

反证，假设 f 在 $x = 0$ 点有极限，设 f 在 $x = 0$ 的极限是 t

设 $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $n = 1, 2, \dots$, $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 则 $a_n \rightarrow 0$

所以 $f(a_n) \rightarrow t$, 而 $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$, 所以 $t = 0$

设 $b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, $n = 1, 2, \dots$, $b_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 则 $b_n \rightarrow 0$

所以 $f(b_n) \rightarrow t$, 而 $f(b_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$, 所以 $t = 1$, 矛盾

综上, f 在 $x = 0$ 点没有极限