,\quad p^{(0)}=p, f^{(0)}=f$$

待定系数

$$
\begin{aligned}
&p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n \\
&p(x_0) = c_0 = f(x_0) \\
&p'(x_0) = c_1 = f'(x_0) \\
&p''(x_0) = 2c_2 = f''(x_0) \implies c_2 = f''(x_0)/2 \\
&p'''(x_0) = 3!c_3 = f'''(x_0) \implies c_3 = f'''(x_0)/3! \\
&\cdots \\
&p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad p(x)\approx f(x), \text{在 } x_0 \text{ 点附近}
\end{aligned}
$$

定理1

设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$，n 阶可导，$n\in\mathbb{N}^*$，$x_0\in(a,b)$，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + h(x)(x-x_0)^n,\quad x\in(a,b)$$

上式称 Taylor 展式，$h(x)(x-x_0)^n$ 称为余项，Peano 余项

其中 $h:(a,b)\to\mathbb{R}$ 连续，$h(x_0)=0$,

$h(x)(x-x_0)^n = o\left(|x-x_0|^n\right)$

$n=1$ 时

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + h(x)(x-x_0) \\
h(x) &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \to 0, \quad \text{导数的定义}
\end{aligned}
$$

$n=2$ 时

$$
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left(|x-x_0|^2\right)
$$

证明

记

$$
R(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^n, \quad x \in (a,b)
$$

即证

$$
\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0
$$

R n 阶可导

$$
R^{(k)}(x_0) = 0, \quad 0 \le k \le n
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} &\overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R'(x)}{n(x-x_0)^n} \overset{\text{L'H}}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^n} \\
&\overset{\cdots}{=\!=} \lim_{x\to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!}R^{(n)}(x_0)
\end{aligned}
$$

所以

$$
h(x) = \begin{cases} \dfrac{R(x)}{(x-x_0)^n}, & x \neq x_0 \\ \\ 0, & x = x_0 \end{cases}
$$

常见泰勒展式

$x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(|x|^n\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

定理2

设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$，n 阶可导，$n\in\mathbb{N}^*$，$x_0\in(a,b)$，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x\in(a,b)$$

其中 $\xi=(1-\theta)x_0+\theta x$，$\theta\in(0,1)$，$\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ 称为 Lagrange 余项

$$\begin{aligned} &f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \\ &f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 \\ &\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5, \quad \sin x >_{0<x<\frac{\pi}{2}} x - \frac{x^3}{3!} \end{aligned}$$

$x > \sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$, $\forall x > 0$

证明

$$
\begin{aligned}
&R(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\
&R^{(k)}(x_0)=0,\quad R^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)\\
&\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{R(x)-R(x_0)}{(x-x_0)^n-(x_0-x_0)^n}=\frac{R'(\xi_1)}{n(\xi_1-x_0)^{n-1}}\\
&\qquad\quad=\frac{R''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2-x_0)^{n-2}}\\
&\qquad\quad=\dots\\
&\qquad\quad=\frac{R^{(n)}(\xi_n)}{n!}\\
&\qquad\quad=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}
\end{aligned}
$$

MATH-22

设 $a_n\in\mathbb{R},\ n=1,2,\dots,\ \{a_n\}$ 有界

$$
\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to+\infty}a_n&=\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}a_k\\
\varliminf_{n\to+\infty}a_n&=\lim_{n\to+\infty}\inf_{k\geq n}a_k
\end{aligned}
$$

上极限和下极限

设 $l>0$

$$
\begin{aligned}
&\varlimsup_{n\to+\infty}la_n=\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}la_k=l\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}a_k=l\varlimsup_{n\to+\infty}a_n\\
&\varliminf_{n\to+\infty}la_n=l\varliminf_{n\to+\infty}a_n
\end{aligned}
$$

设 $\{b_n\}$ 有界

$$
a_n\geq b_n,\quad\forall n\geq n_0
$$

得

$$
\begin{aligned}
\varlimsup_{n\to+\infty}a_n&\geq\varlimsup_{n\to+\infty}b_n\\
\varliminf_{n\to+\infty}a_n&\geq\varliminf_{n\to+\infty}b_n
\end{aligned}
$$

设 $a_n,a\in\mathbb{R},\ n=1,2,\dots,\ a_n\to a$ 令

$$
b_n=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n},\quad n=1,2,\dots,
$$

则 $b_n \to a$

设 $a_n, a \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots,\ a_n \to a$，设 $a_n, a > 0,\ n = 1, 2, \ldots,$令

$$b_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

则 $b_n \to a$

幂级数

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots,\ x_0 \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

称为以 x_0 为心的幂级数

定理（Abel 定理）

存在 $0 \le R \le +\infty$

- 如果 $|x - x_0| < R,\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 绝对收敛
- 如果 $|x - x_0| > R,\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 发散
- 如果 $|x - x_0| = R,\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 可能收敛可能发散

R 称为收敛半径。

定理1（Abel）

设 $a_n \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots,\ x_0 \in \mathbb{R}$,则

- 如果 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ 无界，则 $\forall x \neq x_0,\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 发散
- 如果 $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$，则 $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 绝对收敛
- 设 $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ 有界，$\lambda = \overline{\lim}_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$，记 $R = 1/\lambda$，则
  - 如果 $|x - x_0| < R,\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 绝对收敛
  - 如果 $|x - x_0| > R,\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 发散，证明：使用反证法证明 $a_n (x - x_0)^n \nrightarrow 0$
  - 如果 $|x - x_0| = R,\ \sum a_n (x - x_0)^n$ 可能收敛可能发散

MATH-23

定理1

设 $a_n \neq 0$，$n = 1, 2, \ldots$，如果 $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$，则 $R = \frac{1}{\lambda}$

R 是收敛半径