有 $a_1=\frac{3}{2}\neq 0$

若 $a_k\neq 0$ 则 $a_{k+1}=\frac{3(k+1)a_k}{2a_k+k}\neq 0$

归纳可得 $\forall i\in\mathbb{N}^*,a_i\neq 0$

所以

$$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}\implies\frac{a_n}{n}=\frac{3a_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}\implies\frac{n}{a_n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n-1}{a_{n-1}}$$

令 $b_n=\frac{n}{a_n}$ 则 $b_1=\frac{2}{3}$

又

$$b_n=\frac{2}{3}+\frac{b_{n-1}}{3}\implies b_n-1=\frac{b_{n-1}-1}{3}\implies b_n-1=\frac{1}{3^{n-1}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

所以 $b_n=1-\frac{1}{3^n}$ 所以 $a_n=\frac{n}{1-\frac{1}{3^n}}$

$$\prod_{i=1}^{n}a_i=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3^i}\right)}<2n!\iff\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3^i}\right)>\frac{1}{2}$$

由伯努利不等式

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3^i}\right)>1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}=1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1+\frac{1}{3^n}}{2}>\frac{1}{2}$$

即证